

*Fractales y caos: Estructura
fractal de las series
temporales. Coeficiente de
Hurst. Aplicaciones*

*Adela Salvador Alcaide.
Universidad Politécnica de Madrid.*

Introducción.

Noción de fractal.

Dimensión de gráficas de funciones.

Coefficiente de Hurts

Programa.

Aplicación a poblaciones de pájaros.

Poblaciones de plantas homocárpicas y heterocárpicas.

Aplicación a series temporales largas.

Referencias

Introducción

- Cambio de paradigma
- Fractales confeccionados con el ordenador
- Líneas de costa
- Aplicaciones de los fractales

Introducción

Cambio de paradigma

“El lenguaje de la naturaleza es matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas”

Galileo, Essays

Introducción

Cambio de paradigma

“Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el futuro como el pasado estarían presentes antes sus ojos”.

Laplace, Philosophical essays on probabilities

Introducción

Cambio de paradigma

“Incluso cuando las leyes naturales parecen no tener ningún secreto para nosotros, sólo podemos conocer la situación inicial aproximadamente... Puede ocurrir que... un pequeño error en la entrada nos produzca un enorme error en la salida. La predicción resulta imposible”.

Poincaré, Chance

Noción de fractal

Caos



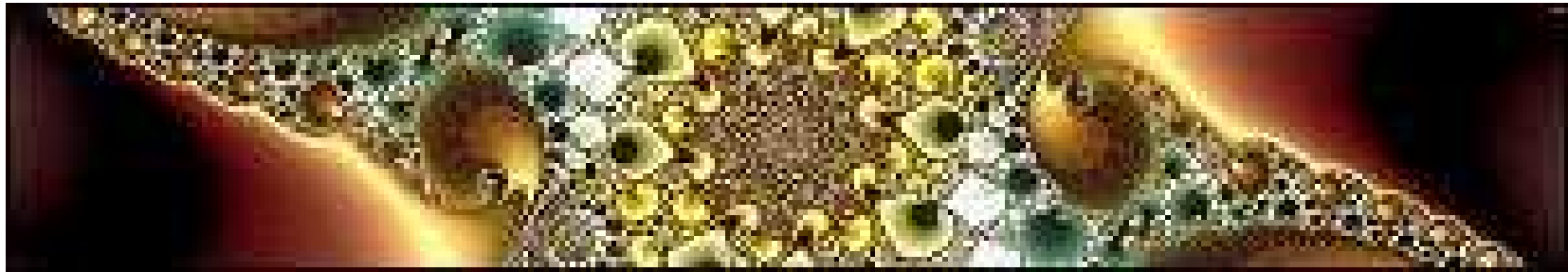
Introducción

Cambio de paradigma

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas de costa no son circunferencias, la corteza no es lisa, y la luz no viaja en línea recta”.

Mandelbrot,
The fractal geometry of nature

Introducción



Introducción

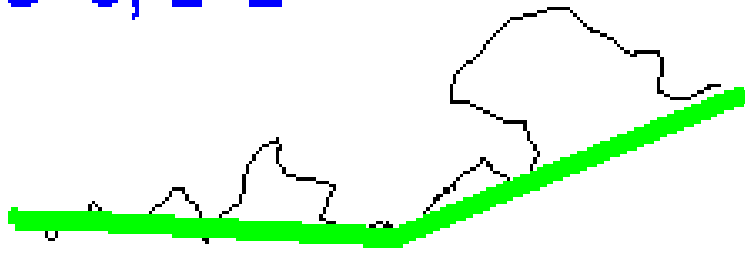
Fractales confeccionados con el ordenador



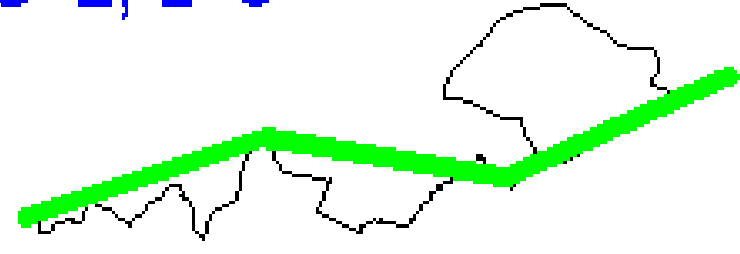
Introducción

Líneas de costa

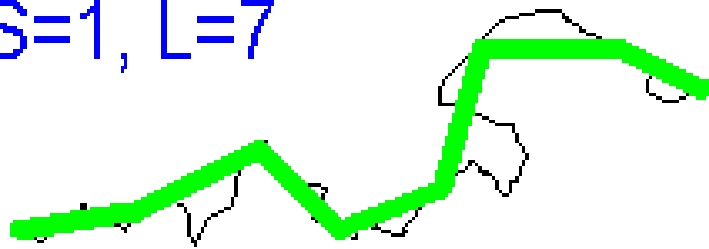
$S=3, L<2$



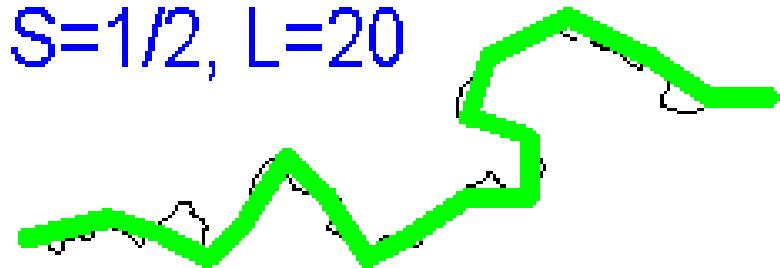
$S=2, L=3$



$S=1, L=7$



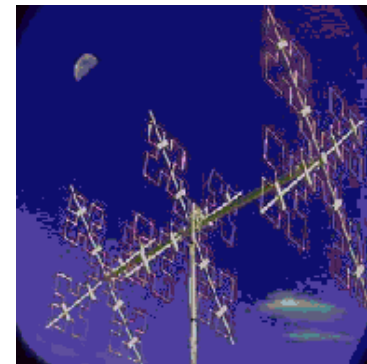
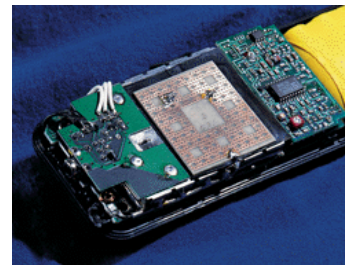
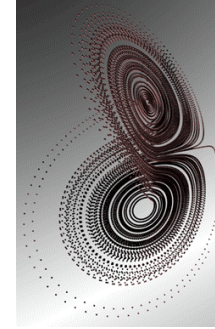
$S=1/2, L=20$



Introducción

Aplicaciones de los fractales

- ✓ Atractores de sistemas dinámico
- ✓ Superficies que separan dos medios
- ✓ Sistemas ramificados
- ✓ Porosidad
- ✓ Difusión de animales, plantas, redes de drenaje, incendio
- ✓ Terremotos y volcanes
 - ✓ Estudio de las fallas
- ✓ Series temporales
 - ✓ Bolsa
 - ✓ Extinción de especies
- ✓ Codificación de imágenes
- ✓ Antenas fractales



Noción de fractal

Noción de fractal

Noción de fractal

Precisiones sobre la noción de fractal

El nombre de “fractal” se debe a *B. Mandelbrot* en los años setenta.

Admite definiciones distintas:

- Punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas
- Dimensión fraccionaria
- Su **dimensión topológica** es distinta que su **dimensión de Hausdorff**

Noción de fractal

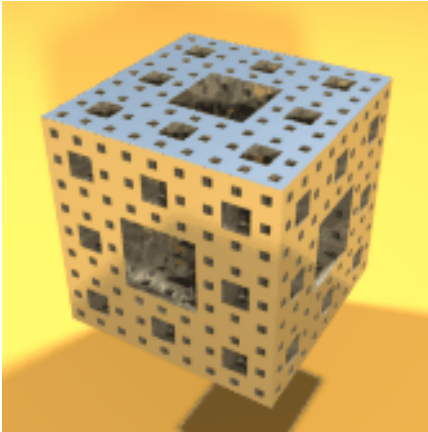
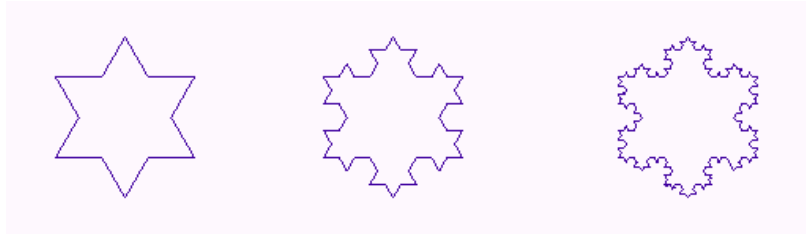
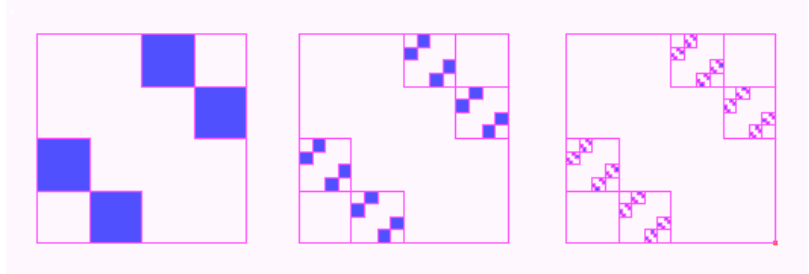
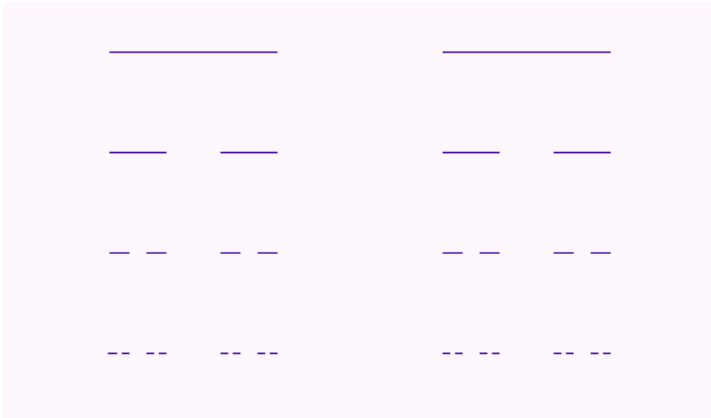
Punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas

$$\bigcup_{i=1}^n f_i(K) = K$$

J. E. Hutchinson (1981)

M. F. Barnsley (1985)

Noción de fractal



Noción de fractal

Objeto cuya dimensión de semejanza es distinta de su dimensión de Hausdorff

E. Borel y H. Lebesgue

H. Weyl

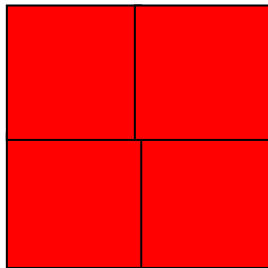
Hausdorff (1919) y Besicovitch (1920)

Noción de fractal

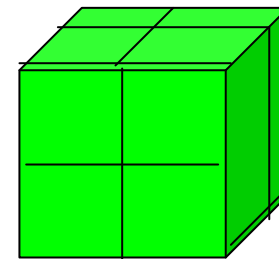
Dimensión de semejanza

$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

$$n = 2; r = 2; D = 1$$



$$n = 4; r = 2; D = 2$$



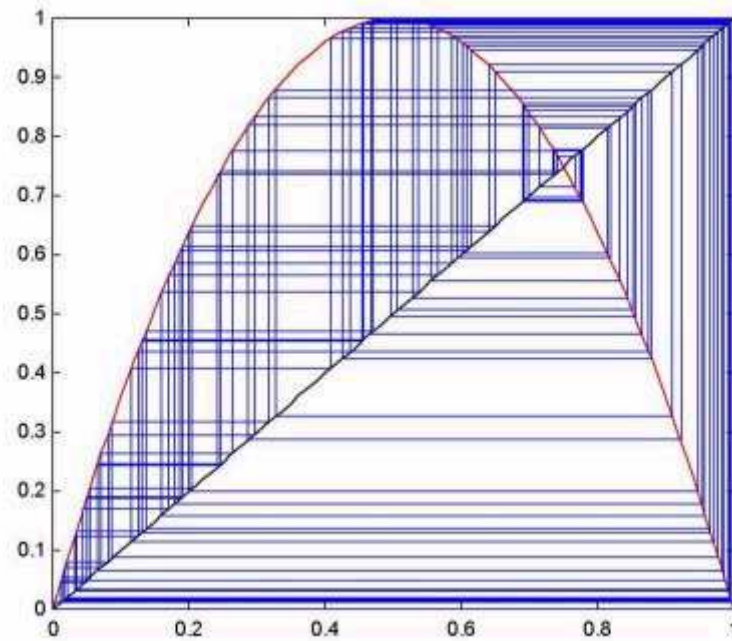
$$n = 8; r = 2; D = 3$$

Noción de fractal

Caos y fractales

- *Sistemas dinámicos continuos:*
 - *Atractor de Lorentz*
- *Sistemas dinámicos discretos*
 - *Ecuación Logística*
- *Método de Newton*
- *Conjuntos de Juliá y de Fatou*
- *Conjunto de Mandelbrot*

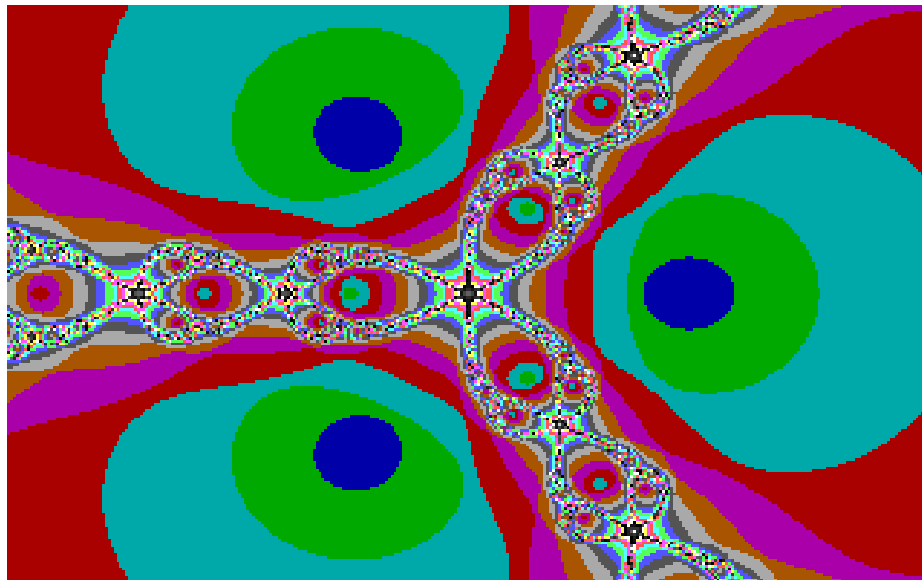
Introducción



Noción de fractal

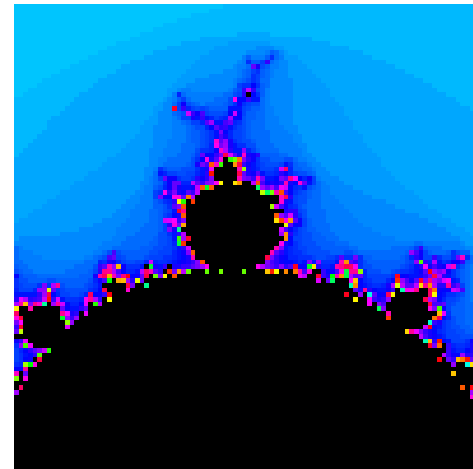
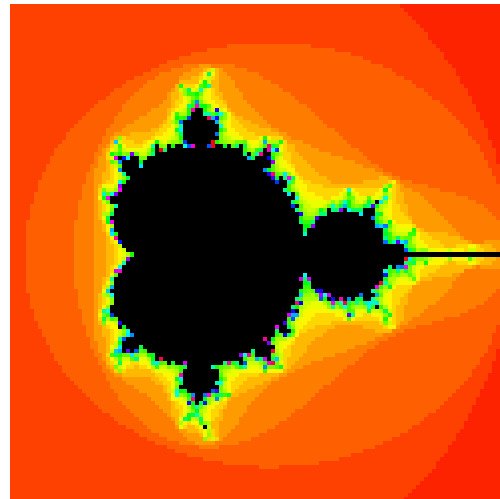
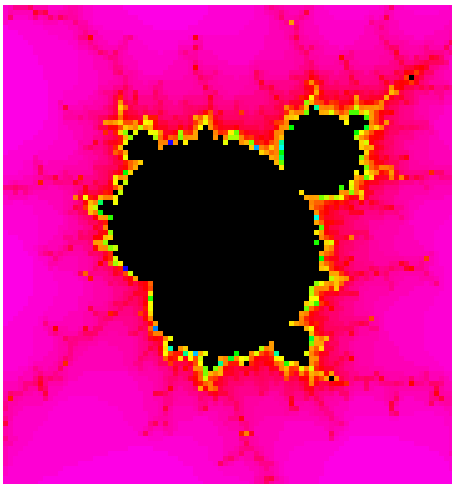
Método de Newton

$$f(z) = z^p - 1; N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$



Noción de fractal

Conjunto de Mandelbrot



Dimensión de series temporales

**DIMENSIÓN DE GRÁFICAS
DE FUNCIONES. DIMENSIÓN
DE SERIES TEMPORALES**

Dimensión de series temporales

Un proceso continuo $\{y(t)\}$ se llama un **proceso aleatorio** o un **proceso browniano** en tiempo continuo, si para cualquier paso de tiempo Δt , los incrementos $\Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t)$ son:

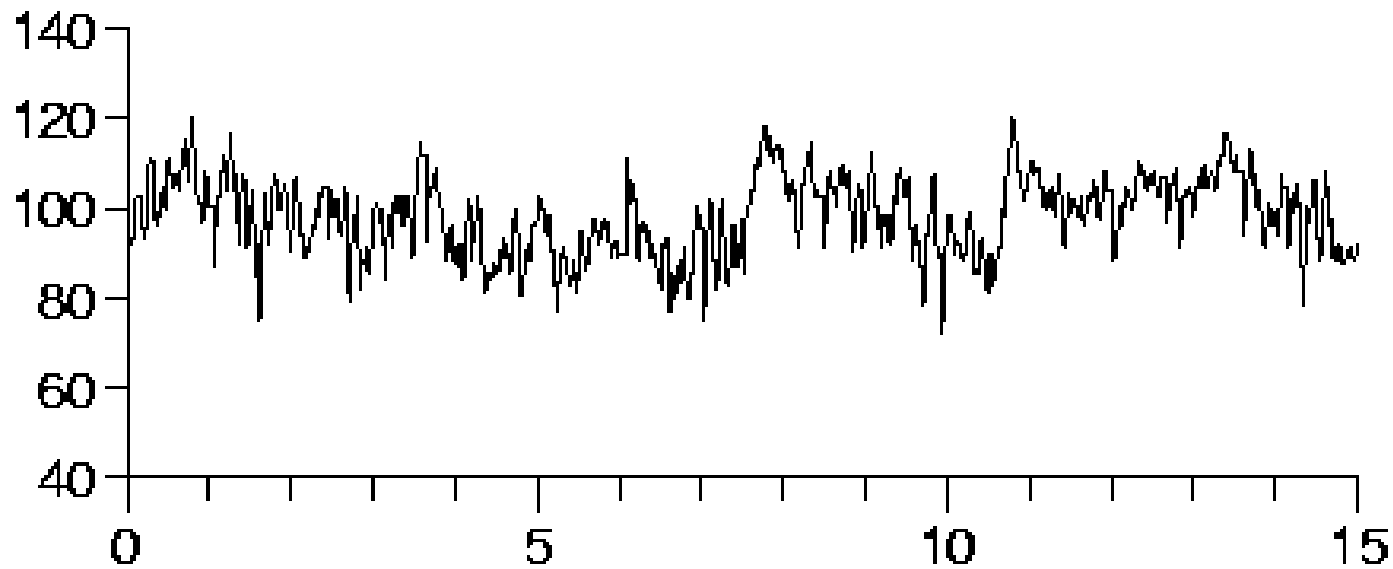
- i) Normales.
- ii) De media cero.
- iii) De varianza proporcional a Δt .

O lo que es equivalente a iii (por ii):

Los incrementos sucesivos $\Delta y(t)$ y $\Delta y(t+\Delta t)$ no están correlacionados.

Dimensión de series temporales

Proceso aleatorio o movimiento browniano



Coeficiente de Hurts

El axioma iii) que caracteriza a los procesos aleatorios puede ser generalizado con la característica de un **proceso fractal** (Mandelbrot 1977, 1982) introduciendo un parámetro adicional, el **exponente de Hurst H** ($0 < H < 1$) y reemplazando iii) por:

iii') Varianza proporcional a Δt^{2H} .

(El proceso aleatorio tiene pues $H = 1/2$).

Coeficiente de Hurts

iv) En un proceso fractal los sucesivos incrementos tienen correlación ρ , independiente del paso de tiempo h , definido por:

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \quad \left(-\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$$

Si $\rho = 0$, entonces $H = 1/2$, y es un **proceso aleatorio**.

Coeficiente de Hurts

TÉCNICAS DEL MOMENTO DE ORDEN DOS (*Hasting, 1993*)

$$E(\Delta y^2) = c \Delta t^{2H}$$

$$H = (1/\ln 4) \{ \ln E[y(t+2\Delta t) - y(t)]^2 - \ln E[y(t+\Delta t) - y(t)]^2 \}$$

Coeficiente de Hurts

TÉCNICAS DEL MOMENTO DE ORDEN DOS LOCAL

$$\rho = \frac{E([y(t + 2\Delta t) - y(t + \Delta t)][y(t + \Delta t) - y(t)])}{\sqrt{E([y(t + 2\Delta t) - y(t + \Delta t)]^2)E([y(t + \Delta t) - y(t)]^2)}}$$

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \quad \left(-\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$$

$$H = \ln(2 + 2\rho)/\ln 4$$

Coeficiente de Hurts

CRECIMIENTO DEL RANGO

Renormalización (Barnsley 1986,1988).

El **rango** es la diferencia entre el mayor y el menor valor de $y(t)$

$$y_c = \left(\frac{1}{c^H} \right) y(ct)$$

$$R(\Delta t) = c \Delta t^H$$

Para series temporales cortas, en el movimiento browniano, en tiempos discretos da $H = 0.63$ en vez del esperado $H = 0.5$.

Coeficiente de Hurts

DIMENSIÓN POR CAJAS

Si $N(L>\rho)$ denota el número de intervalos de longitud mayor que ρ entonces $N(L>\rho) = c \rho^{-B}$ y $B=D_0$

Como $D=2-H \Rightarrow B=1-H$

Coeficiente de Hurts

TÉCNICAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La **transformada de Fourier** representa la una función continua mediante los coeficientes de estas funciones.

Utilizando otras bases de funciones, "**wavelets**", también es posible "comprimir" la información usando únicamente los coeficientes.

Si la superficie es fractal, entonces las amplitudes verificarán una ley potencial que dependerá del exponente fractal de la superficie.

Programa

PROGRAMA

Se han elaborado los programas para calcular exponentes fractales de series temporales utilizando el **exponente de Hurst** por las técnicas del:

- **crecimiento del rango,**
- **del crecimiento del momento de orden dos y**
- **del momento de orden dos local.**

Programa

El programa comienza a ejecutarse. Nos da la bienvenida y a continuación presenta un menú:

- 1.- VER LA DEMOSTRACIÓN
- 2.- SELECCIONAR UN FICHERO DE DATOS
- 3.- INTRODUCIR LOS DATOS POR TECLADO
- 4.- SALIR

Programa

En las opciones 2 y 3 se entra en un nuevo menú:

- 1.- GRÁFICA DE DATOS
- 2.- GRÁFICA DE MOMENTOS DE ORDEN DOS
- 3.- GRÁFICA DE RANGOS
- 4.- EXPONENTES DE HURST
- 5.- DATOS Y GRÁFICA PARA IMPRESORA
- 6.- RESUMEN DE DATOS

Hurst y paseriformes

***DIMENSION FRACTAL Y
COEFICIENTE DE HURST EN
LOS PASERIFORMES DE
EUROPA DEL NORTE .***

Hurst y paseriformes

- El coeficiente de Hurst medido con el método del **crecimiento del rango** nos mide el crecimiento de las fluctuaciones de la población al aumentar el intervalo de tiempo Δt . Esto significa que cuanto mayor es el exponente de Hurst de una población más rápido aumenta el rango de las fluctuaciones. Si no tenemos en cuenta el valor de la constante c de la formula, para un mismo tamaño poblacional, **los valores mayores del coeficiente de Hurst se podrían asociar a un mayor peligro de extinción** (Sugihara & May 1990).

Hurst y paseriformes

- En una serie temporal con estructura fractal sería de esperar que los coeficientes de Hurst medidos por el método del crecimiento del **momento de orden dos**, del crecimiento del **rango** y del **momento de orden dos local**, fuesen parecidos. Hastings y Sugihara (1993) nos avisan de que para series temporales cortas el coeficiente de Hurst calculado por el método del crecimiento del rango nos da valores mayores a los reales.

Hurst y paseriformes

- El exponente fractal (coeficiente de Hurst) o lo que es lo mismo, el crecimiento del rango de las variaciones poblacionales puede ser debido a características intrínsecas de la especie o a características puramente ambientales.
- Si la tasa de crecimiento del rango de las variaciones de una población depende más de las características ambientales (locales) los coeficientes de Hurst de distintas poblaciones no estarán relacionados.
- En el caso de que estuviesen relacionados estaríamos ante una característica intrínseca de la especie (por lo menos en las zonas de estudio).

Hurst y paseriformes

Las **hipotesis** a testear son tres:

- 1) Comprobar si las series temporales de poblaciones de paseriformes tiene **estructura fractal**. Para hacer esta comprobación nos basamos en las tres medidas del exponente fractal por los tres métodos anteriormente citados y su comparación.
- 2) Comprobar si el coeficiente de Hurst se mantiene para una misma **especie** en distintos lugares.
- 3) Comprobar si el crecimiento del rango de las fluctuaciones de una población puede estar relacionado con el **peligro de extinción** o algún otro parámetro poblacional.

Material y métodos

- Para medir los coeficientes de Hurst de las distintas especies de paseriformes de este estudio se han utilizado los datos del Bird Census News (1992) de tres países del Norte de Europa (Finlandia (f), Suecia (sw) y Dinamarca (d)) que forman un gradiente latitudinal. En Suecia se han utilizado las series temporales de los dos métodos de censos utilizados: conteos en estaciones de escucha (swp) y parcelas censadas por el método "mapping method" (swm).

Material y métodos

- Hemos utilizado el análisis no paramétrico de Wilcoxon y regresiones lineales entre el coeficiente de Hurst obtenido por el método del crecimiento del momento de orden dos y por el método del crecimiento del rango.
- Las comparaciones entre los coeficientes de Hurst obtenidos a partir de los cuatro conjuntos de datos se han hecho con un análisis de correlación de Spearman y el análisis no paramétrico de Wilcoxon.

Hurst y paseriformes

Resultados

	Finland		Sweden "mapping method"		Sweden "point counts"		Denmark	
	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment
Anthus trivialis	0.40	0.83	0.24	0.62	0.22	0.71	0.72	0.90
Motacilla alba alba	0.41	0.71	0.63	0.81	0.39	0.64	0.81	0.93
Prunella modularis	0.28	0.68	0.36	0.75	0.59	0.80	0.50	0.73
Erithacus rubecula	0.11	0.58	0.46	0.71	0.31	0.60	0.34	0.66
Phoenicurus phoenicurus	0.17	0.38	0.22	0.66	0.13	0.53	0.30	0.70
Turdus philomelos	0.33	0.66	0.46	0.75	0.03	0.63	0.22	0.73
Turdus iliacus	0.36	0.74	0.31	0.60	0.43	0.76		
Sylvia curruca	0.13	0.47			-0.07	0.49	0.14	0.57
Sylvia borin	0.11	0.54	0.11	0.57	0.18	0.54	0.38	0.58
Phylloscopus sibilatrix	0.08	0.47	0.24	0.61	0.42	0.66	0.40	0.71
Phylloscopus collibita	0.49	0.79					0.24	0.59
Phylloscopus trochilus	0.23	0.73	0.30	0.66	0.45	0.68	0.21	0.68
Regulus regulus	0.44	0.72	-0.07	0.42	0.39	0.67	0.41	0.63
Muscicapa striata	-0.14	0.39	0.13	0.68	0.05	0.57		
Ficedula hypoleuca	0.20	0.59	0.34	0.68	0.56	0.79	0.13	0.51
Parus montanus	0.34	0.63	0.15	0.50	0.19	0.54		
Parus major	0.02	0.45	0.15	0.50	0.12	0.54	0.37	0.62
Garrulus glandarius	0.30	0.63	0.36	0.60	-0.01	0.46	0.38	0.72
Fringilla coelebs	0.45	0.75	0.36	0.60	0.29	0.47	0.85	0.90
Carduelis spinus	0.01	0.48			0.21	0.62		
Emberiza citrinella	0.13	0.61	0.62	0.71	0.28	0.72	0.28	0.56

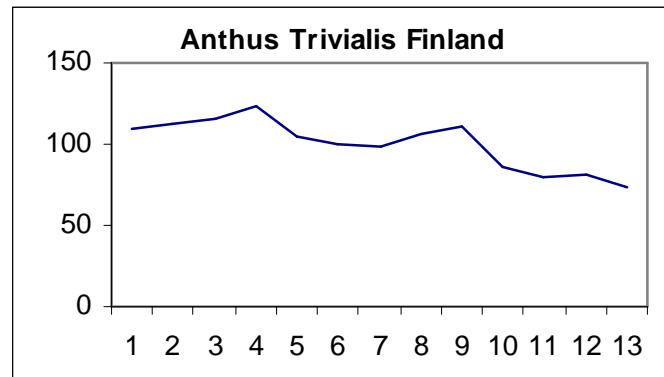
Table 1: Hurst coefficients calculated from the passerine populations time series.

Resultados

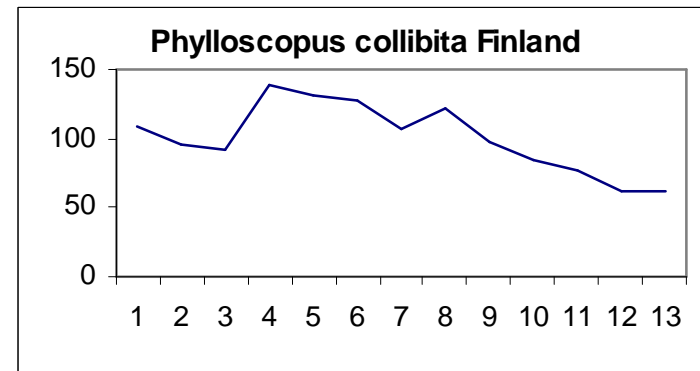
- Tres categorías: $H < 1/2$, $H = 1/2$ y $H > 1/2$.
 - 1) Si $H = 1/2$ es el movimiento Browniano, en el que los incrementos son independientes en el sentido de la teoría de probabilidad, y su correlación es cero (Peitgen *et al.*, 1992).

- 2) Para $H > 1/2$ existe una correlación positiva entre dichos incrementos, es decir, si la gráfica $y(t)$ crece para un tiempo t , entonces tiende a continuar creciendo para $t' > t$.

$$H_{2ndM} = 0,40; H_{Range} = 0,83.$$



$$H_{2ndM} = 0,49; H_{Range} = 0,79.$$



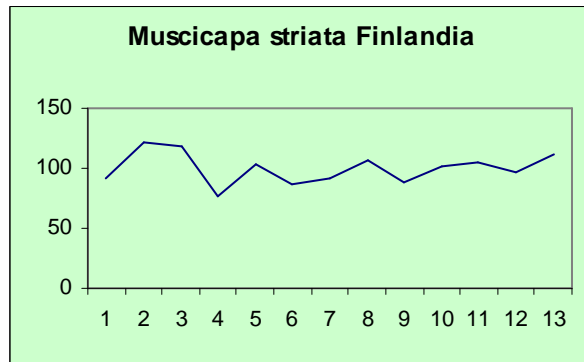
Population time series of different passerine species with Hurst coefficient $H > 1/2$.

Hurst y paseriformes

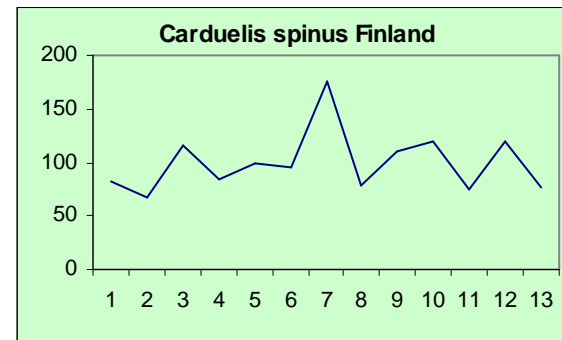
Resultados

- Para $H < 1/2$ existe una correlación negativa entre los incrementos.

$$H_{2ndM} = -0,14; H_{Range} = 0,39.$$



$$H_{2ndM} = 0,01; H_{Range} = 0,48$$



Population temporal series of different passerine species with Hurst coefficient $H < 1/2$.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

***Importancia de la intensidad
y frecuencia de las
perturbaciones en la
estrategia reproductiva:
heterocarpia vs.
homocarpia.***

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

- Se ha realizado un modelo iterativo mediante el cual se evalúan las estrategias reproductivas de las plantas en ambientes con distintas frecuencias y diferente intensidad de perturbación.
- Se comparan dos estrategias reproductivas extremas:
 - La estrategia “**homocárpica**”, en la que todas las semillas germinan en la primavera siguiente, sin dormición,
 - La estrategia “**heterocárpica**”, en la que germinan la mitad de las semillas existentes cada año.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

- Se comprueba que este tipo de heterocarpia es ventajosa en ambientes con perturbaciones fuertes, como sequías de gran **intensidad**, en las que llegan a morir un porcentaje alto de la población.
- Sin embargo, la **frecuencia** con la que se producen tales perturbaciones no produce cambios en la ventaja de una estrategia sobre otra.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

El modelo

- **El territorio**
- El territorio se ha modelizado mediante una cuadrícula de $n \times n$, doblemente cilíndrica para que no tenga fronteras. Es decir, las celdas próximas a una celda del borde derecho, $(1, j)$, son además de $(1, j-1)$, $(1, j+1)$, $(2, j-1)$, $(2, j)$, $(2, j+1)$, las celdas de coordenadas: $(n, j-1)$, (n, j) y $(n, j+1)$. Con igual criterio se gestionan los bordes superior e inferior y el borde derecho. El modelo se ha implementado en un programa en C++.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

El modelo

- **Variables independientes**
- Tiempo en años, t ,
- Número de semillas esparcidas por planta: sp ,
- Número máximo de plantas por celda: mp ,
- Número de semillas iniciales, por celda, s_0 ,
- Probabilidad de que ocurra una perturbación, OP ,
- Intensidad de la perturbación, PI .

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

El modelo

- **Variables dependientes**

- $s(i, j, t)$, número de semillas que han caído en el año t en la celda (i, j) ,
- $S_{HO}(t)$, número de semillas de la población homocárpica, en cada celda, en el año t ,
- $S_{HE}(t)$, número de semillas de la población heterocárpica, en cada celda, en el año t ,
- $PA_{HO}(t)$, número de plantas adultas homocárpicas, en cada celda, en el año t ,
- $PA_{HE}(t)$, número de plantas adultas heterocárpicas, en cada celda, en el año t ,
- $H(t)$, número de huecos libres para plantas adultas, en cada celda en el año t ,
- $\alpha(t)$, probabilidad de que una semilla homocárpica se convierta en planta, en un hueco libre, en cada celda en el año t .

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

El modelo

- **Dispersión de las semillas:**
- Cada planta adulta, cada año, esparce un número fijo de semillas, sp , que en los estudios realizados, se ha supuesto pequeño, 3, 5 o 8, pues se están considerando ya aquellas semillas que mueren por una u otra causa.
- La forma de implementar como se esparcen esas semillas ha sido considerar la propia celda, de coordenadas i, j , y las ocho celdas próximas: $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i-1, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, y distribuir aleatoriamente las sp semillas entre las nueve celdas.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

El modelo

- La variable $s(i, j, t)$ se obtiene sumando todas las semillas que hayan caído en la celda (i, j) en el año t . Esta variable depende, naturalmente, del número de plantas de esa especie que haya en el año t : $PA_{HO}(t)$, $PA_{HE}(t)$, tanto en la celda (i, j) como en las celdas contiguas. Y depende también del número de semillas esparcidas por cada planta: sp . Luego $s(i, j, t) = f(sp, PA_{HO}(i, j, t), PA_{HE}(i, j, t), PA_{HO}(i-1, j-1), PA_{HO}(i-1, j), PA_{HO}(i-1, j+1), PA_{HO}(i, j-1), PA_{HO}(i, j+1), PA_{HO}(i+1, j-1), PA_{HO}(i+1, j), PA_{HO}(i+1, j+1), PA_{HE}(i-1, j-1), PA_{HE}(i-1, j), PA_{HE}(i-1, j+1), PA_{HE}(i, j-1), PA_{HE}(i, j+1), PA_{HE}(i+1, j-1), PA_{HE}(i+1, j), PA_{HE}(i+1, j+1))$.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

Sistema dinámico

- El modelo utilizado para la celda (i, j) es:
- **Inicio:**
- $S_{HO}(0) + S_{HE}(0) = s_0$,
- $PA_{HO}(0) = 0$,
- $PA_{HE}(0) = 0$,
- **Algoritmo:**
- $S_{HO}(t+1) = s(i, j, t)$,
- $S_{HE}(t+1) = s(i, j, t) + \frac{1}{2} * S_{HE}(t)$,
- $PA_{HO}(t+1) = (1-OP*(1-PI))^*(PA_{HO}(t) + \alpha(t) * H(t))$
- $PA_{HE}(t+1) = (1-OP*(1-PI))^*(PA_{HE}(t) + (1 - \alpha(t)) * H(t))$, siendo $\alpha(t) = S_{HO}(t) / (S_{HO}(t) + S_{HE}(t)/2)$, y
- $H(t) = mp - PA_{HO}(t) - PA_{HE}(t)$.

Hurst y estrategias reproductivas de plantas

Semillas, plántulas y plantas de dos especies distintas (esp 2 germinan la mitad) . Sec Hel variable, Algoritmo p

Archivo Operaciones Salir

Año Siguiente Siembra 100 años Muestra Variables

Planta Semillas Inicia

Historial
 Semillas dispers: 411 483
 Semillas: 411 600
 Plántulas: 54 166
 Plantas: 89 97

Año Pasado
 0 2 2 | 3 2 3 0 2 3 |
 0 6 1 | 4 3 2 0 1 0 |
 < ||| >

Plantas
 60 47
 68 85
 78 93
 18 27
 137 161
 89 97

Año 100

4 0 0 3 2 2	4 0 1 7 1 0	4 0 1 3 1 2	3 0 1 8
4 0 0 8 2 1	4 0 0 7 2 0	1 0 0 2 1 2	3 1 0 6
3 0 0 8 2 2	3 0 2 5 2 0	4 1 0 6 0 1	3 0 1 4
2 0 1 9 2 1	0 1 0 2 1 1	4 0 1 6 1 1	2 1 1 6
2 0 0 5 2 0	4 1 2 4 1 1	2 0 1 7 1 1	2 0 0 6
5 0 1 8 1 0	6 1 2 4 1 0	4 0 0 5 1 2	1 0 1 8
2 0 0 4 1 1	3 0 1 4 2 2	4 0 1 7 2 0	3 0 1 11
4 1 1 5 1 1	2 1 1 3 2 0	3 1 0 4 1 2	1 1 3 5
3 0 2 8 3 2	5 3 1 4 1 0	9 2 1 2 0 1	1 0 2 0

Plantas

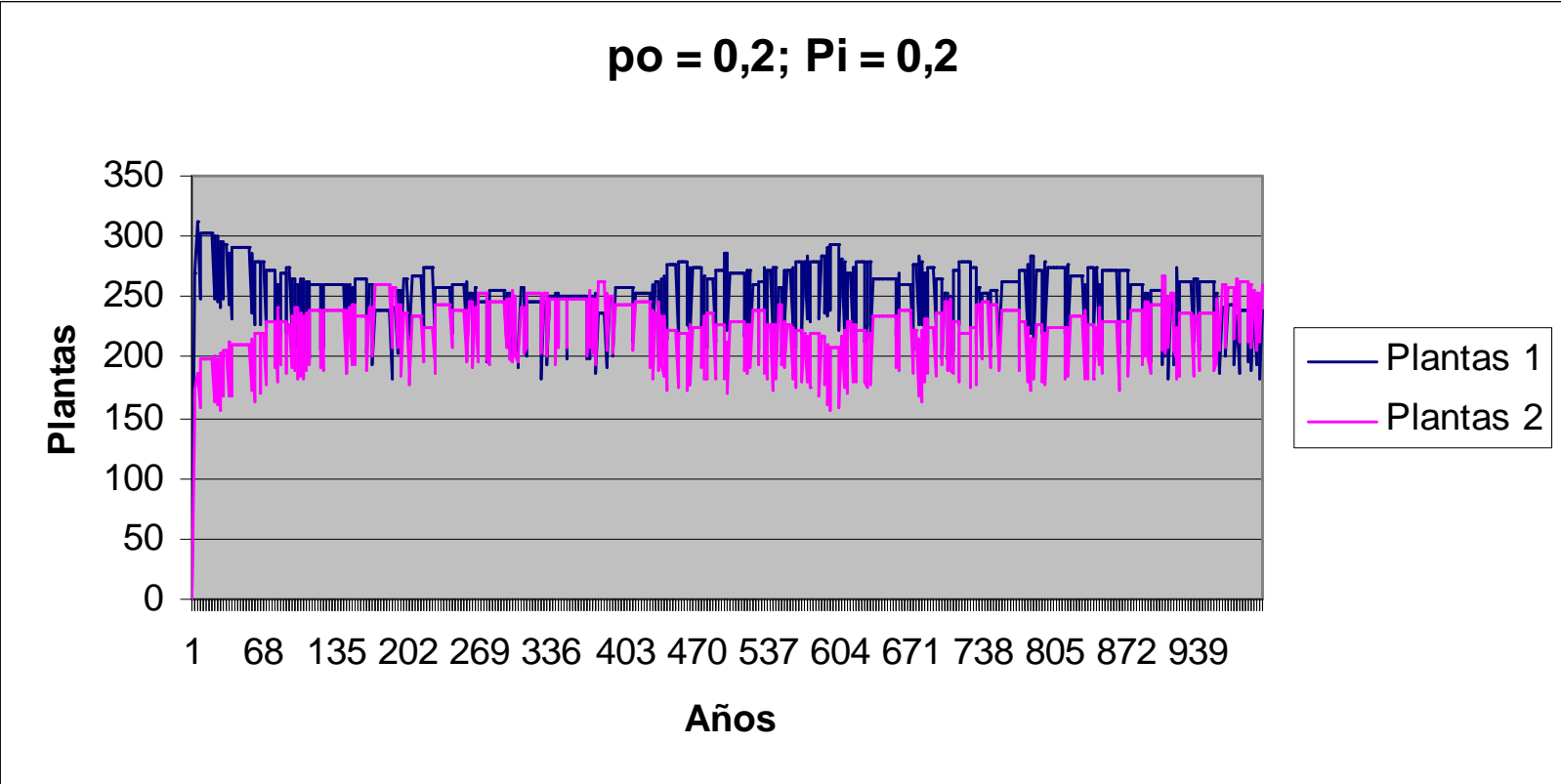
Semillas, Plántulas y Plantas
 Semillas: 411 600
 Plántulas: 54 166
 Plantas: 89 97

Estaciones del Año
 411 600
 54 166
 89 97

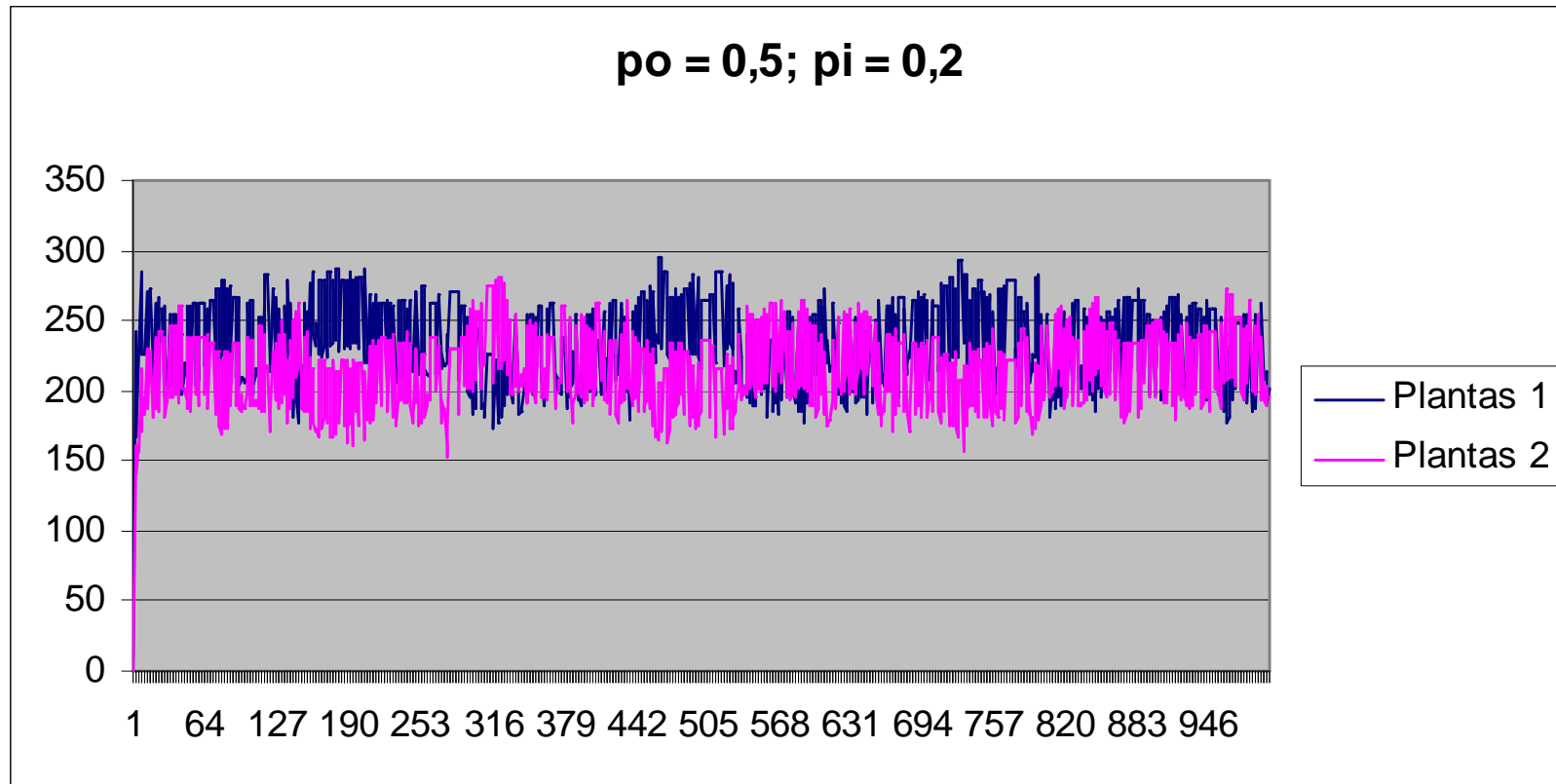
411 600 54 166 89 97

47%

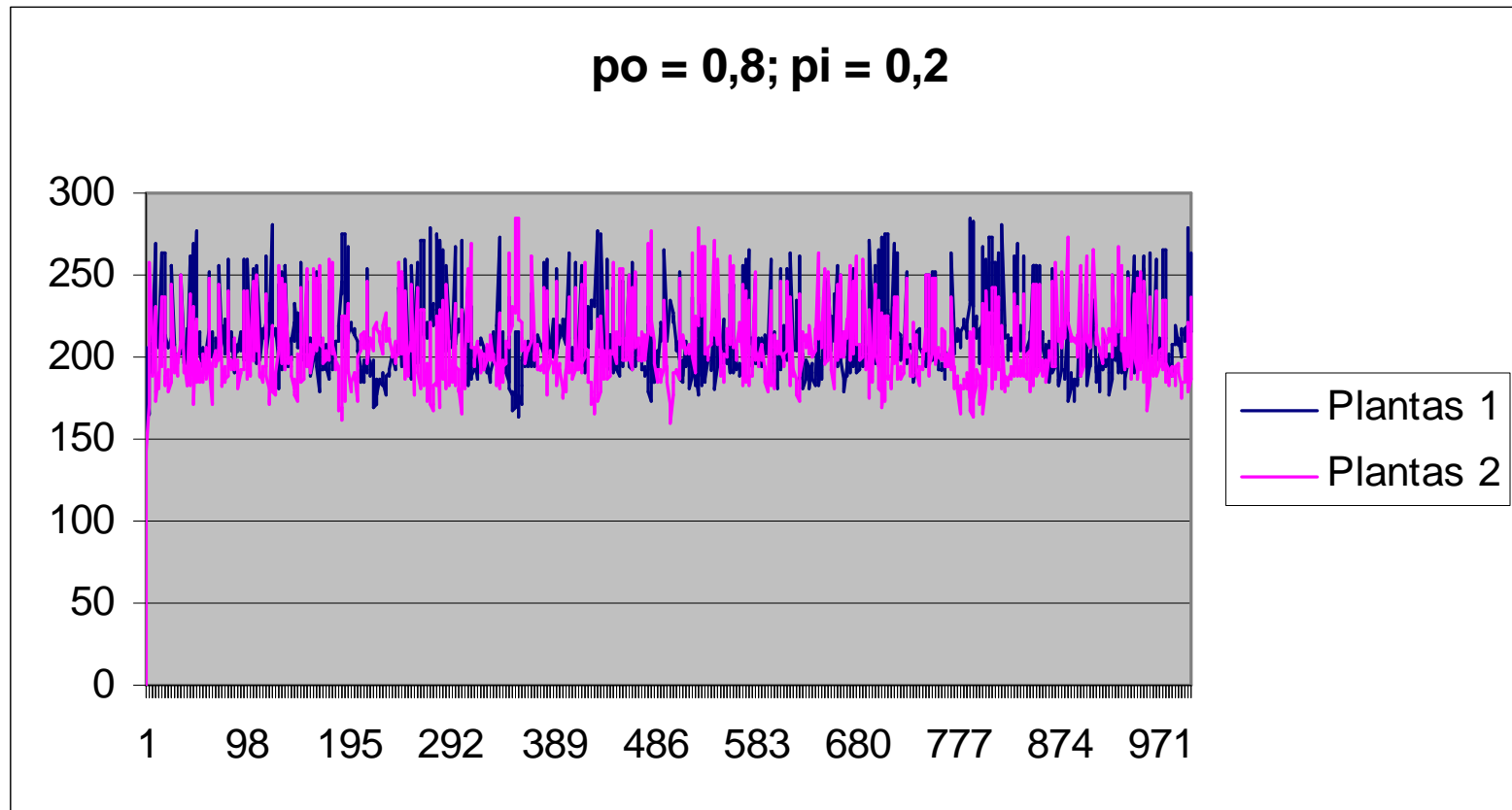
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



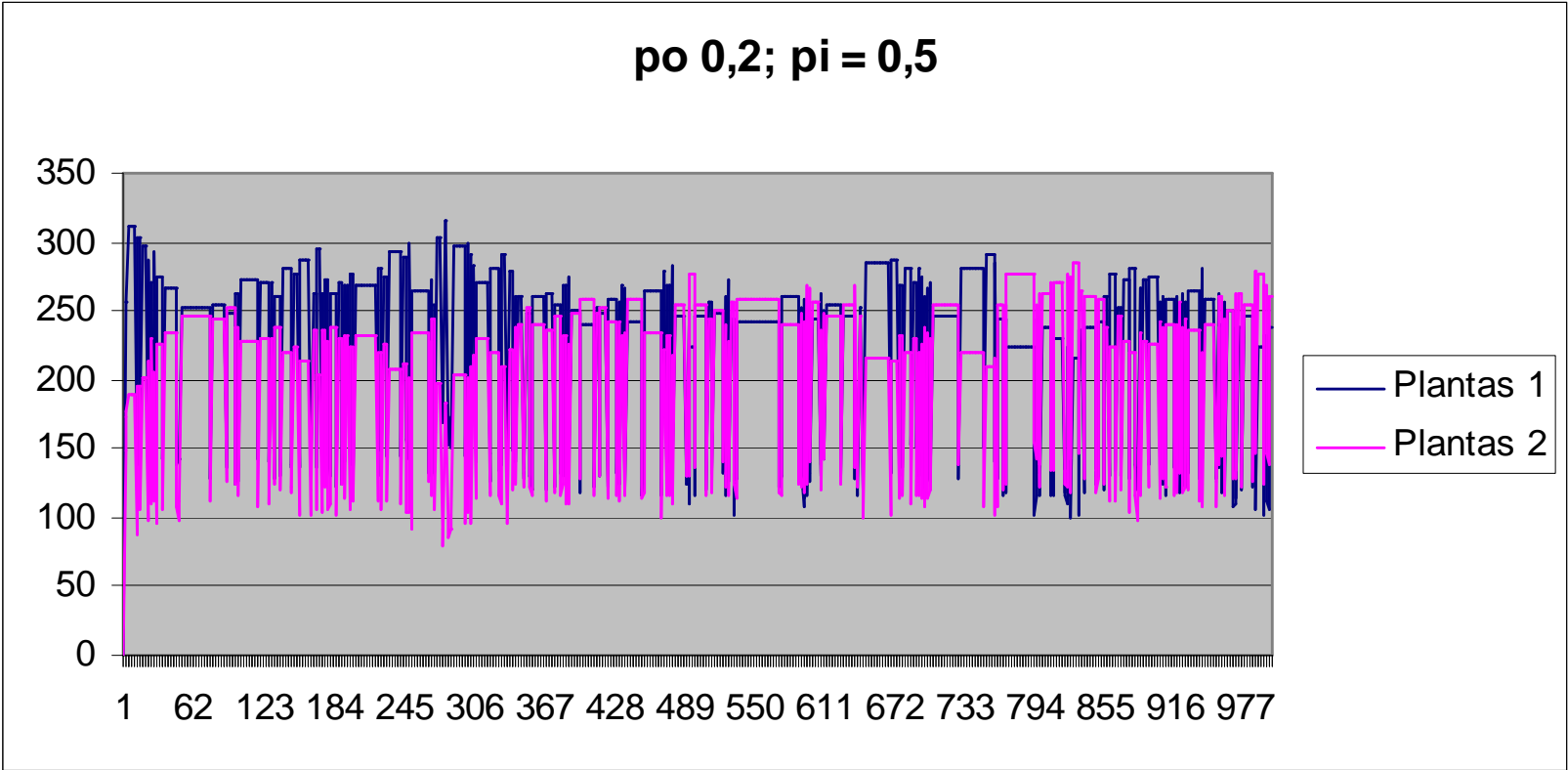
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



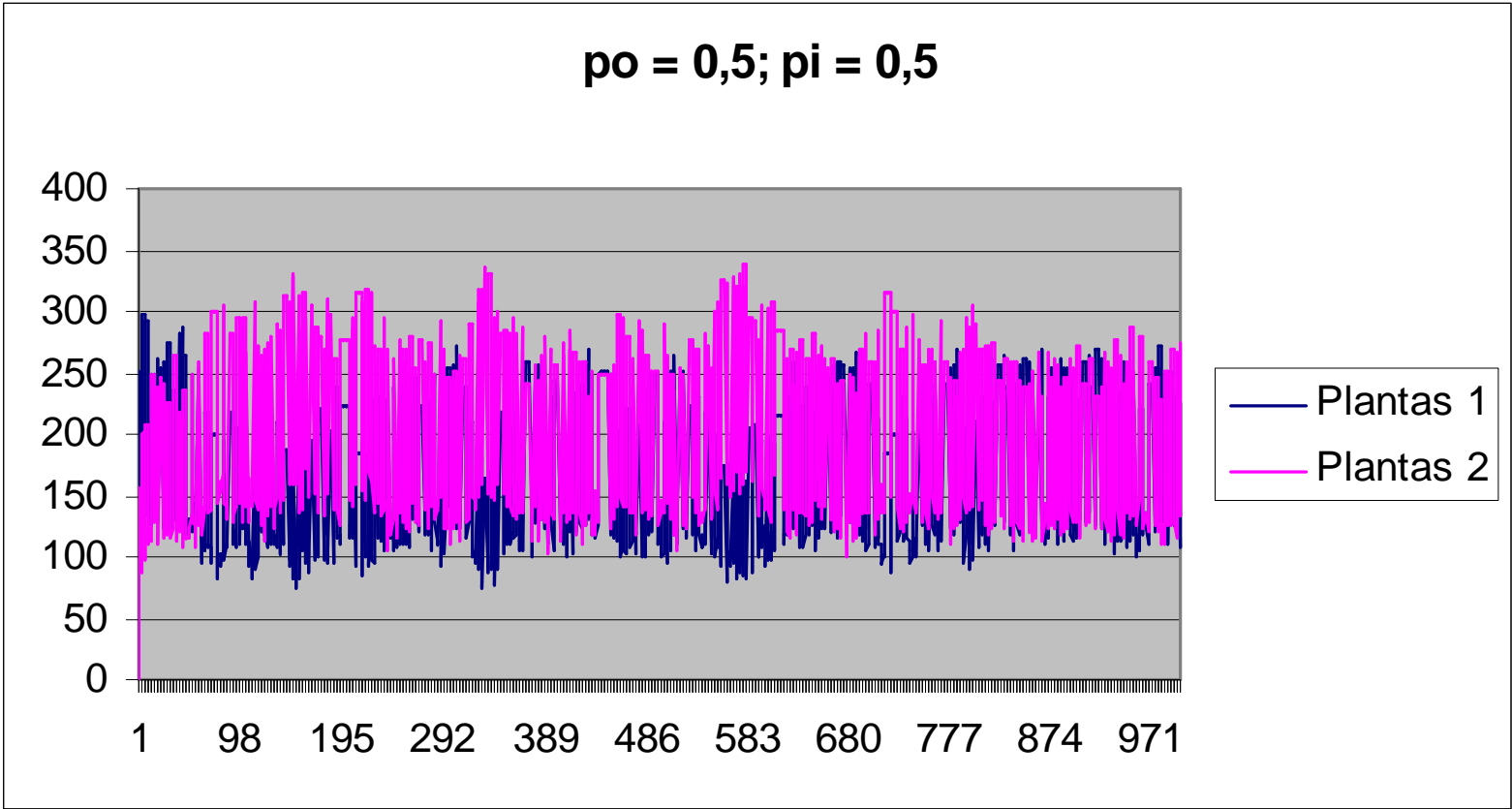
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



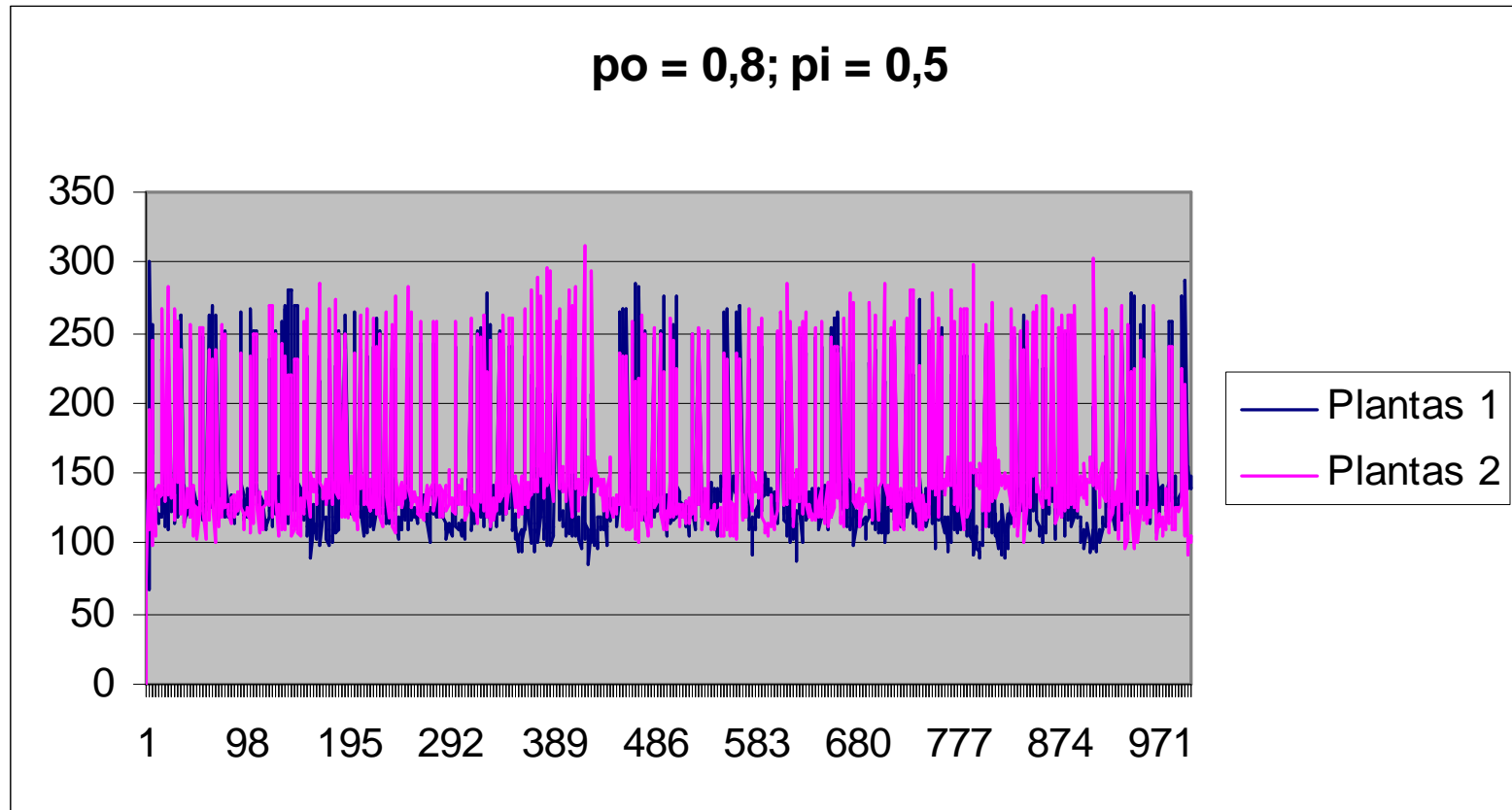
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



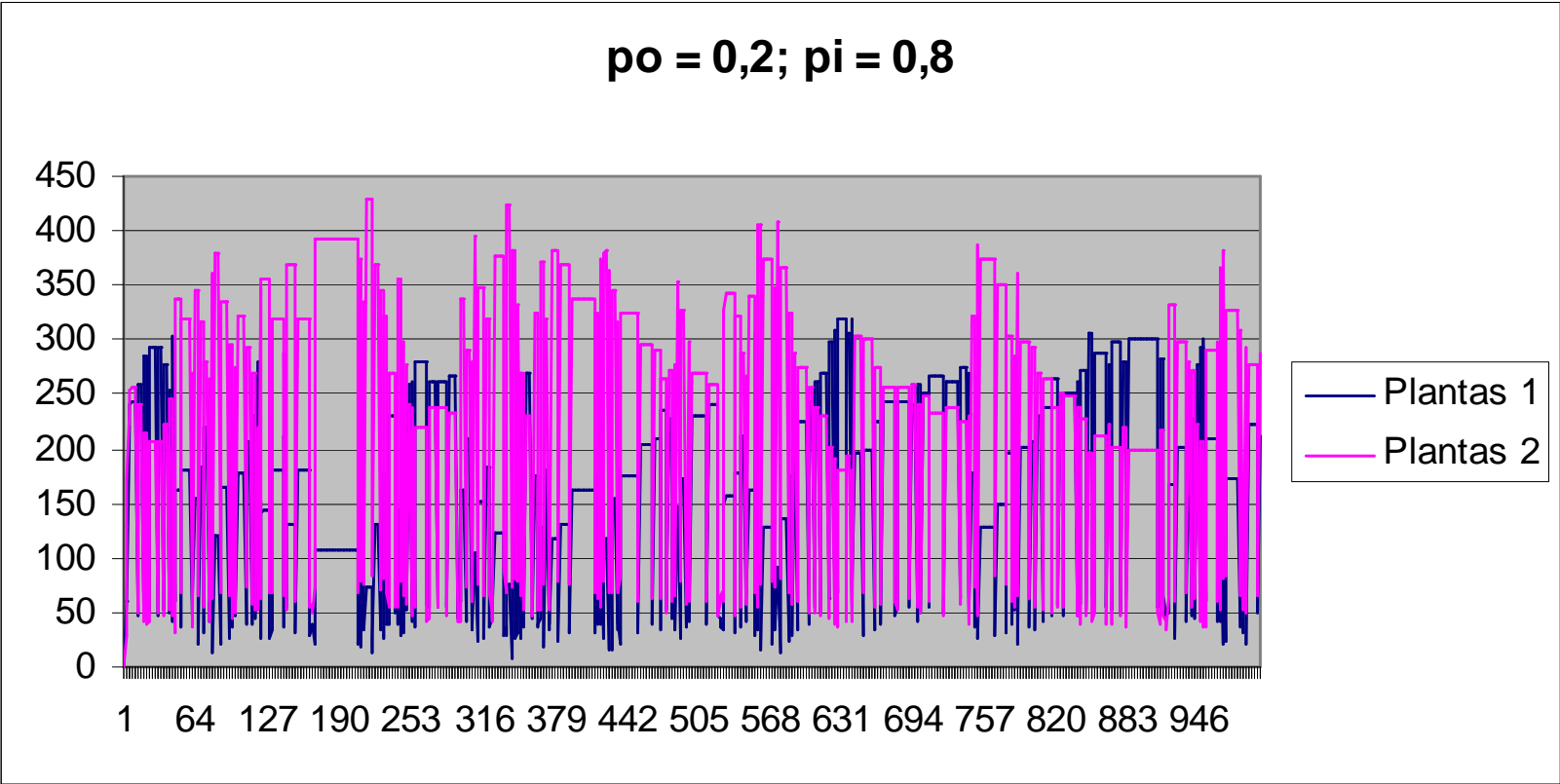
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



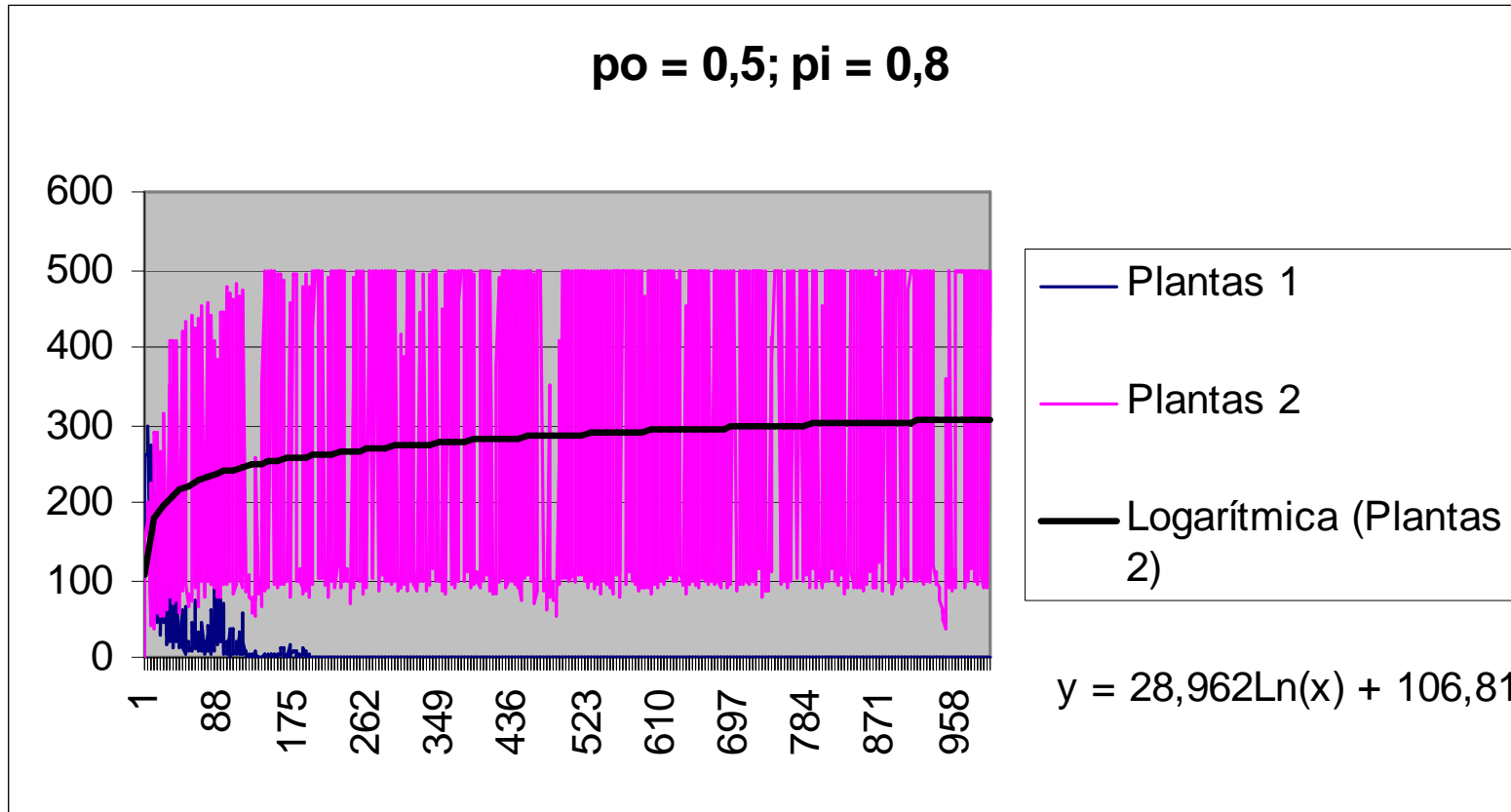
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



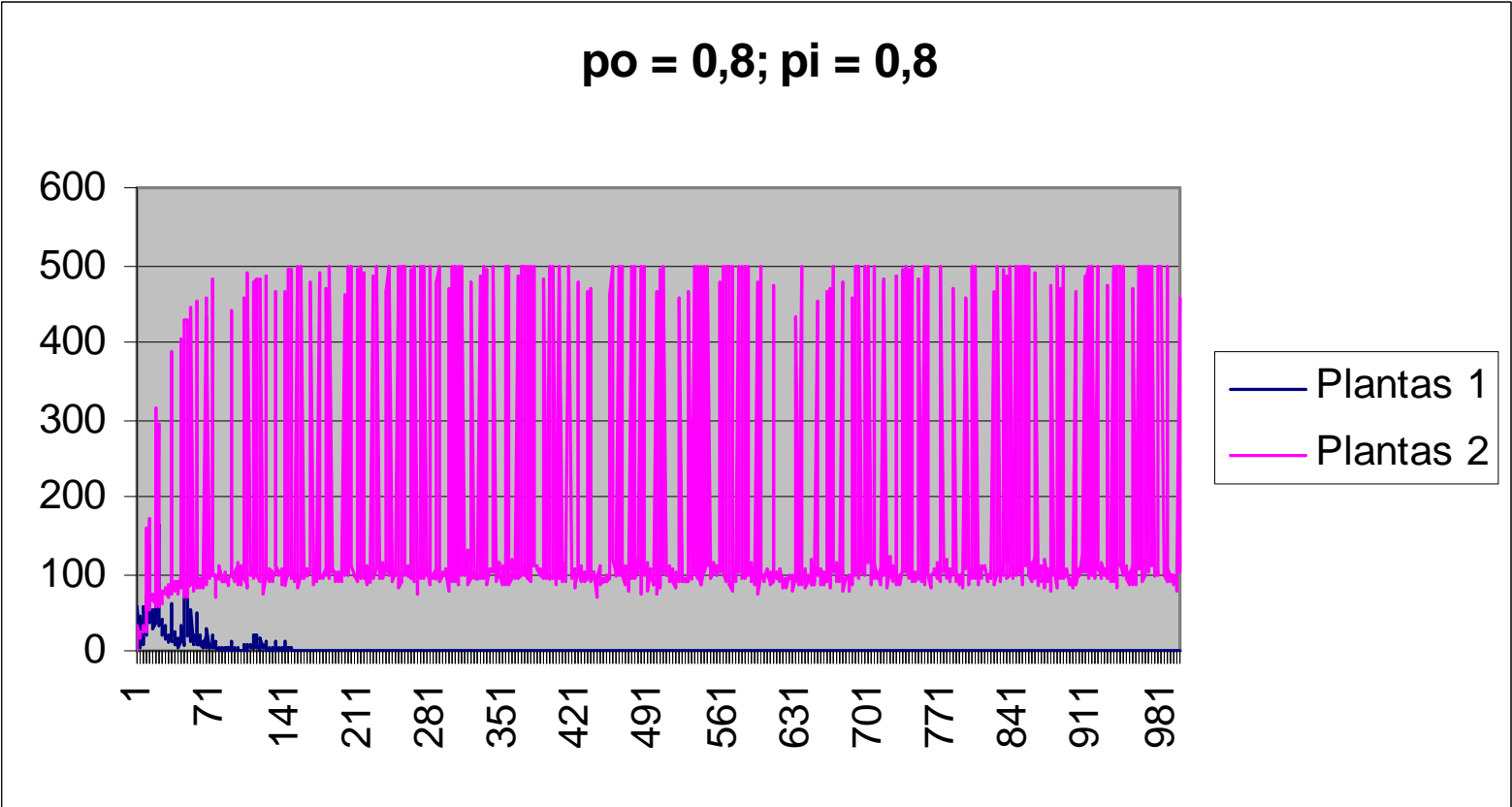
Hurst y estrategias reproductivas de plantas



Hurst y estrategias reproductivas de plantas

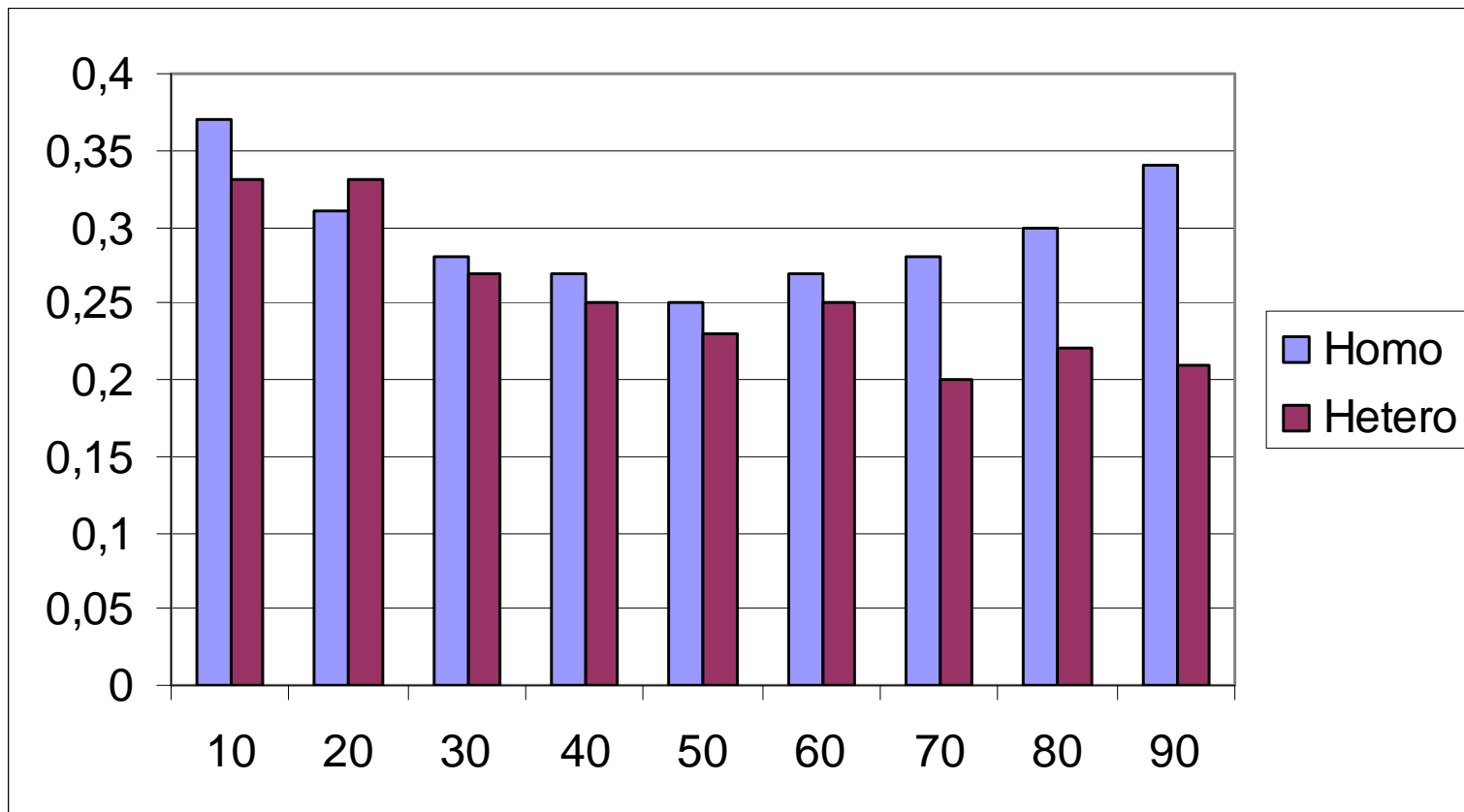


Hurst y estrategias reproductivas de plantas



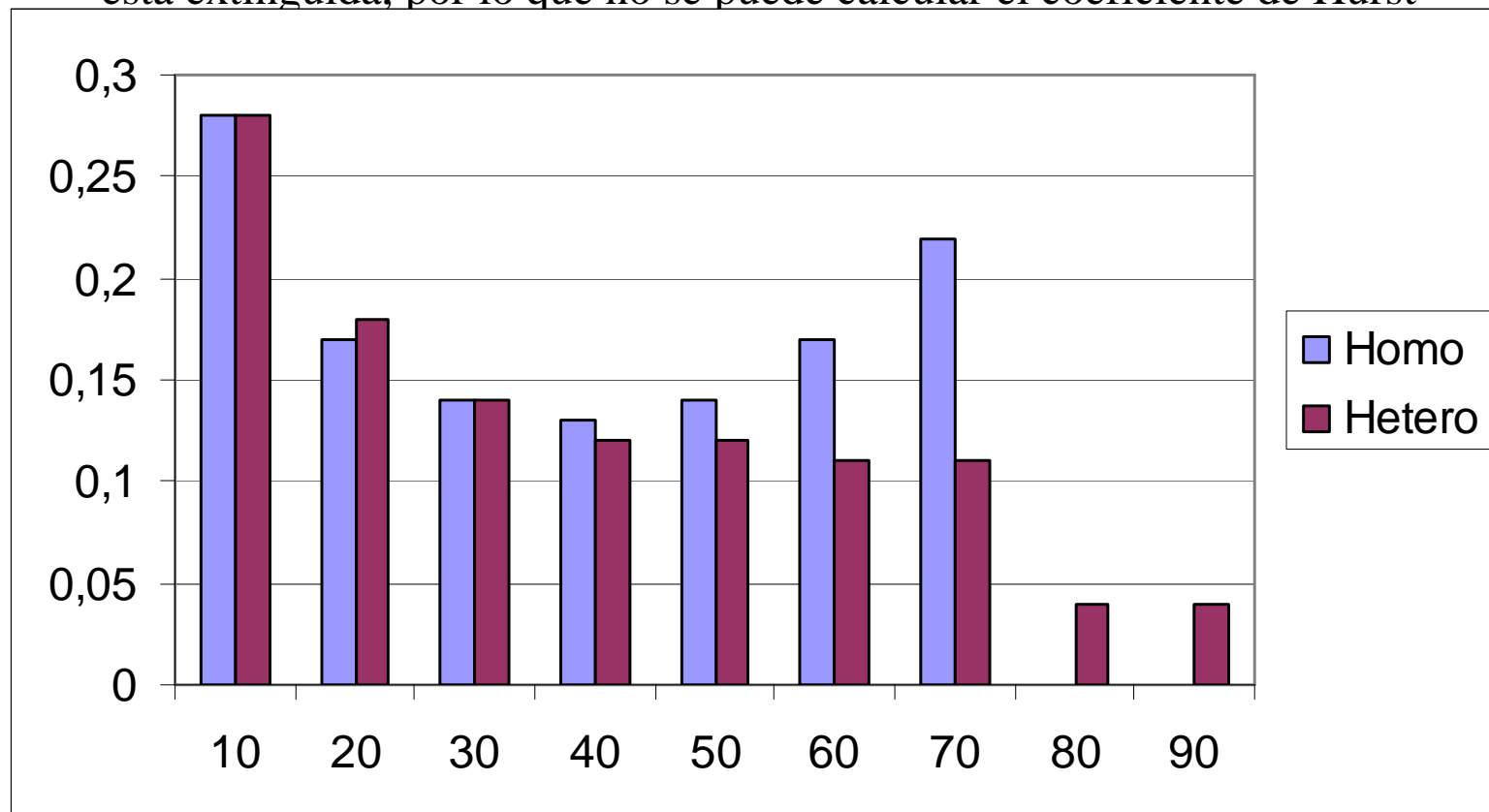
Hurst y estrategias reproductivas de plantas

Variación del coeficientes de Hurst con respecto a la intensidad de las perturbaciones, para la especie homocárpica y heterocárpica con una probabilidad de perturbación (PO) de 0,5 y obtenidos a partir de una serie temporal con los 80 valores posteriores a los 20 primeros (cuando las especies empiezan a estabilizarse), pero antes de que se produzca la extinción de una de ellas.



Hurst y estrategias reproductivas de plantas

Variación del coeficientes de Hurst con respecto a la intensidad de las perturbaciones, para la especie homocárpica y heterocárpica con una probabilidad de perturbación (PO) de 0,5 y obtenidos a partir de una serie temporal con los 800 valores posteriores a los 200 primeros (cuando las dinámicas ya son claramente estables). En los valores de la especie homocárpica de IP 0,80 y 0,90, la especie está extinguida, por lo que no se puede calcular el coeficiente de Hurst



Referencias

- Barnsley, M: **Fractals everywhere**. Academic Press, 1988.
- Barrallo, J.: **Geometría fractal, algorítmica y representación**. Anaya.
- Beardon, A. F.: *Symmetries of Julia sets*. Bull. London Math. Soc. 22; 576-582. 1990.
- Blackledge, J. M.: *On the Synthesis and Processing of Fractal Signals and Images*. UK. Sc. Eng. Res. C. 1992.
- Devaney, R. L.: **Chaos, fractals and dynamics**. AddisonWesley. 1990.
- Edgar G. A.: **Classics on fractals**. Addison-Wesley. 1993.
- Falconer, K. J.: **The geometry of fractals sets**. Cambridge University Press, 1985.
- Guzmán, M.; Martín, M.; Morán, M.; Reyes, M.: **Estructuras fractales y sus aplicaciones**. Labor. 1991.
- Hutchinson, J. E.: *Fractals and Self Similarity*. Indiana Univ. Math. Jour. Vol. 30. nº 5. 713-747. 1981.
- Mandelbrot, B.: **Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión**. Tusquets.
- Mattila, P.: **Lectures notes on Geometric Measure Theory**. Asociación matemática española, 1986.
- Peitgen; Jurgens; Saupe: **Fractals for the classroom**. Springer-Verlag. Vol. I, 1991; Vol II, 1992.
- Peitgen, H. O.; Jurgens; Saupe: **Chaos and fractals**. Springer-Verlag, 1992.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The beauty of fractals**. Springer-Verlag, 1986.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The science of fractals**. Springer-Verlag, 1988.
- Stewart, I: **¿Juega Dios a los dados?** Edic. Crítica. Drakontos, 1991.

Referencias

- **HASTINGS, H. M. & SUGIHARA, G. (1993)** "*Fractals, a user's guide for the natural sciences.*" Oxford University Press, Oxford.
- **HUSTINGS, F. (1992)** "*Bird census news*" Vol. 5 n° 2 produced by Sovon on behalf of: International Bird Census Committee & European Ornithological Atlas Committee, Netherlands.
- **SUGIHARA, G. & MAY, R. M. (1990)** "*Applications of Fractal in Ecology*" Trends Ecol. Evol., vol 5, n° 3, 79-86.