Nuevas tendencias de la Matemática: Lógica borrosa e inteligencia artificial

☛ Esquema

- ☛ Introducción
- ☛ Conjuntos difusos
- ☛ Lógicas borrosas
- ☛ Aplicaciones
- ☛ Medidas
- ☛ Medida de especificidad

Introducción

- Determinismo
  - Simplicidad organizada
- Probabilidad
  - Complejidad desorganizada
- Caos determinista
- Conjuntos difusos

Introducción

Los conjuntos difusos estudian la:

- imprecisión
- incertidumbre
- no especificidad
- vaguedad
- inconsistencia

Inteligencia Artificial

- Marvin Minsky: “I.A. es el arte de construir máquinas capaces de hacer cosas que requerirían inteligencia en caso de que fuesen hechas por seres humanos”
- Ingeniería del conocimiento
- Sistemas expertos

Aplicaciones de la Inteligencia Artificial

- Variables lingüísticas
- Lenguaje natural
- Sistemas expertos
- Control difuso
- Autómatas difusos
- Bases de datos difusas

Conjuntos difusos y lógicas borrosas

Conjuntos difusos: Ejemplos

- soleado
- alto
- caro
- contagioso
- número mucho más grande que uno
- los jóvenes de esta ciudad

◆Subconjuntos difusos

Lotfi A. Zadeh en 1965

Fuzzy Sets

- $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$
- $A: X \rightarrow [0, 1]$.

Ejemplo

Si el enfermo está algo amarillo y se encuentra bastante cansado entonces puede tener hepatitis

Conjuntos clásicos o de Cantor

- $A \subseteq X$
  - $f_A: X \rightarrow \{0, 1\}$
  - $A \in \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$
- Gráfica $G(f_A)=\{(x,f_A(x)); x \in X\}$
- **Diagrama de Venn**

Subconjuntos difusos

- **El referencial X es siempre un conjunto clásico**
  - **$A \subseteq X$**
  - **$A \in \mathcal{F}(X, [0, 1])$**
  - **G(A)**
  - **Diagrama**

Definición: Subconjunto normal

☛ Un subconjunto difuso A se dice que es **normal** si existe algún elemento del conjunto referencial $x_i \in X$ tal que $A(x_i) = 1$.

Definición: Subconjunto de nivel

- Dado un conjunto borroso A sobre X se definen sus **subconjuntos de nivel** α (y se denominan A_α) a:

$$A_\alpha = \{x: A(x) \geq \alpha\}.$$

OPERACIONES

- **Igualdad:** $A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x$
- **Inclusión:** $A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), \forall x$
- **Unión:** $(A \cup B)(x) = \text{máx}\ \{A(x), B(x)\}$
- **Intersección:** $(A \cap B)(x) = \text{mín}\{A(x), B(x)\}$
- **Complementario:** $(c(A))(x) = 1 - A(x)$

Propiedades

- ($\mathcal{F}(X, [0,1])$, máx, mín, ´) es un retículo distributivo y complementario.
- No es un álgebra de Boole pues no verifica:
  - la ley de contradicción
  - la ley del tercio excluso
- Es un retículo de Morgan.

Otras operaciones

- **Probabilística:** $A \cap B = A \cdot B$

  $A \cup B = A + B - A \cdot B$

- **Lukasiewicz:**

  $A \cap B = \text{máx}\{0, A+B-1\}$

  $A \cup B = \text{mín}\{1, A+B\}$

t-normas

B. Schweizer, A. Sklar:

Probabilistic Metric Spaces

North-Holland. 1983

Norma triangular (o t-norma)

Definición: $T: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$

- **T1)** $T\{x, 0\}=0$, $T\{x, 1\}=x$, para todo $x \in [0,1]$
- **T2)** $T\{x, y\} = T\{y, x\}$ para todo $x, y \in [0,1]$
- **T3)** Si $x \geq x'$, $y \geq y'$ entonces $T\{x, y\} \geq T\{x', y'\}$
- **T4)** $T\{x, T\{y, z\}\}=T\{T\{x, y\}, z\}$ $\forall\ x, y, z \in [0,1]$

t-norma positiva

☛ $x>0,\ y>0 \Rightarrow T(x, y)>0$

t-norma arquimediana

☞ Continua y $T(x, x)<x$ $\forall x\in(0, 1)$

t-norma estricta

☞ Estrictamente creciente en $(0, 1)\times(0, 1)$

Conorma triangular (o t-conorma)

Definición:

- S1) **S{0, x} = x**, **S{x, 1}=1**, $\forall x \in [0,1]$

y S2, S3 y S4 como T2, T3 y T4 respectivamente.

Negación fuerte

$$N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

- continua
- estrictamente decreciente
- $N(0)=1$, $N(1)=0$
- $N(N(x))=x$

Conorma dual

- $S(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$

Conectivos lógicos

- Una familia de conectivos lógicos borrosos o ternas de *Morgan:*

$$(T, S, N)$$

está formada por una t-norma T, una t-conorma S y una negación N que se utilizan para generalizar las operaciones de intersección, unión y complementario.

t-normas

- **Mínimo:** Es la mayor de las t-normas
- **Producto:** $Prod(x, y) = x.y$
- **Lukasiewicz:**

  $$W(x, y) = \text{máx}\{0, x+y-1\}$$

- **Sumas ordinales**

t-normas

- Prop. distributiva $\Rightarrow$ ley de absorción $\Rightarrow$ idempotencia
- ☛ Luego la única t-norma continua distributiva es el mínimo
- Sin embargo la terna de Lukasiewicz (W, W*, N) sí verifica el principio de contradicción y el tercio excluso

t-normas

- **Familia** de t-normas $\{T_\varphi\}$:

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$$

donde φ es una función estrictamente creciente y continua en [0, 1] tal que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$.

t-normas

Las únicas t-normas continuas son:

- el **mínimo** o
- de la **familia del producto** o
- de la **familia de Lukasiewicz** o
- de la **familia de las sumas ordinales**.

RELACIONES

- Al conjunto (X, R) formado por un conjunto difuso X y una relación borrosa R se le llama **estructura relacional borrosa**.
- Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

RELACIONES

- **T-preorden:**

  reflexiva y T-transitiva

- **T-indistinguibilidad:**

  reflexiva, simétrica y T-transitiva

RELACIONES

- R es **reflexiva** si $R(a, a)=1 \ \forall \ a \in X$.
- R **simétrica** si $R(a,b)=R(b,a) \ \forall a, b \in X$
- R es **α-reflexiva** si $R(a, a)$ es siempre mayor o igual a un cierto valor α.
- R es **T-transitiva** si:

$$\mathbf{T(R(a,b),R(b,c)) \leq R(a,c)}$$

Composición de relaciones

- E = {invierno, primavera, verano, otoño} = {i, p, v, o}
- T = {calor, templado, frío} = {c, t, f}
- V = {abrigo, blusa, chaqueta} = {a, b, ch}

- R: E→T
- S: T → V
- SoR: E → V
  - SoR(a,b)=máx{mín{R(a, x), S(x, b)}}

Consecuencias de Alfred Tarski

C: $\mathit{F}(E) \rightarrow \mathit{F}(E)$

- $V \subseteq C(V)$
- $V1 \subseteq V2 \Rightarrow C(V1) \subseteq C(V2)$
- $C(C(V)) = C(V)$

☛**Lógica**: Conjunto de proposiciones y un operador de consecuencias

Consecuencias de Alfred Tarski

- Si una relación borrosa es reflexiva y T-transitiva entonces verifica los axiomas de consecuencias de Tarski
- Luego los T-preórdenes nos generan operadores de consecuencias

Propiedad transitiva

- R transitiva $\equiv$

  $\equiv$ Si R(a, b) y R(b, c) entonces R(a, c) $\equiv$

  $\equiv R(a, b) \wedge R(b, c) \leq R(a, c) \equiv$

  $\equiv R(a, c) \geq \text{máx}\{\min\{R(a, x), R(x, c)\}\}$

- Generalizando

  $R(a, c) \geq S\{\ T\{R(a, x), R(x, c)\}\ \}$

Medida borrosa

Definición de medida de Lebesgue (1902):

Sea (X, F, M) donde X es un conjunto,

F es un sigma álgebra de X y

M es una aplicación M: F $\rightarrow$ [0, ∞):

- $M(\emptyset)=0$
- $A_n \in F$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de F entonces

$$M(\cup A_n) = \Sigma M(A_n)$$

Definición de medida borrosa de Sugeno (1974):

Una ***medida borrosa*** M es una función M: F $\to$ [0, 1] que verifica las siguientes propiedades:

- $M(\emptyset) = 0$
- $M(X) = 1$
- Condición de continuidad monótona

$$M(\cup A_n) = \lim M(A_n)$$

◆ Medida borrosa

Nguyen, H. T. & Walker, E. A.: A first course in Fuzzy Logic. CRC Press. 1996.

Definición 2ª de medida borrosa (Klir, Nguyen, Walker):

Una ***medida borrosa*** M es una función $M: F \rightarrow [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades:

$$M(\emptyset) = 0$$

$$M(X) = 1$$

Si $A \subset B$ entonces $M(A) \leq M(B)$

Ejemplos

- Las medidas sigma aditivas
- Las medidas de Sugeno
- Medidas de creencia, necesidad y plausibilidad
- Long(A) / b-a
- Card(A) / Card(X)

◆ Medida borrosa

Trillas, E; Alsina, C.: "A reflection on what is a membership function".

Definición 3ª de medida borrosa (Trillas):

$(X, \prec)$ donde $\prec$ es un preorden

☛ $m: X \to [0, 1]$ es una $\prec$-medida en X si verifica que:

- ✑ Si $x_0 \in X$ es minimal para $\prec$ entonces $m(x_0) = 0$.
- ✑ Si $x_1 \in X$ es maximal para $\prec$ entonces $m(x_1) = 1$.
- ✑ Si $x \prec y$ entonces $m(x) \leq m(y)$

Ejemplos

- Las medidas sigma aditivas
- Las medidas de Sugeno
- Entropía (DeLuca, Términi)
- Ser aproximadamente una potencia de 2

Medida de especificidad

Medida de especificidad

- Medida de la cantidad de información contenida en un conjunto difuso
- Evalúa el grado en que un subconjunto borroso tiende a tener un elemento y sólo uno

Medida de especificidad

- En una variable lingüística: la cantidad de información que contiene una proposición
- Está relacionada con el inverso de la cardinalidad de un conjunto

Antecedentes: medidas de especificidad

- Introducidas por **Ronald Yager**
- **Dubois** y **Prade** han investigado sobre sus aplicaciones:

  i) Especificidad mínima.

  ii) Importancia en razonamiento aproximado.

Antecedentes: medidas de especificidad

- **Higashi** y **Klir** discuten un concepto similar que denominan **no-especificidad**
- Relacionado con el concepto de **granularidad** introducido por **Zadeh**

Aplicaciones

- ***Yager***: Una **medida de tranquilidad** a la hora de tomar una decisión
- ***Kacprzyk*: Aprendizaje inductivo**
- **Sistemas de razonamiento deductivo**

Aplicaciones

- Determina la **utilidad** de la **información** que proporciona un sistema experto
  - **principio de intercambio entre especificidad y certeza**

Definición de medida de especificidad

Medida de especificidad

1.- $Sp(A)=1$ si y sólo si A es un conjunto clásico con un único elemento

2.- $Sp(\varnothing)=0$

3.- Aumenta, si aumenta el mayor valor de pertenencia, y disminuye si los otros valores de pertenencia aumentan

Propiedad

- Si A y B son dos subconjuntos difusos normales tales que $A \subset B$ entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$.

Definición:

- Dadas dos medidas de especificidad Sp y Sp* se dice que Sp es ***más estricta que*** Sp* si sus pesos asociados w_j y w_j* verifican que $w_j \geq w_j$* para todo j.

Definición: medida de especificidad en universos finitos

- **A un subconjunto difuso de un conjunto finito X**

a_j = j-ésimo valor de pertenencia de A

Sp: $[0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\mathbf{Sp(A) =}$$

$$T_1(a_1, N(S_{j=2,..d}\{T_3(a_j, w_j)\}))$$

Ejemplos

Ejemplo 1

- Medida de **especificidad lineal**

$$\mathbf{Sp(A) = a_1 - \sum_{j=2}^{d} w_j\, a_j}$$

- Donde los pesos verifican:

  i) $w_j \in [0, 1]$, ii) $\sum_{j=2}^{d} w_j = 1$

  iii) $w_j \geq w_i$ para todo $j<i$ mayores o iguales a dos. ($T1=W$; $S=W^*$; $T3=Prod$)

Medidas de especificidad lineales

- Son medidas de especificidad.
- Son regulares
- La **más estricta** es $Sp(A) = a_1 - a_2$
- La **menos estricta** es

$$Sp(A) = a_1 - \frac{1}{d-1} \sum_{j=2}^{d} a_j.$$

Ejemplo 2:

☛ $$\mathbf{Sp(A) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (ka_j + (1 - a_j))}$$

donde $k \in [0, 1)$

Ejemplo 3:

☛ $Sp(A) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1 - w_j a_j))$ donde

$w_j \in (0, 1]$

(T1=T3=Prod. S=Prod*)

Especificidad en conjuntos referenciales infinitos

Definición:

$$Sp(A) = \int_{0}^{\alpha_{máx}} N\,(M(A_\alpha))\,d\alpha$$

Propiedades

- $Sp(\emptyset)=0$
- Si A es un conjunto clásico con un único elemento entonces $Sp(A)=1$
- Si el máximo valor de pertenencia aumenta quedando el resto de valores de pertenencia invariantes, entonces Sp aumenta.
- Si A y B son dos conjuntos normales y $A \subset B$ entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$

Ejemplo 4:

$$Sp(A) = \alpha_{\text{máx}} - \int_{0}^{\alpha_{máx}} \text{Long}(A_\alpha)\cdot d\alpha$$

- Es una medida de especificidad

Especificidad bajo una T-indistinguibilidad

Axiomas

1) $Sp(\{x\} / S) = 1$
2) $Sp(\varnothing / S) = 0$
3) $Sp(\mu / Id) = Sp(\mu)$
4) $Sp(\mu / S) \geq Sp(\mu)$

Algoritmo

Si $\text{Máx}_j(T(\mu(x_j), S(x_j, x_k))) \geq \mu(x_k)$ para algún $j \neq k$, entonces $x_k \notin X'$.

Ejemplo:

$X = \{x_1, ..., x_5\}$, T = Prod, S

$\mu=1/x_1 + 0.7/x_2 + 0.5/x_3 + 0.2/x_4 + 0/x_5$,

$X' = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Verifica los axiomas

- $Sp(\{x\} / S) = T(1, S(x_1, x_1)) = 1$
- $Sp(\varnothing / S) = T(0, S(x_i, x_i)) = 0$
- $Sp(\mu / Id) = T(\mu(x_i), 1) = \mu(x_i)$
- $Sp(\mu / S) \geq Sp(\mu)$.

Ejemplos