

CAPÍTULO 13

Métodos numéricos de un paso

El objetivo de este capítulo es introducir los métodos numéricos de resolución de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales de un solo paso, mientras que en el siguiente capítulo se estudiarán los métodos multipaso.

Un sistema de ecuaciones diferenciales o una ecuación diferencial de orden superior siempre pueden ser expresados como un sistema de primer orden, y de esta forma resolver numéricamente el problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{array} \right.$$

donde \mathbf{y} , \mathbf{y}' , $\mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$ son vectores n -dimensionales, $\mathbf{f}: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, mientras que x y x_0 son escalares. Una solución está definida en un intervalo $[x_0, b]$ donde x_0 y b son finitos. Se supone que se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de *Picard-Lindelöf* por lo que se puede garantizar que existe una única solución $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ del problema de valor inicial.

Todo método numérico lleva consigo la idea de discretización, esto es, el intervalo continuo $[x_0, b]$ de x es reemplazado por un conjunto discreto de puntos $\{x_n\}$ definidos por $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N = (b - x_0)/h$. El parámetro h se

denomina **longitud de paso**, que en un principio se considera que es constante, aunque la potencia de los modernos algoritmos deriva de su habilidad para cambiar h automáticamente en el proceso de computación.

En este capítulo (y en el siguiente) se denota por $y(x)$ a la solución exacta de la ecuación diferencial y por z_n al valor aproximado de la solución en x_n .

El objetivo es encontrar un conjunto de valores $\{z_n\}$ que se aproximen a la solución en el conjunto discreto de puntos $\{x_n\}$, $z_n \cong y(x_n)$. Esta sucesión se denomina **solución numérica del problema de valor inicial**. Un método numérico es por tanto una ecuación en diferencias que permita computar los z_n .

Existen algoritmos que implementan estos métodos permitiendo estimar el error, seleccionar el tamaño de paso más conveniente y decidir qué método emplear en cada etapa de la búsqueda de la solución. Pero resultan como “cajas negras” poco aprovechables para comprender el proceso. El propósito de este capítulo y del siguiente es, precisamente, entender su comportamiento y conocer sus propiedades.

Existen una gran diversidad de métodos numéricos para la resolución de un problema de valor inicial, con distintas características. Estos métodos se agrupan en dos familias: los métodos de un paso y los métodos lineales multipaso.

Los métodos de un paso, que se presentan en este capítulo, se caracterizan porque el valor aproximado z_n de la solución en el punto x_n se obtiene a partir del valor z_{n-1} obtenido en la etapa anterior.

Los métodos lineales multipaso, que se estudian en el capítulo siguiente,

utilizan para el cálculo del valor aproximado z_n no sólo el valor z_{n-1} obtenido en la etapa anterior, sino también los valores z_{n-2}, \dots, z_{n-j} obtenidos en etapas previas. La utilización de estos valores previos hace que el comportamiento de los dos grupos de métodos numéricos sea muy diferente, con características específicas para cada grupo, lo que hace preciso un estudio diferenciado de cada una de las familias.

El contenido de este capítulo es el siguiente: En primer lugar y con el fin de entender como funcionan los métodos numéricos se comienza estudiando el más sencillo, el método de *Euler*, que sirve como modelo común de comportamiento de los métodos numéricos, tanto para los métodos de un paso como para los métodos lineales multipaso. A continuación se introducen los métodos de un paso, entre los que se destacan especialmente los métodos de *Taylor* y los métodos de *Runge-Kutta*, y se estudian sus propiedades. Al analizar de forma general los métodos de un paso se estudia la manera de evaluar el error cometido, o de conocer si es de esperar que el resultado obtenido se ajusta bien a la solución exacta de la ecuación diferencial, es decir, si el método es convergente.

13.1. EL MÉTODO DE EULER

En el estudio de las soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se comienza estudiando un método clásico, el **método de Euler**, (o de las poligonales de *Euler*), desarrollado por *Leonard Euler* por lo que lleva su nombre. Tiene un interés especial desde el punto de vista didáctico porque sirve como punto de partida para introducir los conceptos y analizar los problemas que van a aparecer en el resto de los métodos numéricos. Su estudio sirve, pues, como modelo para investigar las dificultades que se presentan en cualquier método numérico y para analizar los distintos tipos de error que se generan. Suministra también una sencilla interpretación geométrica pues se aproxima la solución del problema de valor inicial mediante la tangente a dicha solución.

Se considera el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, del que se supone que es un problema bien propuesto, es decir, se sabe que tiene una única solución en un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$. Para encontrar una solución aproximada de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se toma como valor inicial z_0 ; entonces $f(x_0, z_0)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de partida (x_0, z_0) , por lo que se puede obtener como valor z_1 el que toma la recta que pasa por (x_0, z_0) y tiene como pendiente $f(x_0, z_0)$ en el punto de abscisa x_1 :

$$z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0)$$

A continuación se repite el proceso desde el punto (x_1, z_1) aproximando la solución por la recta tangente que pasa por dicho punto. Por tanto la expresión general del método de *Euler* resulta:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n).$$

La solución numérica resultante aparece como una poligonal formada por trazos de rectas tangentes.

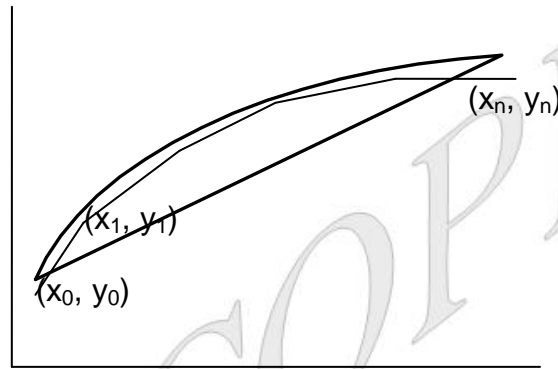


Figura 13.1: Poligonal de Euler

Definición 13.1.1:

Se denomina **método de Euler** al método numérico de expresión:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n).$$

Se pueden utilizar cuatro puntos de vista distintos para explicar el método de Euler:

- Un punto de vista geométrico, utilizando la idea de recta tangente de pendiente $y'(x) = f(x, y(x))$.
- Utilizar el desarrollo de *Taylor*, lo que permite además valorar el orden del error cometido:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + (h^2/2) \cdot y''(x) + \dots + (h^p/p!) \cdot y^{(p)}(x) + \dots$$

pudiéndose considerar el método de Euler como el método de Taylor de

orden uno, cuando se corta en:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x).$$

El error cometido al calcular el valor aproximado de $y(x+h)$, en un solo paso, entre x y $x+h$, es del orden del término complementario:

$$\frac{h^2}{2} \cdot y''(c)$$

donde c es un punto comprendido entre x y $x+h$, por lo que si se puede acotar $y''(c)$ entonces se dice que este error es del orden de $O(h^2)$. Otros métodos, los métodos de Taylor, se obtendrán cortando el desarrollo de Taylor en distintos términos.

- Aplicar la definición de derivada o el teorema del valor medio:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \Rightarrow y(x+h) - y(x) \approx h \cdot y'(x),$$

teniendo en cuenta que $y'(x) = f(x, y)$ se obtiene que

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)),$$

por lo tanto $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$.

Otros métodos se obtendrán buscando mejores estimaciones para la derivada $y'(x)$.

- Integrar la ecuación diferencial entre dos puntos consecutivos de la red, por ejemplo entre x_n y x_{n+1} :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \cdot dx$$

Si la función $f(x, y(x))$ se toma como la constante $f(x_n, z_n)$, se obtiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, z_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx = y(x_n) + f(x_n, z_n) \cdot h$$

Por lo tanto: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$.

Otros métodos, los métodos multipaso, se obtienen dando mejores estimaciones para la función $f(x, y(x))$.

Estos cuatro diferentes puntos de vista volverán a ser utilizados para obtener el resto de los métodos. Por ejemplo se obtendrán los métodos de *Runge-Kutta* por el 2º, los métodos multipaso y especialmente los predictor-corrector mediante el 4º, las ecuaciones diferenciales *stiff* y el método del punto medio utilizará el 3º, y en todos ellos se buscará una interpretación geométrica con promedios de la tangente.

Para terminar, es importante señalar que el método de Euler rara vez se utiliza en la práctica debido a que, a pesar de su sencillez a la hora de implementarlo, su convergencia es lenta, como se comprobará enseguida, de manera que se pueden necesitar muchos pasos en su ejecución para obtener una buena aproximación del valor buscado. Su interés fundamental es por tanto didáctico. Debido a su sencillez, se utiliza también para obtener valores iniciadores que permitan aplicar métodos lineales multipaso como los que se estudiarán en el capítulo siguiente.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.1.1: Aplicar el método de Euler para estimar un valor aproximado de la solución en $x = 1,5$ de $y' = x + y^2$, $y(1) = 0$, siendo $z_0 = 0$ y el tamaño de paso $0,1$; $0,05$ y $0,025$.

Para $h = 0,1$, bien a mano o con una hoja de cálculo, se construye una tabla para evaluar $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_n = x_0 + nh$. Así, $1,5 = 1 + 0,1n$, por lo que $n = 5$.

n	x_n	z_n	$f(x_n, z_n)$
0	1	0	1
1	1,1	0,1	1,11
2	1,2	0,211	1,244521
3	1,3	0,3354521	1,41252811
4	1,4	0,47670491	1,62724757
5	1,5	0,63942967	

Ya que, por ejemplo, $z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0) = z_0 + h \cdot (x_0 + z_0^2) = 0 + 0,1(1) = 0,1$; $z_2 = z_1 + h \cdot f(x_1, z_1) = z_1 + h \cdot (x_1 + z_1^2) = 0,1 + 0,1(1,1 + 0,1^2) = 0,1 + 0,1(1,11) = 0,211$ y así sucesivamente, hasta $z_5 = 0,63942967 \cong y(1,5)$.

Para $h = 0,05$, a mano o con una hoja de cálculo, se construye una tabla para evaluar $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_n = x_0 + nh$. Así, $1,5 = 1 + 0,05n$, por lo que $n = 10$.

n	x_n	z_n	$f(x_n, z_n)$
0	1	0	1
1	1,05	0,05	1,0525
2	1,1	0,102625	1,11053189
3	1,15	0,15815159	1,17501193
4	1,2	0,21690219	1,24704656
5	1,25	0,27925452	1,32798309
6	1,3	0,34565367	1,41947646
7	1,35	0,4166275	1,52357847
8	1,4	0,49280642	1,64285817
9	1,45	0,57494933	1,78056673
10	1,5	0,66397766	

Ahora $z_{10} = 0,66397766 \cong y(1,5)$.

Para $h = 0,025$ se tiene que $n = 20$ y:

n	x_n	z_n	$f(x_n, z_n)$
0	1	0	1
1	1,025	0,025	1,025625
2	1,05	0,05064063	1,05256447
3	1,075	0,07695474	1,08092203
4	1,1	0,10397779	1,11081138

5	1,125	0,13174807	1,14235755
6	1,15	0,16030701	1,17569834
7	1,175	0,18969947	1,21098589
8	1,2	0,21997412	1,24838861
9	1,225	0,25118383	1,28809332
10	1,25	0,28338616	1,33030772
11	1,275	0,31664386	1,37526333
12	1,3	0,35102544	1,42321886
13	1,325	0,38660591	1,47446413
14	1,35	0,42346752	1,52932474
15	1,375	0,46170063	1,58816748
16	1,4	0,50140482	1,65140679
17	1,425	0,54268999	1,71951243
18	1,45	0,5856778	1,79301849
19	1,475	0,63050326	1,87253437
20	1,5	0,67731662	

Ahora $z_{20} = 0,67731662 \cong y(1,5)$.

Ejemplo 13.1.2: Aplicar el método de Euler para estimar la solución en $x = 1$ de $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, siendo $z_0 = 1$ y los tamaños de paso siguientes: 0,1; 0,05, 0,025, 0,0125. Resolver la ecuación diferencial. Valorar el error cometido y compararlo con el tamaño de paso utilizado

Resultados de aplicar el método de Euler con distintos tamaños de paso a:					
$y' = 1 - x + 4y, y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$					
X	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,0125$	Exacto
1	34,411490	45,588399	53,807866	60,037126	64,897803
Error global	30,48...	19,309...	11,09...	4,86...	

Se observa que al disminuir los tamaños del paso a la mitad los errores cometidos se reducen cada vez aproximadamente a la mitad. En este sentido se dice que el orden del error es similar a h , el tamaño de paso. Pero los errores cometidos son excesivamente grandes lo que explica que se deban estudiar mejores métodos.

Ejemplo 13.1.3: Aplicar el método de Euler para estimar la solución de $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$, siendo $z_0 = 1$ y el tamaño de paso h resolviendo la ecuación en diferencias. Comprobar si el límite de la estimación obtenida cuando el tamaño de paso tiende a cero coincide con la solución exacta.

El estudio de las ecuaciones en diferencias aparece como un apéndice, 13.7. *Apéndice: Ecuaciones en diferencias*, al final de este capítulo.

Para un tamaño de paso h y para $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_0 = 0$, $x_n = x_0 + nh$, $f(x_n, z_n) = 2z_n - 1$ se tiene $z_{n+1} = z_n + h \cdot (2z_n - 1) = (1 + 2h) \cdot z_n - h$, por lo que la ecuación característica asociada es: $r = 1 + 2h$, y la solución de la ecuación homogénea es: $z_{nH} = C \cdot (1 + 2h)^n$. Se busca una solución particular "parecida" al término independiente que es una constante, $-h$, por lo que se prueba con $z_{nP} = a$, que al sustituir en la ecuación en diferencias:

$$a = (1 + 2h) \cdot a - h \Rightarrow h = 2h \cdot a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow z_{nP} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$z_n = z_{nH} + z_{nP} = C \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2}.$$

Para calcular C se impone que $z_0 = 1$.

$$z_0 = 1 = C \cdot (1 + 2h)^0 + \frac{1}{2} = C + \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow z_n = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2}.$$

La solución exacta de $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$, es $y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x})$. Se calcula el

límite:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=x_0+nh}} z_n = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=x_0+nh}} \frac{1}{2} \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x=x_0+nh}} \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x})$$

que coincide con la solución exacta.

Ejercicios

13.1. Calcular el valor aproximado en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$ usando el método de Euler con $h = 0,1$ y $z_0 = 0$.

(Solución: $z_5 = 0,11051$)

13.2. Calcular el valor aproximado en $x = 0,2$ de la solución del problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$ usando el método de Euler con $h = 0,05$ y $z_0 = 0$.

(Solución: $z_4 = 0,01550625$)

13.3. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 2$

de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2$, $y(0) = 0$

usando como $z_0 = 0$ y tamaños de paso $h = 0,2$, $h = 0,1$ $h = 0,05$.

Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $y(2) = 0,4$; $z_{10} = 0,40681903$;

$e(0,2) = -0,00681903$; $z_{20} = 0,40419$; $e(0,1) = -0,00419$; $z_{40} = 0,40227$;

$e(0,05) = -0,00227$)

NO COPIAR,
© DE LOS
AUTORES

13.2. ESTUDIO GENERAL DE LOS MÉTODOS DE UN PASO

El método de Euler es un caso particular de los métodos de un paso, que se definen de forma general a continuación.

Definición 13.2.1:

Los métodos de un paso tienen como **expresión general**:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h).$$

Se denomina **función incremento** a $\Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, donde se supone que Φ verifica todas las condiciones que sean precisas: continuidad, diferenciabilidad...

Si la variable z_{n+1} no aparece en el segundo miembro se trata de un **método explícito** y es un **método implícito** en caso contrario.

El método de *Euler* es un método explícito de un paso con $\Phi(x_n, z_n, h) = f(x_n, z_n)$.

13.2.1. Control del error: error de redondeo, error de truncamiento, error local y error global

En todo método numérico es imprescindible controlar el **error** cometido. Hay dos fuentes fundamentales de error al resolver un problema de valor inicial: una inherente al método, debida a la fórmula utilizada, y otra, que se denomina **error de redondeo**, debida al número de dígitos que utilice el ordenador, a la secuencia

con la que se realicen los cálculos.... El error global está acotado por la suma de los valores absolutos de los errores de fórmula y de redondeo.

El **error de redondeo** se debe a las cifras decimales que desprecia el ordenador utilizado. Tiene un gran interés, como se analizará al estudiar la estabilidad, pero en esta primera aproximación a los métodos numéricos no se va a estudiar con profundidad. Sin embargo, aunque no se estudie aquí, es fundamental señalar que el error de redondeo tiene interés porque muchas veces no es suficiente disminuir el tamaño del paso para reducir el error global, pues se puede llegar a un límite en el que aumentan los errores debidos al redondeo, siendo importante en estos casos deducir el **tamaño de paso óptimo y crítico**. Otra reflexión a destacar es que, en ocasiones, métodos que son “peores” pero mejor programados, pueden aproximar mejor la solución, al disminuir este error.

Se estudian a continuación los siguientes tipos de error:

- Error global.
- Error de truncamiento.
- Error local.

Definición 13.2.2:

Dado un método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se denomina **error global** a la diferencia entre el valor exacto de la solución y el valor que suministra el método:

$$e(h) = y(x) - z(x_N),$$

con $x = x_N = x_0 + Nh$.

En general, si no se conoce la solución, es decir, si no se sabe resolver la ecuación diferencial, no es posible calcular ese error.

Una forma de medir la eficacia de un método numérico es aplicarlo a ecuaciones diferenciales de solución conocida, evaluar dicho error y analizar de este modo el comportamiento del método.

Debido a que generalmente no es posible conocer el error global, lo que usualmente se utiliza es el error de truncamiento o, con más precisión, el orden del error de truncamiento. El **error de truncamiento** es el que se produce en un paso al aplicar el método, suponiendo que en los pasos precedentes no ha existido ningún error. Es decir, es la diferencia en el paso $n + 1$ entre el valor que asigna la solución exacta y el valor calculado por el método numérico suponiendo que z_n se conoce de forma exacta y es posible sustituirlo por $y(x_n)$.

Definición 13.2.2:

Si se tiene un método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se denomina **error de truncamiento** a:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)]$$

donde $y(x)$ es la solución exacta.

Para evaluar el error de truncamiento en la abscisa x_{n+1} se usa el desarrollo de *Taylor*, por lo que se sabe que:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \dots + \left(\frac{h^k}{k!}\right) \cdot y^{(k)}(x) + \left(\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\right) \cdot y^{(k+1)}(c) \quad (13.2.1)$$

donde c es algún punto entre x y $x+h$.

Se observa que, según la definición anterior, para calcular el error de truncamiento para un problema de valor inicial dado es preciso, también, conocer la solución exacta de la ecuación diferencial. Sin embargo, es posible evaluar el orden del error de truncamiento cometido.

Definición 13.2.3:

Dado el método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, se dice que tiene **error de truncamiento de orden p** si:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)] = O(h^p).$$

donde $y(x_n)$ es una solución genérica de cualquier problema de valor inicial bien propuesto al que se aplique el método.

Cálculo del orden del error de truncamiento para el método de Euler:

En la expresión 13.2.1 si k es igual a uno, x es igual a x_n y $x+h = x_n + h = x_{n+1}$ se tiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(c).$$

Si se supone que z_n es exacto y por tanto igual a $y(x_n)$, como $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = f(x_n, z_n)$ se obtiene:

$$z_{n+1} = y(x_n) + h \cdot f(x_n, z_n),$$

por tanto la diferencia entre el valor exacto en x_{n+1} y el que suministra el método si en la abscisa anterior en lugar de tener z_n se conociera como valor la solución teórica es:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - z_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(c).$$

donde una cota superior del valor absoluto de ese error es $M \cdot \frac{h^2}{2} = O(h^2)$ siendo

$M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|$. Por tanto se dice que el **error de truncamiento** del método

de Euler es de **orden 2**.

Definición 13.2.4:

Dado el método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Si $u(x)$ es la solución del problema de valor inicial que verifica $u' = f(x, u)$, $u(x_n) = z_n$, se define como **error local** en x_{n+1} a la diferencia entre el valor que toma dicha solución en x_{n+1} , $u(x_{n+1})$, y el valor, z_{n+1} , obtenido con el método:

$$el_{n+1} = u(x_{n+1}) - z_{n+1}.$$

En el caso del método de Euler el error local resulta igual al término complementario de la fórmula de *Taylor* aplicada a $u(x)$.

Para obtener el error local se busca la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (x_n, z_n) , y se calcula el error que se comete al pasar a x_{n+1}

mediante el método.

Si un método tiene un error de truncamiento de orden $O(h^{p+1})$ la intuición sugiere que el orden del error local es también $O(h^{p+1})$. Usualmente el error local y el error de truncamiento toman valores parecidos pues la solución $u(x)$ debe estar próxima a $y(x)$ salvo casos especiales.

Para calcular el error global se tienen que tener en cuenta tres factores:

- Los errores de partida, errores de medida en el valor inicial...
- El error que se comete en cada paso,
- La forma en que esos errores se propagan,

Desgraciadamente el error local está afectado por los errores de partida.

En el caso del método de *Euler* el error de truncamiento es proporcional al cuadrado del tamaño de paso y a la segunda derivada de la solución en un punto intermedio, por lo que para estimar este error conviene encontrar una cota del valor absoluto de esta derivada. Se observa que este error es el cometido entre el paso n y el $n + 1$, por lo que también interesa estimar el error acumulado, aún más difícil de calcular, pero que se puede estimar de forma intuitiva, en la que no se está teniendo en cuenta el efecto que el error en un paso tendrá en los pasos que le siguen, sin más que multiplicar por el número de pasos n la estimación anterior, con lo que se obtiene que este error es proporcional al tamaño de paso. Se puede probar que sobre cualquier intervalo finito este error es, en el método de *Euler*, menor que una constante por el tamaño de paso. Y en general es cierto que si el error de truncamiento es proporcional a h^{p+1} entonces para un intervalo finito, el

error acumulado está acotado por una constante multiplicado por h^p .

De forma simplista se podría pensar que para reducir el error global basta con disminuir el tamaño de paso, pero desafortunadamente entonces puede ocurrir que aumenten los errores acumulados de redondeo, por lo que, se puede probar, existe una elección óptima del tamaño de paso.

13.2.2. Convergencia y consistencia en los métodos de un paso

En esta sección se definen los conceptos de **convergencia**, **consistencia** y **estabilidad** de un método.

Se dice que un método es convergente si, al aplicarlo a cualquier problema de valor inicial bien propuesto, la solución aproximada obtenida con el método converge, cuando h tiende a cero, siendo $nh = x_n - x_0$, a la solución exacta del problema, en todos los puntos x_n de la partición del intervalo $[a, b]$, siempre que el error en el paso inicial tienda a cero con el tamaño del paso, h .

Definición 13.2.5:

Un método numérico de un paso es **convergente** en $[a, b]$ si para todo problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, y para todo $x^* \in [a, b]$, se verifica que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = x^* - x_0}} |y(x^*) - z_n| = 0 \text{ cuando } \lim_{h \rightarrow 0} z_0 = y_0.$$

Al no ser posible evaluar el método en todo problema de valor inicial resulta

difícil probar de forma directa la convergencia de un método, por lo que se debe utilizar otro camino.

Definición 13.2.6:

Un método numérico de un paso es **consistente de orden p** si para toda función ψ continua y suficientemente regular (derivable hasta el orden que requiera el método) se verifica que:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = O(h^{p+1}).$$

Se observa que entonces el error de truncamiento es de orden $p + 1$.

Definición 13.2.7:

Se dice que un método es **consistente** si su orden de consistencia es p , $p \geq 1$.

Definición 13.2.8:

Un método es **estable** si hay dependencia continua de los valores iniciales.

Los métodos de un paso que son consistentes, son estables.

Teorema 13.2.1:

Dado el método numérico de un paso, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, h)$, tal que $\Phi(x_n, z_n, h)$ es lipschiziana respecto de la segunda variable, se tiene que, el método es convergente si y sólo si es consistente.

En los métodos de un paso la consistencia es una condición necesaria y suficiente para la convergencia, pues estos métodos son siempre estables. Los métodos de un paso, y por tanto los métodos *Runge-Kutta*, son estables como

consecuencia de la estabilidad del problema continuo. Basta que la función $f(x, y)$ verifique la condición de *Lipschitz* con constante de *Lipschitz* L para que la función $\Phi(x, y, h)$ verifique también la condición de *Lipschitz* con constante $\Lambda(L)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.2.1: Calcular el valor aproximado en $x = 1$ de la solución del problema de valor inicial $y' = -y + x + 1$, $y(0) = 1$ con $n = 10$ y con $z_0 = 1$ utilizando el método de Euler. Calcular el error global, el error local y el error de truncamiento.

Como $n = 10$, $x = 1$, $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = x_0 + nh \Rightarrow 1 = 0 + 10h \Rightarrow h = 0,1 \Rightarrow x_n = 0,1n$.

El método de Euler: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n) = z_n + h \cdot (-z_n + x_n + 1) = z_n + 0,1 \cdot (-z_n + 0,1n + 1) = 0,9z_n + 0,01n + 0,1$. Se resuelve la ecuación en diferencias: $z_n = 0,9^n + 0,1n \Rightarrow z_{10} = 1,348678 \cong y(1) \Rightarrow z_{11} = 1,4138102 \cong y(1,1)$.

Cálculo del error global:

Para obtener la solución exacta de la ecuación diferencial se calcula la solución general: $y(x) = x + Ce^{-x}$. Como $y(0) = 1$ se tiene que $C = 1$ y la solución del problema de valor inicial es $y(x) = x + e^{-x} \Rightarrow y(1) = 1,367879 \Rightarrow y(1,1) = 1,4328711$.

El error global es: $e(0,1) = |y(1) - z_{10}| = 0,019201$.

Cálculo del error local:

Para calcular el error local en el paso $n + 1$, se obtiene la solución que pasa por el punto (x_n, z_n) .

Se impone que la solución pase por $(x_n, z_n) \Rightarrow z_n = x_n + C e^{-x_n} \Rightarrow$

$$C = \frac{z_n - x_n}{e^{-x_n}} \Rightarrow u(x_{n+1}) = x_{n+1} + \frac{z_n - x_n}{e^{-x_n}} e^{-x_{n+1}} = 1,1 + \frac{1,348678 - 1}{e^{-1}} e^{-1,1} = 1,1 +$$

$$0,348678 e^{-0,1} = 1,4154969.$$

El error local es:

$$el_{n+1} = u(x_{n+1}) - z_{n+1} = 1,4154969 - 1,4138102 = 0,0016867.$$

Cálculo del error de truncamiento:

Para calcular el error de truncamiento en el paso $n + 1$, se aplica la definición:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)] = y(1,1) - (y(1) + h \cdot f(x_n, y(1))) \\ &= y(1,1) - (y(1) + h \cdot (-y(1) + x_n + 1)) = 1,4328711 - (1,367879 + 0,1(-1,367879 + 1 \\ &+ 1)) = 1,4328711 - 1,4310911 = 0,0017799. \end{aligned}$$

El error de truncamiento es: $T_{n+1} = 0,0017799$.

Ejemplo 13.2.2: Estudiar la convergencia del método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_{n+1}, z_n) - f(x_n, z_n))$. Aplicar el método para calcular el valor aproximado de la solución del problema: $y' = x \cdot y$; $y(-2) = e^2$, en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, con un tamaño de paso $h = 0,1$. ¿Son buenas las aproximaciones obtenidas?

Estudio del orden de consistencia del método:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = \psi(x_n + h) - [\psi(x_n) + h \cdot (f(x_n + h,$$

$$\begin{aligned} \psi(x_n) - f(x_n, \psi(x_n)) &= (\psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots) - [\psi(x_n) + h \cdot (\psi'(x_n) + \\ &(h \cdot f_x) + \dots) - \psi'(x_n)] = \psi(x_n) \cdot (1 - 1) + h \cdot \psi'(x_n) \cdot (1 - 1 - 1) + \dots = -h \cdot \psi'(x_n) + \dots = \\ &O(h). \end{aligned}$$

El orden de consistencia $p = 0 < 1$, por lo que el método no es consistente y por tanto no es convergente.

La solución exacta es:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(1) = 1,6487212... \Rightarrow y(2) = 7,3890561...$$

Se aplica el método: Como $f(x, y) = x \cdot y$ entonces $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_{n+1}, z_n) - f(x_n, z_n)) = z_n + h \cdot (x_{n+1} \cdot z_n - x_n \cdot z_n) = z_n + h \cdot (z_n \cdot h) = z_n \cdot (1 + h^2) \Rightarrow z_n = C \cdot (1 + h^2)^n$. Al ser $z_0 = e^2 = C \Rightarrow z_n = e^2 \cdot (1 + h^2)^n$.

$$x_n = x_0 + nh \Rightarrow 1 = -2 + 0,1n \Rightarrow n = 30 \Rightarrow z_{30} = 9,959... \Rightarrow e = |y(1) - z_{30}| = 8,30.$$

$$\Rightarrow 2 = -2 + 0,1n \Rightarrow n = 40 \Rightarrow z_{40} = 11,001297... \Rightarrow e = |y(2) - z_{40}| = 3,62.$$

Son malas aproximaciones de la solución exacta.

Ejemplo 13.2.3: Calcular α_1 , α_2 , β y γ para que el método:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\alpha_1 \cdot f(x_n + \beta h, z_n) + \alpha_2 \cdot f(x_n, z_n + \gamma h)) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 f_y(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) - 1\}$$

tenga orden de consistencia máximo, donde f_y representa la derivada parcial de f respecto de la segunda variable.

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ

suficientemente regular, a la que se aplica el método, con lo que se tiene que:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = \psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot (\alpha_1 \cdot f(x_n + \beta \cdot h, \psi(x_n)) + \alpha_2 \cdot f(x_n, \psi(x_n + \gamma \cdot h))) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y(x_n, \psi(x_n)) \cdot \{f(x_n, \psi(x_n)) - 1\}] \quad (13.2.2)$$

utilizando el desarrollo de Taylor:

$$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots \Rightarrow$$

Se aplica a un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, denominando

$$f_n = f(x_n, \psi(x_n)), f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, \psi(x_n)), f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \psi(x_n)), f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, \psi(x_n)), f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_n, \psi(x_n)), f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, \psi(x_n)), \dots$$

$$\bullet \quad \psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \frac{h^3}{6} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot f_n^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) + \dots$$

Utilizando el desarrollo de Taylor para funciones de dos variables:

$$\bullet \quad -h \cdot \alpha_1 \cdot f(x_n + \beta \cdot h, \psi(x_n)) = -h \cdot \alpha_1 \cdot (f_n + \beta \cdot h \cdot f_x + \frac{1}{2} (\beta \cdot h)^2 \cdot f_{xx} + \dots)$$

$$\bullet \quad -h \cdot \alpha_2 \cdot f(x_n, \psi(x_n + \gamma \cdot h)) = -h \cdot \alpha_2 \cdot (f_n + \gamma \cdot h \cdot f_y + \frac{1}{2} (\gamma \cdot h)^2 \cdot f_{yy} + \dots)$$

$$\bullet \quad -h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y(x_n, \psi(x_n)) \cdot \{f(x_n, \psi(x_n)) - 1\} = -h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y \cdot \{f_n - 1\}$$

Se sustituyen estas expresiones en la expresión 13.2.2, y se hacen operaciones sacando factor común las potencias del tamaño de paso, con lo que

se obtiene que:

$$h \cdot f_n \cdot (1 - \alpha_1 - \alpha_2) + h^2 \cdot [f_x \cdot (\frac{1}{2} - \alpha_1 \cdot \beta) + f_y \cdot f_n (\frac{1}{2} - \alpha_2 \cdot \gamma) + f_y \cdot (-\alpha_2 \cdot \gamma + \alpha_2 \cdot \gamma)] +$$

$$h^3 \cdot [f_{xx} \cdot (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \beta^2) + \frac{1}{3} f_{xy} \cdot f_n + \frac{1}{6} f_{yy} \cdot f_n^2 + \frac{1}{6} f_y \cdot f_x + \frac{1}{6} (f_y)^2 \cdot f_n - \frac{1}{2} f_{yy} \cdot \gamma^2 \cdot \alpha_2] + \dots$$

Por tanto si $1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ se tiene que el orden de consistencia p es mayor o igual que 1. Si $\frac{1}{2} - \alpha_1 \cdot \beta = 0$ y $\frac{1}{2} - \alpha_2 \cdot \gamma = 0$, entonces el orden de consistencia p es mayor o igual que 2. Sin embargo el coeficiente de h^3 es imposible de anular siendo ψ una función cualquiera, pues por ejemplo, el coeficiente de $f_y \cdot f_x$ es $\frac{1}{6}$ distinto de cero.

En consecuencia, el orden de consistencia máximo que es posible conseguir es $p = 2$, haciendo $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta = \frac{1}{2\alpha_1}$, $\gamma = \frac{1}{2\alpha_2}$. Se tiene una familia uniparamétrica de soluciones. Una solución posible es: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = 1$.

Ejercicios

13.4. Estudiar la convergencia del método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_{n+1}, z_n)$. Aplicar el método para calcular el valor aproximado de la solución del problema: $y' = xy$; $y(-2) = e^2$, en el punto $x = 1$, con un tamaño de paso $h = 0,01$. ¿Son buenas las aproximaciones obtenidas?

(Solución: Convergente, $z_{300} = 1,6486381$; $y(1) = 1,6487212$; Buena aproximación)

13.5. Aplicar el método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_n + h, z_n) + \frac{1}{2} f(x_n, z_n) \right)$$

al problema $y' = y$, $y(-1) = e^{-1}$, para obtener la solución aproximada en $x = 1$, tomando como tamaño de paso $h = 0,02$. Calcular el orden de consistencia del método.

(Solución: $z_n = e^{-1} \cdot (1 + h)^n$; $z_{100} = 2,665\dots$; $y(1) = e = 2,7182\dots$; $p = 1$).

13.6. Aplicar el método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_n + h, z_n) + \frac{1}{2} f(x_n, z_n + h) \right) + h^2 \cdot \frac{1}{2} f_y(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) - 1\}$$

al problema $y' = 2x + 1$, $y(0) = 1$, para obtener la solución aproximada en $x = 3$, tomando como tamaño de paso $h = 0,1$. Calcular el error de truncamiento.

(Solución: $z_n = 1 + nh + (nh)^2$; $z_{30} = 13 = y(3)$. $T_{n+1} = 0$. La solución exacta es un polinomio de segundo grado: $y = x^2 + x + 1$).

13.7. Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\alpha_1 f(x_n + \beta h, z_n) + \alpha_2 f(x_n, z_n + \gamma h)) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 f_y(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) -$$

1} si

a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = 1$.

(Solución: $p = 2$)

b) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

(Solución: $p = 0$)

$$c) \alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{3}{4}, \beta = 1, \gamma = 0.$$

(Solución: $p = 1$)

13.3. MÉTODOS DE TAYLOR

Al intentar mejorar la solución obtenida con la aplicación del método de *Euler* aparecen de manera natural los **métodos de Taylor**. Desde un punto de vista teórico los métodos de *Taylor* son sencillos y permiten obtener una mayor precisión sin más que aumentar convenientemente el grado del desarrollo. Para obtener los métodos de *Taylor* se debe aplicar a la solución de la ecuación diferencial un desarrollo de *Taylor* de orden k en cada punto $x_n = x_0 + nh$, con lo que se obtiene la fórmula:

$$y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_n + \dots + \frac{h^k}{k!} \cdot y^{(k)}_n.$$

Por tanto, para poder aplicar un método de *Taylor* de orden k se tiene el inconveniente de tener que evaluar, en cada paso, las primeras k derivadas de la función $f(x, y)$ que define la ecuación diferencial, lo que actualmente se realiza sin dificultad mediante programas de cálculo simbólico, aunque se debe tener en cuenta que dicha función debe tener derivadas parciales sucesivas en la región del plano en la que se evalúe la curva solución.

Como $y'(x) = f(x, y(x))$, derivando se obtiene que $y'_n = f(x_n, y(x_n))$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = f_x + f_y \cdot f$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,$$

$$y(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\right)^2 \cdot f(x, y(x)) = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f,$$

y así sucesivamente, por lo tanto al aumentar el orden se complica la expresión de

la derivada $\frac{d^k y}{dx^k}$.

De esta forma se obtiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot (f_n)^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) +$$

... =

$$z_n + h \cdot f(x_n, z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x(x_n, z_n) + f_y(x_n, z_n) \cdot f(x_n, z_n)) + \frac{h^3}{3!} \cdot (f_{xx}(x_n, z_n) +$$

$$2f_{xy}(x_n, z_n) \cdot f(x_n, z_n) + f_{yy}(x_n, z_n) \cdot (f(x_n, z_n))^2 + f_y(x_n, z_n) \cdot f_x(x_n, z_n) + (f_y(x_n, z_n))^2 \cdot f(x_n, z_n)) +$$

...

siendo el término complementario:

$$T_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(c)$$

que se interpreta como la diferencia entre el valor calculado por el método y el valor de la solución exacta en x_{n+1} suponiendo que fuera conocida así como sus derivadas hasta el orden p en x_n .

Como se puede esperar por la construcción, el método de *Taylor* de orden p tiene un error de truncamiento $O(h^{p+1})$ y el orden del error de consistencia es p ,

siendo, por tanto el orden del error inherente al método $O(h^p)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.3.1: Aplicar el método de Euler y los métodos de Taylor de orden dos y cuatro a $y' = 1 + x - y$, $y(0) = 1$, con tamaño de paso 0,1, para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial 1. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Analizar el orden del error.

$$x_0 = 0; h = 0,1; x_n = 1 = x_0 + nh = nh = n \cdot 0,1 \Rightarrow n = 10.$$

Método de Euler:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$$

Como $f_n = f(x_n, z_n) = 1 + x_n - z_n$ resulta que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) = (1 - h) \cdot z_n + h \cdot (1 + nh).$$

Método de Taylor dos: $y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (y''_n)$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n)$$

Como $y' = f(x, y) = 1 + x - y \Rightarrow y'' = 1 - y' = y - x$:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (z_n - x_n) = (1 - h - \frac{h^2}{2!}) \cdot z_n + h \cdot (1 + nh) + n$$

$$\frac{h^3}{2!}.$$

Método de Taylor cuatro:

$$y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (y''_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (y'''_n) + \frac{h^4}{4!} \cdot (y^{(iv)}_n)$$

Como $y''' = y' - 1 = x - y$; $y^{(iv)} = 1 - y' = y - x \Rightarrow$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (z_n - x_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (x_n - z_n) + \frac{h^4}{4!} \cdot (z_n - x_n) = (1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}) \cdot z_n + h \cdot (1 + n(h - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^4}{4!})).$$

Resultados de aplicar el método de Euler y métodos de Taylor de orden dos y cuatro con tamaño de paso 0,1 a: $y' = 1 + x - y$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$						
Exacto	Euler	Error	Taylor de orden dos	Error	Taylor de orden cuatro	Error
1,36787944	1,348678	0,0192	1,368541	0,0006616	1,36787977	$3,332 \times 10^{-7}$

Al comparar los distintos errores globales cometidos se observa que disminuyen al aumentar el orden de consistencia del método siendo el error en el método de Euler igual a 0,0192, el error en el método de Taylor dos igual a 0,0006616 y el error en el método de Taylor cuatro igual a 0,0000003332.

Ejemplo 13.3.2: Resolver por el método de Euler y por el método de Taylor dos la ecuación diferencial de orden superior del péndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\text{sen } \theta$$

Se obtiene el sistema asociado, introduciendo las nuevas variables: $x = \theta$, $y = x'$; que dependen de la variable independiente t , con lo que se tiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x' = y, \\ \frac{dy}{dt} = y' = -\text{sen } x \Rightarrow \end{array} \right.$$

Si se conoce un valor inicial en el punto t_0 , $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ y $h > 0$ es el tamaño del paso se tiene aplicando el método de *Euler* a ambas ecuaciones:

$$t_{n+1} = t_n + h \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h \cdot y_n; \\ y_{n+1} = y_n - h \cdot \text{sen}(x_n); \end{array} \right.$$

Para aplicar el método de *Taylor* dos: $z_{n+1} = z_n + h \cdot z'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot z''_n$, se obtienen

las derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \Rightarrow x'' = y' = -\text{sen } x \\ y' = -\text{sen } x \Rightarrow y'' = -(\cos x) \cdot x' = -(\cos x) \cdot y \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h \cdot x'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot x''_n = x_n + h \cdot y_n - \frac{h^2}{2} \cdot \text{sen}(x_n); \end{array} \right.$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_n = y_n - h \cdot \text{sen}(x_n) - \frac{h^2}{2} \cdot \text{cos}(x_n) \cdot y_n;$$

Ejemplo 13.3.3: Aplicar el método de Taylor dos a:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con tamaño de paso $h = 0,2$, para aproximar la solución en $x = 0,2$, tomando como valor inicial $\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Método de Taylor dos: } z_{n+1} = z_n + h \cdot z'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot z''_n = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n)$$

donde:

$$f(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n1} \\ z_{n2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f_x(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n1} \\ z_{n2} \end{pmatrix},$$

$$f_y(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x_n \end{pmatrix},$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x(x_0, z_0) + f_y(x_0, z_0) \cdot f(x_0, z_0))$$

$$f(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_x(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_y(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,02 \\ 0,2 \end{pmatrix} \cong \mathbf{y}(0,2).$$

Ejercicios

13.1. Aplicar el método de Taylor de orden dos a $y' = 2 + 2y$, $y(-4) = 1$, con tamaño de paso 0,1 y 0,05 para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Comparar el error cometido en ambos casos.

(Solución: $z_n = -1 + 2(1 + 2h + 2h^2)^n$; $z_{50} = 41592,12291\dots$, $z_{100} = 43375,82874\dots$, $y(1) = 44051,93159\dots$, $e(0,1) = 2460,\dots$, $e(0,05) = 676,\dots$).

13.2. Aplicar el método de Taylor de orden tres a $y' = 2 + 2y$, $y(-4) = 1$, con tamaño de paso 0,1 y 0,05 para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Comparar el error

cometido en ambos casos.

(Solución: $z_n = -1 + 2(1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3)^n$; $z_{50} = 43926,90681\dots$, $z_{100} =$

$4034,98836\dots$, $y(1) = 44051,93159\dots$, $e(0,1) = 125,\dots$, $e(0,05) = 17,\dots$).

13.3. Resolver por el método de Euler y por el método de Taylor dos la ecuación diferencial de orden superior del péndulo linealizada: $\theta'' = -\theta$, que tiene como sistema lineal asociado:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

NO COPIAR,
© DE LOS
AUTORES

13.4. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Los métodos de Taylor de orden superior proporcionan una convergencia rápida, pero su implementación es complicada, ya que es preciso calcular los valores aproximados de las derivadas sucesivas de la solución. El método de Euler en cambio es muy sencillo de aplicar, pero sin embargo su convergencia es lenta. Es interesante entonces obtener métodos numéricos más sencillos que los de Taylor, pero cuya convergencia sea rápida.

Si la función f depende sólo de la variable x , $f(x, y) = f(x)$, existen fórmulas numéricas, anteriores incluso a la fórmula de Euler, que tienen una convergencia más rápida que la que se obtiene con el método de Euler. Así, si el problema que

se quiere aproximar es $\begin{cases} y' = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ la solución que se busca se puede expresar

de la forma $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds$. Para obtener un valor aproximado en un punto

x^* , se puede aplicar, por ejemplo, la regla del punto medio del cálculo integral:

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}\right).$$

En este caso el error global que se comete es de orden 2, con lo cual aunque la fórmula es tan sencilla como la de Euler, la convergencia es mejor.

El problema en esta fórmula es obtener el valor de $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$. Runge pensó que se podría sustituir este valor por el valor aproximado obtenido al aplicar la

fórmula de Euler con un tamaño del paso que fuera la mitad del valor de h , de manera que $y(x_n + \frac{h}{2})$ se sustituyera por: $z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n)$, con lo cual la fórmula resultante obtenida es:

$$z_{n+1} = z_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n)).$$

Otra fórmula del mismo tipo es:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}[f(x_n, z_n) + f(x_n + h, z_n + hf(x_n, z_n))].$$

En este caso se ha sustituido en la fórmula de Euler el valor de la función f en el punto (x_n, z_n) por la media aritmética de los valores de f en los puntos (x_n, z_n) y (x_{n+1}, z_{n+1}) .

Las dos fórmulas anteriores tienen una convergencia mas rápida que la del método de Euler, ya que en ambos casos la convergencia es de orden 2.

La generalización de estas fórmulas con vistas a la obtención de algoritmos con orden de convergencia mayor evitando el cálculo de las derivadas dio lugar al desarrollo, desde finales del siglo XIX, de los **métodos de Runge-Kutta**, en los que el cálculo de las derivadas se sustituye por distintas evaluaciones de la función $f(x, y)$, más fáciles de programar.

Definición 13.4.1:

Se denomina **método de Runge-Kutta** de s etapas a un método de expresión:

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j; \quad \text{siendo } k_j = f(x_n + c_j h, z_n + h \sum_{i=1}^s a_{ji} k_i), j = 1, \dots, s$$

Se impone a estos coeficientes las condiciones necesarias para que el error de truncamiento sea del orden que se quiere conseguir.

Los coeficientes b_j , c_j , y a_{ij} se representan abreviadamente mediante lo que se denomina **tablero de Butcher** del método correspondiente:

$$\begin{array}{c|c} c^T & A \\ \hline & b \end{array}$$

donde $c = (c_1, \dots, c_s)$, $b = (b_1, \dots, b_s)$ y $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, s$.

Si A es triangular inferior el método es explícito y en caso contrario, implícito.

Se estudian con detenimiento a continuación los métodos de Runge-Kutta explícitos. La expresión general de un método explícito de s etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \dots + b_s \cdot k_s]$$

con

$$k_1 = f(x_n, z_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + h \cdot a_{21} \cdot k_1)$$

⋮

$$k_s = f(x_n + c_s \cdot h, z_n + h \cdot (a_{s1} \cdot k_1 + a_{s2} \cdot k_2 + \dots + a_{s,s-1} \cdot k_{s-1}))$$

Las fórmulas de Runge-Kutta son pues fórmulas de un paso en las que la función $\Phi(x_n, z_n, h)$ es una media ponderada de los valores que toma la función $f(x, y)$ en s puntos de \mathfrak{R}^2 .

Si $s = 1$, la forma general es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot b_1 \cdot f(x_n, z_n).$$

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ suficientemente regular tal que:

$$\begin{aligned} \psi(x_{n+1}) - (\psi(x_n) + h \cdot b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n))) &= (\psi(x_n) + \psi'(x_n) \cdot h + \psi''(x_n) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots) - \\ (\psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) \cdot b) &= (1 - b) \cdot \psi'(x_n) \cdot h + \psi''(x_n) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Se tiene entonces que el método es consistente si y sólo si $b = 1$, es decir, el único método de *Runge-Kutta* de una única etapa resulta ser el método de *Euler*.

13.4.1. Métodos de Runge-Kutta de dos etapas o métodos de Euler modificados

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de dos etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot f(x_n, z_n) + b_2 \cdot f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, z_n))),$$

donde $k_1 = f(x_n, z_n)$ y $k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, z_n))$. Se pretende obtener las relaciones entre los coeficientes b_1 , b_2 , c_2 y a_{21} para obtener el máximo orden de consistencia posible, 2.

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ suficientemente regular tal que:

$$OC = \psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] =$$

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot (b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n)) + b_2 \cdot f(x_n + c_2 \cdot h, \psi(x_n) + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, \psi(x_n))))]$$

Utilizando el desarrollo de Taylor:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \psi(x_{n+1}) &= \psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots = \psi(x_n) + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \\ &\frac{h^3}{6} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot f_n^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) + \dots \end{aligned}$$

siendo $f_n = f(x_n, \psi(x_n))$, $f_x = f_x(x_n, \psi(x_n))$, ... ya que se supone que se aplica a un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad -h \cdot b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n)) &= -h \cdot b_1 \cdot f_n \\ \bullet \quad -h \cdot b_2 \cdot f(x_n + c_2 h, \psi(x_n) + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, \psi(x_n))) &= -h \cdot b_2 \cdot [f_n + \frac{1}{1!} \cdot (f_x \cdot c_2 \cdot h + f_y \cdot a_{21} \cdot h \cdot f_n) \\ &+ \frac{1}{2!} (f_{xx} \cdot (c_2 \cdot h)^2 + 2f_{xy} \cdot (c_2 \cdot h) \cdot (a_{21} \cdot h \cdot f_n) + f_{yy} \cdot (a_{21} \cdot h \cdot f_n)^2) + \dots \end{aligned}$$

Se hacen operaciones sacando factor común las potencias del tamaño de paso:

$$\begin{aligned} OC &= h \cdot f_n \cdot (1 - b_1 - b_2) + h^2 \cdot (f_x \cdot (\frac{1}{2} - b_2 \cdot c_2) + f_y \cdot f_n (\frac{1}{2} - b_2 \cdot a_{21})) + h^3 \cdot [f_{xx} \cdot (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &b_2 \cdot c_2^2) + f_{xy} \cdot f_n (\frac{1}{3} - b_2 \cdot c_2 \cdot a_{21}) + f_{yy} \cdot f_n^2 (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} b_2 \cdot a_{21}) + \frac{1}{6} (f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n)] + \dots \end{aligned}$$

Por tanto si $1 - b_1 - b_2 = 0$ se tiene que el orden de consistencia p es mayor o igual que 1. Si además $\frac{1}{2} - b_2 \cdot c_2 = 0$ y $\frac{1}{2} - b_2 \cdot a_{21} = 0$, entonces el orden de

consistencia p es mayor o igual que 2. Sin embargo el coeficiente de h^3 es imposible de anular siendo ψ una función cualquiera, pues por ejemplo, el coeficiente de $f_y \cdot f_x$ es $\frac{1}{6}$ que es distinto de cero.

En consecuencia, el orden de consistencia máximo que es posible conseguir es $p = 2$, haciendo $b_1 + b_2 = 1$; $b_2 \cdot c_2 = \frac{1}{2}$; $b_2 \cdot a_{21} = \frac{1}{2}$. Se tiene una familia uniparamétrica de soluciones.

Las fórmulas de *Runge-Kutta* generales de dos etapas se obtienen imponiendo que el orden de consistencia sea $p = 2$, para lo que hay que resolver un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$b_1 + b_2 = 1; b_2 \cdot c_2 = \frac{1}{2}; b_2 \cdot a_{21} = \frac{1}{2}.$$

por lo que hay infinitas soluciones. Se tiene entonces una familia uniparamétrica de fórmulas de Runge-Kutta. La primera ecuación

$$b_1 + b_2 = 1$$

asegura la consistencia de la fórmula, y las dos restantes garantizan que la consistencia sea de orden 2.

Tal y como se han encontrado, se observa que estos métodos permiten obtener un grado de aproximación equivalente a los métodos de *Taylor* sin necesidad de calcular la derivada de la función. En estas fórmulas el orden del error de truncamiento es proporcional al cubo del tamaño de paso, $O(h^3)$, y el error inherente al método en un intervalo finito es proporcional al cuadrado del tamaño

de paso $O(h^2)$, pues son equivalentes al método de *Taylor* de orden dos.

Según los textos que se utilicen los nombres de estos métodos varían de unos a otros: como método del punto medio, de *Euler* modificado, de *Euler* mejorado...

Algunas de las fórmulas obtenidas son:

$$b_2 = \frac{1}{2}; \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n))),$$

$$b_2 = 1; \quad z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n))),$$

$$b_2 = \frac{3}{4}; \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (f(x_n, z_n) + 3f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3} \cdot f(x_n, z_n))).$$

Las dos primeras coinciden con las introducidas al comienzo de esta sección.

El método obtenido para $b_2 = \frac{1}{2}$ se conoce en algunos textos como **método**

de Euler mejorado: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n)))$ que, como antes se ha indicado, consiste en reemplazar en el método de *Euler* la función $f(x_n, z_n)$ por el promedio de sus valores en los puntos extremos, y tomar en x_{n+1} como z_{n+1} el valor que proporciona el método de *Euler*.

El segundo método obtenido como resultado de tomar $b_2 = 1$ se conoce en ocasiones como el **método de Euler modificado:** $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n)))$, en el que se utiliza el valor de la función $f(x, y)$ evaluado en el punto

medio entre x_n y $x_n + h$ tomando en ese punto, $x_n + \frac{h}{2}$, el valor obtenido mediante

el método de *Euler*.

Por ejemplo, si se aplica el método de Euler mejorado y el método de Euler a un problema y se analizan los errores, se obtiene:

Resultados de aplicar el método de Euler y el método de Euler mejorado , con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$.					
	Método de Euler		Método de Euler mejorado		Exacto
x	h = 0,1	h = 0,05	h = 0,1	h = 0,05	
1	34,411490	45,588400	59,938223	63,424698	64,897803
Error global	30,486313	19,309403	4,95958	1,473105	

Se observa que los resultados obtenidos son mucho mejores con el método de *Euler mejorado*, incluso comparando *Euler* con un tamaño de paso de 0,05 con *Euler mejorado* con 0,1, pero al comparar con el valor exacto los errores son todavía demasiado grandes. Se observa también como al reducir a la mitad el tamaño de paso, el error se reduce en el método de Euler en algo aproximado a la mitad, mientras que en el método de *Euler mejorado* se reduce hacia la cuarta parte: $4,959/4 \cong 1,25 \cong 1,4$.

13.4.2. Métodos de Runge-Kutta de tres etapas

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de tres etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + b_3 \cdot k_3),$$

donde:

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1) \text{ y}$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2).$$

Se pretende obtener las relaciones entre los coeficientes b_1 , b_2 , b_3 , c_2 , c_3 , a_{21} , a_{31} y a_{32} para obtener el máximo orden de consistencia posible, 3. Se obtienen así 6 ecuaciones, con las que se deben calcular ocho coeficientes; se obtiene así una familia biparamétrica de fórmulas de Runge-Kutta de tres etapas, con un orden de convergencia 3. De forma análoga a las fórmulas de orden dos ya estudiadas, la ecuación:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

garantiza la consistencia de la fórmula, mientras que las ecuaciones de la forma:

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad i = 2, 3$$

aseguran la consistencia de orden 2.

Los métodos de *Runge-Kutta* de orden tres no se suelen usar en la práctica.

Los que alguna vez se utilizan son:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + k_3) + \frac{2h}{3} \cdot k_2, \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_1), k_3 = f(x_n + h, z_n + h(2k_2 - k_1)),$$

y el método conocido como el **método de Runge-Kutta Heun**:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (k_1 + 3k_3), \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{3}, z_n + \frac{h}{3}k_1), k_3 = f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3}k_2).$$

Su tablero de *Butcher* es:

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
	1/4	0	3/4

13.4.3. Métodos de Runge-Kutta cuatro

Los métodos de Runge-Kutta de orden cuatro son muy utilizados porque son sencillos de programar y porque poseen una relación exactitud-coste óptima. El desarrollo de estas fórmulas se inició con el trabajo de *Carl Runge* en 1895 y lo continuó *M. Kutta* en 1901.

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4),$$

donde:

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2),$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 \cdot h, z_n + a_{41} \cdot h \cdot k_1 + a_{42} \cdot h \cdot k_2 + a_{43} \cdot h \cdot k_3).$$

Al plantear en general un método de *Runge-Kutta* de orden cuatro se tienen 13 incógnitas: $b_1, b_2, b_3, b_4, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ y a_{43} . y al imponer que el orden de consistencia sea $p = 4$ se tienen 11 ecuaciones. Se tiene entonces una familia biparamétrica de métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas, con un orden de consistencia 4.

La fórmula se calcula tomando valores de la función en cuatro puntos diferentes y calculando un valor intermedio. La fórmula que más se utiliza, a la que se denomina *Runge-Kutta* clásico, o simplemente **método de Runge-Kutta**, que es uno de los métodos más utilizados y el de más éxito entre los métodos de un

paso, viene definida por el siguiente tablero de *Butcher*:

1				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

y se expresa:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, z_n + h \cdot k_3).$$

Su significado geométrico es obtener la pendiente en cuatro ocasiones y estimar un promedio. La primera vez se estima $k_1 = f(x_n, z_n)$, luego se estima la pendiente en el punto medio entre x_n y x_{n+1} calculando el valor mediante Euler en ese punto medio. La tercera estimación se hace también en el punto medio pero utilizando el valor k_2 , recién obtenido, y la cuarta se estima en el punto x_{n+1} .

Se observa que si $f(x, y)$ sólo depende de x , el método coincide con la regla de *Simpson* para integrar $f(x)$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

Es sencillo, con una simple hoja de cálculo, utilizar este método. El error de truncamiento que se comete es proporcional a h^5 en cada paso; por tanto, el error inherente al método es del orden $O(h^4)$.

Se compara este método con los anteriores:

Resultados de aplicar el método de Euler , el método de Euler mejorado , Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4 con distintos tamaños de paso a : $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$ para aproximar la solución en $x = 1$.					
h	Euler	Euler mejorado	Taylor 2	Runge-Kutta 4	Exacto
0,1	34,411490	59,938223	59,938223	64,858107	64,897803
0,05	45,588400	63,424698	63,424698	64,894875	64,897803
0,025	53,807866	64,497931	64,497931	64,897604	64,897803
0,01	60,037126	64,830722	64,830722	64,897798	64,897803

Aunque ya a principios de siglo XX se habían establecido las condiciones de orden para métodos de orden cuatro, no fue hasta 1957 cuando *Butcher* estableció las condiciones de orden para métodos de un número arbitrario de etapas. La demostración rigurosa supera el nivel de este curso. *J. C. Butcher* estableció la relación entre el número de evaluaciones por paso y el orden del error de truncamiento, y como consecuencia observó que es preferible utilizar métodos de orden menor que cinco con un tamaño de paso más pequeño, a métodos de orden mayor y tamaño de paso mayor. *Butcher* probó que no existe ningún método de cinco etapas con un orden de convergencia cinco. Si $p^*(R)$ representa el mayor orden de convergencia que se puede obtener para un método de *Runge-Kutta* de R etapas, entonces: $p^*(R) = R$, $R = 1, 2, 3, 4$; $p^*(5) = 4$, $p^*(6) =$

5, $p^*(7) = 6$, $p^*(8) = 6$, $p^*(9) = 7$, y en general $p^*(R) \leq R - 2$ para $R = 10, 11 \dots$ luego por esta razón los métodos de *Runge-Kutta* de orden 4 son los más populares.

En el ejemplo siguiente se compara el método de *Runge-Kutta* 4 con un tamaño de paso $h = 0,1$ con un método de *Euler mejorado* con un tamaño de paso de la mitad $h = 0,05$ y con el método de *Euler* con un tamaño de paso de la mitad del anterior y la cuarta parte del primero, $h = 0,025$, según el estudio que se ha realizado del error de truncamiento en los tres casos el error debería ser parecido, y sin embargo se observa que el método de *Runge-Kutta* 4 es claramente superior.

Resultados de aplicar el método de <i>Euler</i> , el método de <i>Euler mejorado</i> y el método de <i>Runge-Kutta</i> 4 con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - y$, $y(0) = 0$, para aproximar la solución en $x = 0,5$.			
<i>Euler</i> $h = 0,025$	<i>Euler mejorado</i> $h = 0,05$	<i>Runge-Kutta</i> 4 $h = 0,1$	Valor real
0,397312	0,393337	0,39346906	0,393469340

Hoy en día se construyen métodos de *Runge-Kutta* con más etapas de las estrictamente necesarias, pues al disponer de más parámetros se pueden mejorar otras propiedades del método como coeficientes de error, regiones de estabilidad absoluta, etc.

En los métodos de *Runge-Kutta* implícitos el número de etapas s y de orden n no coinciden necesariamente. Los métodos explícitos aunque tienen regiones de estabilidad lineal que aumentan con la precisión del método, no son adecuados para sistemas "stiff" ya que cubren porciones pequeñas del semieje real negativo. Los más importantes son:

- Métodos de *Gauss*, donde el orden es doble al número de etapas. Uno de los

más interesantes es el de orden 2, conocido como la regla del punto medio implícita:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n + h/2, (z_n + z_{n+1}) / 2)$$

Todos ellos son A-estables (ver *definición 13.6.3*) en régimen lineal, algebraicamente estables en el no lineal.

- Métodos de *Randau*, donde el orden $n = 2s - 1$. Uno de estos métodos de orden uno coincide con el método de *Euler* implícito.
- Métodos de *Lobatto*, de orden $n = 2s - 2$. Uno de estos métodos de orden dos coincide con la regla trapezoidal. Unos son A-estables en el régimen lineal y algebraicamente estables en el no lineal, y otros son A-estables en el régimen lineal y no algebraicamente estables en el no lineal.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.4.1: Aplicar el **método de Euler**, el **método de Euler mejorado** y **Runge-Kutta 4** con tamaños de paso de 0,1 y 0,05 a: $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1,5$. Analizar el error cometido al disminuir el tamaño de paso a la mitad.

Resultados de aplicar el **método de Euler**, el **método de Euler mejorado**, y **Runge-Kutta 4** con distintos tamaños de paso a : $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1,5$.

H	Euler	Error global	Euler mejorado	Error global	Runge-Kutta 4	Error global	Exacto
0,1	2,9278	0,5626	3,4509	0,0395	3,4902	0,00013	3,4904
0,05	3,1733	0,3171	3,4795	0,0109	3,4903	0,000009	3,4904

Es sencillo analizar como disminuye el error al disminuir el tamaño de paso, calculando los errores y comparando con las potencias de h^p . El nombre de orden cuatro viene de ser el error inherente al método de $O(h^4)$, (con las condiciones de regularidad requeridas, como que la solución tenga cinco derivadas continuas), siendo en el ejemplo anterior el error respectivamente para el método de *Runge-Kutta 4* de 0,000132210889 para h igual a 0,1 y de 0,0000091377 para un tamaño de paso de 0,05 siendo $0,0000091377 \approx 0,00013221/16 = 0,00000826$.

Ejemplo 13.4.2: Utilizar una hoja de cálculo para aproximar la solución en $x = 1$, por el **método de Euler** y **Runge-Kutta 4** con tamaños de paso de 0,25 de $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. Analizar el resultado obtenido.

Ecuación: $y' = x^2 + y^2$ Dato inicial: $y(0) = 1$ Paso $h = 0,25$						
x	Euler	Runge-Kutta 4	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	1	1	1,28125	1,3615875	1,8591638
0,25	1,25	1,33936829	1,8564074	2,6099833	2,9149023	4,5270122
0,5	1,65625	2,06575124	4,5173282	7,3097200	9,2678441	19,770666
0,75	2,40454102	4,45921471	20,447095	49,977276	115,39207	1110,3718
1	3,99062039	65,3574486	4272,5960	359319,94	20232318	2,558E+17

La diferencia entre ambos métodos es sorprendente. Si se estudia con detenimiento se observa que $y' = x^2 + y^2$, con $y(0)=1$ no se puede resolver por métodos elementales y tiene una solución no acotada en un valor próximo a $x =$

0,97, si se utiliza la desigualdad entre $0 < x < 1$, $y^2 < x^2 + y^2 < 1 + y^2$. Esto indica el tipo de precauciones que se deben tomar al utilizar los métodos numéricos y la importancia ya indicada de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones, así como de la dependencia continua de los datos.

Ejercicios

13.1. Calcular $b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, a_{21}, a_{31}$ y a_{32} para que el método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + b_3 \cdot k_3)$ siendo $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1)$; $k_3 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2)$ tenga orden de consistencia máximo.

13.2. Escribir el tablero de Butcher para el método de Euler mejorado: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n)))$.

13.3. Escribir el tablero de Butcher para el método de Euler modificado: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n)))$.

13.4. Escribir el tablero de Butcher para el método de Runge-Kutta de tres etapas: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + k_3) + \frac{2h}{3} \cdot k_2$, donde $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot k_1)$, $k_3 = f(x_n + h, z_n + h(2k_2 - k_1))$.

13.5. Aplicar el método: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(x_n, z_n) + f(x_n + h, z_n + h f(x_n, z_n)))$ al

problema $y' = y$, $y(0) = 1$, para un tamaño de paso h .

$$\text{(Solución: } z_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n \text{)}.$$

13.6. Aplicar el método: $z_{n+1} = z_n + hf(x_{n+1}, z_{n+1})$ al problema $y' = y$, $y(0) = 1$, para un tamaño de paso h .

$$\text{(Solución: } z_n = \left(\frac{1}{1-h}\right)^n \text{)}.$$

NO COPIAR,
© DE LOS
AUTORES

13.5. ESTIMACIÓN DEL ERROR EN CADA PASO

En los métodos que se han presentado hasta ahora se ha supuesto que el tamaño del paso h es fijo durante todo el proceso. En la práctica, en ocasiones, esto no es así. Lo que se hace es modificar convenientemente el tamaño de h en los distintos pasos, de manera que se obtenga una aproximación adecuada, por lo que resulta fundamental controlar el error que se va cometiendo en cada paso.

Por tanto, una cuestión de interés práctico es el control del error cuando se quiere obtener una exactitud prefijada. Existen fórmulas asintóticas del error global para los métodos de *Runge-Kutta*. En particular para los métodos de orden cuatro de convergencia, la expresión es:

$$y(x_n) - z_n = D(x) \cdot h^4 + O(h^5),$$

donde $D(x)$ satisface un cierto problema de valor inicial.

La estimación directa del error de truncamiento en los métodos de Runge-Kutta es laboriosa, pues se precisa para ello calcular las derivadas parciales de órdenes superiores de la función $f(x, y)$, que es lo que precisamente se intenta evitar con los métodos de Runge-Kutta. Por ello, para controlar el error que se va cometiendo en cada etapa se utilizan otros procedimientos alternativos. Una de las técnicas que primero se utilizaron es la que se conoce como método de la **extrapolación de Richardson**, o del paso doblante.

Extrapolación de Richardson

El método de la extrapolación de *Richardson* fue usado por primera vez por *L. F. Richardson* en 1927. Es una técnica antigua que puede ser utilizada con cualquier método numérico. Una manera habitual de proceder es calcular dos aproximaciones distintas de $y(x_{n+1})$ utilizando tamaños de paso h y $2h$ respectivamente, y a partir de ellas estimar el error. Si éste excede una tolerancia prefijada se disminuye el paso; en caso contrario se aumenta. Es importante hacer notar el elevado coste computacional de esta operación ya que se requieren en el caso del método de Runge-Kutta un número elevado de evaluaciones de la función $f(x, y)$ por paso.

Si se aplica la técnica de extrapolación de *Richardson* se tiene el resultado asintótico:

$$y(x_n) - z_h(x_n) = h^p \cdot D(x_n) + O(h^{p+1})$$

con $D(x)$ satisfaciendo una cierta ecuación diferencial lineal, lo que justifica el uso de esta fórmula para estimar el error y acelerar la convergencia.

Por ejemplo, para $p = 1$, la fórmula $y(x) - z_h(x) = h \cdot D(x)$ proporciona una estimación del error asintótico, y reemplazando h por $2h$, y sustituyendo $h \cdot D(x)$, se obtiene:

$$y(x) - z_{2h}(x) = 2h \cdot D(x) = 2(y(x) - z_h(x))$$

de donde, despejando $y(x)$ se obtiene tanto una **fórmula de extrapolación de**

Richardson:

$$y(x) = 2z_h(x) - z_{2h}(x),$$

como el **error estimado de Richardson**:

$$y(x) - z_h(x) = z_h(x) - z_{2h}(x).$$

Este tipo de razonamiento puede volver a utilizarse en los otros métodos, pues las técnicas de extrapolación, cuya idea se debe a *W. B. Gragg*, se pueden usar en los problemas de valor inicial.

Si, por ejemplo, se aplica a un método de Runge-Kutta de orden p y es z_{n+1} el valor obtenido al aplicar el método al valor exacto en x_n , entonces el error de truncamiento es:

$$T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = \varphi(y(x_n)) \cdot h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Si ahora se emplea un tamaño de paso $2h$ y para calcular el error de truncamiento se aplica el método suponiendo que hasta x_{n-1} se tiene el valor exacto, y se obtiene z_{n+1}^* , entonces:

$$T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1}^* = \varphi(y(x_n)) \cdot (2h)^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

En consecuencia, restando ambas expresiones, se tiene:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = \varphi(y(x_n)) \cdot [2^{p+1} - 1] \cdot h^{p+1} \Rightarrow$$

$$\varphi(y(x_n)) \cdot h^{p+1} \cong (z_{n+1} - z_{n+1}^*) / [2^{p+1} - 1] \Rightarrow$$

La parte principal del error de truncamiento es:

$$T_{n+1} = (z_{n+1} - z_{n+1}^*) / [2^{p+1} - 1].$$

Esta estimación es buena, pero requiere un trabajo adicional importante. Si el método de Runge-Kutta es de s etapas se necesitan $s - 1$ evaluaciones adicionales de la función (pues k_1 ya ha sido calculado).

Así, si se utiliza el método de Runge-Kutta 4, de orden de convergencia, $p = 4$, entonces $[2^{p+1} - 1] = 31$, por lo que se aplica el método con un tamaño de paso h y con un tamaño de paso $2h$, se resta el resultado y se divide por 31. El resultado obtenido sirve de evaluación del error.

Pares encajados de Runge-Kutta

Un problema de interés es la determinación del tamaño del paso para obtener un error inferior a una tolerancia dada, pues si el tamaño es demasiado pequeño, además de aumentar los errores de redondeo, el coste computacional es mayor. Se ha visto como el tamaño del paso está relacionado con el error de truncamiento y con el error local y éstos con el error global, de forma que es posible resolver el problema.

Existen otros procedimientos más modernos para controlar el error. A mitad del siglo XX, Merson, hacia 1957, ideó una forma para estimar el error a partir de valores ya calculados de k_i , que consiste en lo siguiente:

En esencia la idea de Merson consiste en tomar dos métodos numéricos con órdenes de consistencia p y $p + 1$, obteniéndose la siguiente aproximación:

$$\text{Orden } p: T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = C(x)h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Orden $p + 1$: $T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1}^* = C^*(x)h^{p+2} + O(h^{p+3})$.

Restando, se obtiene:

$z_{n+1} - z_{n+1}^* = C(x)h^{p+1} + O^*(h^{p+2})$, que es una estimación del error de truncamiento, que se obtiene

$$T_{n+1} \cong z_{n+1} - z_{n+1}^*.$$

Esta es la filosofía que se siguió al definir los pares encajados de Runge-Kutta, que consiste en controlar el error global a partir del control del error de truncamiento, utilizando para ello dos métodos de *Runge-Kutta* de distinto orden, sin apenas coste computacional añadido.

Definición 13.5.1:

Se conoce como **pares encajados de Runge-Kutta**, a dos métodos de Runge-Kutta con las características siguientes:

- 1) Sus órdenes de convergencia son p y $p + 1$.
- 2) Los coeficientes de las k_i coinciden en los métodos.

Es decir, expresados estos coeficientes en el tablero de Butcher, se tiene:

C	A
	B
Primer método	

C	A
	B*
Segundo método	

y por lo tanto únicamente cambian los coeficientes b_j que multiplican a los k_i :

Se les pone la etiqueta $(p, p + 1)$, que indica que se toma como z_{n+1} el valor suministrado por el método de orden de convergencia p , con lo cual el orden de convergencia de los pares encajados es p .

$$\text{Orden } p: z_{n+1} = z_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

$$\text{Orden } p + 1: z_{n+1}^* = z_n + h \sum_{i=1}^s b_i^* k_i.$$

Restando se obtiene la aproximación del error:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = h \sum_{i=1}^s E_i k_i, \text{ siendo } E_i = b_i - b_i^*.$$

Los pares encajados más conocidos son:

a) El par de **Runge-Kutta-Fehlberg**, desarrollado por *E. Fehlberg* entre 1968 y 1969, y presentado en 1970, en el que se combinan los métodos de orden de convergencia cuatro y cinco, (*RKF45*), ambos de 6 etapas, lo cual conlleva seis evaluaciones de la fórmula $f(x, y)$ por paso, en lugar de las once que tendrían lugar en el caso de aplicarlas independientemente¹.

Su tablero de Butcher es:

¹ Lambert, J. D. (1973): Computational Methods in Ordinary Differential Equations. Editorial John Wiley & Sons. Página 182.

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7200}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{32}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
	$\frac{1}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

En ocasiones se computa el método *RKF45* como un método (5, 4) utilizando como valor el obtenido con el método de orden de convergencia 5.

b) El par de **Domand-Prince**, desarrollado por Dormand y Prince en 1980, DOPRI (5, 4), en el que se combinan los métodos de orden de convergencia cuatro y cinco, ambos de 7 etapas.

Su tablero de Butcher es:

0							
1	$\frac{1}{5}$						
5	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
3	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
10	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
4	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
5	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
8	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
9	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
1	$\frac{71}{57600}$	0	$-\frac{71}{16695}$	$\frac{71}{339200}$	$\frac{22}{525}$	$\frac{22}{525}$	$-\frac{1}{40}$

A pesar de tener más etapas, 7 etapas, en los pares de Domand-Prince se tiene que los b_i^* coinciden con los coeficientes de la última fila de la matriz A, a_{7j} :

$$k_7^n = f(x_n + h, z_n + h \sum_{j=1}^6 a_{7j} k_j^n)$$

$$k_1^{n+1} = f(x_n + h, z_n + h \sum_{j=1}^6 b^*_j k_j^n) = k_7^n .$$

Los métodos con esta propiedad se denominan: Primero igual al último

(FSAL: First Same As Last).

Estas fórmulas se computan simultáneamente y su diferencia se toma como una estimación del error de truncamiento para la fórmula de orden cuatro, el cual, a su vez, se utiliza bien para variar el tamaño de paso adecuadamente, bien para controlar el error.

Se observa que para tener un par (4, 5) es necesario utilizar, como mínimo, métodos de Runge-Kutta de 6 etapas.

Tanto en el método de la extrapolación de Richardson como en el método de los pares encajados una vez que se tiene una estimación del error cometido, $e(h^*)$, para un tamaño del tamaño del paso h^* se estudia si se verifica que: $e(h^*)/h^* < \varepsilon$, siendo ε el error máximo tolerado. Si no fuese así se busca un nuevo valor del tamaño del paso, h , hasta que se verifique lo anterior, $e(h)/h < \varepsilon$.

Si el orden de convergencia es p , se tiene que:

$$e(h^*) \cong c(x) h^{*p+1},$$

y que

$$e(h) \cong c(x) h^{p+1} = \left(\frac{e(h^*)}{h^{*p+1}} \right) h^{p+1} < \varepsilon h.$$

Si se supone que $h = ah^*$, entonces

$$e(h) \cong \left(\frac{e(h^*)}{h^{*p+1}} \right) (ah^*)^{p+1} < \varepsilon ah^* \Rightarrow a^p < \frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \Rightarrow a < \left(\frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$h = \left(\frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \right)^{1/p} h^*.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.5.1: Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el caso, (ver *ejemplo 13.4.1*) en que $z_{0,1}(1,5) = 3,4902$ y $z_{0,05}(1,5) = 3,4903$.

En el *ejemplo 13.4.1* se ha utilizado el método de Runge-Kutta 4 y se ha calculado $z_{0,1}(1,5) = 3,4902$ y $z_{0,05}(1,5) = 3,4903$. El valor estimado por la fórmula de extrapolación de Richardson es:

$$y(x) = 2z_h(x) - z_{2h}(x) = 2z_{0,05}(1,5) - z_{0,1}(1,5) = 2(3,4903) - (3,4902) = 3,4904.$$

El error estimado de Richardson es:

$$y(x) - z_h(x) = z_h(x) - z_{2h}(x) = z_{0,05}(1,5) - z_{0,1}(1,5) = (3,4903) - (3,4902) = 0,0001.$$

Ejercicios

13.1. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.1*) en que $z_{0,1}(1,5) = 0,63942967$ y $z_{0,05}(1,5) = 0,66397766$.

13.2. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para

calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.1*) en que $z_{0,05}(1,5) = 0,66397766$ y $z_{0,0251}(1,5) = 0,67731662$.

13.3. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.2*) en que $z_{0,0125}(1) = 60,037126$ y $z_{0,025}(1) = 53,807866$.

$$(\text{Solución: } z_n = -4 + 4(2)^n - 3n).$$

13.4. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - z_n = 5$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 2$.

$$(\text{Solución: } z_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{5}{2}n).$$

13.5. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 3z_{n+2} + 3z_{n+1} - z_n = 12$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(\text{Solución: } z_n = 1 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + 2n^3).$$

13.6. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + 3z_n = 0$.

$$(\text{Solución: } z_n = A(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \sen n\frac{\pi}{4}).$$

13.7. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 5$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(\text{Solución: } z_n = A \cos n\frac{\pi}{3} + B \sen n\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}).$$

13.8. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} - 7z_{n+3} + 18z_{n+2} - 20z_{n+1} + 8z_n = 0$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$.

(Solución: $z_n = 5 - 5(2)^n + 3n(2)^n - \frac{1}{2}n^2(2)^n$).

NO COPIAR
© DE LOS
AUTORES

13.6. ESTABILIDAD ABSOLUTA EN LOS MÉTODOS DE UN PASO

Otro concepto interesante es el de **estabilidad absoluta**, ya que aunque el método sea estable y sea convergente es posible que, para determinados valores del paso, el error cometido sea demasiado grande para que el método resulte aceptable, y se necesite tomar un tamaño de paso muy pequeño, por lo que el número de pasos puede ser excesivo.

Al aplicar un método numérico se debe escoger, naturalmente, un método convergente. Pero esto quiere decir únicamente que se puede aproximar la solución obtenida tanto como se quiera a la solución exacta tomando el tamaño de paso suficientemente pequeño. Sin embargo, este límite no es lo que se utiliza en la práctica, sino que se aplica para un tamaño de paso fijo, con lo que puede ocurrir que el error cometido sea demasiado grande. Al aplicar el método no se toman límites cuando el tamaño de paso tiende a cero, sino que para un tamaño de paso fijado de antemano se calcula una cantidad finita de valores, por lo que es importante escoger un tamaño adecuado para el paso, de manera que el error que se cometa sea menor que una tolerancia dada.

Para hacer este estudio se aplica en primer lugar el método que se quiera probar al problema de valor inicial $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, que se denomina **ecuación de prueba**, que se toma como referencia de problema de valor inicial, y puede servir de modelo de lo que ocurre en el caso general, y cuya solución es sobradamente

conocida, $y(x) = e^{\lambda x}$, lo que permite calcular el error global cometido al aplicar el método. Aunque el estudio se realice en este caso particular, resulta que si el método no es adecuado para tratar este problema tampoco lo es para un problema general pues en el caso de un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se puede considerar que toda ecuación diferencial se puede aproximar por su primer término en su desarrollo de Taylor:

$$y' = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, por lo que mediante un cambio de variables se puede transformar en la ecuación diferencial:

$$y' = \lambda \cdot y$$

donde λ vale $f_y(x_0, y_0)$.

Definición 13.6.1:

Se denomina **ecuación de prueba** al problema de valor inicial $y' = \lambda \cdot y$, $y(0) = 1$.

Si λ es negativo la solución es decreciente y su límite, cuando x tiende a infinito, es cero, por lo que el método empleado debe reproducir ese comportamiento, es decir, para todo valor de h mayor que cero, el límite de la solución aproximada obtenida debe tender a cero cuando n tiende a infinito. En general esta condición no se verifica para cualquier h , sino para determinados valores de $\lambda \cdot h$.

Para comprender mejor este comportamiento se analiza mediante un

ejemplo:

Se estudia el caso del método de Runge-Kutta de dos etapas:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + h/2, z_n + (h/2) \cdot f(x_n, z_n))).$$

Al aplicarlo al problema de valor inicial: $y' = \lambda \cdot y$, $y(0) = 1$ se tiene:

$$z_{n+1} = z_n + \lambda \cdot h \cdot (z_n + (h/2) \cdot \lambda \cdot z_n) = z_n \cdot (1 + \lambda \cdot h + \frac{\lambda^2 h^2}{2})$$

Se denomina $\lambda \cdot h = \bar{h}$, y se tiene:

$$z_{n+1} = z_n \cdot (1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2}) = z_n \cdot r(\bar{h}).$$

Al calcular el error cometido:

$$e_n = y(x_n) - z_n.$$

Por otra parte, el error de truncamiento es:

$$T_n = y(x_n) - (y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h})) \Rightarrow y(x_n) = T_n + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}).$$

Si se supone que el error de truncamiento no depende de n y se denomina

$T_n = T$, entonces:

$$y(x_n) = T + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}) \Rightarrow$$

$$e_n = y(x_n) - z_n = T + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}) - z_{n-1} \cdot r(\bar{h}) = T + r(\bar{h}) \cdot (y(x_{n-1}) - z_{n-1}) = T + r(\bar{h}) \cdot (e_{n-1})$$

Se resuelve la ecuación en diferencias:

$$e_n = r(\bar{h}) \cdot (e_{n-1}) + T.$$

La solución general de la ecuación homogénea: $e_H = C \cdot r(\bar{h})^n$ y la solución particular: $e_P = T \frac{r(\bar{h})^n - 1}{r(\bar{h}) - 1}$, siendo $C = e_0$. Por tanto:

$$e_n = e_H + e_P = e_0 \cdot r(\bar{h})^n + T \frac{r(\bar{h})^n - 1}{r(\bar{h}) - 1} = r(\bar{h})^n \left(e_0 + \frac{T}{r(\bar{h}) - 1} \right) + T \frac{1}{1 - r(\bar{h})}.$$

En consecuencia, el error global decrece al aumentar n , si $|r(\bar{h})| < 1$, y crece si $|r(\bar{h})| \geq 1$. Por este motivo surge un nuevo concepto, el de **región de estabilidad absoluta** asociada a un método, que es un cierto dominio del plano complejo para los que λh verifica dicha condición:

Definición 13.6.2:

Se denomina **región de estabilidad absoluta** asociada a un método al conjunto de valores de \bar{h} tales que: $|r(\bar{h})| < 1$.

$$\text{R.E.A.} = \{ \bar{h} \in \mathbf{C} : |r(\bar{h})| < 1 \}.$$

Se denomina **intervalo de estabilidad absoluta** asociada a un método a la intersección de la región de estabilidad absoluta con eje real, es decir:

$$\text{I.E.A.} = \{ \bar{h} \in \mathfrak{R} : |r(\bar{h})| < 1 \}.$$

Definición 13.6.3:

El método es **A-estable** si la región de estabilidad absoluta es todo el semiplano negativo del plano complejo.

Esta propiedad que es especialmente interesante cuando se trabaja con los problemas “*stiff*”.

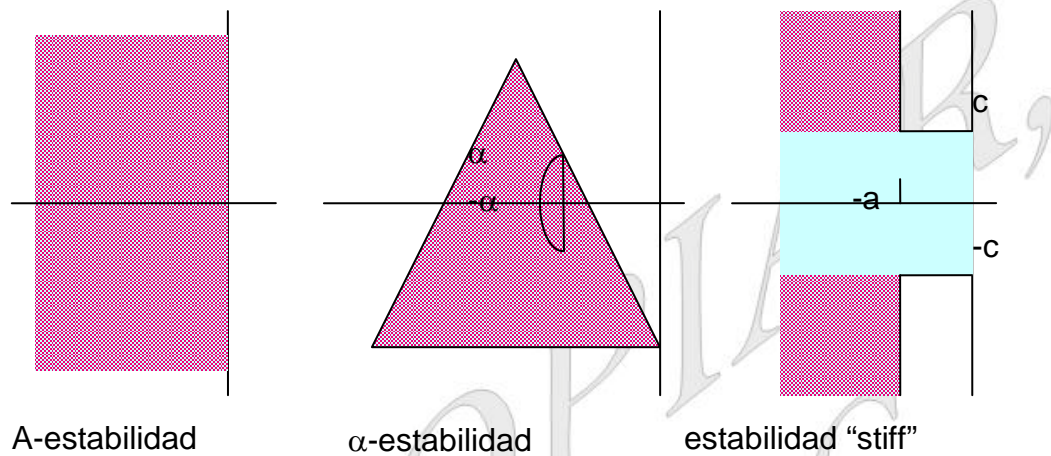


Figura 13.2: Regiones de estabilidad.

En el ejemplo anterior, $r(\bar{h}) = (1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2})$, y la parábola $y = x^2/2 + x + 1$ tiene de vértice el punto $(-1, 1/2)$, corta al eje vertical en $(0, 1)$, por lo tanto:

Si $\bar{h} \in (-2, 0)$ entonces $|r(\bar{h})| < 1$, por lo que se dice que $(-2, 0)$ es el **intervalo de estabilidad absoluta** del método de Runge-Kutta de dos etapas estudiado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.6.1: Estudiar la estabilidad absoluta para: a) el método de Runge-Kutta de dos etapas: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} f(x_n, z_n))$; b) el método de Runge-Kutta de tres etapas de Heun, c) el método de Runge-Kutta de cuatro etapas, y d) el método de Euler.

a) El método de Runge-Kutta dos etapas pedido es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} f(x_n, z_n) \right)$$

que al sustituir la ecuación de prueba $y' = \lambda y$ se obtiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(z_n + \frac{h}{2} z_n \right) \cdot \lambda = z_n \cdot \left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right) = z_n \cdot \left(1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} \right)$$

por lo que $r(\bar{h}) = \left(1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} \right)$ y al imponer que $|r(\bar{h})| < 1 \Rightarrow$

$$\left| \left(1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} \right) \right| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} < 1 \Rightarrow -2 < \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} < 0,$$

por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

En todos los métodos de Runge-Kutta de dos etapas el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

b) En todos los métodos de Runge-Kutta de tres etapas al aplicarlos a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n \cdot \left(1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} \right) = z_n \cdot r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6}$ se tiene una cúbica, creciente, que corta al eje de abscisas en $(-1, 0)$ y al eje de ordenadas en $(0, 1)$.

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2,5127458\dots$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2,5127458\dots, 0)$.

c) En todos los métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas al aplicarlos a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n \cdot \left(1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{\bar{h}^4}{24} \right) = z_n \cdot r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{\bar{h}^4}{24}$ se tiene una cuártica, que corta al eje de ordenadas en (0, 1).

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2,78\dots$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2,78\dots, 0)$.

d) Al aplicar el método de Euler a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n \cdot (1 + \bar{h}) = z_n \cdot r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h}$ se tiene una recta, que corta al eje de ordenadas en (0, 1) y al eje de abscisas en $(-1, 0)$.

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

Se observa que todos los métodos de Runge-Kutta del mismo número de etapas tienen el mismo intervalo de estabilidad absoluta.

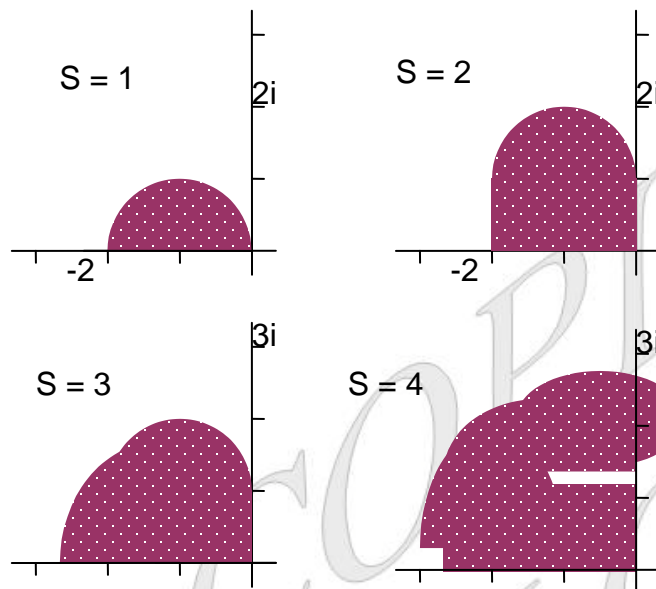


Figura 13.3: Regiones de estabilidad absoluta en los métodos de *Runge-Kutta* (Lambert 1991).

Ejemplo 13.6.2: Analizar la estabilidad absoluta para el método de Runge-Kutta de dos etapas al aplicarlo para distintos valores de tamaño de paso: $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ y $h = 0,001$ a los problemas de valor inicial a) $y' = -y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -30y$, $y(0) = 1$, c) $y' = y$, $y(0) = 1$.

Se ha visto que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

En a) $\lambda = -1$, en b) $\lambda = -30$ y en c) $\lambda = 1$.

a) Para $h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -1 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,1 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,01 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,001 \in (-2, 0)$.

Para todos los valores se verifica que $|r(\bar{h})| < 1$. Se puede observar mediante una hoja de cálculo que fijado el tamaño de paso, los errores crecen en valor absoluto hasta $x = 1$, y a partir de ese valor decrecen. Los errores son menores cuanto menor es el tamaño de paso, h .

Se había probado que el error global: $e_n \cong \frac{1}{6} \lambda x e^{\lambda x} \bar{h}^2 = -\frac{1}{6} x e^{-x} \bar{h}^2$, curva que se comporta según lo descrito arriba.

Se observa que, como corresponde a un método convergente, si se fija el valor de x y se hace tender h a cero, entonces el error tiene a cero.

$$\text{b) Para } h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -30 \notin (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -3 \notin (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,3 \in (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,03 \in (-2, 0).$$

$$\text{Para que } \lambda \cdot h = -30h \in (-2, 0) \Rightarrow h \in (0, \frac{2}{30}) \Rightarrow 0 < h < \frac{1}{15}.$$

$$\text{c) Para } h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 1 \notin (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,1 \notin (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,01 \notin (-2, 0).$$

$$\text{Para } h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,001 \notin (-2, 0).$$

Para todo tamaño de paso positivo los valores de \bar{h} están fuera del intervalo

de estabilidad absoluta, por lo que los errores son crecientes. Sin embargo la solución exacta es $y = e^x$, que es también creciente por lo que las soluciones pueden aceptables. En este caso tiene interés un nuevo concepto, el de error

relativo que es: $er_n = \frac{e_n}{y_n}$, y como

$$e_n = \frac{1}{6} \lambda x e^{\lambda x} \bar{h}^2 + O(\bar{h}^2) = \frac{1}{6} x e^x \bar{h}^2 + O(\bar{h}^2),$$

entonces

$$er_n \cong \frac{1}{6} x \bar{h}^2,$$

que indica que el error crece sólo como x .

Ejercicios

13.9. Estudiar la estabilidad absoluta para el método de Taylor dos y el método de Taylor tres.

13.10. Analizar la estabilidad absoluta para el método de Taylor dos al aplicarlo para distintos valores de tamaño de paso: $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ y $h = 0,001$ a los problemas de valor inicial a) $y' = -y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -30y$, $y(0) = 1$, c) $y' = y$, $y(0) = 1$.

13.7. APÉNDICE: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales son ecuaciones en diferencias. Así, por ejemplo, al aplicar el método de Euler al problema $y' = y$, $y(0) = 1$ se tiene la ecuación en diferencias:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot z_n$$

por lo que:

$$z_1 = z_0 \cdot (1 + h) \Rightarrow z_2 = z_1 \cdot (1 + h) = z_0 \cdot (1 + h)^2 \Rightarrow z_3 = z_2 \cdot (1 + h) = z_0 \cdot (1 + h)^3,$$

y en general:

$$z_n = z_0 \cdot (1 + h)^n.$$

No siempre es tan sencillo encontrar una expresión por recursividad. Sin embargo las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes se resuelven de forma “similar” a como se han resuelto las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes. En esta sección se estudia la forma de resolver algunas de estas ecuaciones en diferencias.

El ejemplo anterior es una ecuación en diferencias finitas de primer orden. La definición general es

Definición 13.7.1:

Se llama **ecuación en diferencias finitas de primer orden** a una ecuación de la forma:

$$z_{n+1} = F(z_n, n), n \in \mathbf{N},$$

siendo F una función de dos variables reales o complejas.

Definición 13.7.2:

Se llama **ecuación en diferencias finitas de orden k** a una ecuación de la forma:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n), n \in \mathbf{N},$$

Definición 13.7.3:

Se llama **solución** de la ecuación en diferencias:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n)$$

a una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales o complejos que verifique la ecuación para todo $n \in \mathbf{N}$.

Así, por ejemplo la ecuación $z_{n+1} = (1 + n) \cdot z_n$ tiene como solución cualquier sucesión de la forma $\{z_n\} = C \cdot \{n!\}$, donde C es una constante arbitraria. La ecuación en diferencias tiene entonces una familia uniparamétrica de soluciones. Si se impone una condición inicial, por ejemplo $z_0 = 1$, entonces existe una única solución de la ecuación que es precisamente $z_n = n!$, $n \in \mathbf{N}$.

El problema siguiente:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n), n \in \mathbf{N}, z_0 = a_0, z_1 = a_1, \dots, z_{k-1} = a_{k-1},$$

es un problema de valor inicial, análogo a los problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales.

Es sencillo encontrar una solución para la clase de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, que se definen a continuación, ya que se resuelven de forma “similar” a como se han resuelto las ecuaciones diferenciales lineales de orden k con coeficientes constantes. El conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión k , y el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias no homogénea tiene estructura de espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea.

Definición 13.7.4:

Se denomina **ecuación en diferencias finitas lineal con coeficientes constantes** a una expresión de la forma:

$$z_{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot z_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \cdot z_n = b_n,$$

donde α_i son números reales y donde $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales. Es una ecuación en diferencias finitas de orden k si α_0 es distinto de cero.

Se dice que es **homogénea** si $b_n = 0$ para todo n , y no homogénea si $b_n \neq 0$ para algún n .

Para encontrar la solución general de una ecuación en diferencias lineal, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada buscando soluciones de la forma $z_n = r^n$, para lo que se sustituye en la ecuación:

$$r^{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot r^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \cdot r^n = 0,$$

se divide por r^n ,

$$r^k + \alpha_{k-1} \cdot r^{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0,$$

y se obtiene la **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

Esta ecuación característica puede tener todas sus raíces reales y simples, puede tener raíces complejas simples, o bien tener raíces múltiples.

Si todas las raíces son reales y simples: r_1, \dots, r_k , se tienen k soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea: r_1^n, \dots, r_k^n , que son base del espacio vectorial de las soluciones, por lo que la solución general es de la forma:

$$z_{nH} = A_1 \cdot r_1^n + \dots + A_k \cdot r_k^n.$$

En el caso en que se tenga una raíz compleja, necesariamente se tiene, al ser los coeficientes reales, la raíz compleja conjugada. Sea $r_1 = a + bi = r e^{i\alpha}$, por lo que $r_1^n = (r \cdot e^{i\alpha})^n = r^n \cdot e^{i n \alpha} = r^n \cdot (\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$; las dos soluciones reales y linealmente independientes buscadas son: $r^n \cdot \cos \alpha$ y $r^n \cdot \text{sen } \alpha$.

Si existe una raíz múltiple r_j , de orden m de multiplicidad, se precisan m soluciones linealmente independientes, que son:

$$r_j^n, n \cdot r_j^n, n^2 \cdot r_j^n, \dots, n^{m-1} \cdot r_j^n.$$

Una vez obtenida la solución general de la ecuación homogénea asociada, se busca una solución particular de la ecuación no homogénea. Para ello se prueba con una expresión “parecida” a la de b_n . Sólo en el caso en que la expresión que se deba probar ya esté incluida en la solución de la ecuación

homogénea, se aumenta el orden, multiplicando por n elevado al exponente necesario.

La solución general es entonces:

$$z_n = z_{n\ H} + z_{n\ P} = A_1 \cdot r_1^n + \dots + A_k \cdot r_k^n + z_{n\ P}.$$

Para calcular los coeficientes A_1, \dots, A_k , se precisa conocer k condiciones iniciales: z_0, \dots, z_{k-1} . Al sustituir se tiene un sistema tipo Cramer de k ecuaciones y k incógnitas, que siempre tiene una única solución.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.7.1: Resolver $z_{n+2} - z_n = 7$, con $z_0 = 0$ y $z_1 = 0$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea asociada

Ecuación característica: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow z_{n\ H} = A_1 \cdot (1)^n + A_2 \cdot (-1)^n = A_1 + A_2 \cdot (-1)^n$.

Paso 2: Solución particular de la no homogénea

Se prueba con una solución particular que sea una constante c , pero ésta ya está incluida en la solución general de la homogénea, por lo que se aumenta el grado multiplicando por n :

$$z_{n\ P} = cn \Rightarrow c(n+2) - cn = 7 \Rightarrow c = \frac{7}{2} \Rightarrow z_{n\ P} = \frac{7}{2}n \Rightarrow z_n = A_1 + A_2 \cdot (-1)^n + \frac{7}{2}n.$$

n .

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = A_1 + A_2 \cdot (-1)^0 + \frac{7}{2} \cdot 0 = A_1 + A_2 = 0.$$

$$z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = A_1 + A_2 \cdot (-1)^1 + \frac{7}{2} \cdot 1 = A_1 - A_2 + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 = -\frac{7}{4}.$$

$$\Rightarrow z_n = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4} \cdot (-1)^n + \frac{7}{2} n.$$

Ejemplo 13.7.2: Resolver $z_{n+1} = (1 + h^2) \cdot z_n$, con $z_0 = e^2$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación que ya es homogénea

Ecuación característica: $r = (1 + h^2) \Rightarrow z_{n \text{ H}} = A_1 \cdot (1 + h^2)^n$.

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = e^2 \Rightarrow z_0 = A_1 = e^2 \Rightarrow z_n = e^2 \cdot (1 + h^2)^n.$$

Ejemplo 13.7.3: Resolver $z_{n+1} = z_n + nh^2 + \frac{h^2}{2} + h$; con $z_0 = 0$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea asociada

Ecuación característica: $r = 1 \Rightarrow z_{n \text{ H}} = A_1$.

Paso 2: Solución particular de la no homogénea

Se prueba con una solución particular que sea un polinomio en n de grado uno, $an + b$, pero ya está incluida la constante, b , en la solución general de la homogénea, por lo que se aumenta el grado multiplicando por n :

$$z_{n \text{ P}} = n \cdot (an + b) \Rightarrow a(n+1)^2 + b(n+1) = an^2 + bn + n \cdot h^2 + \frac{h^2}{2} + h \Rightarrow 2an + a$$

$$+ b = n \cdot h^2 + \frac{h^2}{2} + h \Rightarrow a = \frac{h^2}{2}, b = h; z_n \text{ P} = \frac{h^2}{2} n^2 + h \cdot n \Rightarrow z_n = A_1 + \frac{h^2}{2} \cdot n^2 + h \cdot n.$$

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = A_1 = 0 \Rightarrow z_n = \frac{h^2}{2} \cdot n^2 + h \cdot n.$$

Ejemplo 13.7.4: El matemático Leonardo de Pisa conocido como Fibonacci, que introdujo en Europa el sistema de numeración indo arábigo que hoy se usa y que sustituyó al romano, escribió el libro *Liber abaci* (1 202) donde utilizó la sucesión que lleva su nombre, la sucesión de Fibonacci, que modela el crecimiento de las parejas de conejos: “En un corral se deja una pareja de conejos recién nacidos. Al cabo de un mes están en situación de procrear y se aparean; al mes siguiente nace una nueva pareja de conejos, macho y hembra y acto seguido tiene lugar un nuevo apareamiento. El proceso se reitera de manera que cada pareja se aparee por primera vez al mes de nacer, y luego lo hace cada mes originando una pareja de descendientes. Se trata de saber el número de parejas al cabo de n meses”.

Si z_n es el número de parejas que existen en el mes n , y z_{n+1} lo es en el mes $n + 1$. Entonces: $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$. En el mes cero se tiene la primera pareja: $z_0 = 1$, y en el mes $n = 1$, se tiene $z_1 = 1$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea

$$\text{Ecuación característica: } r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ que es el}$$

número de oro: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618\dots$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,618\dots$

$$\Rightarrow z_n = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Paso 2: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 1 \Rightarrow z_0 = A_1 + A_2 = 1.$$

$$z_1 = 1 \Rightarrow z_1 = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, A_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Como el primer sumando crece al crecer n , y el segundo tiende a cero, si n es grande las parejas de conejos crecen en una proporción aproximada de 61,8 %.

Ejercicios

13.11. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+1} = z_n(1 + h + h^2)$; con $z_0 = 0$.

(Solución: $z_n = (1 + h + h^2)^n$).

13.12. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = n$; con $z_0 = 0$.

$$(Solución: z_n = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{2}{6\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{3} \cdot (n-1)).$$

13.13. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + \left(\frac{-3}{2} - h\right)z_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2}\right)z_n = \frac{h}{2}$; con $z_0 = z_0$; $z_1 = z_1$.

13.14. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = 3$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.

$$(Solución: z_n = -4 + 4(2)^n - 3n).$$

13.15. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - z_n = 5$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 2$.

$$(Solución: z_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{5}{2}n).$$

13.16. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 3z_{n+2} + 3z_{n+1} - z_n = 12$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = 1 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + 2n^3).$$

13.17. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + 3z_n = 0$.

$$(Solución: z_n = A(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}).$$

13.18. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 5$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = A \cos n \frac{\pi}{3} + B \sin n \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}).$$

13.19. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} - 7z_{n+3} + 18z_{n+2} - 20z_{n+1} + 8z_n = 0$; con $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1$.

$$(Solución: z_n = 5 - 5(2)^n + 3n(2)^n - \frac{1}{2}n^2(2)^n).$$

13.8. EJERCICIOS

13.20. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,2$ y en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2} - x + 2y$, $y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaños de paso $h = 0,05, h = 0,1$ respectivamente. Comparar los errores globales.

$$(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{x}{2} + e^{2x} \Rightarrow y(0,5) = 2,968\dots; y(0,2) = 1,5918\dots; z_n = (1 + 2h)^n + hn/2; z(0,5) = z_5 = 2,73832, e(0,1) = 0,22996183; z(0,2) = z_4 = 1,5641, e(0,05) = 0,0277)$$$

13.21. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,2$ y en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = -1 + 2y$, $y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaños de paso $h = 0,05, h = 0,1$ respectivamente. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{1+e^{2x}}{2} \Rightarrow y(0,5) = 1,85913091\dots;$

$y(0,2) = 1,24591235\dots; z_n = \frac{1}{2}(1+2h)^n + \frac{1}{2}; z(0,5) = z_5 = 1,74416; e(0,1) =$

$0,11498091; z(0,2) = z_4 = 1,23205, e(0,05) = 0,01386235)$

13.22. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en x de la solución del problema de valor inicial $y' = 1 - x + y$, $y(x_0) = y_0$ usando como $z_0 = y_0$ y tamaños de paso h para aproximar la solución exacta $y(x)$. Calcular el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero del valor obtenido.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = x + (y_0 - x_0)e^{x-x_0}$ y la solución aproximada es $z_n = x_0 + nh + (y_0 - x_0)(1+h)^n$ que en el límite coincide con la exacta.)

13.23. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 2$ de la solución del problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaños de paso $h = 0,05$, $h = 0,1$, $h = 0,2$ respectivamente. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = e^x \Rightarrow y(2) = 7,38906$.)

	z(2)	y(2) - z(2)
$h = 0,2$	6,19174	1,19732
$h = 0,1$	6,72750	0,66156
$h = 0,05$	7,03999	0,34907

13.1. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en x de la solución de los problemas de valor inicial i) $y' = x$, $y(0) = 0$, ii) $y' = x^2$, $y(0) = 0$ usando como $z_0 = 0$ y tamaños de paso h para aproximar la solución exacta $y(x)$. Calcular el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero del valor obtenido.

(Solución: i) La solución exacta es $y(x) = x^2/2 \Rightarrow z_n = \frac{n^2 h^2}{2} - \frac{nh^2}{2}$ que en el

límite coincide con la exacta. ii) La solución exacta es $y(x) = x^3/3 \Rightarrow z_n =$

$$\frac{n^3 h^3}{3} - \frac{n^2 h^3}{2} + \frac{nh^3}{6} \text{ que en el límite coincide con la exacta.})$$

13.2. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,5$

de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2} - x + 2y$, $y(0) = 1$

usando como $z_0 = 1$ y tamaño de paso $h = 0,1$. Lo mismo con $x = 0,2$, $h = 0,05$. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = e^{2x} + \frac{x}{2}$ y $z_n = (1 + 2h)^n + \frac{x}{2} \Rightarrow$

	z_n	$y(x)$	$y(x) - z_n$
$x = 0,5, h = 0,1$	2,73832	2,968281828...	0,229961...
$x = 0,2, h = 0,05$	1,5641	1,591824698...	0,027724...

13.1. Calcular en función de h los errores local, global y de truncamiento en el punto x_n al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = (h/3)(f(x_{n+1}, z_{n+1}) + 2f(x_n, z_n))$ al problema $y' = y$, $y(0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Calcular el

límite del error global cuando h tiende a cero, pero siendo nh constante.

$$\text{(Solución: } e(h) = e^{nh} - \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^n, e_l(h) = \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^{n-1} e^h - \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^n, T_n = \left(1 - \frac{h}{3}\right) e^{nh} - \left(1 + \frac{2h}{3}\right) e^{(n-1)h}, \text{ el límite es cero).}$$

13.2. Calcular los errores local, global y de truncamiento en el punto $x = 2$ y $x = -2$, al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = (h/3)(f(x_{n+1}, z_{n+1}) + 2f(x_n, z_n))$ al problema $y' = y$, $y(0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$ y tamaño de paso $h = 0,1$ y $h = -0,1$ respectivamente.

$$\text{(Solución: } x = 2, h = 0,1, n = 20, e(0,1) = 0,27696\dots, e_l(0,1) = 0,011179\dots, T_n = 0,011129\dots. x = -2, h = -0,1, n = 20, e(-0,1) = 0,004702\dots, e_l(-0,1) = 0,00023302\dots, T_n = 0,00024908\dots).$$

13.3. Aplicar el método $z_{n+1} - z_n = h(f(x_n + h/2, z_n + (h/2)f(x_n, z_n)))$ al problema $y' = x + 1$, $y(0) = 0$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso h .
b) Lo mismo tomando como valor iniciador $z_0 = 4h$. c) Lo mismo con $z_0 = 0,01$. ¿Es el método convergente?

$$\text{(Solución: } z_n = z_0 + \frac{1}{2}(nh)^2 + nh; y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x; \text{ En a) y b) } z_n \text{ converge a la solución exacta. En c) no, pero esto no contradice la definición de convergencia).}$$

13.4. Obtener la ecuación en diferencias finitas que resulte de aplicar el método: $z_{n+1} - z_n = h\left(\frac{3}{4}f(x_n, z_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, z_n + 2hf(x_n, z_n))\right)$ al

problema $y' = y + 3$, $y(0) = y_0$, tomando como valor inicial $z_0 = y_0$.

$$(Solución: z_n = (y_0 - 3) \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n - 3.).$$

13.5. Aplicar el método de Taylor de orden dos a $y' = 2x + 3y$, $y(0) = 0$, con tamaño de paso h para aproximar la solución en $x = nh$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular el límite cuando h tiende a cero, siendo nh constante, del error global cometido.

$$(Solución: z_n = \frac{2}{9} (1 + 3h + \frac{9}{2} h^2)^n - \frac{2hn}{3} - \frac{2}{9}. y(x) = \frac{2}{9} (e^{3x} - 6x - 1), \text{ el límite del error global es cero.}).$$

13.6. Aplicar el método de Taylor de orden dos y de orden tres a $y' = y$, $y(0) = 1$, con tamaño de paso h para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y valorar el error global cometido cuando $n = 1, 2, 4, 5, 10, 100$ y 1000 . Comparar los resultados obtenidos entre sí y con los del método de Euler.

(Solución:

Resultados de aplicar el método de Euler y métodos de Taylor de orden dos y cuatro a: $y' = y$, $y(0)=1$, para aproximar la solución en $x = 1$. $y(x) = e = 2,7182818...$							
n	1	2	4	5	10	100	1000
Euler	2	2,25	2,44...	2,488...	2,5937...	2,7048...	2,7169...

Error	0,718	0,468	0,278	0,230	0,124	0.013481	0,00138
						8	
Taylor 2	2,5	2,64062	2,69485	2,702708	2,714080	2,718236	2,718281
				1	8	8	3
Error	0,218	0,077	0,023	0,01557	0,000420	0,000045	0,000000528
						0	
Taylor 3	2,66667	2,70877	2,71683	2,71751	2,718177	2,718281	
						7	
Error	0,0516	0,00951	0,001451	0,000771	0,000104	1,28 * E7	
			8	8	8		

Se observa que en Euler varían como h , en Taylor 2 como h^2 , y en Taylor 3 como h^3 .

13.1. Aplicar el método de Taylor de orden dos y de orden tres a $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, con tamaño de paso $h = 0,1$ y $h = 0,2$, para aproximar la solución en $x = 0,4$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$. Obtener la solución exacta de la ecuación y valorar el error global cometido cuando $n = 1, 2, 4, 5, 10, 100, 1000$. Comparar los resultados con los del método de Euler.

(Solución: $z_2 = 0,016$; $z_4 = 0,020072$. La solución exacta es desconocida)

13.2. Escribir el tablero de Butcher para el método: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (f(x_n, z_n) +$

$$3f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3} \cdot f(x_n, z_n))).$$

13.3. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} + 2z_{n+2} + z_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

siendo $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = 4$.

$$(Solución: z_n = (1 - n + n^2/8) \cdot \cos \frac{\pi n}{2} + (5 - 3n) \cdot \sen \frac{\pi n}{2}).$$

13.4. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 4z_{n+2} + 8z_{n+1} - 8z_n = -3$ siendo $z_0 = 1$, $z_1 = z_2 = 0$.

$$(Solución: z_n = 2^n \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{\pi n}{3} - \frac{5}{4\sqrt{3}} \cdot \sen \frac{\pi n}{3}) + 1).$$

13.5. Obtener una fórmula que calcule $\sum_{n=1}^N n^4$ siendo N un número natural.

$$(Solución: s_{n+1} - s_n = 0 \Rightarrow s_n = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}).$$

13.6. ¿Para qué valores de a , b y c el método $z_{n+1} - z_n = h(af(x_n, z_n) + (1 - a)f(x_n + bh, z_n + chf(x_n, z_n)))$ es convergente? ¿Para qué valores de a , b y c dicho método obtiene el máximo orden de consistencia? ¿Es el método convergente? Si se aplica el primer método y el segundo al problema $y' = x + 1$, $y(x_0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$ y tamaño de paso h , ¿se puede asegurar que z_n coincide con el valor exacto de la solución en x_n ?

(Solución: Es convergente para todo a , b y c . Orden de consistencia máximo

$$p = 2 \Rightarrow b = c = \frac{1}{2(1-a)}).$$

13.7. ¿Para qué valores de a y b el método $z_{n+1} - z_n = h(af(x_n, z_n) + bf(x_n +$

$\frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}hf(x_n, z_n))$ tiene de orden de consistencia dos? Aplicar el método al problema $y' = y + 2$, $y(1) = 2$, tomando como valor inicial $z_0 = 2$ y tamaño de paso $h = 0,1$ para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 3$.

(Solución: $a = 0$, $b = 1$; $z_{20} = z(3) = 27,464939\dots$).

13.8. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{4}(f(x_n, z_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, z_n + ahf(x_n, z_n)))$ obtener el valor de a para que el orden de consistencia sea máximo. ¿Cuál es ese orden? Aplicar el método al problema $y' = y - x^2$, $y(0) = 2$, tomando como valor inicial $z_0 = 2$ y tamaño de paso h , para obtener el valor aproximado de la solución en $x_n = nh$. ¿Se puede asegurar que la solución es exacta?

(Solución: $a = 2/3$; $p = 2$; $z_n = n^2h^2 + 2nh + 2 = x^2 + 2x + 2$, solución exacta).

13.9. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2}(f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})) - \frac{h^2}{12}(g(x_n, z_n) - g(x_{n+1}, z_{n+1}))$ donde f y g significan: $y' = f(x, y)$, $g(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y)$, aplicarlo al problema: $y' = y + x$, $y(0) = 0$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 2$. Calcular $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nh = cte}} z_n$. Obtener el orden de consistencia del método.

(Solución: $z_{20} = z(2) = 4,3890561$; $z_n = \left(\frac{12 + 6h + h^2}{12 - 6h + h^2} \right)^n - nh - 1 \rightarrow e^x - x - 1$; $p = 3$).

13.10. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = h\left(\frac{3}{4}f(x_n, z_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, z_n + 2hf(x_n, z_n))\right)$, aplicarlo al problema: $y' = y + 2$, $y(0) = 3$, tomando como valor inicial $z_0 = 3$ y tamaño de paso h , para obtener el valor aproximado de la solución en $x_n = nh$. Calcular $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nh = cte = x}} z_n$. ¿Coincide este límite con el valor exacto de la solución del problema en x ? Calcular el valor aproximado de la solución en $x = 3$ utilizando un tamaño de paso $h = 0,1$.

(Solución: $z_n = 5 \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n - 2 \rightarrow 5e^x - 2$, valor exacto; $z_{30} = z(3) = 98,4227... \cong y(3) = 98,4276...)$.

13.11. Aplicar el método de Taylor de orden dos al problema:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 16x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tomando como valor inicial $\begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y tamaño de paso $h = 0,1$ para

obtener el valor aproximado de la solución en $x = 0,1$.

(Solución: $z_1 = z(0,1) = \begin{pmatrix} -0,14 \\ 3,04 \end{pmatrix}$).

13.12. Aplicar el método de Runge-Kutta cuatro al problema:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomando como valor inicial $\begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tamaño de paso h para obtener el

valor aproximado de la solución en $x = h$.

$$(\text{Solución: } z_1 = z(h) = \begin{pmatrix} \frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} \\ \frac{11h^4}{24} + \frac{5h^2}{6} + h + 1 \end{pmatrix}).$$

13.13. Aplicar el método de Taylor de orden dos al problema: $y'' + 2xy' + y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, determinando previamente el sistema asociado a la ecuación diferencial, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0,2$, para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 0,2$.

13.14. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (del ejemplo 13.1.2) en que $z_{0,1}(1) = 34,411490$ y $z_{0,05}(1) = 45,588399$.

13.15. Aplicar el método $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ siendo $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n$

$$+ h, z_n + hk_1), \text{ al sistema: } \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}, \text{ con}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para calcular } z_1 \text{ tomando como valor inicial } \begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y tamaño de paso h .