

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

ANTONIA FERRÍN MOREIRAS, MAESTRA NACIONAL, QUÍMICA, FARMACÉUTICA Y MATEMÁTICA, UN NOTABLE EJEMPLO PARA LAS MUJERES ACTUALES

INVESTIGACIÓN

LA ENTROPÍA DE RENYÍ: UNA HERRAMIENTA MATEMÁTICA PARA EL DIAGNÓSTICO NEUROGENERATIVO

HYPERBOLIC CLASSIFICATION OF NATURAL NUMBERS AND GOLDBACH CONJECTURE

APLICACIÓN DE LA REGRESIÓN DE MÚLTIPLES OBJETIVOS EN LA ESTIMACIÓN DE COMPONENTES FITOQUÍMICOS

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

LAS MATEMÁTICAS EN LA NOTACIÓN DE AJEDREZ

EL GRAN DESCUBRIMIENTO DE HUMMER

EXPERIENCIAS DOCENTES

LA INFORMACIÓN CULTURAL DE LOS ESTUDIANTES DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

EL USO DE LAS PROYECCIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

CUENTOS MATEMÁTICOS

OBSESIONADO CON SU IMAGEN

CRÍTICAS Y RESEÑAS

e-pi-log-0: TEATRO INTERACTIVO. UN SHOW INTELIGENTE PARA AYUDAR A ENSEÑAR

ENTREVISTA A:

LUIS BALBUENA: "UN TENAZ DOCENTE CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LOS TALONES"



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen X, Número 2, Octubre 2020

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Ilustración de portada / Museo de matemáticas pens (ETSICCyP - UPM, Madrid)
Diseño de portada y Maquetación / Sagrario Lantarón, Mariló López

Universidad Politécnica de Madrid

Se admite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato, incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen X, Número 2, ISSN 2174-0410



Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla, Trinidad Menárguez Palanca, María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre, Susana Merchán Rubira

1 de octubre de 2020

Índice de Artículos

Editorial de Número 2 (Vol. X)..... 1

Investigación

- Aplicación de la regresión de múltiples objetivos en la estimación de componentes Fitoquímicos..... 7
Pedro Manuel Estrada Jiménez, Pedro Jorge Noguera López, Raúl Recio Avilés
- La entropía de Renyí: Una herramienta matemática para el diagnóstico neurogenerativo.... 15
Marlene Leyva Martínez, Luis Manuel Díaz Granado Bricuyet, Aidara Carrazana Aguilar
- Hyperbolic classification of natural numbers and Goldbach Conjecture 23
Fernando Revilla Jiménez

Experiencias Docentes

- La información cultural de los estudiantes desde la resolución de problemas aritméticos.... 45
Eduardo Miguel Pérez Almarales, Edel Ernesto Pérez Almarales, Miguel Oscar Almarales Milán, Inés María Lago Guerrero
- El uso de las proyecciones en la resolución de problemas de geometría del espacio 65
Eduardo Miguel Pérez Almarales, Miguel Oscar Almarales Milán, Edel Ernesto Pérez Almarales, Inés María Lago Guerrero

Historias de Matemáticas

- Antonia Ferrín Moreiras, maestra nacional, química, farmacéutica y matemática, un notable ejemplo para las mujeres actuales 87
Juan Núñez Valdés

Juegos y Rarezas Matemáticas

- Las matemáticas en la notación de ajedrez 109
Ronnie Torres Hugues, Yudeimys Ymas Dávila, Enrique Nieves Santana
- El Gran Descubrimiento de Hummer 135
David Almorza

Cuentos

- Obsesionado con su imagen..... 141
Marta María Paz Rodríguez

Críticas y Reseñas

- e-pi-log-0: Teatro interactivo. Un show inteligente para ayudar a enseñar 143
GIE Pensamiento Matemático

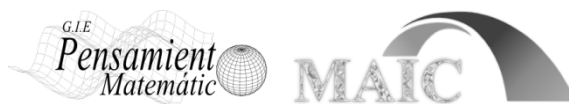
Entrevistas

- Luis Balbuena, un tenaz docente con la Educación Matemática en los talones..... 149
Luis Balbuena y Adela Salvador

Editorial del Número 2 (Volumen X)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 001-005, ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2020

Resumen

Este número de la Revista ha tardado más de lo esperado en salir a la luz. Vivimos momentos complicados con la Covid-19 que afecta a todos los campos y especialmente, al de la docencia y la investigación.

Aquí está este segundo número del volumen X de Pensamiento Matemático que, como siempre presenta una colección variada de trabajos matemáticos muy interesantes.

Abstract

This number of Pensamiento Matemático has taken longer than expected to come. We are living difficult times with Covid-19 that affects all fields and especially, teaching and research.

Here is this second issue of volume X of Pensamiento Matemático which, as always presents a varied collection of very interesting mathematical papers.

Introducción

2020 se ha convertido en un año realmente diferente y complicado. La Ciencia también se está viendo afectada por la situación provocada por la Covid 19. Todos deseamos que sea justamente la Ciencia la que permita revocar esta situación por medio de la investigación y que se consiga una vacuna eficaz contra este virus.

Nuestra Revista sigue recibiendo trabajos muy interesantes que queremos compartir con todo el público interesado en las matemáticas, en sus aplicaciones, curiosidades, investigaciones o divertimentos. Este número nos trae los siguientes artículos que estamos seguros os interesarán.

Esperamos que, para el próximo número de abril, la situación mundial haya mejorado y los ánimos de todos estén más altos.

Investigación

En *Aplicación de la regresión de múltiples objetivos en la estimación de componentes fitoquímicos*, investigadores cubanos hacen uso de los modelos de regresión de múltiples objetivos en la predicción de los componentes fitoquímicos de dos variedades de plantas. Crean y evalúan modelos de regresión de múltiples objetivos capaces de predecir los componentes fitoquímicos de ciertas especies.

La entropía de Renyi: Una herramienta matemática para el diagnóstico neurogenerativo se ocupa de problemas cerebrales y realiza un estudio acerca de patrones teniendo en cuenta la Entropía de Renyi, como una medida del desorden. Éstos permiten diferenciar a un paciente considerado sano de uno con una afección neurológica.

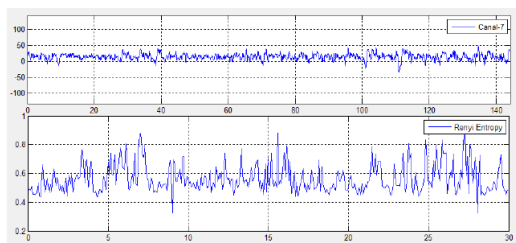


Figura 1. Paciente Barbaro Sano, 18 años de edad. Canal 7

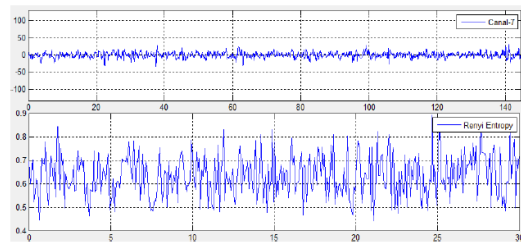


Figura 3. Paciente Rafael con Epilepsia, 24 años de edad. Canal 7

Hyperbolic classification of natural numbers and Goldbach Conjecture, se trata de un artículo técnico y muy específico donde se proporciona una caracterización de la Conjetura de Goldbach en un conjunto infinito de números pares en términos de gradientes de deformaciones de hipérbolas.

Experiencias Docentes

En la sección dedicada a compartir experiencias que se han puesto en práctica o se proponen para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en este número se publican dos trabajos muy interesantes:

La información cultural de los estudiantes desde la resolución de problemas aritméticos, expone una visión novedosa de cómo se puede utilizar la resolución de problemas para ofrecer información cultural a los estudiantes. A través de pintores, escultores, escritores, científicos y obras de arte se aumenta el caudal de conocimientos, a la vez que se profundiza en los procedimientos de resolución de problemas por vías aritméticas. Representa un trabajo en el que matemáticas, arte, música o historia se complementan.



En el artículo *El uso de las proyecciones en la resolución de problemas de geometría del espacio*, se presenta un procedimiento para resolver problemas de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos utilizando sus proyecciones. Su finalidad es que los estudiantes profundicen en elementos básicos de geometría plana.

Experiencias Docentes

Antonia Ferrín Moreiras, maestra nacional, química, farmacéutica y matemática, un notable ejemplo para las mujeres actuales nos presenta a esta mujer, referente destacado en virtud de sus grandes méritos académicos pese a las grandes dificultades que soportó. Este trabajo muestra la biografía de la orensana Antonia Ferrín Moreiras, licenciada y doctora en Matemáticas (Astronomía) y también maestra nacional y licenciada en Química y en Farmacia en la primera década del siglo pasado.



Juegos y rarezas matemáticas

Dos artículos se incluyen en esta sección siempre agradable y curiosa.

Las matemáticas en la notación de ajedrez presenta un resumen histórico de las diversas notaciones que se han empleado para registrar partidas de ajedrez, bajo un enfoque geométrico. Se realiza además un análisis en el que se considera al tablero de ajedrez como un plano cartesiano, así como la componente vectorial que presentan las piezas y la importancia para los planes del juego. El trabajo se completa con curiosidades sobre el juego y las matemáticas, destacando la figura de Euler



Tenemos también una inmersión en el mundo de la magia gracias a *El Gran Descubrimiento de Hummer*. En este artículo se describe y se explica con detalle un novedoso juego de magia con cartas que el mago Bob Hummer incluyó en su espectáculo y al que llamó: el gran descubrimiento de Hummer.

Cuentos

Obsesionado con su imagen. Brevísimos cuentos de este número, pero muy bonito y poético. Se trata de uno de los cuentos presentados al concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE (Grupo de Innovación Educativa) Pensamiento Matemático de la UPM (Universidad Politécnica de Madrid), para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios.

Reseñas

En noviembre de 2019 el GIE Pensamiento Matemático estrenó una obra de teatro interactivo llamada e-pi-log-0: Teatro inteligente. Se trata de una obra inmersa en un proyecto de innovación educativa que ha pretendido utilizar el teatro como instrumento de acercamiento a las matemáticas y como estímulo para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y el trabajo en equipo.

Entrevistas

El número se cierra con una entrevista a un matemático genial: *Luis Balbuena, un tenaz docente con la Educación Matemática en los talones* nos permite conocer a este matemático que ha dedicado su vida a la enseñanza de las Matemáticas. Precursor de numerosos proyectos

e iniciativas, ha creado en Canarias una potente Sociedad Matemática, una interesante revista: Números, un Museo de las Matemáticas, ...



Investigación

Aplicación de la regresión de múltiples objetivos en la estimación de componentes fitoquímicos

Application of multi-target regression in the estimation of phytochemical components

Pedro Manuel Estrada Jiménez
Pedro Jorge Noguera López
Raúl Recio Avilés

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 007-014, ISSN 2174-0410
Recepción: 01 May'20; Aceptación: 25 May'20

1 de octubre de 2020

Resumen

La aplicación de los modelos de regresión es un paradigma que está en constante evolución en gran parte de los países. En la presente investigación se hace uso de los modelos de regresión de múltiples objetivos en la predicción de los componentes fitoquímicos de dos variedades de plantas utilizadas en la nutrición animal. Para esta variante se utilizó un algoritmo basado en instancias. Se evaluó el aprendizaje de este modelo para determinar la calidad de las predicciones y finalmente se obtuvieron los modelos de predicciones para ambas variedades.

Palabras Clave: Múltiples objetivos, regresión, aprendizaje automático, minería de datos.

Abstract

The application of regression models is a paradigm that is constantly evolving in many countries. In the present research, multi-objective regression models are used in the prediction of the phytochemical components of two varieties of plants used in animal nutrition. For this variant, an instance-based algorithm was used. The learning of this model was evaluated to determine the quality of the predictions and finally the prediction models for both varieties were obtained.

Keywords: Multi-target, regression, machine learning, data mining.

1. Introducción

El sector agropecuario a nivel mundial es uno de los más importantes en el desarrollo de los países, por lo que ocupa uno de los primeros lugares en los renglones a valorar; las tecnologías

actuales se han dedicado a la fertilización y obtención de plantaciones a partir de la aplicación de métodos modernos que han provocado en gran medida la pérdida de cualidades necesarias y naturales de algunos cultivos, sin embargo las propiedades de los árboles y arbustos contribuyen a asegurar una dieta nutritiva para el ganado [3].

En investigaciones realizadas ha quedado reflejada la importancia del uso de estas plantas en sistemas silvopastoriles mediante la aplicación de varias técnicas y la importancia del control de los componentes fitoquímicos que estas contienen ante la aparición de efectos secundarios en animales atendiendo al consumo de plantas denominadas de excelencia. Estas han generado en gran cantidad de animales trastornos digestivos con distintas manifestaciones producto del efecto de los metabolitos secundarios.

La estimación de estos componentes es un proceso costoso, en la actualidad el mismo se realiza mediante técnicas de laboratorio caras. El uso de sistemas inteligentes ha tenido su participación en la toma de decisiones e investigaciones en varios ámbitos, se pueden mencionar resultados vinculados con la medicina, electrónica, meteorología y otros; la agricultura y la ganadería no escapan de estos beneficios. La aplicación de las nuevas tecnologías y de la Inteligencia Artificial en la solución de problemas genera en el mundo gran impacto en los sectores donde se aplican las soluciones por la rapidez y la eficiencia con que se desarrollan las tareas.

Entre los avances en la aplicación de los modelos de regresión se destacan a nivel mundial los modelos de predicciones en todas sus variantes, estos, se aplican a un gran número de problemas. En este sentido los clasificadores juegan un papel importante en varias esferas como en la determinación de patologías en el ámbito de la medicina y la agricultura donde cada día son más explotados y estudiados. Los algoritmos de clasificación se pueden dividir en dos grupos, supervisados y no supervisados. Las técnicas supervisadas tienen una fase de entrenamiento en la cual se usan muestras representativas de las clases seleccionadas para establecer un modelo del proceso de clasificación. Las técnicas no supervisadas no requieren ningún entrenamiento y tampoco suponen la definición previa de una clase.

El impacto de la aplicación de técnicas científicas vinculadas con los sectores de la sociedad forma parte del desarrollo del país; las predicciones han alcanzado un peldaño en la cima de estas; se puede mencionar la aplicación de los modelos de regresión en la estimación del estado del tiempo y las variables climáticas. Esta tarea se realiza auxiliándose de un historial de pronósticos dotado de un gran volumen de datos que permite a los sistemas inteligentes entrenarse y alcanzar un conocimiento alto para poder predecir el estado del tiempo.

2. Materiales y métodos o Metodología computacional

En el proceso de selección de la metodología a utilizar fueron exploradas la naturaleza de las variables a estudiar, de esto se derivó que las mismas estaban todas en el dominio de los números reales por lo que se concluyó que todas las variables, tanto las de entrada como las de salida estaban en el mismo dominio numérico. Partiendo de este paso se evaluó la correlación entre estas con el objetivo de determinar el posible modelo de regresión a aplicar; de este se determinó que como la correlación entre las variables de salida era alta entonces es recomendable la utilización de un modelo de regresión de múltiples objetivos atendiendo a la correlación entre las variables y el comportamiento de las mismas. Estos modelos de regresión son utilizados en la predicción como técnica supervisada en la minería de datos en la cual se emplean algoritmos que resuelvan problemas de regresión.

Los modelos de regresión donde se tiene varias salidas hacen uso de un algoritmo para realizar las predicciones de cada objetivo. Dentro de estos algoritmos pueden encontrarse:

Los **algoritmos basados en reglas** permiten expresar disyunciones de manera más fácil que los árboles y tienden a preferirse con respecto a los árboles por tender a representar partes

de conocimiento relativamente independientes. Las técnicas de Inducción de Reglas permiten generar y contrastar árboles de decisión, o reglas y patrones a partir de los datos de entrada. La información de entrada será un conjunto de casos en que se ha asociado una clasificación o evaluación a un conjunto de variables o atributos [1].

Los **algoritmos basados en árboles de decisión** son un conjunto de condiciones organizadas en una estructura jerárquica, de tal manera que permite determinar la decisión final que se debe tomar al seguir las condiciones que se cumplen desde la raíz del árbol hasta alguna de sus hojas. Los árboles de decisión son especialmente apropiados para expresar procedimientos médicos, legales, comerciales, estratégicos, matemáticos, lógicos, entre otros. Estos se caracterizan por la sencillez de su representación y de su forma de actuar, además de la fácil interpretación, dado que pueden ser expresados en forma de reglas de decisión [1].

Los **algoritmos perezosos** son métodos basados en instancias que utilizan enfoques conceptualmente sencillos para las aproximaciones de valores reales o discretos de las funciones de salida. Aprender en estos modelos consiste en almacenar los datos de entrenamiento presentados y cuando una nueva instancia es encontrada, un grupo de ejemplos similares relacionados son recuperados de memoria y usados para clasificar la nueva instancia consultada. Entre los algoritmos perezosos destacan los modelos de aprendizaje basados en instancias. Su funcionamiento parte de almacenar instancias de ejemplo, que en algunas variantes son todas las instancias del conjunto de entrenamiento, en otras solo se almacenan los ejemplares más representativos, etc. [7].

En este sentido en el algoritmo de aprendizaje basado en instancias, el funcionamiento es muy simple: se almacenan los ejemplos de entrenamiento de datos históricos y cuando se requiere clasificar a un nuevo objeto, se extraen los objetos más parecidos y se usa su clasificación para clasificar al nuevo objeto. Los vecinos más cercanos a una instancia se obtienen en dependencia de los atributos, para el caso de valores continuos se utiliza la distancia Euclidiana sobre los n posibles atributos y el resultado de la clasificación puede ser discreto o continuo; en el caso discreto, el resultado de la clasificación es la clase más común de los k vecinos [5].

3. Regresión de múltiples objetivos

Existen varias clasificaciones de los modelos de regresión, esto está condicionado por la naturaleza de las variables que intervengan en el problema y por la cantidad y organización de las mismas. Se puede decir que cuando se tiene una variable dependiente y una independiente puede aplicarse un modelo de regresión lineal simple, teniendo en cuenta los supuestos que normalmente se consideran y estudian para que esto se cumpla, de manera similar cuando se tienen varias variables de entrada y una de salida o varias variables independientes y una dependiente se puede plantear un modelo de regresión múltiple univariado pero cuando se tienen varias variables de entrada y varias de salida entran en juego otras técnicas a analizar para poder determinar la variante a aplicar, en dependencia del comportamiento de la correlación entre los datos es que se define la variante de regresión, pues cuando las variables de salida tienen una alta correlación entre ellas se puede deducir un problema de regresión de múltiples objetivos pero si la correlación es baja entonces se puede pensar en crear tantos modelos múltiples univariados como variables de salida se tengan, pero siempre hay que tener en cuenta la correlación que exista entre las variables que intervienen en el problema planteado.

Normalmente un problema de regresión de múltiples objetivos está compuesto por un conjunto de datos S que contiene todos los ejemplos en la forma (x, y) donde $x \in X$ es un vector de entrada y $y \in Y$ es uno destino. X es el espacio de entrada que contiene d variables de entrada $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ y Y es el espacio de salida que contiene q variables objetivo $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_q\}$. Por tanto x_i es el vector de entrada del ejemplo i y y_i representa el vector objetivo del ejemplo i . Por tanto, dados los ejemplos de entrenamiento $S = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ con d ejemplos de

entrenamiento, el objetivo de estos modelos es aprender de un modelo predictivo que dado un vector de entrada x sea capaz de predecir un vector objetivo \hat{y} que se aproxime lo mejor posible al vector del cual aprendió el sistema [6].

Los métodos existentes para la regresión de múltiples salidas se pueden clasificar como métodos de transformación de problema (también conocidos como métodos locales), que transforman la salida múltiple del problema en problemas independientes de salida única, cada uno resuelto usando una salida única del algoritmo de regresión, y métodos de adaptación de algoritmos (también conocidos como métodos globales o big-bang) que adaptan un método específico de salida única (como los árboles de decisión y soporte de máquinas de vectores) para manejar directamente conjuntos de datos de múltiples salidas. Se considera que los métodos de adaptación son más desafiantes ya que generalmente no apuntan solo para predecir los objetivos múltiples, sino también para modelar e interpretar las dependencias entre estos objetivos [2].

Los métodos de transformación de problemas se basan principalmente en transformar el problema de regresión de múltiples salidas en problemas de un solo objetivo, luego construir un modelo para cada objetivo y finalmente concatenar todas las predicciones. El principal inconveniente de estos métodos es que se ignoran las relaciones entre las salidas y se predicen estas de manera independiente, situación que puede afectar a la calidad general de las predicciones. Entre los métodos de regresión de múltiples salidas se pueden mencionar:

- Método de un solo objetivo.
- Método de apilamiento de regresores de múltiples objetivos.
- Método de cadenas de regresores.
- Método de regresión de vectores de soporte de múltiples salidas.

Los métodos de adaptación de algoritmos se basan en la idea de predecir varias salidas de manera simultánea utilizando un modelo simple pero explorando las dependencias entre cada una de ellas (las salidas). Entre estos métodos se pueden mencionar:

- Método estadístico.
- Método de cadenas de regresores.
- Método de núcleos.
- Método basado en árboles de regresión.
- Método basado en reglas de clasificación.

De acuerdo con [9] para evaluar los modelos de regresión donde se tiene múltiples salidas la métrica más utilizada es RRMSE (Relative Root Mean Squared Error) . Esto se define como la raíz cuadrada de la distancia cuadrada promedio entre el puntaje real y el puntaje predicho:

$$RRMSE = (h, D_{prueba}) = \sqrt{\frac{\sum_{(x,y) \in D_{prueba}} (\hat{y}_j - y_j)^2}{\sum_{(x,y) \in D_{prueba}} (\bar{Y}_j - y_j)^2}}$$

donde \bar{Y}_j es el valor medio de la variable de destino Y_j sobre $D_{entrenamiento}$ y \hat{y}_j es la estimación de $h(x)$ para Y_j , $D_{entrenamiento}$ es el conjunto de entrenamiento y D_{prueba} el conjunto de prueba. El cálculo de RRMSE para un objetivo es igual al Error Cuadrático Medio (Root Mean

Squared Error RMSE) para ese objetivo dividido por el RMSE de predecir el valor promedio de ese objetivo en el conjunto de entrenamiento. La medida RRMSE se estima al utilizar el enfoque de espera para conjuntos de datos grandes, mientras que la validación cruzada de 10 veces se emplea para conjuntos de datos pequeños.

A menudo estos métodos de aprendizaje automático son aplicados con la validación cruzada, que es un procedimiento de remuestreo que se utiliza para evaluar modelos de aprendizaje automático en una muestra de datos limitada. El procedimiento tiene un único parámetro llamado k que se refiere al número de grupos en que se dividirá una muestra de datos dada. Este es un método que intenta maximizar el uso de los datos disponibles para la capacitación y luego probar un modelo. Es particularmente útil para evaluar el rendimiento del modelo, ya que proporciona un rango de puntajes de precisión a través de conjuntos de datos diferentes [4]. Por tanto se tiene entonces que para calcular el aRRMSE (Average Root Mean Squared Error) se promedia de la siguiente forma [8]

$$aRRMSE(h, D_{prueba}) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q RRMSE$$

Esta medida de evaluación del aprendizaje es muy utilizada para evaluar el aprendizaje de los modelos de múltiples salidas, cuando el conjunto de datos es pequeño se utiliza la técnica de validación cruzada con 10 partes.

4. Resultados y discusión

A partir de un estudio realizado en el cual se tuvo en cuenta la necesidad de determinar los metabolitos secundarios, fueron analizados los datos necesarios para obtener los mismos por lo que se definieron como variables de entrada a las variables $E, N, Gl, Fr, Sc, TMax, TMin, TMed, HRMax, HRMin, HRMed, LlyDLI$ (explicadas en la Tabla 1) variables de salida, $Tt, Tct, TcIt, Tcl, Ft, Vr, Es, Rf, Fl, Al, Sp, Tr$ y Et (explicadas en la Tabla 2). Luego se conformaron los modelos para cada dataset (uno para el caso de la *Leucaena leucocephala* y otro para el caso de *Tithonia diversifolia*) a partir de un modelo de regresión de múltiples objetivos. El aprendizaje de estos fue probado utilizando algoritmos que modelan problemas de regresión como puede verse en la Tabla 3. Esta evaluación se realizó a partir de la aplicación de la validación cruzada con $kfold=10$ donde la medida utilizada para estos modelos es el aRRMSE.

Tabla 1. Variables de entrada.

Componente	Dominio $x \in \mathbb{R}$
Edad de rebote (E)	$\mathbb{R}+$
Nitrógeno (N)	$\mathbb{R}+$
Glucosa (Gl)	$\mathbb{R}+$
Fructuosa (Fr)	$\mathbb{R}+$
Sacarosa (Sc)	$\mathbb{R}+$
Temperatura Máxima (TMax)	\mathbb{R}
Temperatura Mínima (TMin)	\mathbb{R}
Temperatura Media (TMed)	\mathbb{R}
Humedad Relativa Máxima (HRMax)	$\mathbb{R}+$
Humedad Relativa Mínima (HRMin)	$\mathbb{R}+$
Humedad Relativa Media (HRMed)	$\mathbb{R}+$
Lluvia (Ll)	$\mathbb{R}+$
Días con Lluvia (DLI)	$\mathbb{R}+$

Tabla 2. Variables de salida.

Componente	Dominio $y \in \mathbb{R}$
Taninos Totales (Tt)	\mathbb{R}
Taninos Condensados Totales (Tct)	\mathbb{R}
Taninos Condensados Ligados Totales (Tclt)	\mathbb{R}
Taninos Condensados Libres (Tcl)	\mathbb{R}
Fenoles Totales (Ft)	\mathbb{R}
Verbascosa (Vr)	\mathbb{R}
Estaquiosa (Es)	\mathbb{R}
Rafinosa (Rf)	\mathbb{R}
Flavonoides (Fl)	\mathbb{R}
Alcaloides (Al)	\mathbb{R}
Saponinas (Sp)	\mathbb{R}
Triterpenos (Tr)	\mathbb{R}
Esteroides (Et)	\mathbb{R}

Tabla 3. Clasificadores para *Leucaena leucocephala* y *Tithonia diversifolia*.

Algoritmo	RMSE para <i>Leucaena leucocephala</i>	RMSE para <i>Tithonia diversifolia</i>
M5p	0,7477	0,1789
m5pRuler	0,462	0,1243
linearRegression	1,069	0,1466
ibk	0,1176	0,0814
ZeroR	4,6358	0,8386
Ksvm	0,2505	0,1102
SMOreg	1,5003	0,1481
DecisionStump	2,8875	0,9383
MultilayerPerceptron	0,1505	0,0945
GaussianProcesses	1,6809	0,2693
REPTree	0,4527	0,1469

Tabla 4. Resumen para *Leucaena leucocephala* y *Tithonia diversifolia*.

Métrica	Promedios para <i>Leucaena leucocephala</i>	Promedios para <i>Tithonia diversifolia</i>
Average RMSE	0,1176	0,0814
Average Relative RMSE	0,0595	0,0956
Average MAE	0,0814	0,0547
Average Relative MAE	0,0485	0,0697

Como puede observarse en la Tabla 3, el comportamiento del aprendizaje a partir del RMSE varía en dependencia del tipo de algoritmo con que fue probado. El menor valor obtenido fue con el IBK; este utiliza la técnica del vecino más cercano (KNN), es un algoritmo simple que almacena todos los casos disponibles y predice el objetivo numérico en función de una medida de similitud (por ejemplo, funciones de distancia). Los valores de la Tabla 4 muestran las principales medidas de desempeño para un modelo de regresión.

Para cada modelo se realizaron un total de 3 pruebas, la tabla que a continuación se muestra representa las pruebas realizadas con los modelos creados. Para este caso de prueba el objetivo principal se centró en la comprobación de la exactitud de las predicciones a partir de juegos de datos con los que el sistema no fue entrenado.

En consulta con especialistas en el área de Pastos y Forrajes de la Universidad de Granma se pudo comprobar que los resultados arrojados por las pruebas a los modelos se acercan bastante

Tabla 5. Resumen para *Leucaena leucocephala* y *Tithonia diversifolia*.

	<i>Leucaena leucocephala</i>				<i>Tithonia diversifolia</i>			
	Lluvia		Poca Lluvia		Lluvia		Poca Lluvia	
	Esp	Real	Esp	Real	Esp	Real	Esp	Real
Tt	22,35	22,34	30,76	30,78	0,57	0,55	1,59	1,47
Tct	132,1	132,18	139,12	139,24	14,07	14,01	11,03	11,0
Tclt	121,6	121,61	130,22	130,33	11,19	11,16	9,32	9,31
Tclt	10,5	10,52	8,9	8,91	2,88	2,85	1,71	1,69
Ft	44,01	44,03	48,43	48,45	6,19	6,15	5,78	5,76
Vr	4,36	4,36	1,68	1,67	1,3	1,3	0,43	0,44
Es	4,41	4,42	3,66	3,66	0,5	0,5	0,18	0,18
Rf	2,08	2,1	1,79	1,79	2	2,03	1,21	1,21
Fl	59,25	59,21	61,14	61,11	11,81	11,79	28,73	28,83
Al	2,86	2,88	2,94	2,95	0,78	0,78	0,97	0,99
Sp	8,89	8,7	12,72	12,75	1,28	1,3	1,79	1,8
Tr	7,79	7,76	8,35	8,38	6,21	6,19	7,82	7,82
Et	5,91	5,91	5,22	5,27	7,2	7,15	11,72	11,8

a los arrojados por las técnicas de laboratorio. Este análisis fue posible a partir de las pruebas mostradas en la Tabla 5.

5. Conclusiones

- Se crearon modelos de regresión de múltiples objetivos capaces de predecir los componentes fitoquímicos de las especies *Leucaena leucocephala* y *Tithonia diversifolia* a partir de factores climáticos, metabolitos primarios y edad de rebote, en las condiciones climáticas del Valle del Cauto, esto posibilitará a científicos y a todo aquel que desee conocer el comportamiento de las especies mencionadas agilizar el proceso de caracterización fitoquímica de estas especies y sustituirá el uso de técnicas de laboratorio costosas para esta tarea.
- Se evaluó el aprendizaje de los modelos mediante la validación cruzada para obtener el modelo con menor aRRMSE.

Referencias

- [1] Yadira Robles Aranda and Anthony R Sotolongo, *Integración de los algoritmos de minería de datos 1r, PRISM e ID3 a PostgreSQL*, JISTEM-Journal of Information Systems and Technology Management **10** (2013), no. 2, 389–406.
- [2] Hanen Borchani, Gherardo Varando, Concha Bielza, and Pedro Larrañaga, *A survey on multi-output regression*, Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery **5** (2015), no. 5, 216–233.
- [3] Pedro Manuel Estrada Jiménez, Jorge Luis Ramírez de la Ribera, Danis Manuel Verdecia Acosta, and Yolanda Soler Pellicer, *Aplicación de la minería de datos en la estimación de componentes fotoquímicos (Original)*, Roca. Revista científico-educacional de la provincia Granma **15** (2019), no. 2, 177–186.
- [4] Ron Kohavi et al., *A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection*, Ijcai, vol. 14, 1995, pp. 1137–1145.

- [5] Sergio Valero Orea, Alejandro Salvador Vargas, and Marcela García Alonso, *Minería de datos: predicción de la deserción escolar mediante el algoritmo de árboles de decisión y el algoritmo de los k vecinos más cercanos*, Ene **779** (2005), no. 73, 33.
- [6] Oscar Reyes, Alberto Cano, Habib M Fardoun, and Sebastián Ventura, *A locally weighted learning method based on a data gravitation model for multi-target regression*, International Journal of Computational Intelligence Systems **11** (2018), no. 1, 282–295.
- [7] Mariño Rivero and Adis Perla, *GMLKNN: modelo basado en instancias para el aprendizaje multi-etiqueta utilizando la distancia VDM*, Ph.D. thesis, Universidad Central Marta Abreu de Las Villas. Facultad de Matemática, 2015.
- [8] Grigorios Tsoumakas, Eleftherios Spyromitros-Xioufis, Aikaterini Vrekou, and Ioannis Vlahavas, *Multi-target regression via random linear target combinations*, Joint european conference on machine learning and knowledge discovery in databases, Springer, 2014, pp. 225–240.
- [9] Eleftherios Spyromitros-Xioufis, Grigorios Tsoumakas, William Groves, and Ioannis Vlahavas. Multi-label classification methods for multi-target regression. *arXiv preprint arXiv:1211.6581*, pages 1159–1168, 2012.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Pedro Manuel Estrada Jiménez

Correo electrónico: pestradaj@udg.co.cu

Institución: Departamento de Ciencias Básicas e Informática Aplicada, Universidad de Granma, Bayamo, Granma, Cuba.

Nombre: Pedro Jorge Noguera López

Correo electrónico: informatica@tramaote.co.cu

Institución: Departamento de Redes, Empresa Comercializadora de Tabaco en Rama "La Vega", UEB Camagüey Oriente, Bayamo, Granma, Cuba.

Nombre: Raúl Recio Avilés

Correo electrónico: rrecioa@udg.co.cu

Institución: Departamento de Ciencias Básicas e Informática Aplicada, Universidad de Granma, Bayamo, Granma, Cuba.

Investigacion

La entropía de Renyí: Una herramienta matemática para el diagnóstico neurogenerativo

Renyí's entropy: a mathematical tool for neurogenerative diagnosis

Marlene Leyva Martínez, Luis Manuel Díaz Granado Bricuyet, Aidara Carrazana Aguilar

Revista de Investigación



Volumen X, Número X, pp. 015-022, ISSN 2174-0410
Recepción: 01 Jun'20; Aceptación: 09 Jul'20

1 de octubre de 2020

Resumen

El cerebro humano es un sistema complejo que progresivamente envejece, alcanza una sincronización generalizada (epilepsia) [11], se degenera (demencias) o simplemente proyecta acondicionamientos genéticos. En el presente trabajo se realiza un breve estudio acerca de ciertos patrones que se derivan de las señales electroencefalográficas, teniendo en cuenta la Entropía de Renyi, como una medida del desorden. Dichos patrones permiten diferenciar a un paciente considerado sano de uno con una afección neurológica. Los resultados conseguidos contribuyen al diagnóstico precoz de ciertas afecciones neurológicas. Además, se emplean algunas técnicas matemáticas que facilitan la interpretación de los resultados por los especialistas clínicos.

Palabras Clave: Electroencefalograma (EEG), Entropía de Renyi, Mapa de colores.

Abstract

The human brain is a complex system that progressively ages, reaches a generalized synchronization (epilepsy) [11], degenerates (dementias) or simply projects genetic preconditions. In this paper, a brief study is carried out on certain patterns that are derived from electroencephalographic signals, taking into account Reny Entropy, as a measure of disorder. These patterns allow differentiating a patient considered healthy from one with a neurological condition. The results achieved contribute to the early diagnosis of certain neurological conditions. In addition, the use of some mathematical techniques that facilitate the interpretation of the results by clinical specialists.

Keywords: Electroencephalogram (EEG), Renyí's entropy, colors map.

1. Introducción

Nuestro cerebro rige todas las funciones de nuestro cuerpo, y cada una tiene un área de asignación determinada, ya sea la vista, el oído, etc. Los accidentes, enfermedades y otros sucesos tienen la capacidad de alterar estas funciones básicas y a su vez su comportamiento.

El cerebro constituye la masa principal del encéfalo y es el lugar donde llegan las señales procedentes de los órganos de los sentidos, de las terminaciones nerviosas nociceptivas y propioceptivas. Se desarrolla a partir del telencéfalo. Procesa toda la información procedente del exterior y del interior del cuerpo y la almacena como recuerdos. Él es el encargado del buen funcionamiento del cuerpo, pues regula todas y cada una de las funciones de este [5].

Es además el centro de control del movimiento, del sueño y de casi todas las actividades vitales necesarias para la supervivencia, se encarga de recibir e interpretar las innumerables señales que le llegan desde el organismo y el exterior. El cerebro humano adulto normal pesa entre 1 y 1.5 Kg (3 libras) y tiene un volumen promedio de 1600 cm³. Es una estructura anatómica fascinante, entre otras cosas, porque se apoya en decenas de miles de millones de conexiones sinápticas, convirtiéndolo en una red neuronal extremadamente intrincada y densamente conectada [2].

Aunque una parte importante del conocimiento acerca del funcionamiento del cerebro humano continúa siendo un secreto para la comunidad científica dedicada al tema, se han dado pasos importantes que han ayudado a comprender cada vez más las interacciones anatómicas funcionales que ocurren en esta estructura y le garantizan dar una respuesta satisfactoria a los diversos estímulos que recibe y procesa en instantes de tiempo extremadamente cortos. En este sentido han surgido diversos conceptos que ayudan a comprender y clasificar mejor estas interacciones.

1.1. Características de las señales (EEG)

Para lograr realizar un diagnóstico certero se utiliza el Encefalograma. El electroencefalograma (EEG) puede ser rigurosamente definido como la actividad eléctrica media del cerebro en diferentes sitios de la cabeza, más específicamente es la suma de los flujos de corriente extracelulares de grandes grupos de neuronas [1, 8].

Todavía en nuestros días no son comprendidos todos los detalles acerca de la generación del EEG. Los ritmos del EEG registrados sobre el cuero cabelludo son el resultado del efecto aditivo de muchos potenciales postsinápticos excitatorios e inhibitorios producidos en las capas piramidales de la corteza cerebral [7].

El cerebro es un sistema extremadamente complejo que constantemente procesa y transfiere información hacia el exterior. Los sistemas neuronales trabajan a través de interacciones entre largos ensamblajes neuronales en el sistema nervioso central y el sistema nervioso periférico. Al nivel celular, las neuronas transfieren y procesan la información a través de los potenciales de acción y el disparo neuronal [9].

Cuando este tipo de actividad eléctrica se transfiere a la superficie de la corteza y a la superficie del cuero cabelludo, la podemos registrar como EEG. Una de las razones fundamentales del EEG cuantitativo es que las señales de EEG se originan en el cerebro y portan información patológica o fisiológica redundante dentro del mismo, por lo cual su adquisición y procesamiento resulta muy útil en la evaluación de esta información.

1.2. La adquisición del EEG

Para la realización de los registros de los EEG [3, 12], se utilizan sensores, también conocidos como electrodos, son posicionados a distancias preestablecidas sobre el cuero cabelludo. Durante la adquisición de los datos cada electrodo capta señales eléctricas desde el Sistema Nervioso Central. El sistema de registro de EEG incluye:

1. Etapa de electrodo y cabeza,
2. Pre-procesamiento y EEG cuantitativa,
3. Almacenamiento de datos y resultados.

Con el reciente desarrollo de la electrónica y la instrumentación ayudada por computadoras, existen mini-sistemas de EEG portables y poderosos para el registro y análisis de estas señales [6].

Estas medidas son desarrolladas fundamentalmente sobre la superficie del cuero cabelludo (EEG de superficie) o usando electrodos especiales ubicados en el cerebro mediante una operación quirúrgica (EEG intracraneal). Los electrodos de EEG son sensores potenciales eléctricos, los cuales se disponen en distintas formas y tamaños, que dependen del trabajo o las condiciones experimentales, tales como los electrodos de superficie, los electrodos de aguja, los electrodos del sphenoid, los electrodos de cinta subdural, y los electrodos de profundidad [13].

Actualmente, los electrodos normalmente más usados por el subprograma clínico del EEG son los electrodos de superficie, los cuales se pegan a la piel con gel.

2. Entropía de Renyi

El cerebro es un sistema complejo que, sin duda, pierde progresivamente la complejidad a medida que envejece, alcanza una sincronización generalizada (epilepsia) [11] o se degenera (demencias). Este patrón de simplificación neuronal es un rasgo que tiene una importancia central para entender el funcionamiento de la corteza cerebral (donde residen gran parte de las funciones cognitivas). La complejidad es una propiedad que caracteriza a los sistemas no lineales, por lo que debemos explorar en las técnicas no lineales para aprender a medir esta característica inherente al funcionamiento del cerebro (en la salud y la enfermedad). Existen una serie de medidas novedosas que se han dado a conocer en el mundo científico de hoy, a algunas de las cuales nos referiremos en adelante.

Hay que destacar que el procesamiento de la información por el cerebro se refleja en los cambios dinámicos de la actividad eléctrica en tiempo, frecuencia y forma espacial. Por consiguiente, para caracterizar la actividad eléctrica se requieren métodos capaces de describir la variación cuantitativa de estas señales en el tiempo y también en los cambios de sus componentes frecuenciales. Para ello es importante realizar un análisis EEG cuantitativo (qEEG), basado en la Transformada Wavelet Discreta Ortogonal (ODWT), para señales EEG. Para este caso, dos cuantificadores han sido usados: la Energía Wavelet Relativa (RWE) y la Entropía Wavelet Total Normalizada (NTWS) [4].

Asumamos que la señal viene dada por los valores muestreados

$$S = \{s_0(n) : 1 \leq n \leq M\} = \bigcup_{1 \leq i \leq \mathcal{N}} S^{(i)},$$

donde $S^{(i)}$ son subseñales que no se solapan, con $1 \leq i \leq \mathcal{N}$ y $\mathcal{N} = M/L$, siendo L el tamaño de las ventanas. Sea t_s y ω_s el tiempo y la frecuencia de muestreo, respectivamente. Si la descomposición de la señal es llevada sobre todos los niveles de resolución $N = \log_2(M)$, entonces

la expansión de wavelet vendrá dada por

$$S^{(i)}(t) = \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_k C_j^{(i)}(k) \psi_{j,k}(t), \quad 1 \leq i \leq \mathcal{N},$$

donde los coeficientes de wavelet $C_j^{(i)}(k)$ pueden interpretarse como el error residual local entre las aproximaciones sucesivas de la señal sobre las escalas j y $j + 1$ y $\{\psi_{j,k}(t)\}$ representa la familia de wavelets madres seleccionada.

Luego, la energía de wavelet en el nivel de resolución j , para la ventana temporal i , viene dada de la siguiente forma:

$$E_j^{(i)} = \sum_{k=(i-1)L+1}^{i \cdot L} |C_j^{(k)}|^2, \quad 1 \leq i \leq \mathcal{N}.$$

Mientras que la energía total en esta ventana de tiempo vendrá dada por

$$E_{\text{Total}}^{(i)} = \sum_{1 \leq j \leq N} E_j^{(i)}.$$

La evolución en el tiempo de la energía de wavelet relativa viene dada mediante:

$$p_j^{(i)} = \frac{E_j^{(i)}}{E_{\text{Total}}^{(i)}}.$$

Finalmente, la entropía de Renyi [10] quedará como sigue:

$$(H^q)^{(i)} = \frac{1}{1-q} \log_N \sum_{1 \leq j \leq N} \left(p_j^{(i)}\right)^q, \quad q \geq 0, \quad q \neq 1.$$

3. Valoración de los resultados

Para evaluar cuantitativamente el efecto de ciertas afecciones neurológicas se procedió a registrar la actividad eléctrica cerebral (EEG). Las señales EEG se captaron de 19 derivaciones del sistema internacional 10-20 de 19 canales. Para el caso del presente estudio, fue programada la medida $(H^q)^{(i)}$, con $1 \leq i \leq \mathcal{N}$, calculada a partir de la energía de wavelet e implementada en Python 3.7.

Esto permitió una experimentación inicial con todos los datos clínicos aportados en la base de datos del Departamento de Neurofisiología del Hospital Docente Carlos Manuel de Céspedes de la provincia Granma, entre los que se registraron pacientes con afectaciones neuronales y pacientes sanos, para lo cual se tomó como criterios los test neuropsicológicos y estudios genéticos, además de dos sujetos control (sanos), y pacientes con enfermedades como: Demencia, Alzheimer, Epilepsia, Parkinson, con pacientes cuyas edades oscilan entre los 6 meses de edad hasta 61 años, utilizando diferentes canales, para los cuales las técnicas utilizadas descartaban la presencia de dichas enfermedades así como la posibilidad de padecer alguna enfermedad neuronal.

En las Figuras 1 y 2, la media de los valores de la entropía de Renyi se concentra entre la banda 0.4 y 0.6, lo cual se refiere a pacientes sanos. En el caso de las Figuras 3 y 4, dicha media se concentra entre la banda 0.6 y 0.8, refiriéndose a pacientes con afectaciones (Epilepsia y Demencia). Por otro lado, la Figura 5 muestra mapas de colores, que representan a pacientes sanos, mientras que la Figura 6 representa a pacientes enfermos, notándose la intensidad de la coloración, siendo más intensa según el tipo de enfermedad y el tiempo de padecimiento en dependencia de la escala utilizada.

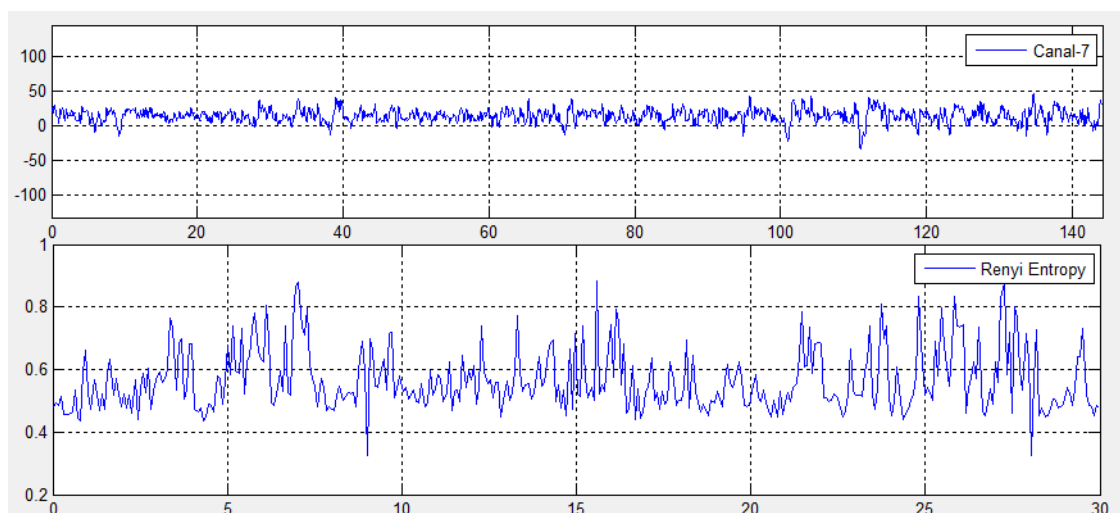


Figura 1. Paciente Bárbaro Sano, 18 años de edad. Canal 7

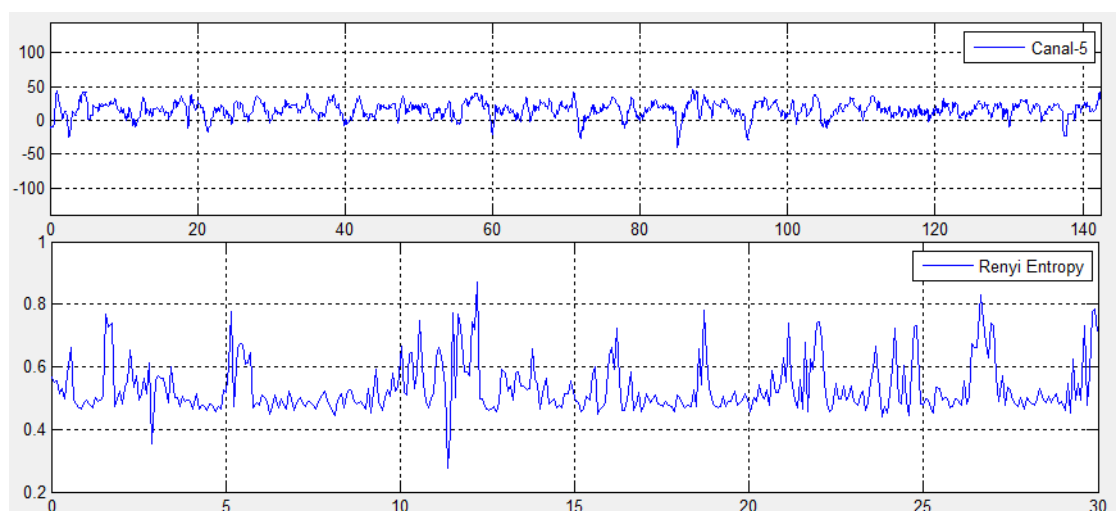


Figura 2. Paciente Dennis Sano, 42 años de edad. Canal 5

4. CONCLUSIONES

A través de esta investigación se dedujo que cuando la media de los valores de la RE se concentra por debajo de 0.5 se está en presencia de un paciente sano, mientras que si se concentra por encima de 0.5 se estaría en presencia de un paciente que padece alguna afección neuronal. Además, se concluyó que la utilización de una medida no lineal posibilita el estudio de la complejidad neuronal así como una comprensión precisa de los datos analizados. Las medidas no lineales estudiadas fueron programadas en Python 3.7, propiciando su tratamiento numérico y gráfico; de esta forma se facilitó la interpretación de dichas medidas por los especialistas clínicos, favoreciendo el proceso de diagnóstico precoz de las enfermedades neuronales y por lo tanto, la detección y la prevención de enfermedades neuronales.

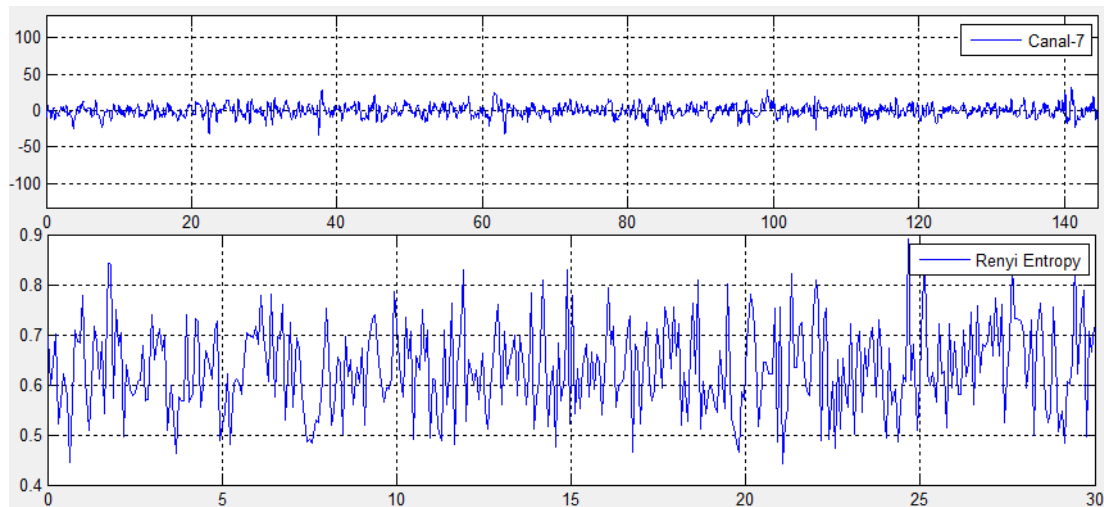


Figura 3. Paciente Rafael con Epilepsia, 24 años de edad. Canal 7

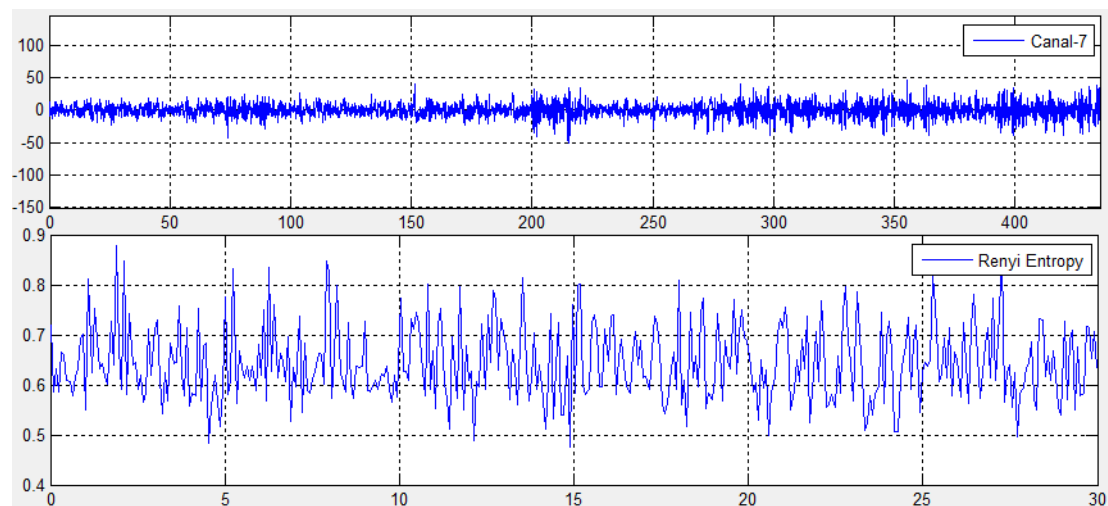


Figura 4. Paciente Alcides con Demencia, 61 años de edad. Canal 7

Agradecimientos

Los autores desean expresar sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valiosas sugerencias y recomendaciones.

Referencias

- [1] ALAEI, H., KHALILZADEH, A. y GORJI, A., *Optimal selection of sop and sph using fuzzy inference system for on-line epileptic seizure prediction based on eeg phase synchronization*, Australasian Physical & Engineering Sciences in Medicine, Vol. 42, N° 4, pp. 1049–1068, 2019.
- [2] BHATTACHARYA, J., WATANABE, K. y WSHIMOJO, S., *Nonlinear dynamics of evoked neuro-magnetic responses signifies potential defensive mechanisms against photosensitivity*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 14, N° 08, pp. 2701–2720, 2004.

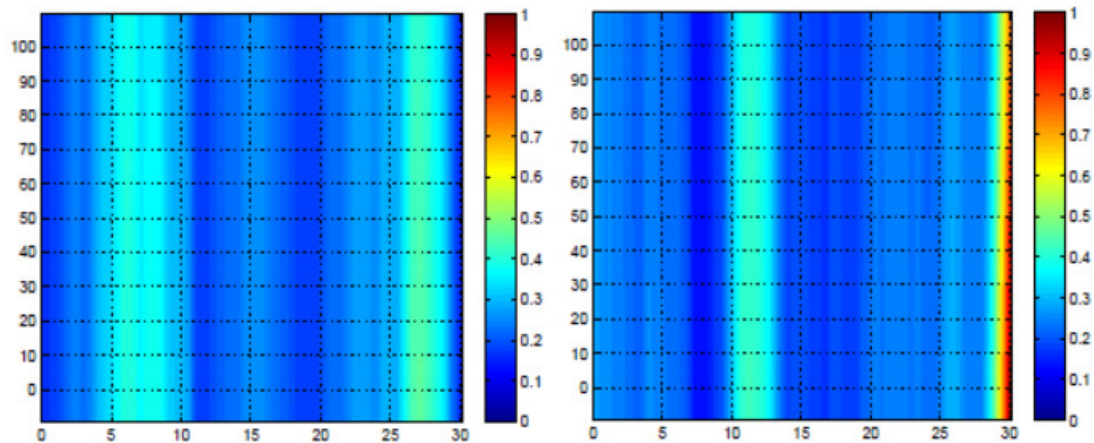


Figura 5. A la izquierda, Bárbaro Sano, 18 años, Canal 7 y a la derecha, Dennis Sano, 42 años, Canal 5

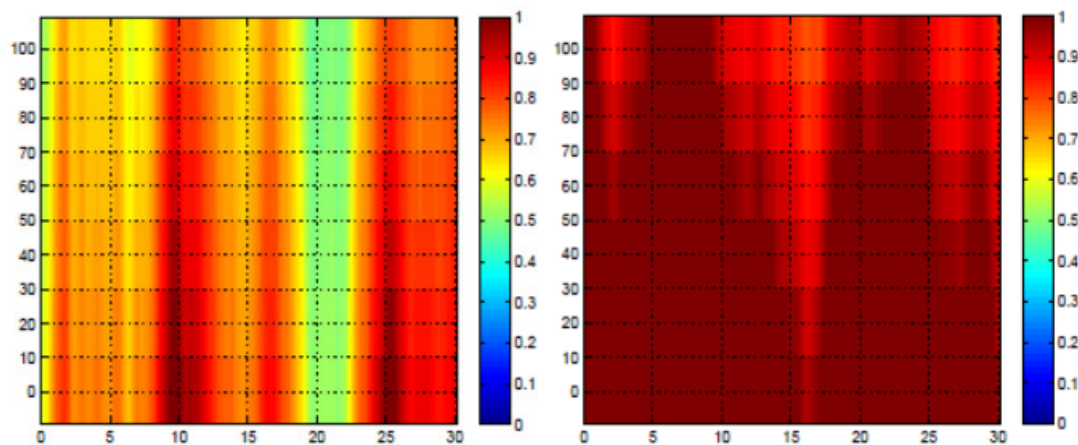


Figura 6. A la izquierda, Rafael Epilepsia, 24 años, Canal 7 y a la derecha, Arcides Demencia, 61 años, Canal 7

- [3] BOTELHO, T., SOPRANI, D., RODRIGUES, C., FERREIRA, A. y FRIZERA, A., *Nuevo enfoque para la clasificación de señales eeg usando la varianza de la diferencia entre las clases de un clasificador bayesiano*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, Vol 14, N° 4, pp.362–371, 2017.
- [4] CARVALHO, R., *Transformada wavelet na detecção de patologias da laringe*, 2012.
- [5] GRASMAN, R., *Sensor array signal processing and the neuro-electromagnetic inverse problem in functional connectivity analysis of the brain*, Universiteit van Amsterdam [Host], 2004.
- [6] Mario GUARASCIO, M. y PUTHUSSERYPADY, S., *Automatic minimization of ocular artifacts from electroencephalogram: A novel approach by combining complete emd with adaptive noise and renyi's entropy*, Biomedical Signal Processing and Control, Vol. 36, pp. 63–75, 2017.
- [7] JURADO, M., *Aprendiendo de las consecuencias de los actos: estudio electrofisiológico del hipocampo, corteza prefrontal y núcleo accumbens*, 2012.
- [8] KOROVAICHUK, M., *Descomposición de potenciales de campo local en sus fuentes presinápticas y su aplicación al estudio de dinámica de redes neuronales en el hipocampo*, PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2013.

- [9] KRASKOV, A., *Synchronization and Interdependence Measures and their Applications to the Electroencephalogram of Epilepsy Patients and Clustering of Data*, PhD thesis, Universität Wuppertal, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 2004.
- [10] LENZI, E., Mendes, S. y DA SILVA, R., *Statistical mechanics based on Renyi entropy*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 280, N° 4, pp. 337–345, 2000.
- [11] MANISH, T., HIMANSHU, D., MANJUNATHA, M., RAY, A. y MALOKAR, M., *Multiple entropies performance measure for detection and localization of multi-channel epileptic eeg*, Biomedical Signal Processing and Control, Vol. 38, pp. 158–167, 2017.
- [12] USECHE, J., *Desarrollo de un sistema de adquisición de eeg, para estimulación y procesamiento de potenciales visuales evocados en estado estable sobre una plataforma móvil, con aplicación a juegos didácticos*, B.S. thesis, Uniandes, 2016.
- [13] VILLADA, H., *Monitoreo electroencefalográfico invasivo en epilepsia refractaria a tratamiento médico*, Índice de Autores, Las Epilepsias del lóbulo temporal, ISBN: 978-958-8483-13-9, Medellín-Colombia, pp. 135–151, 2011.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Marlene Leyva Martínez
Correo electrónico: mleyvm@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma.

Nombre: Luis Manuel Díaz Granado Bricuyet
Correo electrónico: ldiazb@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma.

Nombre: Aidara Carrazana Aguilar
Correo electrónico: acarrazanaaguilar@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma.

Investigación

Hyperbolic classification of natural numbers and Goldbach Conjecture

Fernando Revilla Jiménez

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 023–044, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Feb'20; Aceptación: 25 Abr'20

1 de octubre de 2020

Abstract

By means of a theoretical development of lecture [3], we provide a characterization of the Goldbach Conjecture in an infinite set of even numbers in terms of gradients of deformed hyperbolas.

Keywords: Hyperbolic Classification, Natural Numbers, Goldbach Conjecture, Characterization.

1 Hyperbolic classification of natural numbers

1.1 Introduction

For a natural number $n > 1$ the fact of being a prime is equivalent to stating that the hyperbola $xy = n$ does not contain non-trivial natural number coordinate points that is, the only natural number coordinate points in the hyperbola are $(1, n)$ and $(n, 1)$.

We establish a family of bijective functions between non-negative real numbers and a half-open interval of real numbers. Bijectivity allows us to transport usual real number operations, sum and product, to the interval. It also allows us to deform the $xy = k$ hyperbolas with k as a real positive number in such a way that we can distinguish whether a natural number n is a prime or not by its behaviour in terms of gradients of the deformed hyperbolas near the deformed of $xy = n$ (Hyperbolic Classification of Natural Numbers).

In this section we define a function ψ which ranges from non-negative real numbers to a half-open interval, strictly increasing, continuous in $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0}$ and class 1 in each interval $[m, m + 1]$ ($m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$). The bijectivity of ψ allows to transport the usual sum and product of \mathbb{R}^+ to the set $\widehat{\mathbb{R}}^+ := \psi(\mathbb{R}^+)$ in the usual manner. That is, calling $\hat{x} := \psi(x)$, we define $\hat{s} \oplus \hat{t} := \psi(s + t)$, $\hat{s} \otimes \hat{t} := \psi(st)$. Therefore, $(\widehat{\mathbb{R}}^+, \oplus, \otimes)$ is an algebraic structure isomorphic to the usual one $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ and as a result, we obtain an algebraic structure $(\widehat{\mathbb{N}} := \psi(\mathbb{N}), \oplus, \otimes)$ isomorphic to the usual one $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. The function ψ also preserves the usual orderings. Thus we transport the notation from \mathbb{R}^+ to $\widehat{\mathbb{R}}^+$, that is \hat{n} is natural iff n is natural, \hat{p} is prime iff p is

prime, \hat{x} is rational iff x is rational, etc. Assume that, for example $\hat{0} = 0$, $\hat{1} = 0'72$, $\hat{2} = 1'3$, $\hat{3} = 3'0001$, $\hat{4} = \pi$, $\hat{5} = 6'3$, $\hat{7} = 7'21, \dots, \hat{12} = 9'03, \dots$ then, the following situation would arise: the even number $9'03$ is the sum of the prime numbers $6'3$ and $7'21$ and the number π is the product of the numbers $0'72$ and π .

Obviously, until now, we have only actually changed the symbolism by means of the function ψ . If we call $\hat{x}\hat{y}$ plane the set $(\psi(\mathbb{R}^+))^2$, the hyperbolas $xy = k$ ($k > 0$) of the xy plane with $x > 0$ and $y > 0$ are transformed by means of the function $\psi \times \psi$ at the $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ "hyperbolas" of the $\hat{x}\hat{y}$ plane. We will restrict our attention to the points in the $\hat{x}\hat{y}$ plane that satisfy $\hat{x} > \hat{0}$ and $\hat{y} \geq \hat{x}$. Then, with these restrictions for the ψ function, it is possible to choose right-hand and left-hand derivatives of ψ at $m \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ such that we can characterize the natural number coordinate points in the $\hat{x}\hat{y}$ plane in terms of differentiability of the functions which determine the transformed hyperbolas. As a result, we can distinguish prime numbers from composite numbers in the aforementioned terms.

Definition 1.1. Let $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be a map and let ψ_m be the restriction of ψ to each closed interval $[m, m + 1]$ ($m \in \mathbb{N}$). We say that ψ is an \mathbb{R}^+ coding function if:

- (i) $\psi(0) = 0$.
- (ii) $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.
- (iii) $\forall m \in \mathbb{N}, \psi_m \in \mathcal{C}^1([m, m + 1])$ with positive derivative in $[m, m + 1]$.

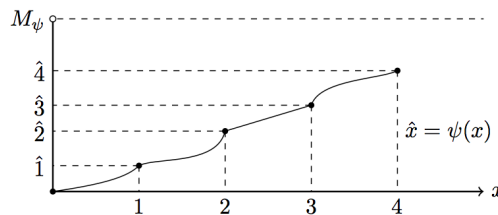


Figure 1. \mathbb{R}^+ coding function.

Remarks 1.2. (1) Easily proved, if ψ is an \mathbb{R}^+ coding function then it is strictly increasing and consequently, injective.

(2) If $M_\psi := \sup \{\psi(x) : x \in \mathbb{R}^+\}$ then, $M_\psi \in (0, +\infty]$ (being $M_\psi = +\infty$ iff ψ is not bounded), and so $\psi(\mathbb{R}^+) = [0, M_\psi)$. Therefore $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \psi(\mathbb{R}^+) = [0, M_\psi)$ is bijective, and here onwards we will refer to the ψ function as a bijective function.

(3) We will frequently use the notation $\hat{x} := \psi(x)$. Due to the ψ bijection, we transport the sum and the product from \mathbb{R}^+ to $[0, M_\psi)$ in the usual manner ([2]), that is we define in $[0, M_\psi)$ the operations ψ -sum as $\hat{x} \oplus \hat{y} := \psi(x + y)$ and ψ -product as $\hat{x} \otimes \hat{y} := \psi(x \cdot y)$. Thus, $\psi : (\mathbb{R}^+, +, \cdot) \rightarrow ([0, M_\psi), \oplus, \otimes)$ is an isomorphism.

(4) The ψ function preserves the usual orderings, that is, $\hat{s} \leq \hat{t} \Leftrightarrow s \leq t$, $\hat{s} = \hat{t} \Leftrightarrow s = t$.

(5) For $\hat{x} \in [0, M_\psi)$ we say that \hat{x} is a ψ -natural number iff x is a natural number, \hat{x} is ψ -prime iff x is prime, \hat{x} is ψ -rational iff x is rational, etc.

(6) When we work on the set $[0, M_\psi)^2$, we say that we are on the $\hat{x}\hat{y}$ plane.

(7) For $x \geq y$ we denote $\hat{x} \sim \hat{y} := \psi(x - y) = (\psi\text{-subtraction})$ and for $y \neq 0$, $\hat{x} \div \hat{y} := \psi(x/y)$ (ψ -quotient).

1.2 ψ -hyperbolas in the $\hat{x}\hat{y}$ plane

The aim here is to study the transformed curves of the $y = k/x$ hyperbolas ($k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$) by means of an \mathbb{R}^+ coding function in terms of differentiability. Consider the function

$$h_k : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), h_k(x) = \frac{k}{x}.$$

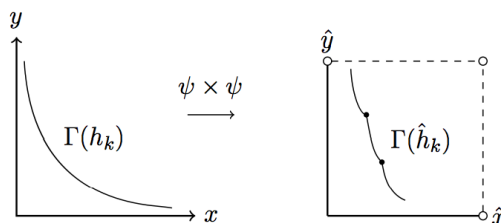


Figure 2. ψ -hyperbolas in the $\hat{x}\hat{y}$ plane.

We call ψ -hyperbola any transformed curve graph of $\Gamma(h_k)$ by means of $\psi \times \psi$. Notice that the function which defines the ψ -hyperbola is:

$$\hat{h}_k : (0, M_\psi) \rightarrow (0, M_\psi), \hat{h}_k(u) = \psi\left(\frac{k}{\psi^{-1}(u)}\right).$$

Theorem 1.3. Let $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, M_\psi]$ be an \mathbb{R}^+ coding function. Then, $\hat{h}_k : (0, M_\psi) \rightarrow (0, M_\psi)$ is continuous and strictly decreasing.

Proof. $(0, M_\psi) \xrightarrow{\psi^{-1}} (0, +\infty) \xrightarrow{h_k} (0, +\infty) \xrightarrow{\psi} (0, M_\psi)$, thus $\hat{h}_k = \psi \circ h_k \circ \psi^{-1}$ is a composition of continuous functions, and is consequently continuous. In addition

$$\begin{aligned} 0 < s < t < M_\psi &\Rightarrow \psi^{-1}(s) < \psi^{-1}(t) \Rightarrow \frac{k}{\psi^{-1}(s)} > \frac{k}{\psi^{-1}(t)} \\ &\Rightarrow \psi\left(\frac{k}{\psi^{-1}(s)}\right) > \psi\left(\frac{k}{\psi^{-1}(t)}\right) \Rightarrow \hat{h}_k(s) > \hat{h}_k(t), \end{aligned}$$

that is, \hat{h}_k is strictly decreasing. □

Let us call $(\psi_{i-1})'_-(i) = a_i$ and $(\psi_i)'_+(i) = b_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) We will now analyse the differentiability of \hat{h}_k distinguishing, for this, the cases in which the dependent and/or independent variable takes ψ -natural number values or not.

Theorem 1.4. Where $x, y \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$, $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$.

1.- If $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma(\hat{h}_k)$, then

$$(\hat{h}_k)'(\hat{x}) = \frac{-k}{x^2} \cdot \frac{(\psi_m)'(y)}{(\psi_n)'(y)}.$$

2.- If $(\hat{x}, \hat{m}) \in \Gamma(\hat{h}_k)$, then

$$(\hat{h}_k)'_+(\hat{x}) = \frac{-k}{x^2} \cdot \frac{a_m}{(\psi_n)'(x)}, \quad (\hat{h}_k)'_-(\hat{x}) = \frac{-k}{x^2} \cdot \frac{b_m}{(\psi_n)'(x)}.$$

3.- If $(\hat{n}, \hat{y}) \in \Gamma(\hat{h}_k)$, then

$$(\hat{h}_k)'_+(\hat{n}) = \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{(\psi_m)'(y)}{b_n}, \quad (\hat{h}_k)'_-(\hat{n}) = \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{(\psi_m)'(y)}{a_n}.$$

4.- If $(\hat{n}, \hat{m}) \in \Gamma(\hat{h}_k)$, then

$$(\hat{h}_k)'_+(\hat{n}) = \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{a_m}{b_n}, \quad (\hat{h}_k)'_-(\hat{n}) = \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{b_m}{a_n}.$$

Proof. Case 1 $u \in (\hat{n}, \hat{n} \oplus \hat{1})$ ($n \in \mathbb{N}$) that is, u is not a ψ -natural number. We obtain

$$(\hat{n}, \hat{n} \oplus \hat{1}) \xrightarrow{\psi^{-1}} (n, n+1) \xrightarrow{h_k} (k/(n+1), k/n) \xrightarrow{\psi} (\hat{k} \div (\hat{n} \oplus \hat{1}), \hat{k} \div \hat{n})$$

so, \hat{h}_k maps $\hat{h}_k : (\hat{n}, \hat{n} \oplus \hat{1}) \rightarrow (\hat{k} \div (\hat{n} \oplus \hat{1}), \hat{k} \div \hat{n})$.

1.a) Suppose $\hat{h}_k(u)$ is not a ψ -natural number (Fig. 3). Since $k/\psi^{-1}(u)$ is not a natural number, in a neighbourhood of u , the expression of the \hat{h}_k function is:

$$\hat{h}_k(t) = \psi_{\lfloor \frac{k}{\psi^{-1}(u)} \rfloor} \left(\frac{k}{\psi^{-1}(t)} \right).$$

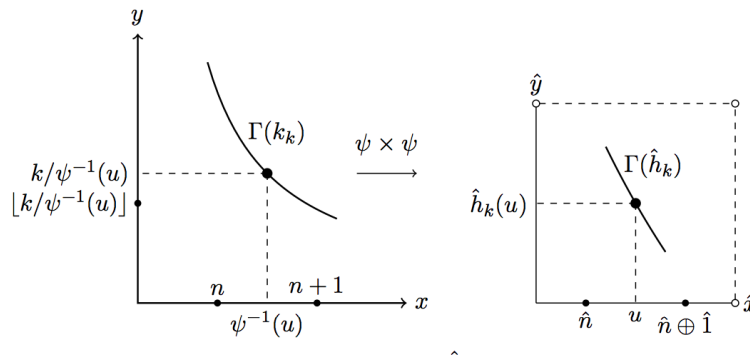


Figure 3. Finding $(\hat{h}_k)'(u)$.

$$(\hat{h}_k)'(u) = \left(\psi_{\lfloor \frac{k}{\psi^{-1}(u)} \rfloor} \right)' \left(\frac{k}{\psi^{-1}(u)} \right) \cdot \frac{-k}{(\psi^{-1}(u))^2} \cdot \frac{1}{(\psi_n)'(\psi^{-1}(u))}.$$

Consequently \hat{h}_k is differentiable at u .

1.b) Suppose $\hat{h}_k(u)$ is a ψ -natural number (Fig. 4). This is equivalent to say that $k/\psi^{-1}(u)$ is a natural number. For a sufficiently small $\epsilon > 0$ we obtain

$$(u \sim \epsilon, u] \xrightarrow{\psi^{-1}} (\psi^{-1}(u \sim \epsilon), \psi^{-1}(u)] \xrightarrow{h_k} \left[\frac{k}{\psi^{-1}(u)}, \frac{k}{\psi^{-1}(u \sim \epsilon)} \right) \xrightarrow{\psi} [\hat{k} \div \widehat{\psi^{-1}(u)}, \hat{k} \div \widehat{\psi^{-1}(u \sim \epsilon)}).$$

We can choose $\epsilon > 0$ such that $n < \psi^{-1}(u \sim \epsilon) < \psi^{-1}(u) < n + 1$ and as a consequence for every $t \in (u \sim \epsilon, u]$ we verify $k/\psi^{-1}(u) \leq k/\psi^{-1}(t)$. That is, we can choose $\epsilon > 0$ such that $\forall t \in (u \sim \epsilon, u]$, $\hat{h}_k(t) = \psi_{\frac{k}{\psi^{-1}(u)}}(k/\psi^{-1}(t))$. Thus:

$$(\hat{h}_k)'_-(u) = \left(\psi_{\frac{k}{\psi^{-1}(u)}} \right)'_+ \left(\frac{k}{\psi^{-1}(u)} \right) \cdot \frac{-k}{(\psi^{-1}(u))^2} \cdot \frac{1}{(\psi_n)'(\psi^{-1}(u))}.$$

Let us now examine the value of $(\hat{h}_k)'_+(u)$. For a sufficiently small $\epsilon > 0$ we obtain (Fig. 5).

$$[u, u \oplus \epsilon) \xrightarrow{\psi^{-1}} [\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(u \oplus \epsilon)) \xrightarrow{h_k}$$

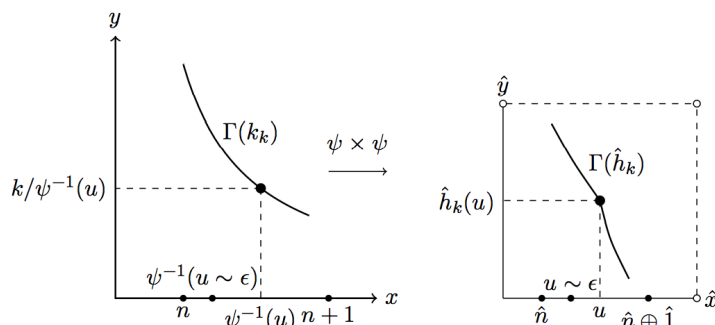


Figure 4. Finding $(\hat{h}_k)_-(u)$.

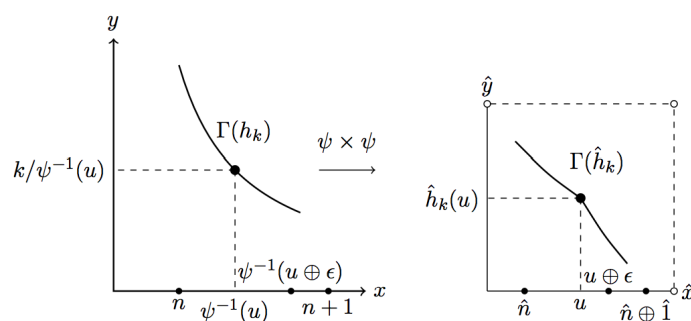


Figure 5. Finding $(\hat{h}_k)_+(u)$.

$$\left(\frac{k}{\psi^{-1}(u \oplus \epsilon)}, \frac{k}{\psi^{-1}(u)} \right] \xrightarrow{\psi} \left(\hat{k} \div \widehat{\psi^{-1}(u \oplus \epsilon)}, \hat{k} \div \widehat{\psi^{-1}(u)} \right).$$

We can choose $\epsilon > 0$ such that $n < \psi^{-1}(u) < \psi^{-1}(u \oplus \epsilon) < n + 1$ and as a consequence for every $t \in [u, u \oplus \epsilon]$ we verify $k/\psi^{-1}(t) \leq k/\psi^{-1}(u)$. That is, we can choose $\epsilon > 0$ such that $\forall t \in [u, u \oplus \epsilon]$,

$$\hat{h}_k(t) = \psi_{\psi^{-1}(u)-1}^{\frac{k}{\psi^{-1}(u)}} \left(\frac{k}{\psi^{-1}(t)} \right).$$

Would result:

$$(\hat{h}_k)_+(u) = \left(\psi_{\psi^{-1}(u)}^{\frac{k}{\psi^{-1}(u)}} - 1 \right)' \left(\frac{k}{\psi^{-1}(u)} \right) \cdot \frac{-k}{(\psi^{-1}(u))^2} \cdot \frac{1}{(\psi_n)'(\psi^{-1}(u))}.$$

Case 2 $u = \hat{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) that is, u is a ψ -natural number ($u > 0$). For a sufficiently small $\epsilon > 0$ and $\psi(n + \delta) = \hat{n} \oplus \epsilon$ we obtain (Fig. 6)

$$[\hat{n}, \hat{n} \oplus \epsilon] \xrightarrow{\psi^{-1}} [n, n + \delta] \xrightarrow{h_k} \left(\frac{k}{n + \delta}, \frac{k}{n} \right] \xrightarrow{\psi} \left(\hat{k} \div (\hat{n} \oplus \delta), \hat{k} \div \hat{n} \right).$$

For every $t \in [\hat{n}, \hat{n} \oplus \epsilon]$, we verify $\hat{h}_k(t) = \psi_{\lfloor \frac{k}{\hat{n}} \rfloor} (k/\psi^{-1}(t))$ if $k/\hat{n} \notin \mathbb{N}^*$ and $\hat{h}_k(t) = \psi_{\frac{k}{\hat{n}}-1} (k/\psi^{-1}(t))$ if $k/\hat{n} \in \mathbb{N}^*$. As a consequence

$$(\hat{h}_k)_+(\hat{n}) = \left(\psi_{\lfloor \frac{k}{\hat{n}} \rfloor} \right)' \left(\frac{k}{\hat{n}} \right) \cdot \frac{-k}{\hat{n}^2} \cdot \frac{1}{(\psi_n)'_+(\hat{n})} \text{ (if } k/\hat{n} \notin \mathbb{N}^* \text{),}$$

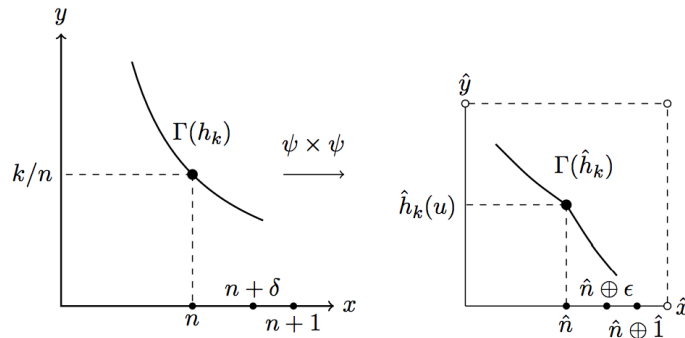


Figure 6. Finding $(\hat{h}_k)'_+(\hat{n})$.

$$(\hat{h}_k)'_+(\hat{n}) = \left(\psi_{\frac{k}{n}-1}\right)'_-\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{1}{(\psi_n)'_+(n)} \text{ (if } k/n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Finally we have to study the differentiability of \hat{h}_k at $u = \hat{n}$ from the left side. For a sufficiently small $\epsilon > 0$ and $\psi(n - \delta) = \hat{n} \sim \epsilon$, we obtain (fig. 7)

$$(\hat{n} \sim \epsilon, \hat{n}] \xrightarrow{\psi^{-1}} (n - \delta, n] \xrightarrow{h_k} \left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n - \delta}\right) \xrightarrow{\psi} [\hat{k} \div \hat{n}, \hat{k} \div (\hat{n} \sim \delta)).$$

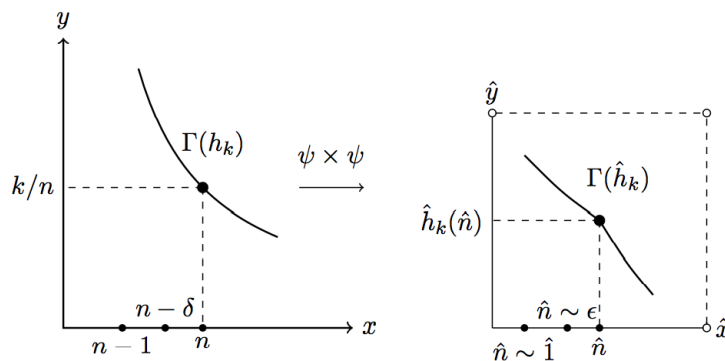


Figure 7. Finding $(\hat{h}_k)'_-(\hat{n})$.

We can choose $\epsilon > 0$ such that $\forall t \in (\hat{n} \sim \epsilon, \hat{n}]$ we verify

$$\hat{h}_k(t) = \psi_{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \left(\frac{k}{\psi^{-1}(t)} \right)$$

regardless of whether k/n is a natural number or not. This therefore would result

$$(\hat{h}_k)'_-(\hat{n}) = \left(\psi_{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor}\right)'_+\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{-k}{n^2} \cdot \frac{1}{(\psi_{n-1})'_-(n)}.$$

We have completed our examination of the differentiability of \hat{h}_k when dependent and/or independent variables take ψ -natural number values or not. Since $(\psi_{i-1})'_-(i) = a_i$ and $(\psi_i)'_+(i) = b_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), the proposition is proven. \square

Corollary 1.5. If we want the \hat{h}_k functions to be only differentiable at the points where both the ordinate and the abscissa are not ψ -natural numbers, we must select ψ in such a way that

$$(a_n \neq b_n) \wedge (a_m \neq b_m) \wedge (a_n a_m \neq b_n b_m) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Definition 1.6. We say that an \mathbb{R}^+ coding function *identifies primes* if the \hat{h}_k functions are only differentiable at the non- ψ -natural number abscissa and ordinate points

1.3 Classification of points in the $\hat{x}\hat{y}$ plane

Let $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, M_\psi]$ be an \mathbb{R}^+ coding function that identifies primes. The class of sets $\mathcal{H} = \{\Gamma(h_k) : k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ is a partition of $(0, +\infty)^2$ and being ψ a bijective function, the class $\hat{\mathcal{H}} = \{\Gamma(\hat{h}_k) : k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ of all ψ -hyperbolas is a partition of $(0, M_\psi)^2$. Every subset of \mathbb{R}^2 will be considered as a topological subspace of \mathbb{R}^2 with the usual topology. We have the following cases:

1.- $(\hat{x}, \hat{y}) \in (0, M_\psi)^2$ ($x \notin \mathbb{N} \wedge y \notin \mathbb{N}$). Then, in a neighbourhood V of (\hat{x}, \hat{y}) we verify: $\forall (\hat{s}, \hat{t}) \in V$, the ψ -hyperbola which contains (\hat{s}, \hat{t}) is differentiable at \hat{s} . Of course, we mean to say the function which represents the graph of the ψ -hyperbola (Fig. 8).

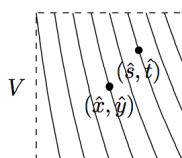


Figure 8. $x \notin \mathbb{N}, y \notin \mathbb{N}$.

2.- $(\hat{x}, \hat{m}) \in (0, M_\psi)^2$ ($x \notin \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}^*$). Then, in a neighbourhood V of (\hat{x}, \hat{m}) we verify: $\forall (\hat{s}, \hat{t}) \in V$, the ψ -hyperbola which contains (\hat{s}, \hat{t}) is differentiable at \hat{s} iff $\hat{t} \neq \hat{m}$ (Fig. 9).

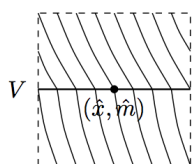


Figure 9. $x \notin \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$.

3.- $(\hat{n}, \hat{y}) \in (0, M_\psi)^2$ ($n \in \mathbb{N}^* \wedge y \notin \mathbb{N}$). Then, in a neighbourhood V of (\hat{n}, \hat{y}) we verify: $\forall (\hat{s}, \hat{t}) \in V$, the ψ -hyperbola which contains (\hat{s}, \hat{t}) is differentiable at \hat{s} iff $\hat{s} \neq \hat{n}$ (Fig. 10).

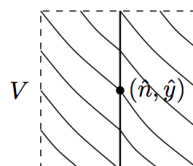


Figure 10. $n \in \mathbb{N}^*, y \notin \mathbb{N}$.

4.- $(\hat{n}, \hat{m}) \in (0, M_\psi)^2$ ($n \in \mathbb{N}^* \wedge m \in \mathbb{N}^*$). Then, in a neighbourhood V of (\hat{n}, \hat{m}) we verify: $\forall (\hat{s}, \hat{t}) \in V$, the ψ -hyperbola which contains (\hat{s}, \hat{t}) is differentiable at \hat{s} iff $\hat{s} \neq \hat{n}$ and $\hat{t} \neq \hat{m}$ (Fig. 11).

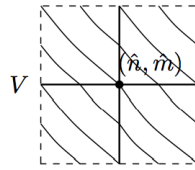


Figure 11. $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$.

Given the symmetry of the ψ -hyperbolas with respect to the line $\hat{x} = \hat{y}$, let us consider the triangular region of the $\hat{x}\hat{y}$ plane $\mathcal{T}_\psi = \{(\hat{x}, \hat{y}) : \hat{y} \geq \hat{x}, \hat{x} > \hat{0}\}$.

Definition 1.7. Let ψ be an \mathbb{R}^+ coding function that identifies primes and assume that $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{T}_\psi$. If $(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{n}, \hat{m})$ with $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ we say that it is a *vortex point* with respect to ψ (Fig. 12).

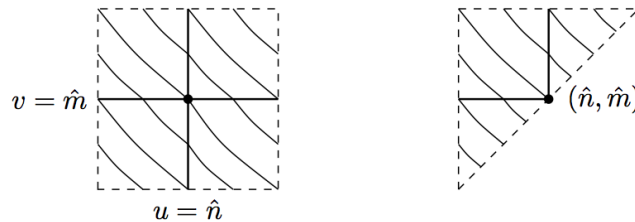


Figure 12. *Vortex points.*

The existence of vortex points in a ψ -hyperbola allows us to identify ψ -natural numbers (ψ -prime iff we have only one vortex point). We call this *Hyperbolic Classification of Natural Numbers*.

Corollary 1.8. Let $\hat{k} \in (\hat{0}, M_\psi)$. According to the statements made above, we may classify \hat{k} in terms of the behaviour of ψ -hyperbolas in \mathcal{T}_ψ that are near the ψ -hyperbola $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$. We obtain the following classification:

- 1) \hat{k} is a ψ -natural number iff the ψ -hyperbola $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ in \mathcal{T}_ψ contains at least a vortex point.
- 2) \hat{k} is a ψ -prime number iff $\hat{k} \neq \hat{1}$ and the ψ -hyperbola $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ in \mathcal{T}_ψ contains one and only one vortex point.
- 3) \hat{k} is a ψ -composite number iff the ψ -hyperbola $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ in \mathcal{T}_ψ contains at least two vortex points.
- 4) \hat{k} is not a ψ -natural number iff the ψ -hyperbola $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ in \mathcal{T}_ψ does not contain vortex points.

So, vortex points are characterized in terms of differentiability of the ψ -hyperbolas in \mathcal{T}_ψ near these points. For every $k > 0$, denote $\bar{k} := \Gamma(\hat{h}_k) \cap \mathcal{T}_\psi$ and let $\bar{0}$ be one element different from \bar{k} ($k > 0$). Define $\mathfrak{R} = \{\bar{k} : k \geq 0\}$ and consider the operations on \mathfrak{R} :

$$(a) \quad \bar{k} + \bar{s} = \overline{k+s}, \quad \bar{k} \cdot \bar{s} = \overline{k \cdot s} \quad (k > 0, s > 0).$$

$$(b) \quad \bar{t} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{t} = \bar{t}, \quad \bar{t} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{t} = \bar{0} \quad (t \geq 0).$$

Then, $(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ is an isomorphic structure to the usual one $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ and prime numbers $p \in \mathbb{N}$ are characterized by the fact that $\bar{p} \neq \bar{1}$ and \bar{p} contains one and only one vortex point.

Amongst the \mathbb{R}^+ coding functions that identifies primes, it will be interesting to select those given by $\psi_m : [m, m + 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) functions that are affine (Fig. 13).

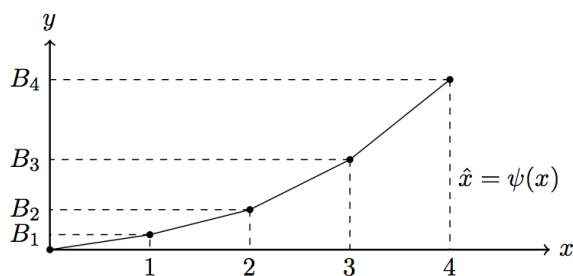


Figure 13. \mathbb{R}^+ prime coding.

$$\psi_m(x) = \zeta_m(x - m) + B_m \quad (\zeta_m > 0 \forall m \in \mathbb{N}, B_0 = 0, B_m = \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_j \text{ if } m \geq 1). \tag{2}$$

We can easily prove that the ψ functions defined by means of the sequence $(\psi_m)_{m \geq 0}$ are \mathbb{R}^+ coding functions. Now, we have $\zeta_0 = a_1, \zeta_1 = a_2 = b_1, \zeta_2 = a_3 = b_2, \zeta_3 = a_4 = b_3 \dots$, that is $a_n = \zeta_{n-1}, a_m = \zeta_{m-1}, b_n = \zeta_n, b_m = \zeta_m$. The conditions (1) for ψ to identify primes are clearly guaranteed by choosing ζ_i such that

$$0 < \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \dots$$

though this is not the only way of choosing it.

Definition 1.9. Any \mathbb{R}^+ coding function ψ that is defined by means of ψ_m affine functions that also satisfies $0 < \zeta_i < \zeta_{i+1} (\forall i \in \mathbb{N})$ it is said to be an \mathbb{R}^+ prime coding. We call the numbers $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ coefficients of the \mathbb{R}^+ prime coding.

2 Essential regions and Goldbach Conjecture

Goldbach’s Conjecture is one of the oldest unsolved problems in number theory and in all of mathematics. It states: *Every even integer greater than 2 can be written as the sum of two primes* (\mathcal{S}). Furthermore, in his famous speech at the mathematical society of Copenhagen in 1921 G.H. Hardy pronounced that \mathcal{S} is probably as difficult as any of the unsolved problems in mathematics and therefore Goldbach problem is not only one of the most famous and difficult problems in number theory, but also in the whole of mathematics ([5]). In this section, and using the Hyperbolic Classification of Natural Numbers we provide a characterization of \mathcal{S} .

In the $\hat{x}\hat{y}$ plane determined by any \mathbb{R}^+ prime coding function ψ and for any given ψ -even number $\hat{a} \geq \hat{16}$ we will consider the function in which any number \hat{k} of the closed interval $[\hat{4}, \hat{a} \div \hat{2}]$ corresponds to the area of the region of $\hat{x}\hat{y}$: $\hat{x} \geq \hat{2}, \hat{y} \geq \hat{x}, \hat{x} \otimes \hat{y} \leq \hat{k}$ (called lower area) and also the function that associates each to the area of the region of $\hat{x}\hat{y}$: $\hat{x} \geq \hat{2}, \hat{y} \geq \hat{x}, \hat{a} \sim \hat{k} \leq \hat{x} \otimes \hat{y} \leq \hat{a} \sim \hat{4}$ (called upper area). The $\hat{x}\hat{y}$ plane is considered imbedded in the xy plane with the Lebesgue Measure ([4]). This means that for any given ψ -even number $\hat{a} \geq \hat{16}$ we have $\hat{a} = \hat{k} \oplus (\hat{a} \sim \hat{k})$ and, associated to this decomposition, two data pieces, lower and upper areas. We will study if \hat{a} is the ψ -sum of the two ψ -prime numbers \hat{k}_0 and $\hat{a} \sim \hat{k}_0$ taking into account the restrictions $\hat{a} \sim \hat{3}$ and $\hat{a} \div \hat{2}$ both ψ -composite. The upper and lower area functions will not yet yield any characterizations to the Goldbach Conjecture. We will need the second derivative of the total area function (the sum of the lower and upper areas).

To this end, we define the concept of essential regions associated to a hyperbola which, simply put, is any region in the xy plane with the shape $[n, n + 1] \times [m, m + 1]$ where n and m

are natural numbers, $m > n > 1$ and the hyperbola intersects it in more than one point or else the shape $[n, n + 1]^2$ where $n > 1$ and $x \leq y$ and the hyperbola intersects in more than one point.

These essential regions are then transported to the $\hat{x}\hat{y}$ plane by means of the $\psi \times \psi$ function, and we will find the total area function adding the areas determined by each hyperbola in the respective essential regions, and the second derivative of this area function in each essential region. After this process we obtain the formula which determines the second derivative function of the total area \hat{A}_T in each sub-interval $[\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$, $k_0 = 4, 5, \dots, \alpha/2 - 1$ a derivative which is continuous.

$$(\hat{A}_T)''(\hat{k}) = \frac{x_{k_0}}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{y_{k_0}}{\xi_{\alpha-k_0-1}^2} \cdot \frac{1}{\alpha - k} \quad (\hat{k} \in [\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]).$$

Both x_{k_0} and y_{k_0} are numeric values in homogeneous polynomials of degree two obtained from substituting in their variables the ξ_i coefficients of the $\psi \mathbb{R}^+$ prime coding function. We call $P_{k_0} = (x_{k_0}, y_{k_0})$ an essential point. The study of the behaviour of the second derivative in these intervals allows the following characterization of the Goldbach Conjecture for any even number $\alpha \geq 16$ with the restrictions $\alpha - 3$ and $\alpha/2$ composite.

Claim 2.1. Let $\alpha \geq 16$ be an even number. Then, α is the sum of two prime numbers k_0 and $\alpha - k_0$ ($5 \leq k_0 < \alpha/2$) iff the consecutive essential points P_{k_0-1} and P_{k_0} are repeated, that is, if $P_{k_0-1} = P_{k_0}$.

Remark 2.2. Consider the infinite sets:

$$\begin{aligned} P &= \{\alpha \in \mathbb{N} : \alpha \text{ even}, \alpha \geq 16\}, \\ A &= \{\alpha \in \mathbb{N} : \alpha \text{ even}, \alpha \geq 16, \text{ with } \alpha/2 \text{ and } \alpha - 3 \text{ composite}\}, \\ B &= \{\alpha \in \mathbb{N} : \alpha \text{ even}, \alpha \geq 16, \text{ with } \alpha/2 \text{ prime or } \alpha - 3 \text{ prime}\}. \end{aligned}$$

Then, the Goldbach Conjecture is trivially satisfied in B , and P is a disjoint union of A and B so, Claim 2.1 provides a characterization of this conjecture in the infinite set A .

Definition 2.3. Consider the family of functions

$$\mathcal{H} = \{h_k : [2, \sqrt{k}] \rightarrow \mathbb{R}, h_k(x) = k/x, k \geq 4\}$$

whose graphs represent the pieces of the hyperbolas $xy = k$ ($k \geq 4$) included in the subset of \mathbb{R}^2 , $S \equiv (x \geq 2) \wedge (x \leq y)$. For n, m natural numbers consider the subsets of \mathbb{R}^2 :

- a) $R_{(n,m)} = [n, n + 1] \times [m, m + 1]$ ($2 \leq n < m$)
- b) $R_{(n,n)} = ([n, n + 1] \times [n, n + 1]) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$

Let h_k be an element of \mathcal{H} . We say that $R_{(n,m)}$ is a *square essential region* of h_k if $R_{(n,m)} \cap \Gamma(h_k)$ contains more than one point. We say that $R_{(n,n)}$ is a *triangular essential region* of h_k if $R_{(n,n)} \cap \Gamma(h_k)$ contains more than one point.

Example 2.4. The essential regions of the $xy = 17$ hyperbola are $R_{(2,8)}, R_{(2,7)}, R_{(2,6)}, R_{(2,5)}, R_{(3,5)}, R_{(3,4)}$ and $R_{(4,4)}$ (Fig. 14).

Analyse the different types of essential regions depending on the way the hyperbola $xy = k$ intersects with $R_{(n,m)}$ ($m > n$). If the hyperbola passes through point $P(n, m + 1)$ (Fig.15), then the equation for the hyperbola is $xy = n(m + 1)$.

The abscissa of the Q point is $x = n(m + 1)/m$. We verify that $n < n(m + 1)/m < n + 1$. This is equivalent to say $nm < nm + n$ and $nm + n < mn + m$ or equivalently $(0 < n) \wedge (n < m)$, which are trivially true.

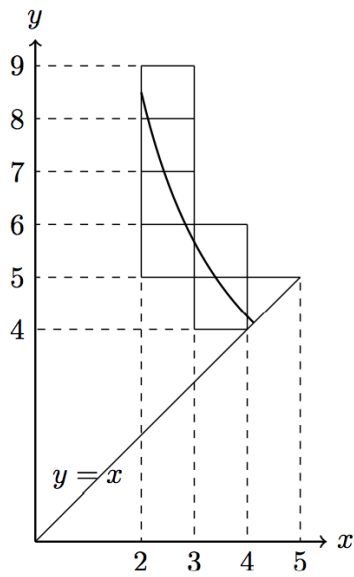


Figure 14. Essential regions of $xy = 17$.

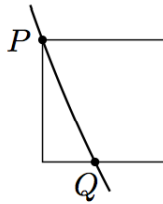


Figure 15. Intersection between hyperbolas and essential regions.

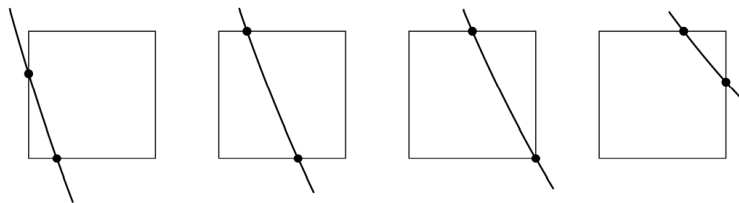


Figure 16. Types of square essential regions.

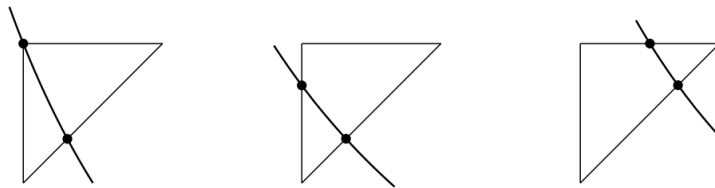


Figure 17. Types of triangular essential regions.

The remaining types are reasoned in a similar way (Fig. 16).

We use the same considerations for the triangular essential regions $R_{(n,n)}$ (Fig. 17).

Let $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq 4$. We will examine which are the types of essential regions for the hyperbolas $xy = k$ ($y \geq x$) where $k_0 < k < k_0 + 1$. The passage through essential regions of points P_0, Q_0 of the $xy = k_0$ hyperbola with relation to P, Q points of the $xy = k$ hyperbola corresponds to the following diagrams (Fig. 18).

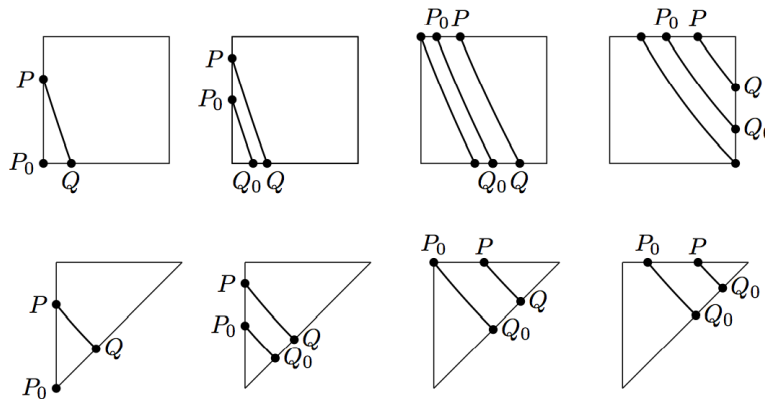


Figure 18. Square and triangular essential regions ($k_0 < k < k_0 + 1$).

As a consequence, the essential regions for the hyperbola $xy = k$ ($k > 4$) are of the following types

a) Square essential regions $R_{(n,m)}$.

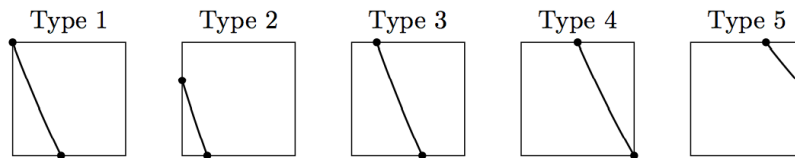


Figure 19. Square essential regions ($k > 4$).

b) Triangular essential regions $R_{(n,n)}$.

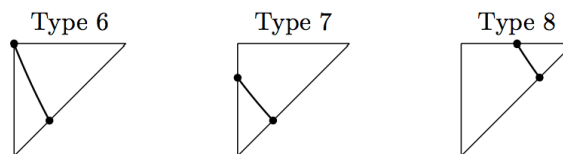


Figure 20. Triangular essential regions ($k > 4$).

We will find the essential regions of the $xy = k$ hyperbolas with the conditions $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq 4, k_0 < k < k_0 + 1$. The abscissa of $xy = k_0$ varies in the interval $[2, \sqrt{k_0}]$ (Fig 21).

a) For $n \in \{2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor - 1\}$ the $R_{(n,m)}$ essential regions of the $xy = k$ hyperbolas are obtained when m varies in the set (Fig. 22):

$$\{ \lfloor k_0 / (n + 1) \rfloor, \lfloor k_0 / (n + 1) \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0 / n \rfloor \}.$$

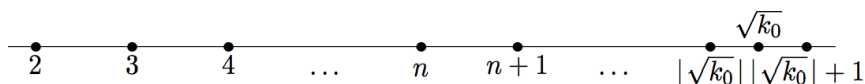


Figure 21. Finding all essential regions (1).

We can easily verify that if $m = \lfloor k_0/n \rfloor$ then $R_{(n,m)}$ is a square essential region of Type 2, if $m = \lfloor k_0/(n + 1) \rfloor$, $R_{(n,m)}$ is a square essential region of Type 5 and the remaining $R_{(n,m)}$ are of Type 3.

b) For $n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor$, the $R_{(\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor, m)}$ essential regions are obtained when m varies in the set:

$$\{ \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0 / \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor \}.$$

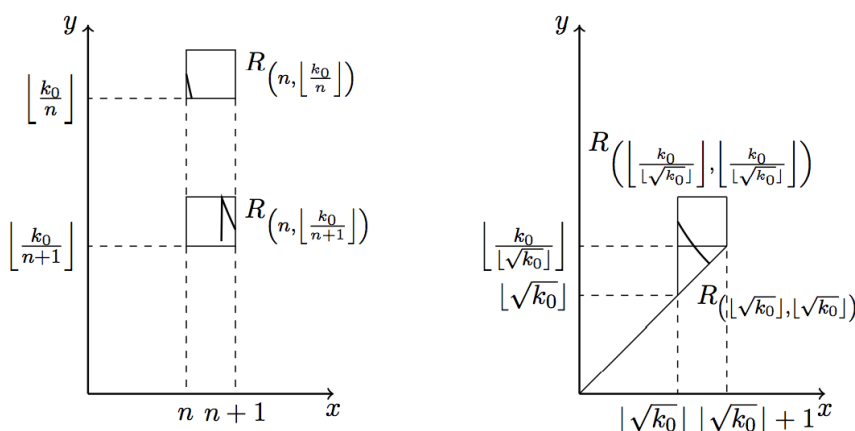


Figure 22. Finding all essential regions (2).

If $m = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor$ we obtain a triangular essential region and could eventually exist a square essential region (Fig. 22). Consider the set of indexes $\{(n, i_n)\}$ such that

(1) For $n = 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor - 1$ then

$$i_n = \lfloor k_0 / (n + 1) \rfloor, \lfloor k_0 / (n + 1) \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0 / n \rfloor.$$

(2) For $n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor$ then

$$i_n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0 / \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor.$$

Let $E_s(k_0)$ be the set $\{(n, i_n)\}$, where (n, i_n) are pairs of type (1) or of type (2). We obtain the following theorem:

Theorem 2.5. Let $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ($k_0 \geq 4$). Then,

i) All the $xy = k$ ($k_0 < k < k_0 + 1$) hyperbolas have the same essential regions, each of the same type.

ii) The $xy = k$ essential regions are the elements of the set

$$\{R_{(n,i_n)} : (n, i_n) \in E_s(k_0)\}.$$

Example 2.6. For $k_0 = 18$ the essential regions of the $xy = k$ ($18 < k < 19$) hyperbolas are (Fig. 23) $R_{(2,9)}$, $R_{(3,6)}$ (type 2), $R_{(2,8)}$, $R_{(2,7)}$, $R_{(3,5)}$ (type 3), $R_{(2,6)}$, $R_{(3,4)}$ (type 5) and $R_{(4,4)}$ (type 7). The essential regions of the $xy = k$ ($19 < k < 20$) hyperbolas are exactly the same, due to the fact that 19 is a prime number.

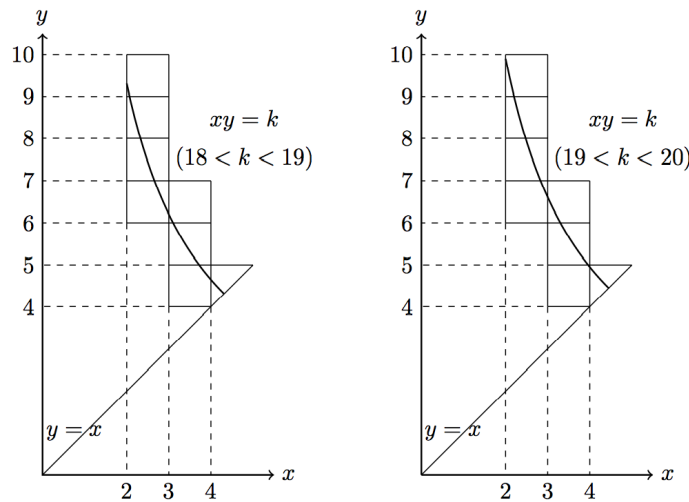


Figure 23. Essential regions ($18 < k < 19$ and $19 < k < 20$).

2.1 Areas in essential regions associated with a hyperbola

To every $R_{(n,m)}$ ($n \leq m$) essential region of the $xy = k$ ($k \notin \mathbb{N}^*, k > 4$) hyperbola, we will associate the region of the xy plane below the hyperbola (we call it $D_{(n,m)}(k)$). Denote $A_{(n,m)}(k)$ the area of $D_{(n,m)}(k)$. We have the following cases (Fig. 24).

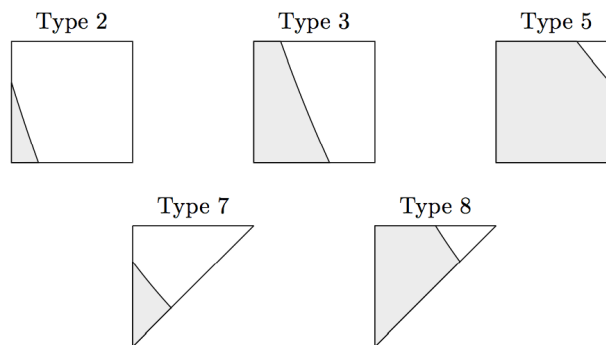


Figure 24. Areas in essential regions.

(i) Type 2 essential region

$A_{(n,m)}(k) = \iint_{D_{(n,m)}(k)} dx dy$ with $D_{(n,m)}(k) \equiv n \leq x \leq k/m, m \leq y \leq k/x$. Then,

$$A_{(n,m)}(k) = \int_n^{\frac{k}{m}} dx \int_m^{\frac{k}{x}} dy = \int_n^{\frac{k}{m}} \left(\frac{k}{x} - m \right) dx = k \log \frac{k}{nm} + nm - k.$$

If $k \in [k_0, k_0 + 1]$ ($k_0 \geq 4$ natural number), then $A'_{(n,m)}(k) = \log k / (nm)$ and the second derivative is $A''_{(n,m)}(k) = 1/k$. Note that we have used the closed interval $[k_0, k_0 + 1]$ so we may extend the definition of the essential region for $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 4$) in a natural manner. In some cases the "essential region" would consist of a single point (null area).

(ii) Type 3 essential region

In this case $D_{(n,m)}(k) = D' \cup D''$ where $D' = [n, k/(m+1)] \times [m, m+1]$ and $D'' \equiv k/(m+1) < x \leq k/m, m \leq y \leq k/x$. Besides, $D' \cap D'' = \emptyset$.

$$\begin{aligned} A_{(n,m)}(k) &= \iint_{D_{(n,m)}(k)} dx dy = \frac{k}{m+1} - n + \iint_{D''} dx dy \\ &= \frac{k}{m+1} - n + k \log \frac{m+1}{m} + mk \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

If $k_0 \leq k \leq k_0 + 1$ then, $A''_{(n,m)}(k) = 0$.

(iii) Type 5 essential region

In this case $D_{(n,m)}(k) = D' \cup D''$ where $D' = [n, k/(m+1)] \times [m, m+1]$ and $D'' \equiv k/(m+1) < x \leq n+1, m \leq y \leq k/x$. Besides, $D' \cap D'' = \emptyset$.

$$\begin{aligned} A_{(n,m)}(k) &= \iint_{D_{(n,m)}(k)} dx dy = \frac{k}{m+1} - n + \iint_{D''} dx dy \\ &= \frac{k}{m+1} - n + k \log \frac{(n+1)(m+1)}{k} - m \left(n+1 - \frac{k}{m+1} \right). \end{aligned}$$

In the interval $[k_0, k_0 + 1]$ we obtain $A'_{(n,m)}(k) = \log((n+1)(m+1)/k)$ and $A''_{(n,m)}(k) = -1/k$.

(iv) Type 7 essential region

$$D_{(n,n)}(k) \equiv n \leq x \leq \sqrt{k}, x \leq y \leq k/x.$$

$$\begin{aligned} A_{(n,n)}(k) &= \int_n^{\sqrt{k}} dx \int_x^{\frac{k}{x}} dy = \int_n^{\sqrt{k}} \left(\frac{k}{x} - x \right) dx \\ &= \left[k \log x - \frac{x^2}{2} \right]_n^{\sqrt{k}} = \frac{k}{2} \log k - \frac{k}{2} - k \log n + \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

If $k_0 \leq k \leq k_0 + 1$, $A'_{(n,n)}(k) = (1/2) \log k - \log n$ and $A''_{(n,n)}(k) = 1/(2k)$.

(v) Type 8 essential region

In this case $D_{(n,n)}(k) = D' \cup D''$ where $D' \equiv n \leq x \leq k/(n+1), x \leq y \leq n+1$ and $D'' \equiv k/(n+1) < x \leq \sqrt{k}, x \leq y \leq k/x$. Besides, $D' \cap D'' = \emptyset$.

$$\begin{aligned} A_{(n,n)}(k) &= \iint_{D'} dx dy + \iint_{D''} dx dy \int_n^{\frac{k}{n+1}} dx \int_x^{n+1} dy + \int_{\frac{k}{n+1}}^{\sqrt{k}} dx \int_x^{\frac{k}{x}} dy \\ &= \int_n^{\frac{k}{n+1}} (n+1-x) dx + \int_{\frac{k}{n+1}}^{\sqrt{k}} \left(\frac{k}{x} - x \right) dx = \frac{k}{2} - n(n+1) + \frac{n^2}{2} + k \log \frac{n+1}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

If $k_0 \leq k \leq k_0 + 1$, $A'_{(n,n)}(k) = \log((n+1)/\sqrt{k})$ and $A''_{(n,n)}(k) = -1/(2k)$.

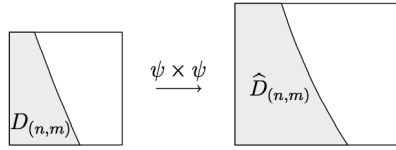


Figure 25. Relationship between $\widehat{A}_{(n,m)}$ and $A_{(n,m)}$.

2.2 Areas of essential regions in the $\hat{x}\hat{y}$ plane

Consider in the xy plane, an essential region $R_{(n,m)}$ ($n \leq m$) of the $xy = k$ ($k \geq 4$) hyperbola and ψ an \mathbb{R}^+ prime coding function with ξ_i coefficients. Let $\widehat{R}_{(n,m)}$ be the corresponding region in the $\hat{x}\hat{y}$ plane that is, $\widehat{R}_{(n,m)} = (\psi \times \psi)(R_{(n,m)})$. We call $\widehat{A}_{(n,m)}$ the area of $\widehat{D}_{(n,m)} = (\psi \times \psi)(D_{(n,m)})$ supposing the $\hat{x}\hat{y}$ plane embedded in the xy plane.

Theorem 2.7. *In accordance with the aforementioned conditions*

$$\widehat{A}_{(n,m)} = \xi_n \xi_m A_{(n,m)}.$$

Proof. The transformation that maps $D_{(n,m)}$ in $\widehat{D}_{(n,m)}$ is $\hat{x} = \psi_n(x)$, $\hat{y} = \psi_m(y)$. The Jacobian for this transformation is

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \psi'_n(x) & 0 \\ 0 & \psi'_m(y) \end{bmatrix} = \psi'_n(x)\psi'_m(y) \neq 0.$$

Thus, ([1]) $\widehat{A}_{(n,m)} = \iint_{\widehat{D}_{(n,m)}} d\hat{x}d\hat{y} = \iint_{D_{(n,m)}} |\psi'_n(x)\psi'_m(y)| dx dy$. Since ψ is an \mathbb{R}^+ prime coding function, then $|J| = \xi_n \xi_m$ and as a result the relationship between the areas of the essential regions in xy and in $\hat{x}\hat{y}$ is $\widehat{A}_{(n,m)} = \iint_{D_{(n,m)}} \xi_n \xi_m dx dy = \xi_n \xi_m \iint_{D_{(n,m)}} dx dy = \xi_n \xi_m A_{(n,m)}$. \square

Let α be an even number. We will assume for technical reasons that $\alpha \geq 16$. Let $k \in [4, \alpha/2]$ and consider the subsets of \mathbb{R}^2 (Fig, 26):

$$D_I(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y \geq x, xy \leq k\},$$

$$D_S(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y \geq x, \alpha - k \leq xy \leq \alpha - 4\}.$$

Let ψ be an \mathbb{R}^+ prime coding function and consider the subsets of $[0, M_\psi]^2$

$$\widehat{D}_I(\hat{k}) = (\psi \times \psi)(D_I(k)), \quad \widehat{D}_S(\hat{k}) = (\psi \times \psi)(D_S(k)).$$

We now define the functions

- 1) $\widehat{A}_I : [\hat{4}, \hat{\alpha} \div \hat{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\hat{k} \rightarrow \widehat{A}_I(\hat{k})$ (area of $\widehat{D}_I(\hat{k})$).
- 2) $\widehat{A}_S : [\hat{4}, \hat{\alpha} \div \hat{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\hat{k} \rightarrow \widehat{A}_S(\hat{k})$ (area of $\widehat{D}_S(\hat{k})$).
- 3) $\widehat{A}_T : [\hat{4}, \hat{\alpha} \div \hat{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\widehat{A}_T = \widehat{A}_I + \widehat{A}_S$.

Let α be an even number ($\alpha \geq 16$) and ψ an \mathbb{R}^+ prime coding function with coefficients ξ_i . We take $k_0 = 4, 5, \dots, \alpha/2 - 1$ and we study the second derivative of \widehat{A}_I at each closed interval $[\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$. For this, we consider the corresponding function $A_I(k)$. Then $\forall k \in [k_0, k_0 + 1]$ we

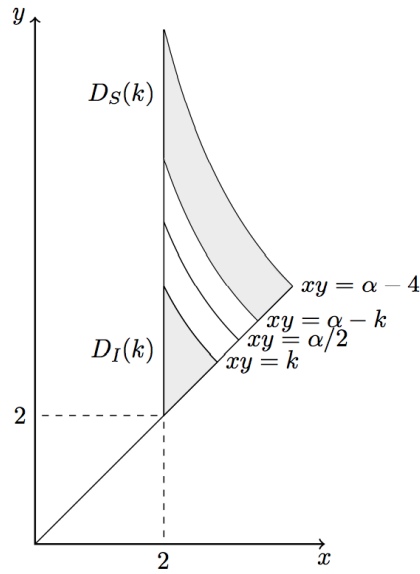


Figure 26. $D_I(k)$ and $D_S(k)$.

verify $A_I(k) = A_I(k_0) + A_I(k) - A_I(k_0)$. Additionally, $A_I(k) - A_I(k_0)$ is the sum of the areas in the essential regions associated with the $xy = k$ hyperbola, minus the area in the essential regions associated with the $xy = k_0$ hyperbola so,

$$A_I(k) - A_I(k_0) = \sum_{(n,i_n) \in E_S(k_0)} [A_{(n,i_n)}(k) - A_{(n,i_n)}(k_0)].$$

We know that functions $A_{(n,i_n)}(k)$ have a second derivative in $[k_0, k_0 + 1]$, therefore

$$A_I''(k) = \sum_{(n,i_n) \in E_S(k_0)} A_{(n,i_n)}''(k) \quad (\forall k \in [k_0, k_0 + 1]).$$

We now want to find the expression of $(\widehat{A}_I)''$ as a function of the variable \hat{k} , where $\hat{k} \in [\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$. By proposition 2.7, $\widehat{A}_{(n,m)}(\hat{k}) = \zeta_n \zeta_m A_{(n,m)}(k)$. If we derive with respect to \hat{k} , we obtain

$$(\widehat{A}_{(n,m)})'(\hat{k}) = \zeta_n \zeta_m A'_{(n,m)}(k) \frac{dk}{d\hat{k}}.$$

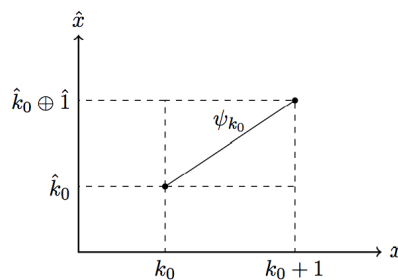


Figure 27. Finding $(\widehat{A}_{(n,m)})''(\hat{k})$.

At $k \in [k_0, k_0 + 1]$, the expression of \hat{k} is $\hat{k} = \xi_{k_0}(k - k_0) + B_{k_0}$ (2). Then $dk/d\hat{k} = 1/\xi_{k_0}$, therefore $(\hat{A}_{(n,m)})'(\hat{k}) = (\xi_n \xi_m / \xi_{k_0}) A'_{(n,m)}(k)$. Deriving once again:

$$(\hat{A}_{(n,m)})''(\hat{k}) = \frac{\xi_n \xi_m}{\xi_{k_0}^2} A''_{(n,m)}(k).$$

We get the following theorem:

Theorem 2.8. Let α be an even number ($\alpha \geq 16$). Then for every $\hat{k}_0 = \hat{4}, \hat{5}, \dots, (\hat{\alpha} \div \hat{2}) \sim \hat{1}$

a) $(\hat{A}_I)''(\hat{k}) = \sum_{(n,i_n) \in E_S(k_0)} (\hat{A}_{(n,i_n)})''(\hat{k}) \quad (\forall \hat{k} \in [\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]).$

b) For $\hat{k} \in [\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$ and bearing in mind the different types of essential regions, we obtain

(i) Type 2 essential region: $(\hat{A}_{(n,m)})''(\hat{k}) = \frac{\xi_n \xi_m}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{k}.$

(ii) Type 3 essential region: $(\hat{A}_{(n,m)})''(\hat{k}) = 0.$

(iii) Type 5 essential region: $(\hat{A}_{(n,m)})''(\hat{k}) = -\frac{\xi_n \xi_m}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{k}.$

(iv) Type 7 essential region: $(\hat{A}_{(n,n)})''(\hat{k}) = \frac{\xi_n^2}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{2k}.$

(v) Type 8 essential region: $(\hat{A}_{(n,n)})''(\hat{k}) = -\frac{\xi_n^2}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{2k}.$

Example 2.9. We will find $(\hat{A}_I)''(\hat{k})$ in $[\hat{12}, \hat{13}]$ with $\hat{\alpha} \geq \hat{26}$ (Fig. 28).

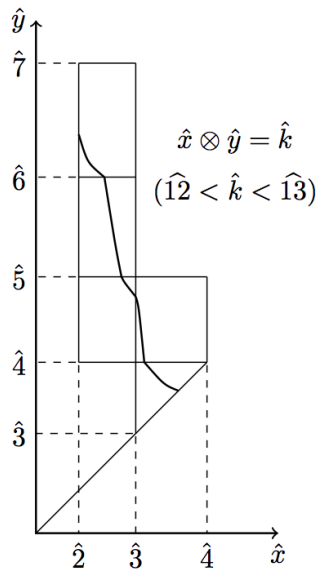


Figure 28. Finding $(\hat{A}_I)''(\hat{k})$ in $[\hat{12}, \hat{13}]$.

$$\begin{aligned}
 (\widehat{A}_I)''(\hat{k}) &= \frac{\xi_2 \xi_6}{\xi_{12}^2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{\xi_2 \xi_4}{\xi_{12}^2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{\xi_3 \xi_4}{\xi_{12}^2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi_3^2}{\xi_{12}^2} \cdot \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{k \xi_{12}^2} (\xi_2 \xi_6 - \xi_2 \xi_4 + \xi_3 \xi_4 - \xi_3^2 / 2)
 \end{aligned}$$

Now, consider the polynomial $p(t_2, t_3, t_4, t_6) = t_2 t_6 - t_2 t_4 + t_3 t_4 - t_3^2 / 2$. We call this polynomial a *lower essential polynomial* of $k_0 = 12$ and we write it as P_{I,k_0} . Let us generalize this definition.

Definition 2.10. Let α be an even number ($\alpha \geq 16$). The polynomial obtained naturally by removing the common factor function $1/(k \xi_0^2)$ in $(\widehat{A}_I)''(\hat{k})$ in the interval $[\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$ ($k_0 = 4, 5, \dots, \alpha/2 - 1$) is called a *lower essential polynomial* of k_0 . It is written as P_{I,k_0} .

Remarks 2.11. (i) Lower essential polynomials are homogeneous polynomials of degree 2. (ii) The variables that intervene in P_{I,k_0} are at most t_n and t_{i_n} where $(n, i_n) \in E_s(k_0)$, some of which may be missing (those which correspond to essential regions in which the second derivative is 0). (iii) We will also use P_{I,k_0} as the coefficient of $1/(k \xi_{k_0}^2)$ in $(\widehat{A}_I)''(\hat{k})$.

Corollary 2.12. Let α be an even number ($\alpha \geq 16$). Then, $\forall \hat{k} \in [\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$ with $\hat{k}_0 \in \{\hat{4}, \hat{5}, \dots, \hat{\alpha} \div \hat{2} \sim \hat{1}\}$ we verify $(\widehat{A}_I)''(\hat{k}) = P_{I,k_0} / (k \xi_{k_0}^2)$.

2.3 $(\widehat{A}_S)''$ and $(\widehat{A}_T)''$ functions

Let α be an even number ($\alpha \geq 16$). We take $k_0 \in \{4, 5, \dots, \alpha/2 - 1\}$ and we examine the second derivative of \widehat{A}_S at each closed interval $[\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1}]$. Then, $\forall k \in [k_0, k_0 + 1]$ we verify $A_S(k) = A_S(k_0) + A_S(k) - A_S(k_0)$. Additionally, $A_S(k) - A_S(k_0)$ is the area included between the curves

$$xy = \alpha - k_0, \quad xy = \alpha - k, \quad x = 2, \quad y = x.$$

As a result, it is the sum of the areas in the essential regions of the $xy = \alpha - k_0$ hyperbola minus the area in the essential regions of $xy = \alpha - k$. We obtain:

$$\begin{aligned}
 A_S(k) - A_S(k_0) &= \sum_{(n,i_n) \in E_S(\alpha - k_0 - 1)} \left[A_{(n,i_n)}(\alpha - k_0) - A_{(n,i_n)}(\alpha - k) \right], \\
 A_S''(k) &= - \sum_{(n,i_n) \in E_S(\alpha - k_0 - 1)} A_{(n,i_n)}''(\alpha - k).
 \end{aligned}$$

Of course, the same relationships as in the lower areas are maintained with the expression $(\widehat{A}_S)''$ as a function of \hat{k} . We are left with:

$$(\widehat{A}_{(n,i_n)})''(\hat{k}) = - \frac{\xi_n \xi_{i_n}}{\xi_{\alpha - k_0 - 1}^2} \cdot A_{(n,i_n)}''(\alpha - k).$$

We define upper essential polynomial in a similar way we defined lower essential polynomial and we write them as P_{S,k_0} . The same remarks are maintained.

Remarks 2.13. (i) Upper essential polynomials are homogeneous polynomials of degree 2. (ii) The variables that intervene in P_{S,k_0} are at most t_n, t_{i_n} where $(n, i_n) \in E_S(\alpha - k_0 - 1)$, some of which may be missing (those which correspond to essential regions in which the second derivative is 0). (iii) We will also use P_{S,k_0} as the coefficient of $1/(\alpha - k) \xi_{\alpha - k_0 - 1}^2$ in $(\widehat{A}_S)''(\hat{k})$.

2.4 Signs of the essential point coordinates

Definition 2.14. Let ψ be an \mathbb{R}^+ prime coding function and α an even number ($\alpha \geq 16$). For $k_0 \in \{4, 5, \dots, \alpha/2 - 1\}$ we write $P_{k_0} = (x_{k_0}, y_{k_0}) = (P_{I,k_0}, P_{S,k_0})$. We call any P_{k_0} an *essential point* associated with ψ .

Hence, we can express

$$(\widehat{A}_T)''(\widehat{k}) = \frac{x_{k_0}}{\xi_{k_0}^2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{y_{k_0}}{\xi_{\alpha-k_0-1}^2} \cdot \frac{1}{\alpha - k} \quad (\widehat{k} \in [\widehat{k}_0, \widehat{k}_0 \oplus \widehat{1}]). \tag{3}$$

The formula from proposition 2.8 is

$$(\widehat{A}_I)''(\widehat{k}) = \sum_{(n,i_n) \in E_S(k_0)} (\widehat{A}_{(n,i_n)})''(\widehat{k}) \quad (\forall \widehat{k} \in [\widehat{k}_0, \widehat{k}_0 \oplus \widehat{1}]).$$

where the $E_S(k_0)$ sub-indexes are:

For $n = 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor - 1$,

$$i_n = \lfloor k_0/(n+1) \rfloor, \lfloor k_0/(n+1) \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0/n \rfloor. \tag{4}$$

For $n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor$,

$$i_n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor, \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor + 1, \dots, \lfloor k_0/\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor. \tag{5}$$

Thus, for sub-index n in (1), in $(\widehat{A}_I)''$ only intervene $i_n = \lfloor k_0/(n+1) \rfloor$ and $i_n = \lfloor k_0/n \rfloor$, since we have already seen that all the sub-indexes included between them two, $(\widehat{A}_{(n,i_n)})''(\widehat{k}) = 0$, as the essential regions are of type 3. In the lower essential polynomial we obtain $\xi_n(\xi_{\lfloor k_0/n \rfloor} - \xi_{\lfloor k_0/(n+1) \rfloor}) > 0$ (for any \mathbb{R}^+ prime coding function). For $n = \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor$ we obtain the cases:

$$(i) \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor = \lfloor k_0/\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor \quad (ii) \lfloor \sqrt{k_0} \rfloor < \lfloor k_0/\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor. \tag{6}$$

In case (i) we would obtain the addend $(1/2)\xi_{\lfloor k_0 \rfloor}^2$, in case (ii) we would obtain (Fig. 29):

$$\xi_{\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor} \xi_{\lfloor k_0/\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor} - (1/2)\xi_{\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor}^2 = \xi_{\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor} (\xi_{\lfloor k_0/\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor \rfloor} - (1/2)\xi_{\lfloor \sqrt{k_0} \rfloor}) > 0.$$

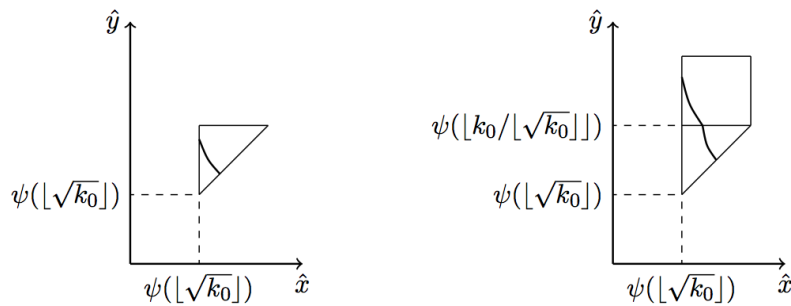


Figure 29. Finding the sign of x_{k_0} .

As a result, for an \mathbb{R}^+ prime coding function we obtain $x_4 > 0, x_5 > 0, \dots, x_{\alpha/2-1} > 0$. The reasoning is entirely analogous for the upper essential polynomials that is, $y_4 < 0, y_5 < 0, \dots, y_{\alpha/2-1} < 0$. We will now arrange the coordinates for the essential points.

1. Lower essential polynomials If $k_0 \in \mathbb{N}$, ($k_0 > 4$) is composite, there is at least one ψ - natural number coordinates point $(\widehat{n}, \widehat{m})$ such that $\widehat{2} \leq \widehat{n} \leq \widehat{m}$ which the ψ -hyperbola $\widehat{x} \otimes \widehat{y} = \widehat{k}_0$

goes through.

(a) If $2 < n < m$ we obtain the changes

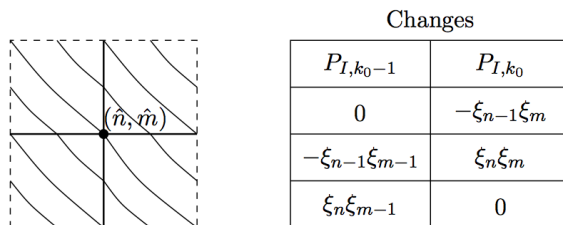


Figure 30. Arranging x_{k_0} in order. Case (a).

(b) If $2 < n = m$

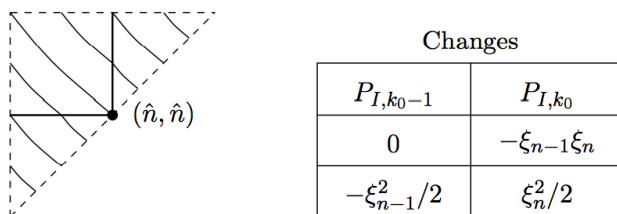


Figure 31. Arranging x_{k_0} in order. Case (b).

(c) If $2 = n < m$

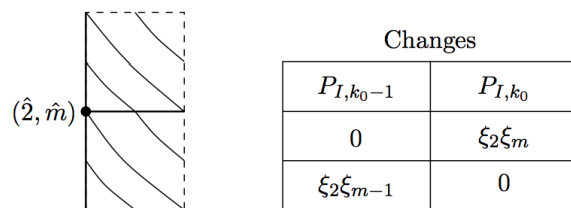


Figure 32. Arranging x_{k_0} in order. Case (c).

Then $P_{I,k_0} - P_{I,k_0-1} > 0$, since where there are transformations we obtain, for any prime coding function, either (a) or (b) or (c)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \xi_n\xi_m - \xi_{n-1}\xi_m + \xi_{n-1}\xi_{m-1} - \xi_n\xi_{m-1} = \\
 & \xi_m(\xi_n - \xi_{n-1}) - \xi_{m-1}(\xi_n - \xi_{n-1}) = \\
 & (\xi_n - \xi_{n-1})(\xi_m - \xi_{m-1}) > 0.
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \frac{\xi_n^2}{2} - \xi_{n-1}\xi_n + \frac{\xi_{n-1}^2}{2} = \frac{\xi_n^2 - 2\xi_{n-1}\xi_n + \xi_{n-1}^2}{2} = \frac{(\xi_n - \xi_{n-1})^2}{2} > 0.$$

$$(c) \quad \xi_2\xi_m - \xi_2\xi_{m-1} = \xi_2(\xi_m - \xi_{m-1}) > 0.$$

If k_0 is prime then $x_{k_0-1} = x_{k_0}$ since the same essential regions exist for the hyperbolas $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{k}$ in $(\hat{k}_0 \sim \hat{1}, \hat{k}_0) \cup (\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1})$. For $\alpha - k_0$ prime we obtain $y_{k_0} = y_{k_0-1}$ since the same essential regions exist for the hyperbolas $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{a} \sim \hat{k}$ if $\hat{k} \in (\hat{k}_0 \sim \hat{1}, \hat{k}_0) \cup (\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1})$.

2. Upper essential polynomials If $\alpha - k_0$ is composite, and reasoning in the same way, we obtain $P_{S,k_0} - P_{S,k_0-1} > 0$. For $\alpha - k_0$ prime we obtain $P_{S,k_0} = P_{S,k_0-1}$ since the same essential regions exist for the hyperbolas $\hat{x} \otimes \hat{y} = \hat{a} \sim \hat{k}$ if $\hat{k} \in (\hat{k}_0 \sim \hat{1}, \hat{k}_0) \cup (\hat{k}_0, \hat{k}_0 \oplus \hat{1})$. We obtain the theorem:

Theorem 2.15. *Let α be an even number ($\alpha \geq 16$), and ψ an \mathbb{R}^+ prime coding function. Let $P_{k_0} = (x_{k_0}, y_{k_0})$ be the essential points. Then,*

(i) $0 < x_4 \leq x_5 \leq \dots \leq x_{\alpha/2-1}$. Additionally, $x_{k_0-1} = x_{k_0} \Leftrightarrow k_0$ is prime.

(ii) $y_4 \leq y_5 \leq \dots \leq y_{\alpha/2-1} < 0$. Additionally, $y_{k_0-1} = y_{k_0} \Leftrightarrow \alpha - k_0$ is prime.

Corollary 2.16. In the hypotheses from the above theorem: The even number α is the sum of two primes k_0 and $\alpha - k_0$, $k_0 \in \{5, 6, \dots, \alpha/2 - 1\}$ iff the consecutive essential points P_{k_0-1} and P_{k_0} are repeated, that is $P_{k_0-1} = P_{k_0}$.

Remark 2.17. Corollary 2.16 proves Claim 2.1 and according to Remark 2.2 we have provided a characterization of de Goldbach Conjecture in the infinite set

$$A = \{\alpha \in \mathbb{N} : \alpha \text{ even, } \alpha \geq 16, \text{ with } \alpha/2 \text{ and } \alpha - 3 \text{ composite}\}.$$

References

- [1] APOSTOL, T., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Pub. Co. (1974), pg. 421.
- [2] LENTIN, A., RIVAUD, J., *Leçons d'algèbre moderne*, Vuibert (1957), pg. 33.
- [3] REVILLA, F., *Goldbach Conjecture and Peano Arithmetic*, Proceedings of the First International Congress of Applied Mathematics (Theoretical foundations of applied mathematics) (Madrid, 2007), ref. 702, pg. 451-454.
- [4] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, (1987), pg. 49-55.
- [5] WANG, Y., *The Goldbach Conjecture*, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2002), pg. 1.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Fernando Revilla Jiménez.

Correo electrónico: frej0002@ficus.pntic.mec.es

Institución: Jefe del Departamento el I.E.S. Santa Teresa de Jesús (Madrid) y profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio (Madrid).

Experiencias Docentes

La información cultural de los estudiantes desde la resolución de problemas aritméticos

The cultural information of the students from the resolution of arithmetic problems

Eduardo Miguel Pérez Almarales
Edel Ernesto Pérez Almarales
Miguel Oscar Almarales Milán
Inés María Lago Guerrero

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 045–063, ISSN 2174-0410
Recepción: 3 Mar'20; Aceptación: 3 May'20

1 de octubre de 2020

En este artículo se pretende ofrecer una visión de cómo se puede utilizar la resolución de problemas por variadas vías aritméticas para ofrecer información cultural a los estudiantes; se ofrecen datos de pintores, escultores, escritores, científicos y obras de arte que permiten aumentar el caudal de conocimientos, al mismo tiempo que se profundiza en los procedimientos de resolución de problemas por vías aritméticas.

Palabras Clave: Información cultural, resolución de problemas por vía aritmética

Abstract

This article intends to offer a vision of how problem solving can be used in various arithmetic ways in terms of offering cultural information to students, data are provided by painters, sculptors, writers, scientists and works of art that allow increasing the wealth of knowledge, at the same time that they deepen in the procedures of resolution of problems by arithmetic routes.

Keywords: Cultural information, problem solving by arithmetic.

1. Introducción

La enseñanza de la Matemática ha ocupado un lugar privilegiado en los sistemas educativos por su influencia en las dimensiones formativas e instructivas. Hoy, a estas dimensiones, se

suma lo social, por haberse constituido la Matemática en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico.

La enseñanza de la Matemática tiene entre sus objetivos fundamentales preparar a los estudiantes para resolver los problemas que a diario se le presentan en la práctica social; por tal razón ha sufrido transformaciones sustanciales y constituye una prioridad del Ministerio de Educación cubano encontrar las vías, métodos y estrategias a través de las cuales se pueda perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje en correspondencia con las nuevas exigencias.

Se debe tener en cuenta que el logro de una cultura general integral en los estudiantes es indispensable para el desarrollo exitoso de cualquier país. Con las transformaciones realizadas en el sistema educativo cubano se evidencia la necesidad de buscar alternativas, que posibiliten la formación académica, laboral e investigativa de sus estudiantes, desde la vinculación de la propia asignatura con la práctica social.

La educación tiene como fin la formación básica e integral de los estudiantes, sobre la base de una cultura general que les permita tener un bagaje cultural acorde con el desarrollo de la sociedad. Los problemas matemáticos bien utilizados, pueden contribuir al logro de tal fin.

En los problemas que se proponen se utilizan elementos culturales, como es el caso de pinturas, esculturas, obras literarias y otros elementos que permiten fomentar el logro de una cultura general.

2. Desarrollo

Según Campistrous y Rizo:

Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación

Cuando la vía fundamental para resolverlos es la utilización de algunas de las operaciones básicas se dice que la vía es aritmética. Desde el punto de vista de los autores de este artículo los métodos aritméticos desarrollan mucho más el pensamiento de los estudiantes que los algebraicos, pues en los primeros el trabajo se realiza a partir de un razonamiento lógico y del análisis de cómo utilizar cada una de las operaciones, mientras que en el algebraico se basa en relaciones preestablecidas que reducen el problema a la resolución de una ecuación o sistema de estas.

Por otra parte según Miguel de Guzmán

lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos

Con los problemas que se proponen en el presente artículo se pretende que los estudiantes penetren en las diferentes vías aritméticas de resolución de problemas al mismo tiempo que desarrollan su bagaje cultural.

2.1. Algunos métodos aritméticos en la resolución de problemas

2.1.1. Problemas Utilizando Modelos Lineales

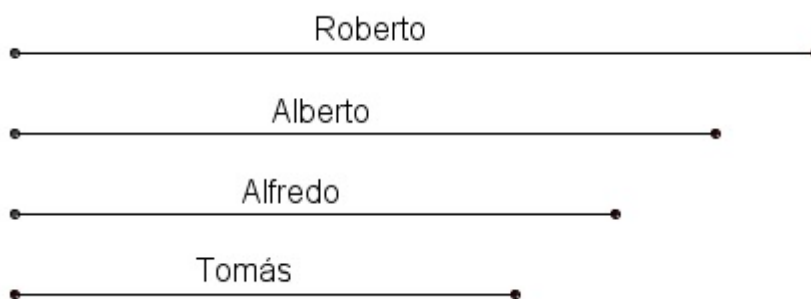
En este tipo de problema es necesario graficar la relación entre los elementos que aparecen en el texto del problema y aplicar la relación parte-todo. En este caso nos estamos refiriendo a que el todo es la suma de las partes que lo componen, es por ello que la solución se basa en realizar transformaciones en el problema que nos permitan obtener partes iguales.

Veamos un ejemplo:

Roberto y Alfredo son más altos que Tomás, mientras Alberto es menos alto que Roberto, pero más que Alfredo. ¿Quién es más alto y quién más bajo?

Solución:

Veamos que este problema es muy sencillo por la modelación:



Como Roberto y Alfredo son más altos que Tomás, el segmento que representa a este último debe ser el más pequeño de los tres. Que Alberto sea menos alto que Roberto pero más que Alfredo nos dice que el orden de los segmentos de mayor a menor es Roberto, Alberto, Alfredo y Tomás.

R: El más alto es Roberto y el más bajo Tomás.

2.1.2. Problemas Utilizando Relaciones Aritméticas

Para resolver este tipo de problemas se deben dominar las siguientes relaciones aritméticas, que permiten resolver variados problemas donde sólo es necesario identificar sumas, diferencias y cocientes:

¿Cómo determinar el mayor de dos valores conociendo la suma y la diferencia de estos?

$$\text{mayor} = \frac{\text{suma} + \text{diferencia}}{2}$$

¿Cómo determinar el menor de dos valores conociendo la suma y la diferencia de estos?

$$\text{menor} = \frac{\text{suma} - \text{diferencia}}{2}$$

¿Qué relaciones se pueden establecer entre dos valores, su suma y su cociente?

$$\frac{\text{suma}}{\text{cociente} + 1} = \text{menor si cociente} > 1$$

$$\frac{\text{suma}}{\text{cociente} + 1} = \text{mayor si cociente} < 1$$

¿Qué relaciones se pueden establecer entre dos valores, su diferencia positiva y su cociente?

$$\frac{\text{diferencia}}{\text{cociente} - 1} = \text{menor si cociente} > 1$$

$$\frac{\text{diferencia}}{1 - \text{cociente}} = \text{mayor si cociente} < 1$$

Veamos cómo utilizar estas relaciones en la resolución de problemas. Ejemplo 1: La suma de dos números es 148 y el segundo número es 4 unidades menor que el primer número. ¿Cuáles son los números?

Solución:

En este problema conocemos que la suma es 148 y la diferencia es 4, entonces podemos utilizar la relación aritmética:

$$\text{mayor} = \frac{\text{suma} + \text{diferencia}}{2}$$

$$\text{mayor} = \frac{148 + 4}{2} = \frac{152}{2} = 76$$

Con esto es sencillo buscar el otro valor, pues sería 4 unidades menor, es decir 72.

2.1.3. Problemas Utilizando Factorización Numérica

Sabemos que todo número entero positivo se puede expresar de manera única, salvo el orden, en la forma:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

Donde p_1, p_2, \dots, p_r son números primos y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ son enteros positivos.

Veamos un ejemplo:

Factorizar el número 36.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces para expresarlo en la forma canónica tenemos que contar las veces que aparece cada factor primo y este sería el exponente de ese factor, en este caso:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

A partir de la descomposición canónica del número también podemos determinar la cantidad de divisores positivos del número. En este caso sería:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$$

En el ejemplo la cantidad de divisores es:

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$$

Veamos a través del ejemplo cómo determinar entonces los divisores positivos del número:

	1	2	4
3	3	6	12
9	9	18	36

En la parte superior ponemos todas las potencias del primer factor primo hasta donde indique el exponente, en el caso del ejemplo sería: $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$, mientras en la columna de la izquierda se va colocando el otro factor a partir del exponente 1 y se va multiplicando por todo lo que está encima de la última raya horizontal. Si hubiera otro factor distinto de las potencias de 3, entonces se pasa raya después de la última potencia de 3 y se multiplica por el valor siguiente todo lo que está encima de la última raya. Veamos por ejemplo si queremos buscar todos los factores positivos de 360.

Lo primero que hacemos es factorizar 360:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Veamos entonces como quedaría la tabla en este caso:

	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72
5	5	10	20	40
	15	30	60	120
	45	90	180	360

Ahora para determinar todos los productos que dan como resultado ese valor se ordenan los números poniéndose la mitad arriba y la mitad abajo en orden contrario, veamos en el último ejemplo:

1	2	4	8	3	6	12	24	9	18	36	72
360	180	90	45	120	60	30	15	40	20	10	5

Para la solución de los problemas que se proponen en este capítulo es conveniente primero ordenar los divisores en orden ascendente, en este caso quedarían:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360, entonces quedaría:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
360	180	120	90	72	60	45	40	36	30	24	20

Si fuera un caso como el ejemplo anterior que tiene una cantidad impar de divisores positivos por ser un cuadrado perfecto se repite el elemento del centro. Veamos de las dos formas:

1	2	4	3	6
36	18	9	12	6

Ordenemos los divisores en orden ascendente, en este caso quedarían:
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, entonces quedaría:

$$\frac{1}{36} \quad \frac{2}{18} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{6}{6}$$

Como se puede observar en este caso se repite el elemento central, que es el 6. Estos elementos son útiles para resolver problemas en los cuales se conozca el producto de dos cantidades. Veamos un ejemplo.

Un terreno rectangular tiene 30 m de ancho y 50 m de largo. ¿En cuántos metros debe disminuirse el ancho y en cuántos aumentarse el largo para que el perímetro aumente en 30 m, sin cambiar el área?

(Prueba de Ingreso a la Educación Superior Cuba 1995)

Solución:

En este caso como nos hablan de área, esta se calcula como el producto del largo y el ancho, el área del terreno es:

$$30 \cdot 50 = 1500$$

Factoricemos 1500:

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Busquemos los divisores de 1500:

	1	2	4
3	3	6	12
5	5	10	20
	15	30	60
25	25	50	100
	75	150	300
125	125	250	500
	375	750	1500

Determinemos los productos que dan como resultado 1500, para ello ordenemos primero los divisores:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 125, 150, 250, 300, 375, 500, 750, 1500$$

Los productos serían:

$$\frac{1}{1500} \quad \frac{2}{750} \quad \frac{3}{500} \quad \frac{4}{375} \quad \frac{5}{300} \quad \frac{6}{250} \quad \frac{10}{150} \quad \frac{12}{125} \quad \frac{15}{100} \quad \frac{20}{75} \quad \frac{25}{60} \quad \frac{30}{50}$$

Para que el perímetro aumente en 30, la suma de los lados tiene que aumentar en 15 y los nuevos valores deben ser dos que multiplicados también den 1500, veamos cuáles cumplen esta

condición. La nueva suma tiene que ser 95, entonces analizando en la última tabla los únicos valores que cumplen tal condición son 20 y 75. Entonces el ancho debe disminuirse en 10 y el largo aumentarse en 25.

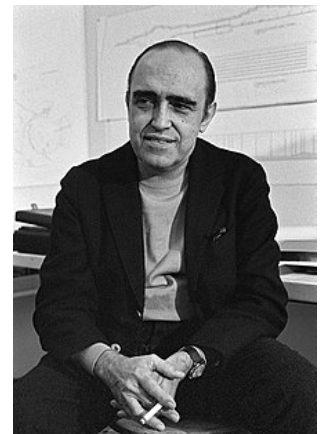
R: El ancho debe disminuirse en 10 y el largo aumentarse en 25.

2.2. Problemas propuestos

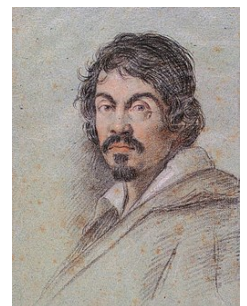
1. El monte Olympus en el planeta Marte es la elevación más alta conocida en el sistema solar. El ancho en su base excede en 6 km a 22 veces su altura. Se sabe que su base y su altura suman 627 km. ¿Qué altura tiene?



2. El ilustre arquitecto Oscar Niemeyer nació en Brasil el 15 de diciembre de un año del siglo XX, en este mismo siglo recibió el diploma de arquitectura de la Escuela Nacional de Bellas Artes de Río de Janeiro y diseñó la sede de la Organización de Naciones Unidas (ONU) en Nueva York. Expresados los años como los números formados por sus decenas y unidades, se sabe que la fecha en la que recibió su diploma excede en 6 al cuádruplo de su nacimiento y que diseñó la sede de la ONU en el mismo año en que cumplió 40. Se sabe que estos 3 números suman 88. ¿En qué año nació Niemeyer? ¿En qué año recibió el diploma de arquitectura y en qué año diseñó la sede de la ONU?



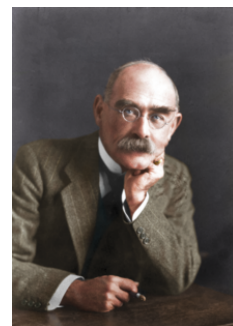
3. Dentro de las pinturas más conocidas del italiano Caravaggio se encuentran: Baco enfermo, La buenaventura y San Mateo y el Ángel, esta última la comenzó el año anterior al de su culminación. Se sabe que la segunda la terminó un año después que la primera y la tercera 6 años después que la segunda. Si la suma de los 3 años es 4 787, ¿en qué año finalizó cada una de las obras?



4. El dramaturgo, poeta y actor inglés William Shakespeare, considerado el escritor más importante de lengua inglesa, tiene entre sus obras más conocidas Romeo y Julieta, Hamlet, Macbeth, Mucho ruido y pocas nueces y El sueño de una noche de verano. Se sabe que la suma de los años de su nacimiento y muerte es 3 180, que nació en el siglo XVI y murió en el siglo XVII y que considerando el año por sus cifras de las decenas y de las unidades, el número que representa su nacimiento es el cuádruplo del que representa su muerte. ¿Cuáles son los años de nacimiento y muerte de Shakespeare?



5. El escritor y poeta británico, nacido en la India, Rudyard Kipling, quien dejó como legado libros infantiles como: Las aventuras de Mowgli, Capitanes intrépidos y El libro de la jungla recibió el Premio Nobel de Literatura en el año que cumplió 42 años, siendo el más joven en lograrlo hasta esa fecha. Se sabe que 29 años después falleció y que la suma de los años de su nacimiento, su muerte y en el que alcanzó el Premio Nobel es 5 708. ¿En qué año alcanzó el Premio Nobel?



6. Magdalena Carmen Frida Kahlo Calderón conocida como Frida Kahlo fue una reconocida pintora mexicana. Entre sus obras más famosas se encuentran: Las dos Fridas, Viva la vida, Unos cuantos piquetitos y Diego en mi pensamiento. Vivió en el siglo XX y murió a los 47 años de edad. Si consideramos los años como las cifras de las decenas y unidades se sabe que 8 veces el año de su nacimiento excede en 2 al año de su muerte.



- a) Si a los 6 años sufrió poliomielitis, ¿en qué año sucedió esto?
 b) A los 18 años tuvo un trágico accidente que le limitó la movilidad por lo que se dedicó a la pintura. ¿En qué año ocurrió este accidente?
 c) A los 22 años se casó con el muralista Diego Rivera, ¿en qué año contrajo este matrimonio?
 d) En 1939 se divorció de Diego Rivera, ¿qué tiempo estuvo casada con el muralista?

7. Salvador Dalí, artista catalán del movimiento surrealista, trabajó la pintura, el dibujo, la fotografía, la escultura y el cine. Vivió en el siglo XX y murió en el año en que cumplía los 85, uno de sus cuadros más famosos: La persistencia de la memoria, lo pintó en 1931. Otros de sus cuadros son: La desintegración de la memoria, La Tentación de San Antonio, Elefantes de Dalí, Sombras de animales en el desierto y La metamorfosis de Narciso. En el año de su nacimiento la suma de las cifras básicas es 14 y la cifra de las unidades excede en 4 a la de las decenas. ¿En qué año murió y a qué edad pintó el cuadro: La persistencia de la memoria?



8. Neil Armstrong, cosmonauta estadounidense, fue el primer humano en poner un pie sobre la luna. Se sabe que esto ocurrió en el año que el cosmonauta cumplía 39 años. Si se consideran los años como los formados por sus decenas y unidades, el año en que pisó la luna excede en 9 al duplo del de su nacimiento. ¿En qué año nació y en qué año el primer humano pisó la luna?



9. Cristian Barnard, fue un cirujano sudafricano que realizó el primer trasplante de corazón. Este acontecimiento y su nacimiento fueron en el siglo XX en el año en que cumplía 45 años. Tomando el año como sus cifras de decenas y unidades el triple del año de su nacimiento aumentado en una unidad coincide con el año en que realizó la operación. Si el cirujano murió en 2001. ¿En qué año nació y en qué año realizó el trasplante? ¿Qué edad cumplía en el año de su muerte?



10. Los Beatles, uno de los grupos musicales más famosos de todos los tiempos, protagonizaron varias películas en la segunda mitad del siglo XX. La primera de ellas fue: Qué noche la de aquel día. Se sabe que la suma de las cifras básicas del año de su estreno es 20 y que la cifra de las decenas excede en 2 a la cifra de las unidades. ¿En qué año se estrenó esta película?



11. Sabemos que las tres pinturas del tipo óleo sobre lienzo: Las señoritas de Aviñón, Desnudo bajando la escalera y Composición en rojo, amarillo y azul fueron realizadas por Mondrian, Picasso y Duchamp. Además, se sabe que salieron a la luz en 1907, 1912 y 1921 y que sus dimensiones son: $49,5 \times 45,5 \text{ cm}$, $146 \times 89 \text{ cm}$ y $243,9 \times 233,7 \text{ cm}$. Se conoce que Las señoritas de Aviñón es la de mayores dimensiones y Composición en rojo, amarillo y azul la de menores dimensiones. Desnudo bajando la escalera se pintó en 1912, la obra de Picasso vio la luz en 1907, la más reciente es Composición en rojo, amarillo y azul y Mondrian es el autor de la obra de menores dimensiones. ¿Quién es el autor de Desnudo bajando la escalera?

12. La Mona Lisa, también conocida como La Gioconda, es una de las obras pictóricas más famosas de todos los tiempos fue pintada por Leonardo da Vinci entre 1503 y 1519, es una pintura al óleo sobre tabla de álamo que actualmente está en el Museo del Louvre. Este cuadro es, además, considerado el más caro de la historia, valorado en 713 millones de dólares. Se sabe que tiene un área de 4081 cm^2 y que su alto supera a su ancho en 24 cm . ¿Cuáles son las dimensiones de este cuadro?



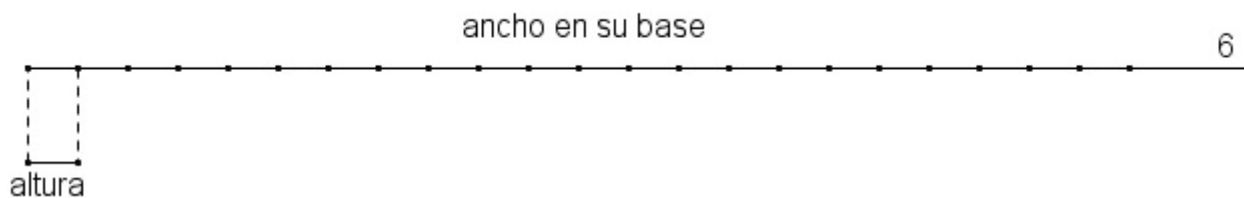
13. El Estadio Santiago Bernabéu es un recinto deportivo propiedad del Real Madrid Club de Fútbol, situado en pleno Paseo de la Castellana en Madrid. Se inauguró el 14 de diciembre de 1947 y su capacidad actual es de 81044 espectadores. El terreno de este estadio está cubierto por césped con un área total de 7140 m^2 y el duplo de su ancho excede en 31 a su largo. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?



2.3. Resolución de los problemas propuestos

1. Solución:

Grafiquemos la situación que aparece en el problema:



Para lograr segmentos iguales es suficiente restarle 6 a la suma total, con lo cual la altura se puede calcular:

$$h = \frac{621 \text{ km}}{23} = 27 \text{ km}$$

Si quisieramos calcular el ancho de la base, sería:

$$a = 22 \cdot 27 \text{ km} + 6 \text{ km} = 600 \text{ km}$$

O también:

$$627 \text{ km} - 27 \text{ km} = 600 \text{ km}$$

R: La altura es 27 km

Otra vía sería utilizando relaciones aritméticas, pues si restamos 6 de la suma se obtienen dos cantidades que suman 621 km , donde una de ellas es 22 veces la otra, por tanto se puede utilizar la siguiente relación aritmética:

$$\frac{\text{Suma}}{\text{Cociente} + 1} = \text{menor}$$

En este caso la suma es 621 km y el cociente es 22, entonces queda

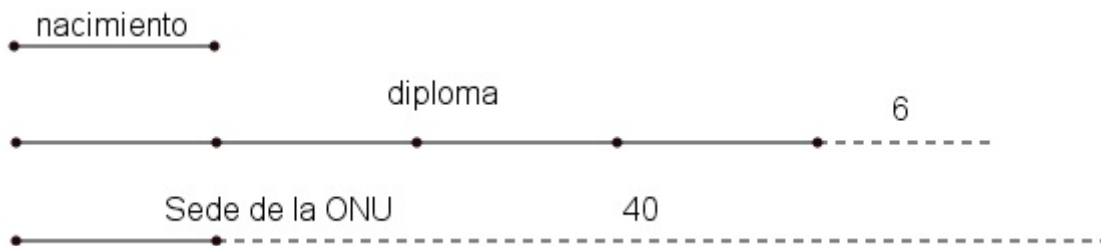
$$\frac{\text{Suma}}{\text{Cociente} + 1} = \frac{621}{22 + 1} = \frac{621}{23} = 27 = \text{menor}$$

Entonces el mayor, como en la vía anterior, sería:

$$627 \text{ km} - 27 \text{ km} = 600 \text{ km}$$

2. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Para obtener partes iguales debemos restar del total 46, con lo cual se obtiene:

$$88 - 46 = 42$$

Entonces el contenido de cada parte es:

$$\frac{42}{6} = 7$$

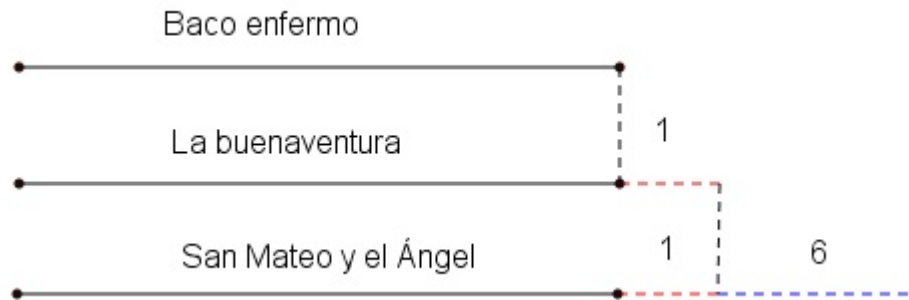
Entonces podemos calcular los valores buscados por:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &= 7 \\ 7 \cdot 4 + 6 &= 34 \\ 7 + 40 &= 47 \end{aligned}$$

R: Niemeyer nació en 1907, recibió el diploma de arquitectura en el año 1934 y diseñó la sede de la ONU en 1947.

3. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Para obtener partes iguales necesitamos restar del total:

$$1 + 1 + 6 = 8$$

Entonces el nuevo total es:

$$4787 - 8 = 4779$$

De aquí el contenido de cada una de las partes iguales sería:

$$\frac{4779}{3} = 1593$$

Entonces las fechas buscadas se determinan por:

$$\begin{aligned} 1593 \cdot 1 &= 1593 \\ 1593 + 1 &= 1594 \\ 1594 + 6 &= 1600 \end{aligned}$$

R: Baco enfermo lo terminó en 1593, La buenaventura en 1594 y San Mateo y el Ángel en 1600.

4. Solución:

Lo primero que tenemos que determinar es una relación entre las sumas de los números de dos cifras representados por decenas y unidades, para ello tenemos que la parte que representa las primeras cifras tiene una suma de:

$$1600 + 1500 = 3100$$

Entonces la suma de los números de dos cifras formado por las decenas y unidades de los años de nacimiento y muerte es:

$$3180 - 3100 = 80$$

Veamos como graficar la situación:



Tenemos un todo compuesto por cinco partes iguales. Entonces el contenido de cada parte igual es:

$$\frac{80}{5} = 16$$

Entonces los valores buscados son:

$$16 \cdot 1 = 16$$

$$16 \cdot 4 = 64$$

R: El año de nacimiento de Shakespeare fue 1564 y el de su muerte 1616.

Otra vía sería utilizar relaciones aritméticas, percatándose de que si restamos de la suma $1500 + 1600$ obtenemos la suma de los números de dos cifras formados por decenas y unidades, que en este caso sería $3180 - 3100 = 80$ y conocemos además que el cociente es 4:

$$\frac{\text{Suma}}{\text{Cociente} + 1} = \text{menor}$$

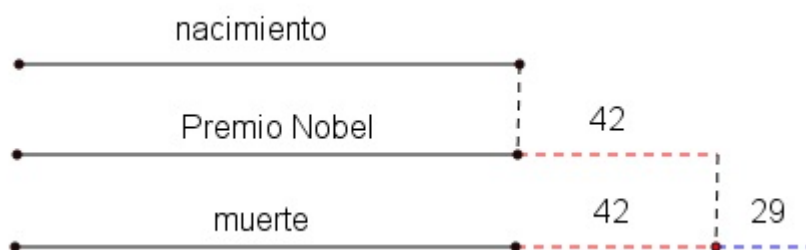
$$\frac{\text{Suma}}{\text{Cociente} + 1} = \frac{80}{4 + 1} = \frac{80}{5} = 16 = \text{menor}$$

Entonces el mayor, como en la vía anterior, sería:

$$80 - 16 = 64$$

5. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Para obtener partes iguales es necesario restar del total:

$$42 \cdot 2 + 29 = 113$$

Entonces el nuevo total es:

$$5708 - 113 = 5595$$

Entonces el contenido de cada una de las partes iguales es:

$$\frac{5595}{3} = 1865$$

Por tanto los elementos buscados son:

$$1865 \cdot 1 = 1865$$

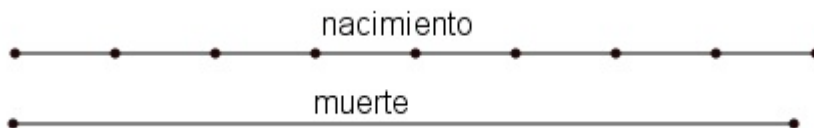
$$1865 + 42 = 1907$$

$$1907 + 29 = 1936$$

R: Alcanzó el Premio Nobel en 1907.

6. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Para obtener partes iguales tenemos que sumarle 2 al año de la muerte, entonces hubiera muerto a los 49 años, en este caso la diferencia es 7 partes iguales con un todo de 49, entonces cada parte tiene un contenido de:

$$\frac{49}{7} = 7$$

Entonces los números que estamos buscando son:

$$7 \cdot 1 = 7$$

$$7 \cdot 8 - 2 = 54$$

Hasta aquí sabemos que el año de su nacimiento fue 1907 y el de su muerte 1954, busquemos los elementos que nos piden:

$$1907 + 6 = 1913$$

Para determinar cuándo sufre un trágico accidente:

$$1907 + 18 = 1925$$

Para determinar cuándo contrajo matrimonio:

$$1907 + 22 = 1929$$

Para determinar el tiempo que estuvo casada con el muralista:

$$1939 - 1929 = 10$$

R: Frida contrajo poliomielitis en 1913, sufrió el trágico accidente en 1922, se casó con Diego Rivera en 1929 y estuvo casada con él 10 años.

7. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Primeramente tenemos que restar $1 + 9 = 10$, entonces la suma de las decenas y unidades es 4. Tenemos que obtener partes iguales, para ello hay que restar 4 del total, entonces el nuevo total es:

$$14 - 10 - 4 = 0$$

Entonces el contenido de cada parte igual es:

$$\frac{0}{2} = 0$$

Entonces los valores a buscar son:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 &= 0 \\ 0 + 4 &= 4 \end{aligned}$$

Nació en 1904, para buscar el año de su muerte:

$$1904 + 85 = 1989$$

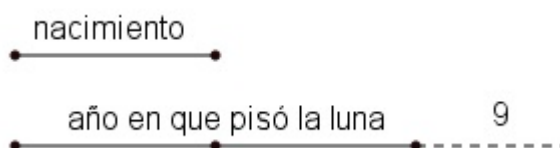
Para determinar a la edad que pintó el cuadro:

$$1931 - 1904 = 27$$

R: Murió en 1989 y pintó el cuadro a los 27 años.

8. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



La diferencia es 39, entonces una de las partes iguales y 9 más es 39, por tanto cada una de las partes iguales es:

$$39 - 9 = 30$$

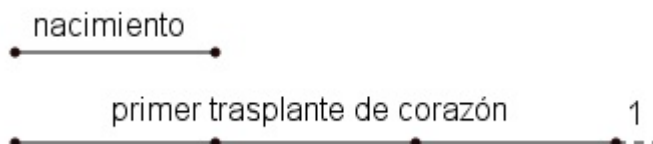
Por tanto, los valores que estamos buscando son:

$$\begin{aligned} 30 \cdot 1 &= 30 \\ 30 \cdot 2 + 9 &= 69 \end{aligned}$$

R: Neil Armstrong nació en 1930 y pisó la luna en 1969.

9. Solución:

Veamos cómo graficar la situación:



Como el primer trasplante de corazón lo realizó cuando tenía 45 años, entonces la diferencia entre estos valores es 45. Para determinar partes iguales debemos restar 1 de este total, entonces el nuevo total es:

$$45 - 1 = 44$$

El contenido de cada una de las partes iguales se determina según:

$$\frac{44}{2} = 22$$

Entonces los valores buscados son:

$$22 \cdot 1 = 22$$

$$22 \cdot 3 + 1 = 67$$

Necesitamos buscar qué edad cumplía el año de su muerte:

$$2001 - 1922 = 79$$

R: Cristian Barnard nació en 1922, realizó el primer trasplante de corazón en 1967 y murió en el año que cumplía 79.

10. Solución:

Como se trata de un año del siglo XX comienza en 19, entonces la suma de las decenas y las unidades es 10, y la diferencia sería 2, entonces podemos utilizar la relación aritmética:

$$mayor = \frac{suma+diferencia}{2} = \frac{10+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Con esto es sencillo buscar el otro valor, pues sería 2 unidades menor, es decir 4.

R: La película se estrenó en 1964.

11. Solución:

En este caso la tabla inicial quedaría de la siguiente forma:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian			
Picasso			
Duchamp			
1907			
1912			
1921			
49,5 x 45,5 cm			
146 x 89 cm			
243,9 x 233,7 cm			

Como Las señoritas de Aviñón es la de mayores dimensiones se puede comenzar a completar la tabla:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian			
Picasso			
Duchamp			
1907			
1912			
1921			
49,5 x 45,5 cm	no		
146 x 89 cm	no		
243,9 x 233,7 cm	sí	no	no

Ahora como Composición en rojo, amarillo y azul es la de menores dimensiones se sigue completando la tabla:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian			
Picasso			
Duchamp			
1907			
1912			
1921			
49,5 x 45,5 cm	no	no	sí
146 x 89 cm	no	sí	no
243,9 x 233,7 cm	sí	no	no

Como Desnudo bajando la escalera se pintó en 1912 se sigue completando la tabla:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian			
Picasso			
Duchamp			
1907		no	
1912	no	sí	no
1921		no	
49,5 x 45,5 cm	no	no	sí
146 x 89 cm	no	sí	no
243,9 x 233,7 cm	sí	no	no

Que la obra de Picasso vio la luz en 1907 lo que me informa hasta ahora es que él no pintó Desnudo bajando la escalera.

Como la más reciente es Composición en rojo, amarillo y azul y tomando en consideración la información anterior se tiene que esta tampoco fue pintada por Picasso, entonces éste pintó Las señoritas de Aviñón, con esto se puede seguir completaando la tabla:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian	no		
Picasso	sí	no	no
Duchamp	no		
1907	sí	no	no
1912	no	sí	no
1921	no	no	sí
49,5 x 45,5 cm	no	no	sí
146 x 89 cm	no	sí	no
243,9 x 233,7 cm	sí	no	no

Como Mondrian es el autor de la obra de menores dimensiones, su pintura es Composición en rojo, amarillo y azul, lo cual nos permite completar la tabla:

	Las señoritas de Aviñón	Desnudo bajando la escalera	Composición en rojo, amarillo y azul
Mondrian	no	no	sí
Picasso	sí	no	no
Duchamp	no	sí	no
1907	sí	no	no
1912	no	sí	no
1921	no	no	sí
49,5 x 45,5 cm	no	no	sí
146 x 89 cm	no	sí	no
243,9 x 233,7 cm	sí	no	no

R: El autor de Desnudo bajando la escalera es Duchamp.

12. Solución:

Como el área es 4081 cm^2 y esta se obtiene como el producto de dos lados consecutivos del rectángulo, primero tenemos que factorizar 4081:

$$\begin{array}{r|l}
 4081 & 7 \\
 583 & 11 \\
 53 & 53 \\
 1 &
 \end{array}$$

Busquemos los divisores de 4081:

$$\begin{array}{r|ll}
 & 1 & 7 \\
 \hline
 11 & 11 & 77 \\
 \hline
 53 & 53 & 371 \\
 & 583 & 4081
 \end{array}$$

Determinemos los productos que dan como resultado 1500, para ello ordenemos primero los divisores positivos:

$$1, 7, 11, 53, 77, 371, 583, 4081$$

Los productos serían:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 7 \quad 11 \quad 53 \\
 \hline
 4081 \quad 583 \quad 371 \quad 77
 \end{array}$$

De estos productos que dan 4081 hay que buscar dos que se diferencien en 24, que serían en este caso 53 y 77

R: El cuadro mide 77 cm de alto y 53 cm de ancho.

13. Solución:

Como el área es 7140 m^2 y esta se obtiene como el producto de dos lados consecutivos del rectángulo, primero tenemos que factorizar 7140:

$$\begin{array}{r|l}
 7140 & 2 \\
 3570 & 2 \\
 1785 & 3 \\
 595 & 5 \\
 119 & 7 \\
 17 & 17 \\
 1 &
 \end{array}$$

Busquemos los divisores de 7140:

	1	2	4
3	3	6	12
5	5	10	20
	15	30	60
7	7	14	28
	21	42	84
	35	70	140
	105	210	420
17	17	34	68
	51	102	204
	85	170	340
	255	510	1020
	119	238	476
	357	714	1428
	595	1190	2380
	1785	3570	7140

Ordenemos los divisores:

1	2	3	4	5	6	7	10	12	14	15	17
20	21	28	30	34	35	42	51	60	68	70	84
85	102	105	119	140	170	204	210	238	255	340	357
420	476	510	595	714	1020	1190	1428	1785	2380	3570	7140

Los productos serían:

1	2	3	4	5	6	7	10	12	14	15	17
7140	3570	2380	1785	1428	1190	1020	714	595	510	476	420
20	21	28	30	34	35	42	51	60	68	70	84
357	340	255	238	210	204	170	140	119	105	102	85

De estos productos que dan 7140 hay que buscar dos que el duplo de su ancho excede en 31 a su largo, que en este caso son 68 y 105, pues $2 \cdot 68 - 31 = 105$

R: El terreno mide 68 m de ancho y 105 m de largo.

3. Conclusiones

Con el presente artículo se evidencia que es posible engrosar el caudal de conocimientos culturales de los estudiantes desde la enseñanza de las Matemáticas, pues en los ejemplos que se proponen se abordaron pinceladas culturales de personajes históricos, de obras de arte y de acontecimientos importantes en la historia de la humanidad. En la solución de los problemas se utilizan métodos gráficos y aritméticos, que fomentan el ingenio en los estudiantes; aspectos que permitieron aumentar su motivación en la búsqueda de elementos de cultura general que son muy importantes para su formación integral. Del mismo modo, pudieron ver la resolución de problemas desde un punto de vista más integral, utilizando varias vías de solución.

Referencias

- [1] BALLESTER, S., *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, México: Universidad autónoma de Sinaloa, 1995.
- [2] BARREL, J., *El aprendizaje basado en problemas. Un enfoque investigativo*, Buenos Aires: Manantial, 1999.
- [3] CAMPISTROUS, L. y RIZO, C., *Aprende a resolver problemas aritméticos*, La Habana: Pueblo y Educación, 1996.
- [4] CAPOTE, M., *La etapa de orientación en la resolución de problemas aritméticos*, La Habana: Avances, 2002.
- [5] CÓRDOVA, M. D., *La estimulación intelectual en situaciones de aprendizaje*, La Habana: Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, 1997.
- [6] CRUZ, M., *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática*, Holguín: Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, 2002.
- [7] GONZÁLEZ, D., *La superación de los maestros primarios en la formulación de problemas matemáticos*, La Habana: Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, 2001.
- [8] GUZMÁN, M., *Juegos matemáticos en la enseñanza*, España: Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton», 1984.
- [9] LABARRERE, A., *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*, La Habana: Pueblo y Educación, 1988.
- [10] POLYA, G., *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas, 1976.
- [11] QUEVEDO, D., *La solución de problemas en el Área de Ciencias Exactas de la Secundaria Básica*, La Habana: UCP Enrique José Varona, 2004.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Eduardo Miguel Pérez Almarales

Correo electrónico: empalmarales@gmail.com

Institución: Universidad de Granma, Cuba; Centro Provincial de Entrenamiento para Olimpíadas en Granma.

Nombre: Edel Ernesto Pérez Almarales

Correo electrónico: edelpa@ipvce.gr.rimed.cu

Institución: Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas Silberto Álvarez Aroche, Granma, Cuba.

Nombre: Miguel Oscar Almarales Milán

Correo electrónico: malmaralesmilan@gmail.com

Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Inés María Lago Guerrero

Correo electrónico: imlagoguerrero@gmail.com

Institución: Secundaria Básica Urbana Manuel Hernández Osorio, Granma, Cuba.

Experiencias Docentes

El uso de las proyecciones en la resolución de problemas de geometría del espacio

The projections in the solving problems of space geometry

Eduardo Miguel Pérez Almarales
Miguel Oscar Almarales Milán
Edel Ernesto Pérez Almarales
Inés María Lago Guerrero

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 065–085, ISSN 2174-0410
Recepción: 3 Mar'20; Aceptación: 25 Abr'20

1 de octubre de 2020

Resumen

Muchas veces en la práctica educativa los estudiantes cubanos presentan dificultades en la resolución de problemas de Geometría del Espacio. En ocasiones esto se debe a la limitada imaginación espacial que poseen, sin embargo, la inmensa mayoría de los problemas que se presentan en la Educación Preuniversitaria se facilitan si se proyecta la figura sobre los planos horizontal y vertical. En el presente artículo se pretende mostrar un procedimiento para resolver problemas de cálculo de cuerpos utilizando sus proyecciones, lo cual permite, además, que los estudiantes profundicen en elementos básicos de Geometría Plana.

Palabras Clave: Problema, Cálculo de cuerpos, Proyecciones

Abstract

Many times in the educational practice the Cuban student present difficulties in the resolution of problems of Space Geometry. Sometimes this is due to the limited spatial imagination that they have, however, the immense majority of the problems that occur in Pre-university Education are facilitated if the figure is projected on the horizontal and vertical planes. In this article we try to show a procedure to solve problems of calculation of bodies using their projections, which also allows students to delve into basic elements of Plane Geometry.

Keywords: Problems, Spatial calculation, Projections

1. Introducción

Los estudiantes, como individuos de la sociedad, se desarrollan en un entorno cargado de figuras geométricas, tanto planas como espaciales. Es por ello que resulta de suma importancia realizar en la escuela un adecuado trabajo con la geometría y los vínculos concretos de todas sus ramas. Los conocimientos geométricos básicos que adquiere el estudiante le permitirán orientarse adecuadamente en su contexto.

Según Rojas (2009):

para representar cuerpos geométricos en el plano se utilizan las proyecciones en perspectiva paralela y caballera, así como representaciones isométrica, ortogonal y ortogonal codificada. En la escuela se utiliza con mayor frecuencia la perspectiva caballera. La representación de un cuerpo geométrico en el plano, así como su construcción en el espacio son dificultades que presentan los alumnos, debidas fundamentalmente a la deformación de los ángulos, lados y figuras, respecto al plano de la base, al representar dicho cuerpo en perspectiva caballera.

En el presente artículo se considera que es conveniente que los estudiantes aprendan a utilizar las proyecciones horizontal y vertical en función de resolver los problemas que se le presentan de cálculo de cuerpos geométricos.

Por otra parte, la Geometría está íntimamente relacionada con la resolución de problemas que en la práctica cotidiana se presentan, como es el caso de medir cierta longitud, diseñar un jardín, determinar el volumen de un cuerpo, construir una superficie con determinado ángulo de inclinación y calcular el área de una superficie determinada.

La geometría le ofrece la posibilidad al estudiante de desarrollar su imaginación espacial, del mismo modo en la práctica cotidiana se necesita en muchas ocasiones determinar representaciones bidimensionales de objetos espaciales, para entender la composición real de las figuras geométricas en el espacio. Del mismo modo permite formar estrategias de resolución de problemas y desarrollar habilidades básicas como: medir, observar y comparar.

El trabajo de resolución de problemas mediante proyecciones en planos horizontales y verticales les permitirá a los estudiantes que opten por carreras de ingeniería familiarizarse con situaciones a las que se enfrentarán durante el desarrollo de su práctica laboral. Además en muchas carreras universitarias como las ingenierías, arquitectura y diseño se recibe Geometría Proyectiva, cuyos elementos básicos se trabajan en el procedimiento de resolución de problemas de geometría del espacio que se presenta en la esta investigación.

En la matemática escolar generalmente no se dedica tiempo para proyectar las figuras geométricas en los planos horizontal y vertical, mientras que el tiempo dedicado a la representación en perspectiva caballera es muy limitado, por ello los estudiantes generalmente presentan mayores dificultades en este tipo de problemas.

2. Desarrollo

Según Ballester y otros (1992):

la imaginación geométrica espacial [...] es una representación ideal en la mente del hombre de cuerpos y relaciones geométricas en el espacio, tiene un sentido relativo con respecto a la situación objeto de estudio; no obstante, estas situaciones pueden ser muy variadas y se pueden crear muchas de ellas transformando y complicando las circunstancias.

Con la utilización de las proyecciones vertical y horizontal de los cuerpos geométricos es posible también contribuir al desarrollo de la imaginación en los estudiantes pues deben comprender

las figuras que realmente tienen a partir de la representación en perspectiva caballera que es como se le dan las figuras en los problemas que tiene que resolver.

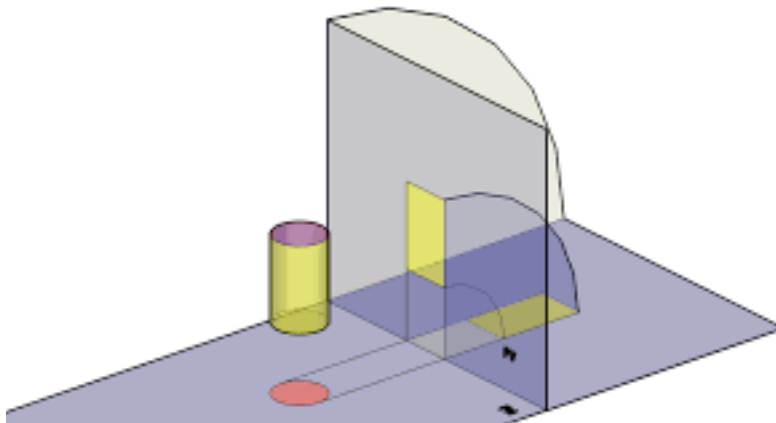
Para representar un cuerpo del espacio al plano existen varios tipos de proyección, en el presente procedimiento se utilizará la proyección ortogonal, en la cual las líneas visuales son perpendiculares al plano donde se plasmará la vista que se quiera formar y ellas son paralelas entre sí. En el procedimiento que se presenta se utilizan las proyecciones horizontales y verticales.

El presente artículo tiene como objetivo mostrar un procedimiento para resolver problemas de cálculo de cuerpos utilizando sus proyecciones ortogonales sobre planos horizontales o verticales. Con esto pueden aumentar su imaginación espacial, pues tienen que percatarse de qué se obtiene cuando la figura se proyecta en algún plano y además pueden usar en su solución elementos de Geometría plana que conocen con anterioridad.

Si proyectamos un cilindro circular recto sobre un plano vertical obtenemos un rectángulo cuyos lados son el diámetro de la base del cilindro y su altura, mientras que en el plano horizontal obtenemos un círculo. Si se proyecta bajo las mismas condiciones a un Prisma Recto, cualquiera sea el tipo de base se proyectaría verticalmente como un rectángulo, mientras que la proyección horizontal sería un polígono idénticamente igual al de la base del prisma. De la misma manera en el caso del cono circular rectos su proyección vertical será un triángulo isósceles cuya longitud de la base es el diámetro de la circunferencia base y su altura coincidente también con la altura del cono, mientras que la proyección horizontal es un círculo igual al de la base del cono. Por su parte de manera análoga en la pirámide recta en el plano vertical se proyecta como un triángulo isósceles y en el horizontal un polígono igual a su base y en el caso de la esfera se proyecta como un círculo en los dos planos. En el caso de que la base sea elíptica la proyección en el plano vertical es entonces una elipse igual a la de la base.

Por su parte, un cilindro circular oblicuo se proyecta sobre un plano vertical como un paralelogramo, donde uno de sus lados es el diámetro de la base del cilindro y el otro la arista lateral. Si se proyecta bajo las mismas condiciones a un Prisma oblicuo, cualquiera sea el tipo de base se proyectaría verticalmente como un paralelogramo. De la misma manera en el caso del cono circular oblicuo su proyección vertical será un triángulo no isósceles, siempre que la longitud de las dos aristas laterales sean diferentes de diámetro de la base. Por su parte de manera análoga en la pirámide oblicua en el plano vertical se proyecta como un triángulo no isósceles, al igual que en el cono siempre que las dos aristas laterales en la proyección sean diferentes de la proyección de la base. En este caso la proyección sobre el plano base hay que analizarla casuísticamente.

Como muestra aparece a continuación las proyecciones de un cilindro circular recto.



Note que si los cuerpos son oblicuos las proyecciones del cilindro y el prisma serían para-

lelogramos, mientras que las del cono y la pirámide serían triángulos que no son isósceles con respecto a las aristas laterales.

Veamos algunos elementos teóricos necesarios:

Según la Enciclopedia de todas las palabras matemáticas:

El principio de Cavalieri indica que si las áreas de las secciones representativas de dos sólidos son iguales, y la altura de los dos sólidos es igual, después los volúmenes de los dos sólidos son iguales.

Es por ello que:

- $V_{prisma\ recto} = V_{prisma\ oblicuo} = A_{base} \cdot h$
Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{cilindro\ recto} = V_{cilindro\ oblicuo} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{piramide\ recta} = V_{piramide\ oblicua} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$
Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura
- $V_{cono\ recto} = V_{cono\ oblicuo} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Si los dos cuerpos tienen igual base e igual altura

El volumen del prisma oblicuo también se puede determinar como:

$$V = \text{area de la sección recta} \cdot \text{arista lateral} = A_{SR} \cdot a$$

Según Universo Formulas:

El área del prisma oblicuo se calcula de manera diferente a la del prisma recto. Las áreas de las bases se calculan de la misma forma, pero el área de los laterales se calcula mediante una arista lateral y el perímetro de la sección recta del prisma. La sección recta es la intersección de un plano con el prisma, de manera que forme un ángulo de 90° con cada una de las aristas laterales.

Entonces el área del prisma recto sería:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{lateral} = \text{Permetro de la base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h$$

La principal diferencia entre el cálculo de área de un prisma oblicuo y uno recto es el cálculo de su área lateral, que en el primero sería:

$$A_{lateral} = \text{Permetro de la sección recta} \cdot \text{arista lateral} = P_{SR} \cdot a$$

Según Universo Formulas:

Cilindro oblicuo de base elíptica: El ángulo entre el eje y las bases no es un ángulo recto. La superficie lateral es una superficie cilíndrica de revolución, la sección recta (perpendicular) al eje es un círculo y las bases son elipses.

Cilindro oblicuo de base circular: El ángulo entre el eje y las bases no es un ángulo recto. La sección recta (perpendicular) al eje es una elipse y las bases son círculos. En este caso, la superficie lateral es una superficie reglada que se denomina superficie cilíndrica de no revolución en la que no existe un eje que equidiste de las posiciones de la generatriz.

El área lateral de un cilindro circular recto se calcula como:

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$$

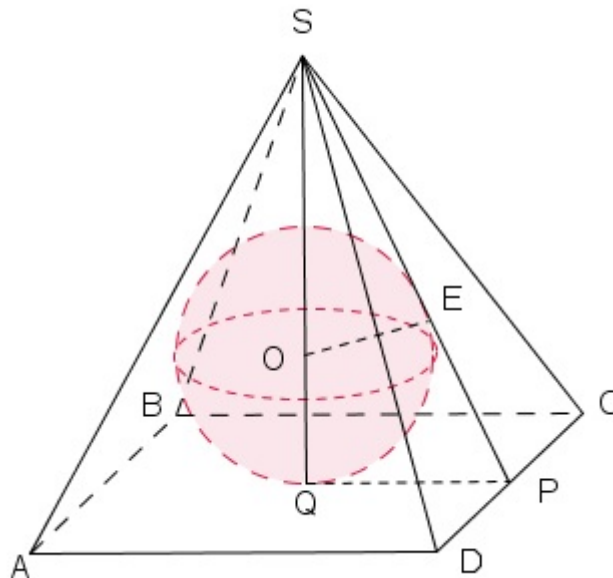
Por su parte si el cilindro es elíptico oblicuo, se calcula como:

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot g$$

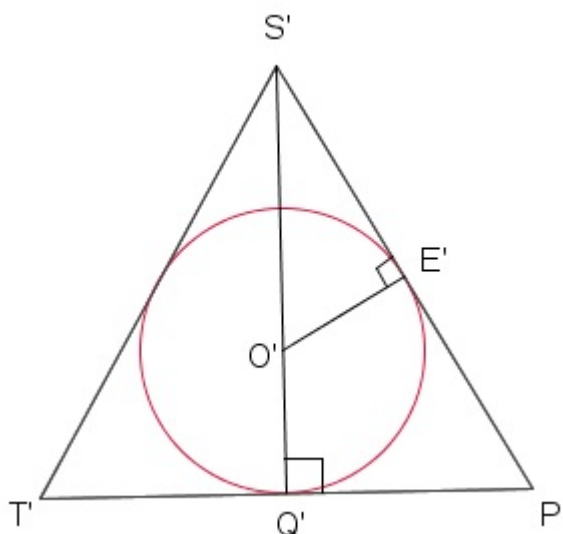
donde r es el radio de la región recta y g es la generatriz

Veamos ahora algunos ejemplos de cómo utilizar estas proyecciones: Empezaremos por este problema porque fue el que nos motivó a utilizar el método de proyecciones.

1. Sea $SABCD$ un pirámide de base cuadrada, la altura de la cara lateral SDC forma con su proyección sobre el plano horizontal y el $\angle SPQ = 60^\circ$. En la pirámide está inscrita una esfera de centro O y volumen $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$. Se traza perpendicular a la cara SDC de tal manera que el punto E pertenece a la altura de esta cara. La altura de la pirámide forma con el $\angle SOE = 60^\circ$. Halle el volumen de la pirámide. (Prueba de Ingreso a la Educación Superior en Cuba. Curso 1996 – 1997 (Segunda convocatoria))



Solución: En este caso nos percatamos que como las caras laterales son triángulos isósceles, P es el punto medio de CD por ser SP altura de la cara, además Q es el centro del cuadrado y el $\angle SOE = 60^\circ$, es por ello que al proyectar la figura sobre un plano vertical, o lo que es lo mismo al cortar la figura por un plano que pase por S, P, Q se obtiene un triángulo equilátero con una circunferencia inscrita, como se muestra en la figura:



Lo que quiero es calcular el volumen de la pirámide, para ello como tengo el volumen de la esfera puedo determinar el radio, en este caso sería $r = 2 \text{ cm}$, luego por la relación entre el radio de la circunferencia inscrita y la altura del triángulo tenemos que $h = 3r = 6 \text{ cm}$, que sería la altura de la pirámide, de la misma forma el lado del triángulo sería el lado del cuadrado base y por ello por la fórmula para la altura de un triángulo equilátero $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$, entonces el lado es $l = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}}$, esto podemos racionalizarlo, pero como lo que necesitamos es el área del cuadrado que es el cuadrado del lado, entonces:

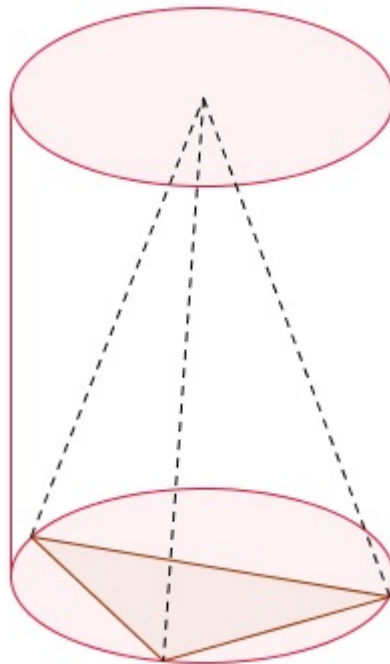
$$A = l^2 = \frac{4 \cdot h^2}{3} = \frac{4 \cdot 36}{3} = 48 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto el volumen de la pirámide se calcula como:

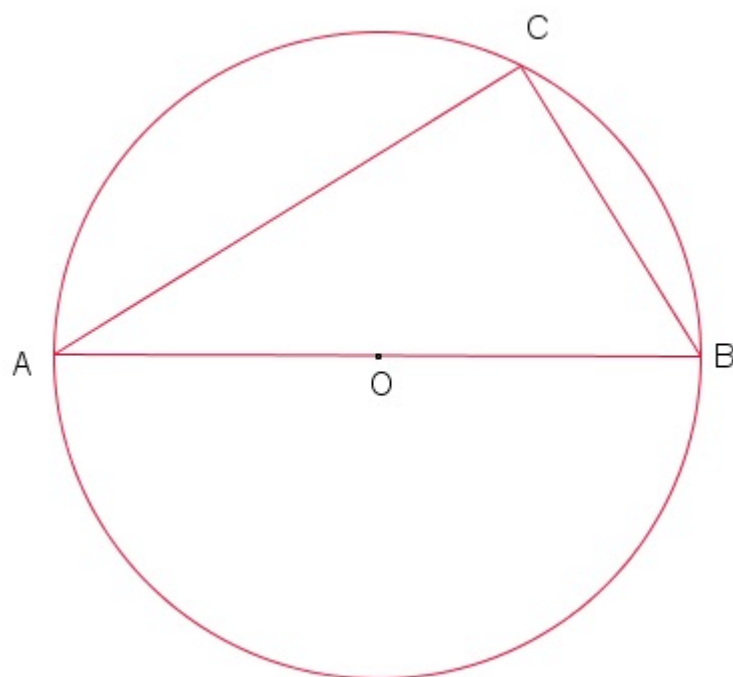
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3$$

Nota: Como puede apreciarse hay algunos datos que no son necesarios usando esta vía.

2. En el interior de un cilindro circular recto se encuentra una pirámide cuya base está inscrita en la base del cilindro, como se muestra en la figura. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo de catetos $8,0 \text{ cm}$ y $6,0 \text{ cm}$. Si el volumen de la pirámide es igual a 80 cm^3 y su altura es igual a la del cilindro, halla el volumen del cilindro. (Prueba de Ingreso a la Educación Superior en Cuba. Curso 1991 – 1992 (Primera Convocatoria)).



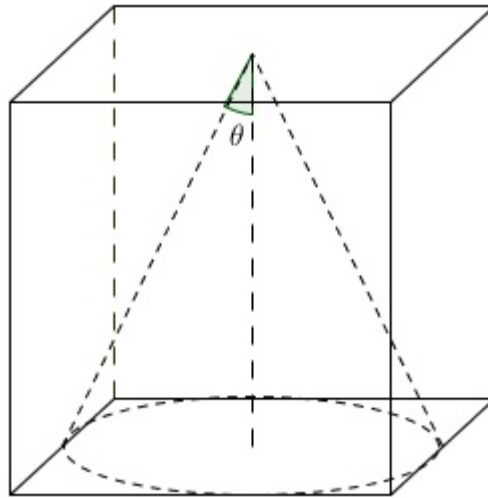
Solución: En este ejercicio conocemos la altura del cilindro, por ser la misma que la de la pirámide, por ello es necesario determinar la altura de la pirámide dado su volumen, puesto que su área de la base es 24 cm^2 , entonces la altura sería 10 cm . Ahora sólo resta buscar el área de la base del cilindro, para ello proyectemos la figura sobre la base:



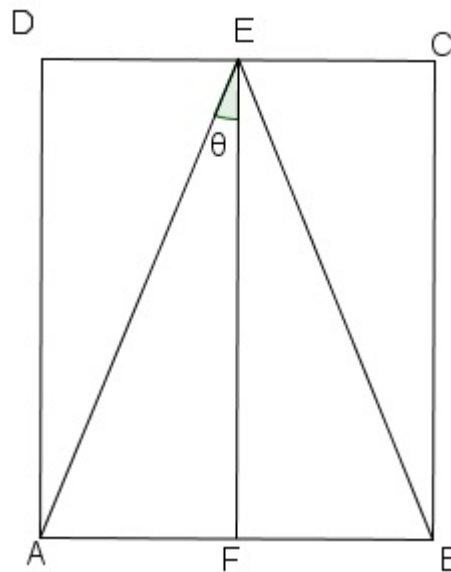
En este caso usando directamente el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo en C , ABC , por estar el ángulo ACB inscrito en la semicircunferencia. De aquí podemos determinar que $AB = 10 \text{ cm.}$, y por ende el radio de la base es $5,0 \text{ cm.}$, por ello el volumen del cilindro se calcula como:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi \text{ cm}^3$$

3. En la figura se tiene un prisma recto de base cuadrada en el cual se ha inscrito un cono. El área total del prisma es 112 dm^2 y el ángulo que forma la generatriz del cono con la altura es $\theta = 21,8^\circ$. Calcule el volumen del cono.



Solución: Proyectemos sobre un plano vertical paralelo a la cara que está de frente. Entonces:



Sea $\theta = \angle AEF$, podemos ver AF es el radio de la base del cono y EF es la altura del cono y el

prisma, usando razones trigonométricas tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{AF}{EF}$$

Entonces

$$\tan 21,8^\circ = \frac{AF}{EF}$$

$$0,4 = \frac{AF}{EF}$$

Por tanto:

$$AF = \frac{2}{5} \cdot EF$$

$$AB = 2 \cdot AF$$

Entonces el perímetro de la base es $8AF$ y la altura EF , luego el área lateral es $8AF \cdot EF$, y el área de la base es:

$$(2AF)^2 = 4AF^2$$

Por lo tanto el área total se calcula como:

$$8AF(AF + EF) = 8AF \left(AF + \frac{5}{2}AF \right) = 8AF \left(\frac{7}{2}AF \right) = 28 \cdot AF^2$$

Entonces:

$$28 \cdot AF^2 = 112$$

$$AF^2 = 4$$

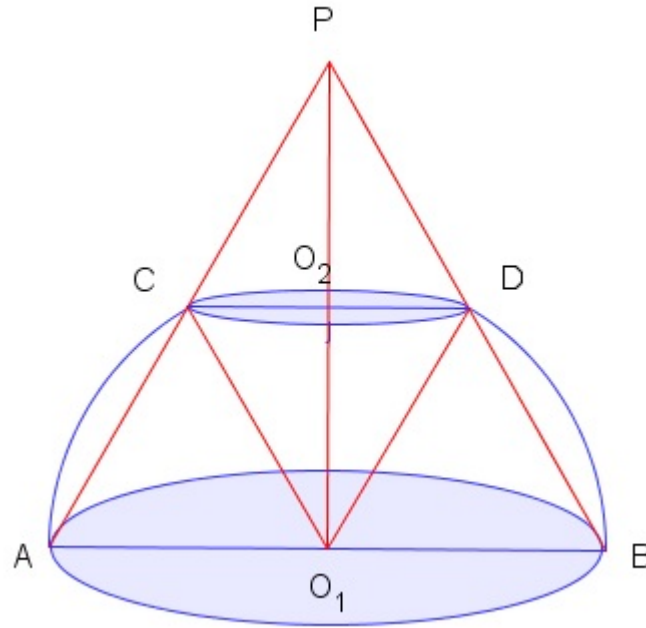
$$AF = 2 \text{ dm}$$

Por tanto el radio de la base del cono es 2 dm y la altura del mismo es 5 dm , entonces el volumen del cono se puede calcular como:

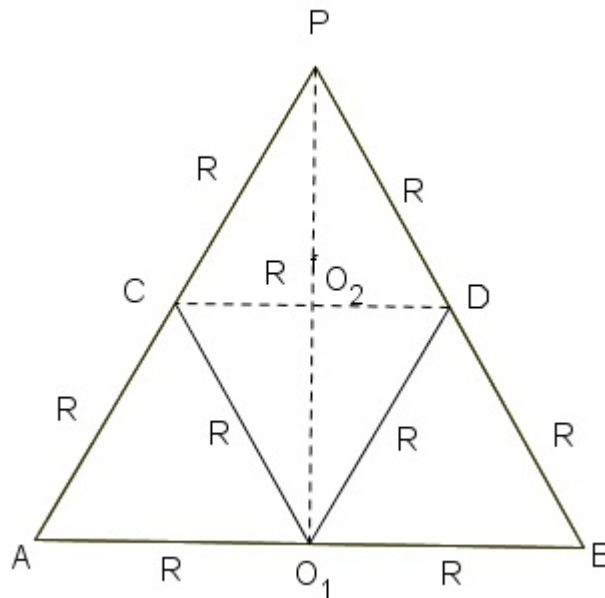
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \text{ dm}^2 \cdot 5 \text{ dm} = \frac{20}{3} \pi \text{ dm}^3$$

4. Se tiene una semiesfera de diámetro \overline{AB} y centro O_1 . Se corta un casquete superior de la semiesfera por un plano paralelo a la base. El plano determina, sobre la semiesfera, un círculo de centro O_2 y diámetro \overline{CD} . Tomando como base el círculo de centro en O_2 , se construyen dos conos: uno de vértice en O_1 y el otro de vértice $P = AC \cap BD$. El círculo que tiene centro en O_1 y diámetro \overline{AB} tiene un área de $100\pi \text{ m}^2$ y se conoce, además, que $\angle O_2O_1D = 30^\circ$. Calcula el volumen del cono con vértice en O_1 y la altura $\overline{PO_2}$



Solución: Si proyectamos la figura en un plano vertical tenemos:



Con las condiciones del ejercicio se tiene que el triángulo ABP es equilátero, por ello los triángulos ACO_1, BDO_1, CDP, CDO_1 , también son equiláteros, es por ello que todos los segmentos representados en la figura se denotan por R .

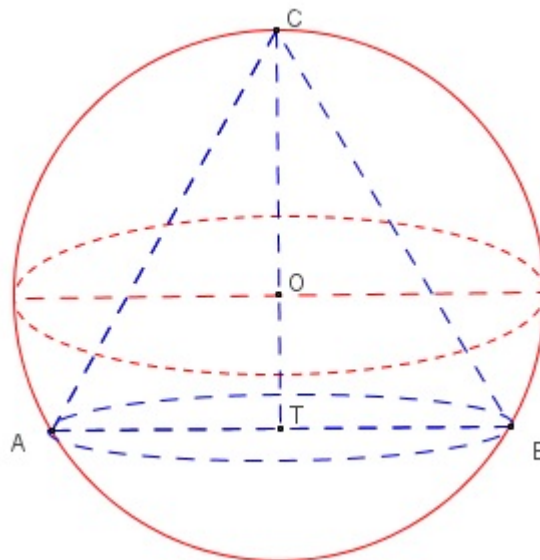
Para buscar el volumen que necesitamos tenemos que su altura es $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R$ y su radio $\frac{R}{2}$, pero como tenemos que $R = 5 \text{ cm}$, por ser el área del círculo 314, entonces el volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

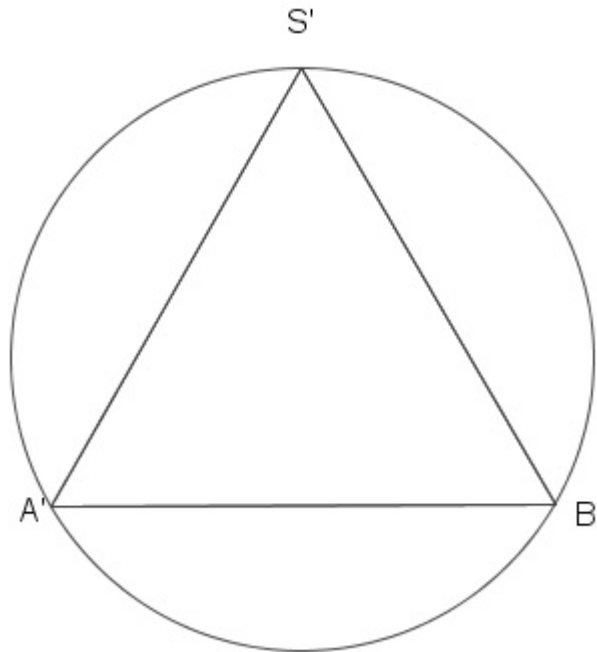
$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{24}\pi\text{cm}^3$$

La altura del otro cono coincide con la ya calculada, puesto que son dos triángulos equiláteros iguales.

5. En la figura se muestra una esfera de área $36\pi\text{cm}^2$, con un cono circular recto inscrito en ella, del cual se sabe que su altura y su generatriz forman un ángulo de 30° . Demuestra que los valores numéricos del volumen y del área total del cono coinciden.



Solución: Si realizamos una proyección sobre un plano vertical de la figura, se obtiene un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.



Como $A_{Esfera} = 4\pi r^2$, entonces sustituyendo y despejando tenemos que $r = 3 \text{ cm}$. Por la relación existente entre el radio de la circunferencia circunscrita y la altura del triángulo equilátero, tenemos que $r = \frac{2}{3}h$ y por lo tanto $h = \frac{9}{2} \text{ cm}$, por lo que, como $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$, se tiene que $l = 3\sqrt{3} \text{ cm}$, entonces el radio de la base del cono es la mitad del lado, es decir $r_{cono} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} \cdot \pi \text{ cm}^3$$

$$A_L = \pi \cdot r_{cono} \cdot g = \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{2} \pi \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi \cdot r_{cono}^2 = \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} \pi \text{ cm}^2$$

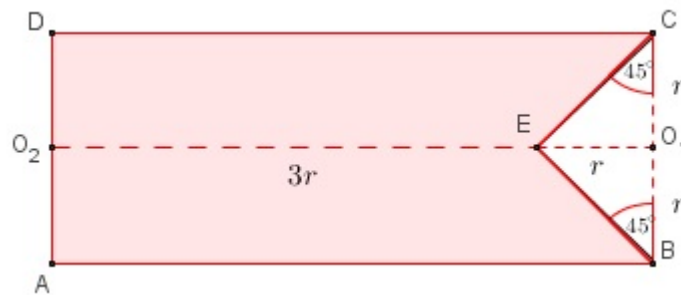
$$A_T = A_L + A_B = \frac{27}{2} \pi + \frac{27}{4} \pi = \frac{81}{4} \pi \text{ cm}^2$$

6. El cuerpo que se muestra una pieza metálica formado por un cilindro circular recto, al que se le ha practicado una perforación en forma de cono circular recto, coincidiendo una de las bases en ambos cuerpos. Se conoce que la longitud del radio base es 5 cm , la de la altura del cono es la cuarta parte de la de la altura del cilindro. Se conoce, además, que las aristas laterales del cono forman un ángulo de 45° con el radio de la circunferencia. Se quiere pintar para su protección, ¿qué superficie total se necesita pintar?



Solución:

Proyectemos sobre un plano horizontal la figura, con lo cual se obtiene:



Necesitamos buscar el área total de la pieza, que se calcula como:

$$A_{total} = A_{lateral\ del\ cilindro} + A_{lateral\ del\ cono} + A_{base}$$

Calculemos los elementos Sabemos que como el ángulo que forman la generatriz del cono con el radio de la base es 45° , entonces la altura del cono coincide con el radio. Además, como la altura del cono es la cuarta parte de la de la altura del cilindro, entonces la altura del cilindro es 4 veces el radio. Entonces la altura del cono es 5 cm y la del cilindro es 20 cm .

$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20$$

$$A_{lateral\ del\ cilindro} = 200\pi\text{ cm}^2$$

$$A_{lateral\ del\ cono} = \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{lateral\ del\ cono} = \pi \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2}$$

$$A_{lateral\ del\ cono} = 25\pi\sqrt{2}\text{ cm}^2$$

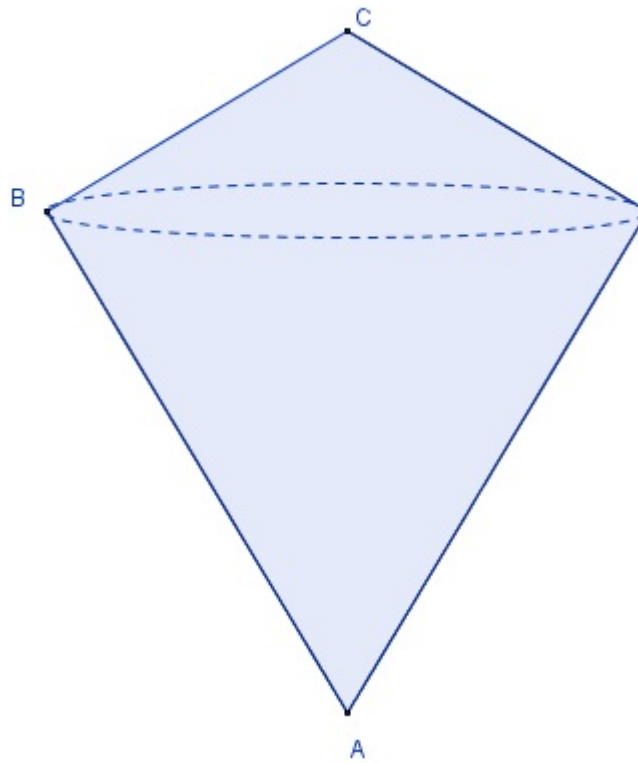
$$A_{base} = \pi \cdot r^2$$

$$A_{base} = 25\pi\text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 200\pi + 25\pi\sqrt{2} + 25\pi = 25\pi(9 + \sqrt{2})\text{ cm}^2$$

R: Se necesitan pintar $25\pi(9 + \sqrt{2})\text{ cm}^2$

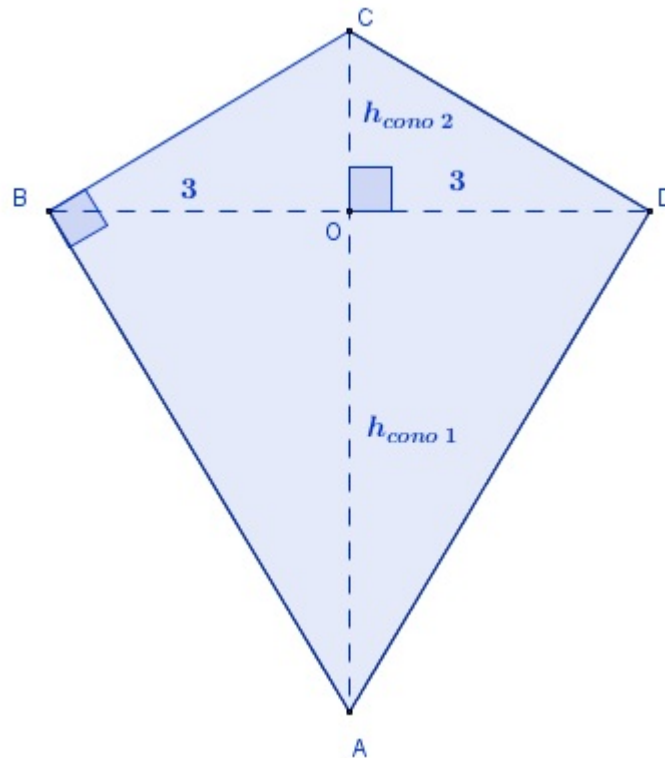
7. La figura muestra un tanque para el almacenamiento de agua formado por dos conos conectados por su base elíptica de 3 m de semieje principal y 4 m de eje secundario. Se conoce, además, que el volumen del cono inferior es $10\pi\text{ m}^3$ y que las generatrices \overline{AB} y \overline{BC} son perpendiculares. ¿Cuántos litros de agua pueden almacenar?



(Transformado de ¿Cómo estás en Matemática? Prueba 21)

Solución:

Proyectemos sobre un plano vertical la figura, con lo cual se obtiene:



Necesitamos buscar el volumen total de la pieza, que se calcula como:

$$V_{total} = V_{cono\ 1} + V_{cono\ 2}$$

Como conocemos el volumen del cono 1, solo necesitamos calcular el volumen del cono 2. Para calcular esto sabemos que el volumen se calcula como:

$$V_{cono\ 2} = \frac{1}{3} (a \cdot b \cdot \pi \cdot h_{cono\ 2})$$

Siendo a y b los semiejes principal y secundario, respectivamente, de la elipse de centro O

Busquemos primeramente la altura del cono 1:

$$V_{cono\ 1} = \frac{1}{3} (a \cdot b \cdot \pi \cdot h_{cono\ 1})$$

$$10\pi = \frac{1}{3} (3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot h_{cono\ 1})$$

$$h_{cono\ 1} = 5$$

Por el teorema de las alturas en el triángulo ABC se cumple que:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{CO}$$

$$\overline{CO} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{AO}}$$

$$\overline{CO} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$V_{cono\ 2} = \frac{1}{3} \left(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{9}{5} \right)$$

$$V_{cono\ 2} = \frac{18}{5} \cdot \pi\ m^3$$

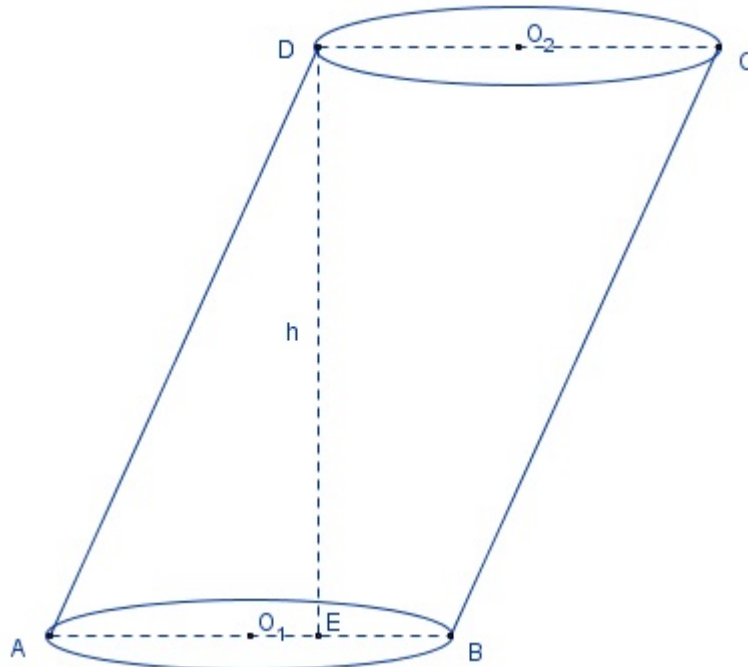
$$V_{total} = 10\pi + \frac{18}{5} \cdot \pi = \frac{68}{5} \cdot \pi$$

Aquí hay que tener presente que nos piden la cantidad de litros y que $1\ litro = 1\ dm^3$, por tanto hay que convertir los metros cúbicos a decímetros cúbicos, que en este caso sería:

$$V_{total} = \frac{68}{5} \cdot \pi\ m^3 = 1000 \cdot \frac{68}{5} \cdot \pi\ dm^3 = 13600\pi\ litros$$

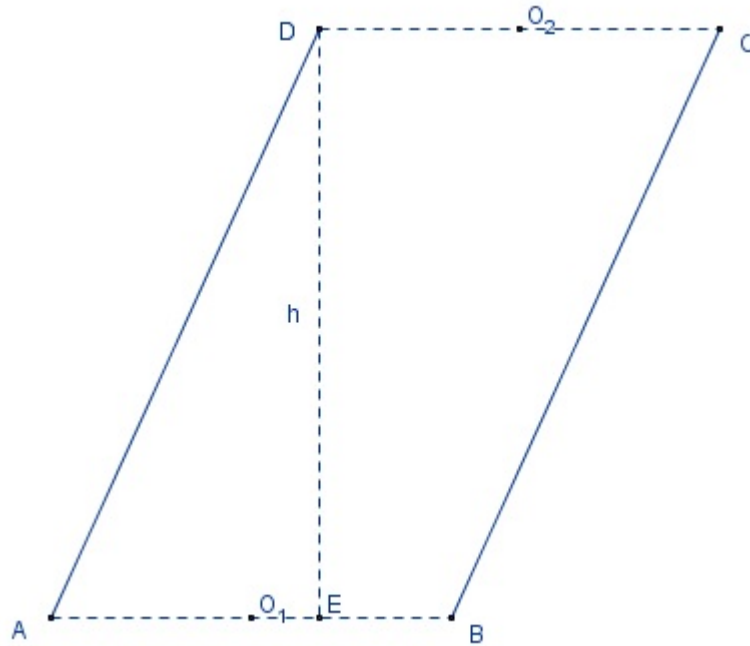
R: Puede almacenar 13600π litros

8. En la figura se muestra un cilindro circular oblicuo del cual se conoce que la longitud de la circunferencia base es $10\pi\ cm$, la arista \overline{AD} forma un ángulo de 60° con el plano de la base y la proyección ortogonal E del punto D sobre el diámetro \overline{AB} cumple que $\frac{O_1E}{EB} = \frac{1}{3}$. Determina el volumen del cilindro.



Solución:

La proyección de la figura sobre un plano vertical sería:



A partir de la longitud de la circunferencia es sencillo buscar la longitud del radio:

$$L_c = 2\pi \cdot r$$

$$10\pi = 2\pi \cdot r$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Por la relación que se da se puede determinar la longitud de \overline{AE} , que en este caso sería:

$$\overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

Como el triángulo ADE es rectángulo en E, se cumple que:

$$\overline{DE} = \overline{AE} \cdot \tan 60^\circ$$

$$\overline{DE} = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Sabemos que por el Principio de Cavalieri el volumen del cilindro circular oblicuo coincide con el del cilindro circular recto, tenemos que:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

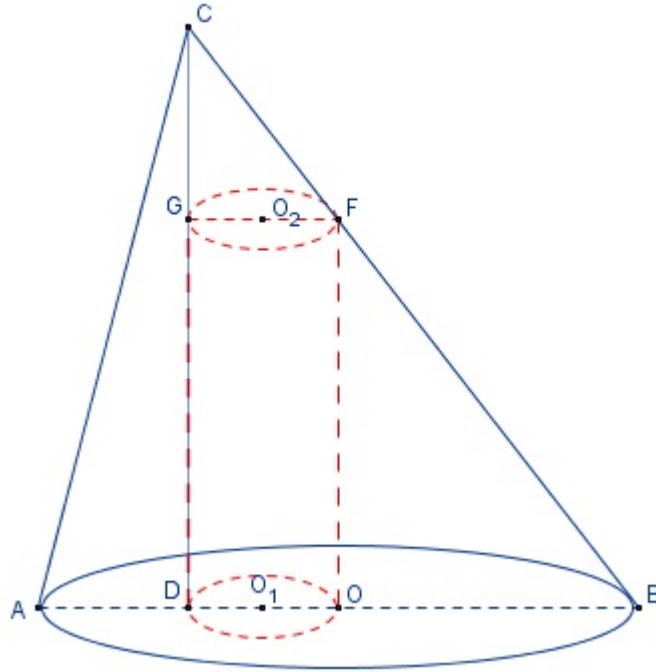
$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \frac{500\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$$

9. En la figura se muestra una pieza en forma de cono circular oblicuo al cuál se le a realizado una perforación en forma de cilindro circular recto. Se sabe que la altura del cono tiene como pie el punto medio del radio \overline{OA} , la longitud de la generatriz \overline{AC} es la misma que la del diámetro

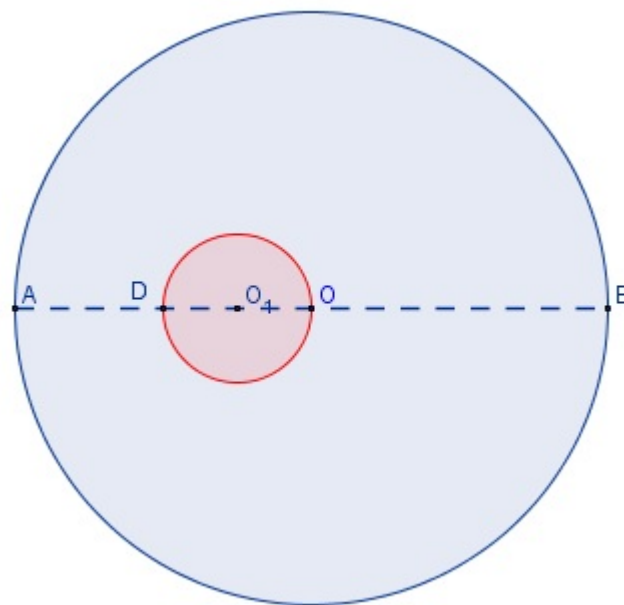
de la base del cono y que la base después de la perforación tiene un área de $15\pi \text{ cm}^2$. Determina el volumen del cuerpo resultante.

a) Si se quiere cubrir con un material anticorrosivo especial el interior de la perforación, ¿qué cantidad de material se necesita?



Solución:

Proyectemos la figura sobre un plano horizontal:



Podemos percatarnos que el área que nos dan es la diferencia de las áreas de los dos círculos que se muestran en la figura anterior, es por ello que con esto podemos calcular los radios de las bases de los dos cuerpos geométricos como sigue:

$$\pi \cdot r^2 - \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = 15\pi$$

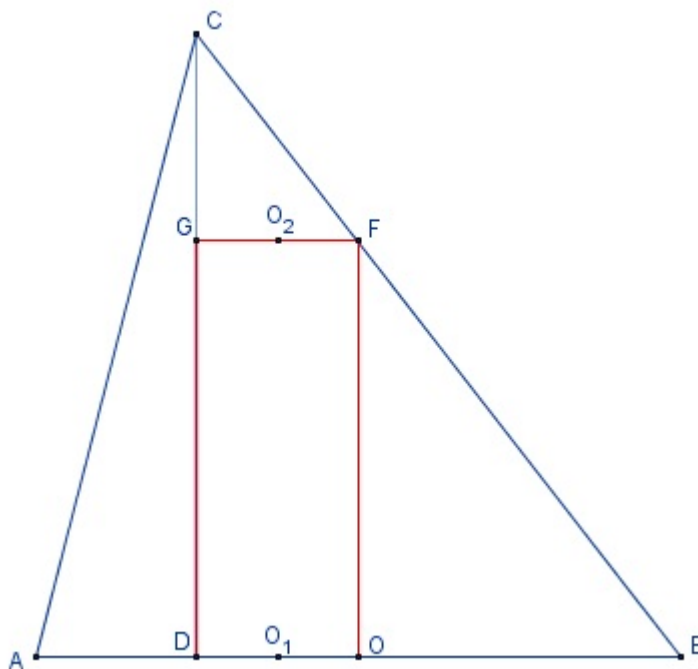
$$r^2 - \frac{r^2}{16} = 15$$

$$\frac{15r^2}{16} = 15$$

$$r^2 = \frac{15 \cdot 16}{15}$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

Proyectemos la figura ahora sobre un plano vertical:



Ahora necesitamos determinar las alturas de los dos cuerpos geométricos, para ello debemos tener presente que $\overline{AC} = 8$, $\overline{AD} = 2$, entonces por el teorema de Pitágoras en el triángulo ACD :

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$$

$$\overline{CD}^2 = 8^2 - 2^2 = 60$$

$$\overline{CD} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

Para determinar la otra altura como $\overline{CD} \parallel \overline{OF}$ podemos aplicar el teorema de las transversales o la proporcionalidad de los triángulos semejantes BCD y BOF para llegar a:

$$\frac{CD}{OF} = \frac{BD}{OB}$$

$$\frac{CD}{OF} = \frac{\frac{3r}{2}}{r} = \frac{3}{2}$$

Entonces podemos calcular la longitud de \overline{OF} :

$$\overline{OF} = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{15} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

Calculemos ahora el volumen del cuerpo resultante: $V = V_{cono} - V_{cilindro}$ Por el Principio de Cavalieri el volumen del cono oblicuo es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} A_B \cdot h_{cono}$$

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{32}{3} \sqrt{15} \text{ cm}^3$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot (r_{cilindro})^2 \cdot h_{cilindro}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{32}{3} \sqrt{15} - \pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3} = \frac{32 - 4\pi}{3} \sqrt{15} \text{ cm}^3$$

En el inciso a, el área que se quiere se calcula como:

$$A = 2\pi \cdot r_{cilindro} \cdot h_{cilindro} + \pi \cdot (r_{cilindro})^2$$

$$A = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3} + \pi = \left(\frac{8\sqrt{15}}{3} + 1 \right) \pi \text{ cm}^2$$

R: Se necesitan $\left(\frac{8\sqrt{15}}{3} + 1 \right) \pi \text{ cm}^2$ de material.

3. Resultados

La investigación que se presenta fue aplicada experimentalmente a 157 estudiantes de la Educación Secundaria Básica y a 504 de la Educación Preuniversitaria que sirvieron de muestra. Del mismo modo se utilizaron 3 profesores de Secundaria Básica y 8 de Preuniversitaria. El estudio comparativo se desarrolló con el curso escolar anterior y se alcanzaron los siguientes resultados:

	Matrícula	Aprobados 2017-2018	%	Aprobados 2018-2019	%
Secundaria Básica	157	59	37,58	143	91,08
Preuniversitaria	504	187	37,10	452	93,65
total	661	246	37,22	615	93,04

En visita a las actividades desarrolladas se pudo comprobar que la visión espacial de los estudiantes fue mejorando y con ello los resultados se fueron incrementando paulatinamente. Hay que destacar que de los contenidos evaluados en exámenes, este era el que más dificultades presentaba en estas escuelas.

En entrevista individual con los 11 profesores participantes se pudo comprobar que estaban muy complacidos con la aplicación del método, pues le facilitaba su trabajo y la motivación de sus estudiantes por desarrollar las actividades propuestas.

A pesar del trabajo experimental haberlo realizado en estas dos escuelas, esta experiencia fue aplicada en todas las escuelas de la provincia con resultados satisfactorios.

4. Conclusiones

Con la utilización del método propuesto se logró que los estudiantes de las Enseñanzas Secundaria y Preuniversitaria en Granma lograran mejores resultados en el cálculo de área y volumen de cuerpos geométricos y alcanzaran una mayor imaginación espacial al poder representar en sus situaciones reales cuerpos a partir de su representación en perspectiva caballera. Se evidenció que es un método aplicable que en muchas ocasiones facilita el trabajo de los estudiantes.

Referencias

- [1] BALLESTER PEDROSO, S. et al, *Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo II*, Pueblo y educación, La Habana, Cuba, 1992
- [2] ENCICLOPEDIA DE TODAS LAS PALABRAS MATEMÁTICAS, *Principio de Cavalieri*, <http://www.allmathwords.org/es/c/cavalierisprinciple.html>
- [3] HERNÁNDEZ ÁVALOS, J. *¿Cómo estás en Matemática?*, Pueblo y educación, La Habana, Cuba, 2004
- [4] ROJAS VELÁZQUEZ, O., *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador*, Repositorio de tesis Universidad de Holguín, Cuba, 2009
- [5] UNIVERSO FORMULAS, *Área del Prisma*, <https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/prisma/>

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Eduardo Miguel Pérez Almarales

Correo electrónico: empalmarales@gmail.com

Institución: Universidad de Granma, Cuba; Centro Provincial de Entrenamiento para Olimpíadas en Granma.

Nombre: Miguel Oscar Almarales Milán

Correo electrónico: malmaralesmilan@gmail.com

Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Edel Ernesto Pérez Almarales

Correo electrónico: edelpa@ipvce.gr.rimed.cu

Institución: Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas Silberto Álvarez Aroche, Granma, Cuba.

Nombre: Inés María Lago Guerrero

Correo electrónico: imlagoguerrero@gmail.com

Institución: Secundaria Básica Urbana Manuel Hernández Osorio, Granma, Cuba.

Historias de Matemáticas

Antonia Ferrín Moreiras, maestra nacional, química, farmacéutica y matemática, un notable ejemplo para las mujeres actuales

Antonia Ferrín Moreiras, national teacher, chemist, pharmacist and mathematician, a remarkable example for today's women

Juan Núñez Valdés

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 087-107, ISSN 2174-0410

Recepción: 20 Feb'20; Aceptación: 28 Abr'20

1 de octubre de 2020

Resumen

Con el objetivo de presentar un referente destacado de mujer ante la sociedad, en virtud de los enormes méritos académicos que consiguió y de las dificultades de todo tipo, tanto económicas como de género que tuvo que superar para obtenerlos, se muestra la biografía de la orensana Antonia Ferrín Moreiras, licenciada y doctora en Matemáticas (Astronomía) y también maestra nacional y licenciada en Química y en Farmacia en la primera década del siglo pasado.

Palabras Clave: Mujeres referentes, licenciadas españolas, doctoras españolas, mujeres con varias licenciaturas, Antonia Ferrín Moreiras.

Abstract

With the aim of showing a remarkable reference of women to society, by virtue of the enormous academic merits that she achieved and the difficulties of all kinds, both economic and gender, that had to overcome to obtain them, the biography of Antonia Ferrín Moreiras is presented. This woman from Orense (Spain) was a graduate and Ph.D. in Mathematics (Astronomy) and also a graduate in Chemistry and Pharmacy in the first decade of the last century.

Keywords: Women of reference; Spanish graduates; Ph. D. Spanish women; women with several degrees; Antonia Ferrín Moreiras.

1. Introducción

En un chascarrillo matemático se cuenta que un hombre tenía miedo de viajar en avión por aquello de los secuestros aéreos. Consultando unas estadísticas, leyó que la probabilidad de que hubiese una bomba en su vuelo era una milésima, mientras que la probabilidad de que hubiese dos bombas era 1 entre una millonésima. Por lo tanto, a partir de entonces, decidió llevar él mismo una bomba cuando viajaba en avión.

Venga esta historietita a cuento por el hecho de que la probabilidad de encontrar una mujer española que hubiese cursado una carrera universitaria en las primeras décadas del siglo pasado es muy pequeña. La de encontrar a una mujer que hubiese cursado dos carreras universitarias es prácticamente ínfima. La de encontrar a una mujer que hubiese cursado tres carreras universitarias es todavía muchísimo menor y no digamos ya la de encontrar a una mujer que hubiese cursado tres carreras universitarias y además una titulación de menor rango en ese mismo período. Esa probabilidad sería cero con toda seguridad.

Y sin embargo, esto no es así, como lo atestigua el caso de la gallega Antonia Ferrín Moreiras, cuya biografía pasamos seguidamente a comentar, con el objetivo principal de mostrarla ante la sociedad como un referente para las demás mujeres y un ejemplo claro de mujer que no se rindió ante las dificultades, tanto económicas que padecía su familia, como sobre todo de género propias de la época, para llegar a poseer la titulación de Maestra Nacional, tres licenciaturas y un doctorado en la primera mitad del siglo pasado, época en la que a las mujeres les estaban vedados prácticamente los estudios en general y mucho más especialmente los universitarios, en particular.

El autor piensa que sacar a la luz esta biografía, al igual que pudiera hacerse con las de otras mujeres que también consiguieron superar este tipo de barreras a partir de su esfuerzo y tesón, puede suponer dar un primer paso para luchar contra las desigualdades de género, que aunque afortunadamente cada vez menos, aún siguen persistiendo en nuestra sociedad actual.

2. Antonia Ferrín Moreiras

Antonia Ferrín Moreiras nació en Orense el 13 de mayo de 1914, siendo la tercera hermana de una familia que disponía de pocos recursos económicos (su padre, Antonio, daba clases de Matemáticas de forma privada). No obstante, a pesar de esas dificultades económicas y sobre todo de las convenciones existentes en la época sobre la educación y formación de las mujeres, su padre siempre quiso que sus cuatro hijas, Celsa, María, Antonia y Pastora, pudieran tener estudios superiores, expectativa totalmente inusual para las mujeres en aquellos años (Liste y Pintos, 2010).

De hecho, la hermana mayor, Celsa, nacida también en Orense en 1908, aparece en el registro de inscripción del Instituto Provincial de Orense en 1919, donde permanece dos cursos y luego se traslada al Instituto de Santiago de Compostela, donde obtiene su título. Después, se matriculó en la Facultad de Filosofía y Letras en la Universidad de Santiago de Compostela en 1924, donde se graduó en 1929. Fue profesora de la Fundación Blanco y colaboró en las “Misiones Pedagógicas” en el equipo de Cee-Lires (Cid, 2011).

De las otras dos hermanas de Antonia, María y Pastora, no se tienen muchas referencias. Las dos aparecen, curiosamente precedidas de Antonia (en ese orden), en el Anexo 14 del libro

de Marco, Anxo y Porto (2000) como profesoras de la Escola Normal de Santiago de Compostela. María aparece como profesora de francés. De Pastora únicamente aparece el nombre. También, en el BOE nº 248 de 16 de octubre de 1959, en su página 13297, se indica que:

De conformidad con lo dispuesto en el artículo 5.º de la Orden de 22 de junio de 1959, por la que se abre un nuevo plazo de convocatoria para oposiciones a cátedras de «Francés» de Institutos Nacionales de Enseñanza Media, en relación con lo establecido en el artículo 7.º de la Orden ministerial de 13 de mayo de 1958 («Boletín Oficial del Estado» de 6 de junio), Esta Dirección General ha acordado hacer pública la lista definitiva de aspirantes admitidos y excluidos a las oposiciones mencionadas... Opositores excluidos: Doña María Ferrín Moreiras (por no hacer la declaración de que reúne todas y cada una de las condiciones que se exigen en la convocatoria). Puede subsanar la falta en el plazo de ocho días. Lo que se hace público para general conocimiento y efectos procedentes. Dios guarde a V. S. muchos años. Madrid. 25 de septiembre de 1959. El Director general, Lorenzo Vilas.

Como puede observarse por tanto, las tres hermanas primero, y posteriormente también la cuarta, Pastora, formaron parte de una familia que a pesar de las graves dificultades económicas que padecía, no tuvo prendas en sacrificarse y enviar a sus hijas a la educación superior en un momento en que las expectativas no seguían esta trayectoria, sino la de la vida doméstica. Afortunadamente, las cuatro hermanas cumplieron esos objetivos (véase Figura 1).



Figura 1. La madre de Antonia y sus cuatro hijas

Esta escasez de medios económicos para la subsistencia fue la razón de que la familia decidiera trasladarse en 1920 desde Orense a Santiago de Compostela, cuando la hija mayor, Antonia, tenía seis años (Montesinos, 2009).

Antonia empezó a ir al colegio con siete años y dos años después, a los nueve, ya estaba preparada para entrar en el instituto. Cursó en primer lugar el Bachillerato de Ciencias en el

Instituto General y Técnico de Santiago de Compostela y, posteriormente, estudió el bachillerato universitario en el Instituto Nacional de Secundaria Arcebispo Xelmírez (en la Figura 2), junto con doce niñas más.

En este punto es conveniente indicar que ese Instituto fue durante mucho tiempo el único centro de Educación Secundaria en Santiago de Compostela. Actualmente el centro es uno de los denominados institutos históricos de Galicia por poseer hoy en día un patrimonio histórico educativo muy rico y por la antigüedad de su fundación. El centro tiene más de 140 años, aunque a lo largo de su historia ha cambiado de localización en varias ocasiones: Pazo de San Xerome desde 1845 hasta 1847, plaza de Mazarelos desde 1847 hasta 1964 y San Cayetano desde 1965 hasta 1984. En el año 1985 fue finalmente inaugurado como sede central de la Xunta de Galicia por el entonces presidente Xerardo Fernández Albor y el Vicepresidente José Luis Barreiro Rivas. Entre las muchas personalidades que estudiaron en sus aulas figuran Manuel Martínez Murguía, Eugenio Montero Ríos, Miguel Gil Casares, Juan Armada y Losada y Ramón María del Valle Inclán (El Correo Gallego, Redacción 19 -07 – 2019).



Figura 2. Instituto Arcebispo Xelmírez, de Santiago de Compostela

En 1930, con 16 años, Antonia comenzó sus estudios superiores en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela (Figura 3), matriculándose en Química, la única especialidad que por aquel entonces existía en esa Universidad (Ríos, 2010).

Como los ingresos de su padre, a pesar de que este trabajase en la Facultad de Farmacia como profesor de Matemáticas no eran suficientes para cubrir las necesidades de la familia (disponía de “un producto medio de 2.500 pesetas, únicos recursos con que cuenta para cubrir las necesidades de la familia”, según consta en el expediente de Antonia en la Universidad de Santiago de Compostela), a Antonia se le concedió la matrícula gratuita y una serie de becas que le permitieron licenciarse en Química en mayo de 1935 (su primera licenciatura), en plena época de la II República, y obtener el título de Maestra Nacional (Liste y Pintos, 2010).



Figura 3. La Universidad de Santiago de Compostela

Nada más terminar su carrera de Química, Antonia empezó a trabajar, aunque sin recibir nada a cambio, pues sus primeros trabajos no estaban remunerados. Así, desde 1934 hasta 1936 trabajó como profesora ayudante en prácticas de las asignaturas de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela y como ayudante interina en el Departamento de Ciencias del Instituto Arcebispo Xelmírez de Santiago (en ambos casos de manera gratuita). Al mismo tiempo, empezó a estudiar la carrera de Farmacia y a realizar los dos únicos cursos de Ciencias Exactas que se impartían en esa universidad (Fernández y Docobo, 2014).

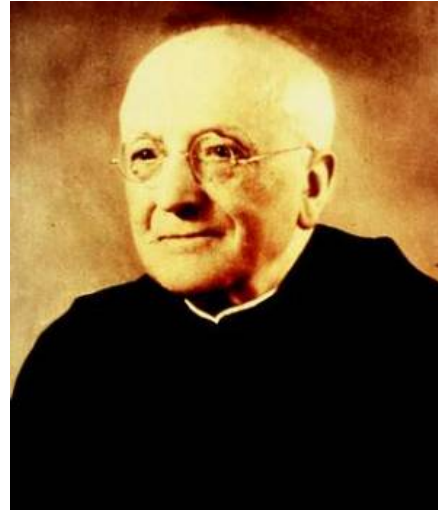
En 1937, se incorporó como profesora de Matemáticas en la escuela para niñas huérfanas Nuestra Señora de los Remedios, institución fundada casi 4 siglos antes, en 1547, en la que trabajó hasta 1948. Sin embargo, en ese mismo año de 1937, tras el estallido de la Guerra Civil, fue sancionada por su ideología política y le fue abierto un expediente de depuración por una denuncia anónima. Por esa razón fue apartada de la docencia en la Universidad junto con 45 profesores más, entre ellos: Enrique Rajoy Leloup, Fernando Calvet, Isidro Parga Condal y Francisco Fernández del Riego (Gurriarán, 2006) y (Liste y Pintos, 2010).

Una vez finalizada la Guerra su causa fue revisada, obteniendo la rehabilitación en 1940. Al serle cancelada su pena, se le permitió volver a ejercer, retomando sus clases en la Facultad de Ciencias, si bien no en el instituto, aunque en varias ocasiones volvió a impartir allí algunas clases hasta 1961.

Durante el curso 1939-1940 cursó las asignaturas que le faltaban para licenciarse en Farmacia (su segunda licenciatura), y a su vez conoció al profesor de Matemáticas Enrique Vidal Abascal (Figura 4), para quien trabajó primero como profesora asistente y después como profesora adjunta en la cátedra que este ocupaba en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela.

Vidal Abascal (Oviedo, 1908 – Santiago de Compostela, 1994), insigne matemático y pintor español, posteriormente promotor de la Real Academia Gallega de Ciencias y director del Seminario de Estudios Matemáticos de Santiago de Compostela de 1967 a 1978, a quien se le considera pionero en el aperturismo hacia el entorno internacional de la matemática española en la posguerra y fundador de una importante escuela de geometría diferencial en nuestro país, había realizado en 1944 su Tesis Doctoral, titulada “El problema de la órbita aparente de las estrellas dobles visuales” bajo la supervisión del Catedrático de la Universidad de Santiago

de Compostela Ramón María Aller Ulloa, sacerdote católico, astrónomo y matemático (Figura 5). Vidal Abascal fue quien le presentó a Antonia a Aller, quien a raíz de conocerla la introdujo en el mundo de la Astronomía, lo que le permitió a ella convertirse más tarde en la primera mujer astrónoma gallega (Juanatey, 2009) y (Montesinos, 2009).



Figuras 4 y 5. Enrique Vidal Abascal (izquierda) y Ramón María Aller (derecha)

Dada la gran influencia que Aller tuvo en la formación astronómica de Antonia, permítasenos hacer un breve inciso en la biografía de ella para dar unas breves notas sobre tan insigne personaje.

Ramón María Aller Ulloa, Catedrático de la Universidad de Santiago de Compostela (Lalín (Pontevedra), 1878 – 1966), hijo de Hijo de Domingo Aller, jurista, académico y notario, estudió el bachillerato en el Colegio de La Guarda, de los jesuitas, y después ingresó en el Seminario Diocesano de Lugo. Obtuvo la licenciatura en Teología en la Universidad Pontificia de Santiago de Compostela. Tras su ordenación sacerdotal, se licenció en Ciencias Exactas por la Universidad de Madrid en 1904, como alumno libre, y posteriormente obtuvo el grado de doctor en dicha Universidad.

Su vocación por las Matemáticas y la Astronomía fue muy temprana. En 1912 construyó un observatorio astronómico en Lalín, el primero que existió en Galicia, y que llegó a figurar entre los más importantes de España, obteniendo un gran prestigio en el extranjero, hasta el punto de que el astrónomo inglés Percy Wilkins dio el nombre de Aller a un cráter de la Luna. Su especialidad al principio fue la astronomía de posición, quizá un poco a consecuencia de los instrumentos de que disponía, y fue entonces cuando se le ocurrió inventar un nuevo aparato para hacer observaciones en dos verticales, cuyo estudio fue objeto de su tesis de doctorado. Al disponer de ecuatorial amplió el programa del observatorio con la medida de estrellas dobles, cuyo estudio introdujo en España, observaciones de planetas, pasos y otras observaciones ocasionales.

El rigor con que Aller hacía sus observaciones le abrió las puertas de las más famosas revistas astronómicas del mundo. En 1939 fue llamado por el rector de la Universidad de Santiago para que se encargase de explicar los cursos de Geometría Analítica y Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias. Cuatro años más tarde, el 22 de septiembre de 1943,

trasladó su observatorio de Lalín a Santiago de Compostela, a un edificio que construyó la Universidad en el campus de la Facultad de Ciencias, al que se dotó de nuevos aparatos con ayuda del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

En 1944 se creó la cátedra de Astronomía en la Facultad de Ciencias, que se le encargó, y el 9 de abril de 1949, al rebasar los setenta años, se le nombró catedrático extraordinario. Desempeñó la cátedra hasta 1965. A petición del cardenal Quiroga Palacios, fue nombrado por el papa Juan XXIII canónigo honorario de la catedral de Santiago, y el ayuntamiento lo nombró hijo adoptivo de la ciudad, dándole su nombre a una calle y otorgándole la Medalla de Oro. Fue académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1939), numerario de la Real Academia Gallega (1941), director del Observatorio Astronómico de la Universidad de Santiago, consejero de los patronatos Alfonso el Sabio y Juan de la Cierva del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (1941), vocal de la delegación de Galicia del mismo Consejo (1943) y consejero de honor (1944). También fue miembro de la sección de Estrellas Dobles en la Unión Astronómica Internacional, miembro de la Unión Nacional de Astronomía, Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio, miembro de la Sociedad de Astronomía de España y América, de la Sociedad Matemática Española, de la Sociedad Astronómica de Francia y de la Sociedad Belga de Astronomía y Ciencias Afines.



Figura 6. Ramón M.ª Aller y Antonia Ferrín en el Observatorio Astronómico de Santiago de Compostela

Retomando de nuevo la biografía de Antonia, ella pronto conoció y se familiarizó en el Observatorio Astronómico de Santiago con el uso de instrumentos como el antejo de pasos o el telescopio reflector de doce centímetros, con los que llevó a cabo tanto ocultaciones de estrellas por la luna, como pasos de estrellas por dos verticales o medidas micrométricas de estrellas dobles (Figura 6). Antonia publicó los resultados de sus investigaciones en la revista española de astronomía *Urania*. De esa época, Josefina Ling Ling, astrónoma, profesora de la Universidad de Santiago de Compostela, Comisaria de la exposición "Con A de Astronomía", celebrada en instituto Urbano Lugo de Santiago de Compostela en noviembre de 2019 y antigua alumna de Antonia, recuerda en un esbozo biográfico qué preparó sobre ella por el 50 aniversario de la Licenciatura de Matemáticas de Matemáticas de la Universidad de Santiago,

celebrado en 2008 justo un año antes de defunción de Antonia, una anécdota que ella contaba, recordando el frío que pasaba bajo la cúpula las noches de invierno en el Observatorio mientras investigaba, al vestir siempre falda y no usar nunca pantalones, puesto que, según ella (Montesinos, 2009) y (Mato, 2013):

Las noches de observación supusieron horas de intenso frío, porque no podía vestir pantalones en un tiempo en el que esta prenda no se toleraba en las mujeres... [esa prenda] no se consideraba femenina y solamente las actrices de cine más atrevidas osaban lucirla en la gran pantalla.

Debido a su relación con Antonia y por considerarla también a ella una mujer notable y merecedora de ser conocida, damos a continuación unos breves datos biográficos de Josefina Faen-Faen Ling Ling (Figuras 7, 8 y 9), quien a pesar de que su nombre y sus rasgos orientales revelan sus orígenes chinos, nació y creció en Madrid, la ciudad a la que su familia emigró en la década de los setenta del siglo pasado.

Josefina realizó el primer ciclo de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid, donde conoció a un grupo de astrónomos aficionados de la Agrupación Astronómica de Madrid y le entró el gusanillo por esta ciencia. Decidió entonces trasladarse a la Universidad Complutense de Madrid para estudiar la especialidad de Astronomía, Mecánica y Geodesia. Allí tuvo como profesora a Antonia y se licenció y doctoró en Matemáticas.

A Josefina le gustaba mucho Galicia porque pasaba las vacaciones en Ares. Por ello, ha trabajado en la Universidad de Santiago y en centros de Secundaria como profesora. Esa labor la ha simultaneado con su trabajo como astrónoma en diversos observatorios, tanto nacionales, como el ya citado Ramón Aller (en Santiago), el de Yebes (Guadalajara) y el Observatorio Astronómico Nacional (Madrid) como extranjeros: el Observatorio La Costa Azul (Niza, Francia), el Pic Du Midi (Pirineos franceses), el Nacional de Llano del Hato (Mérida, Venezuela) y el Mount Wilson (Los Angeles, USA).



Figuras 7, 8 y 9. Josefina Ling (centro) e imágenes de la Exposición "Con A de Astrónomas" (izquierda y derecha)

Josefina es especialista en estrellas dobles y afirma que "las estrellas viven en pareja, lo que pasa es que son muy discretas y no se dejan ver a simple vista...el ser humano utiliza instrumentos tecnológicos para "cotillear" ese vínculo de amor".

Como logros más importantes, Josefina descubrió una estrella a más de 3.046 años-luz desde el observatorio Pic Du Midi, que lleva su nombre y obtuvo en 2014 el Premio Edmond Girard de la Sociedad Astronómica de Francia y un premio a la introducción de la perspectiva de género en la docencia y en la investigación (Vázquez y Vila, 2014).

Volviendo a la biografía de Antonia, en 1950 consiguió una beca del Consejo Superior de Investigaciones Científicas para realizar tareas de investigación en el Observatorio Astronómico de Santiago, beca que se convirtió dos años más tarde en un contrato de Asistente de Investigación (Ríos, 2010). Y ese mismo año, obtuvo la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Central de Madrid (su tercera licenciatura), estudiando como alumna libre, sin asistir a clase, los tres últimos años de la carrera (Liste y Pintos, 2010).

Como puede observarse, un brillantísimo currículum para cualquier persona, pero con los méritos añadidos de las dificultades de la época en la que estudió y de su condición de mujer: Licenciada en Química y Maestra Nacional en 1935, licenciada en Farmacia en 1940 (ambas titulaciones en la Universidad de Santiago de Compostela) y licenciada en Matemáticas en 1950, en la Universidad Central de Madrid (actualmente Universidad Complutense de Madrid). Y aún le faltaba por hacer un doctorado, como veremos más adelante (Figura 10).



Figura 10. Antonia Ferrín Moreiras

En 1953, Antonia ganó, por oposición, una plaza de catedrática numeraria de Matemáticas en la Escuela Normal de Magisterio de Santander,⁷ donde permaneció dos años y desde donde se trasladó a la escuela para niñas Isabel la Católica en Santiago (Ríos, 2010).

Entre 1954 y 1956, consiguió el Doctorado en Astronomía en la Universidad Central de Madrid. Durante esos años, Antonia estuvo colaborando con el profesor Vidal Abascal para impulsar la creación de la licenciatura de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela, la cual tuvo lugar en 1957. Antonia se convirtió así en la primera mujer profesora de esta Facultad, al ser profesora ayudante de clases prácticas

de la primera promoción de la Facultad de Matemáticas (1957-1962) de esta universidad. Encargada de impartir numerosas materias, participó activamente en los primeros años de vida del centro.

Asimismo, continuó con sus investigaciones bajo la dirección de Ramón María Aller Ulloa, quien al igual que Vidal Abascal la animó y ayudó a realizar, por libre, los cursos de doctorado en la Universidad Complutense. Aller, contando ya con más de ochenta años, le dirigió la tesis que ella defendió en 1963, siendo esa tesis la primera que se leyó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela y la primera Tesis sobre Astronomía defendida por una mujer en España. Esa Tesis llevaba por título "Observaciones de pasos por dos verticales".

Ese mismo año de 1963, Antonia fue nombrada Catedrática Numeraria de Matemáticas en la Escuela de Magisterio Santa María de la Universidad Central de Madrid, trasladándose a vivir a esta ciudad, donde permaneció hasta su jubilación forzosa en 1984. En Madrid trabajó también como profesora de Matemáticas en la Facultad de Medicina, llamada por el profesor Sixto Ríos, durante dos años (decidió dejarlo porque las listas de estudiantes "eran como libros gruesos y estaban fumando en la clase anterior") y fue también profesora adjunta de la Cátedra de Astronomía de José María Torroja en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense durante veinte años, impartiendo clases de Astronomía y Mecánica Celeste en esos años (Ríos, 2010).

Por otra parte, desempeñó cargos directivos y formó parte de varios Tribunales de Oposición, participando además en los primeros congresos internacionales de Matemáticas que se llevaron a cabo en España, en particular en el Primer Coloquio de Geometría Diferencial celebrado en Santiago de Compostela, en abril de 1963, en el que ella fue la única mujer participante (Antonia aparece en la Figura 11 junto a otras mujeres acompañantes).



Figura 11. Participantes y acompañantes en el I Coloquio de Geometría Diferencial

Los participantes varones en ese coloquio fueron Germán Ancochea, P. Alberto Dou y Emilio Pérez Carranza, de la Universidad de Madrid, Ricardo Mariño Caruncho, de la Universidad de La Coruña, José Vaquer, de la de Barcelona, José González Martín, de la de Pontevedra, Francisco J. Echarte Reula, de la de Vigo, Juan Sancho San Román, de la de Zaragoza, más los locales de la Universidad de Santiago de Compostela Eduardo García Rodeja, Enrique Vidal Abascal y Juan A. Zaera de Toledo y los procedentes de universidades extranjeras Leonard M. Blumenthal (Missouri, USA), René Deheuvels y André Lichnerowicz (Paris, France), Georges de Rham (Lausanne, Switzerland) y A. Ribeiro Gomes (Coimbra, Portugal).

Como se ha comentado, Antonia trabajó como profesora adjunta de diferentes cátedras a lo largo de su vida, como la de Estadística, que ocupaba el profesor Sixto Ríos, o la ya citada de Astronomía de la Facultad de Matemáticas, que pertenecía al profesor José María Torroja Menéndez, quien había formado parte del Tribunal de su Tesis (Ríos, 2010).

En Madrid, pronto su gran capacidad de trabajo y organización le permitió conocer a grandes matemáticos, tanto nacionales como internacionales: el ya citado Sixto Ríos, Torroja Menéndez, Germán Ancochea, Santaló y Sierpinski. De ellos, con los que lógicamente tuvo más contacto fue con Sixto Ríos (Figura 12) y con José María Torroja (Figura 13). Por la importancia que ambos tuvieron en la Matemática española mostramos a continuación unos breves datos biográficos de ambos.

El profesor Sixto Ríos García (Pelahustán, Toledo, 1913 - Madrid, 2008) está actualmente considerado como el padre de la estadística española. Trasladada su familia a Madrid, estudió en el Colegio San Mauricio y en el Instituto de San Isidro, siempre siendo el número uno de su promoción. En 1932 obtuvo el título de Licenciado en Ciencias Exactas por la Universidad Central de Madrid, con la calificación de Sobresaliente y Premio Extraordinario y poco después el de Doctor en Ciencias Matemáticas. Fue discípulo del insigne matemático Julio Rey Pastor, quien le dirigió su tesis titulada "Sobre la hiperconvergencia de las integrales de Laplace-Stieltjes". Fue catedrático de Análisis Matemático en las Universidades de Valencia, Valladolid y Madrid, además de Dr. Ingeniero Geógrafo y Profesor en la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos y en la Facultad de Ciencias Económicas de Madrid.

Ostentó los cargos de Director de la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, Director del Instituto de Investigación Operativa y Estadísticas del C.S.I.C., Director del Departamento de Estadística de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense y Presidente de la Sociedad Española de Investigación Operativa, Estadística e Informática. Fue académico corresponsal de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, y organizador y fundador, por encargo de la Unesco, de la Escuela de Estadística de la Universidad de Caracas. Fue miembro del comité de redacción de Statistical Abstracts y miembro de número del International Statistical Institute y del Institute of Mathematical Statistics.

Contribuyó a crear y dirigir centros de estudios e investigación, como la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, el Instituto de Investigación Operativa y Estadística del C.S.I.C. y su revista "Trabajos de Investigación Operativa y Estadística", la Escuela de Estadística de la Universidad Central de Venezuela o el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias, con cursos internacionales patrocinados por la Organización de Estados Americanos (O.E.A.) y por la UNESCO.



Figuras 12 y 13. Sixto Ríos (izquierda) y José María Torroja (derecha)

Por su parte, José María Torroja Menéndez (Madrid, 1916 – 1994), Medalla número 13 de la Real Academia de Ciencias de España, fue Doctor en Ciencias Exactas, Ingeniero Geógrafo, Catedrático de Astronomía y Geodesia en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, de la que fue su Decano, Vicerrector de la Universidad Complutense de Madrid, Astrónomo en excedencia del Observatorio Astronómico Nacional y Director del Observatorio Astronómico del Teide. Fue también Consejero Nacional de Educación, Consejero de número del C.S.I.C, Presidente de la Comisión Nacional del I.C.S.U., Vocal de las Comisiones Nacionales de Astronomía, de Geodesia y Geofísica y de Geografía, Presidente de la Real Sociedad Geográfica, Secretario de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias y Miembro de Honor de la Asociación Nacional de Ingenieros Técnicos en Topografía. Dirigió varias expediciones para la observación de eclipses totales de Sol, especialmente con fines geodésicos. Full Member de la American Geophysical Union. Autor de numerosos trabajos sobre Astronomía y Geodesia. Contador, Vicesecretario y Secretario General de la Real Academia de Ciencias de España (datos tomados de la ficha del Profesor Torroja en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España).

No obstante, a pesar de la gran carrera profesional de Antonia, el hecho de ser mujer dificultó grandemente sus aspiraciones en muchas ocasiones, como por ejemplo, cuando su mentor Ramón María Aller enfermó en 1964. La única forma de que continuase su cátedra de Astronomía en el Observatorio era que se encontrara un sustituto y, aunque Antonia, ya doctora, se presentó a la oposición, fue excluida. No obstante, tras una queja, fue admitida como aspirante, pero la cátedra quedó declarada desierta y el Observatorio decayó durante años.

Este episodio de la vida de Antonia es ciertamente curioso y no está aún del todo suficientemente aclarado, pues aparecen algunas contradicciones en las diferentes fuentes que lo tratan. En las páginas 30 a 34 de (Fernández 2006), a partir de las referencias de la misma, puede leerse lo siguiente:

Como ya se ha comentado, en el año 1964 don Ramón cae enfermo, por lo que renuncia el desempeño de la cátedra de Astronomía. Tras una Orden Ministerial de 28/11/64 en la

que la cátedra de Astronomía pasa denominarse como cátedra de Astronomía General, Astronomía Esférica y Geodesia, dicha cátedra salió tres veces a oposición y tres veces a concurso de traslado, sin que ninguno de los aspirantes en dichos procesos la obtuviera, lo que provocó su desaparición.

Primero hubo un concurso de traslado, que se convocó por Resolución de 19/01/65, publicado en BOE de 05/02/65 y que quedó desierto por falta de aspirantes según Resolución de 26/03/65 (BOE de 14/04/65).

Luego saldría a oposición por Orden Ministerial de 28/09/65 (BOE de 26/10/65) y quedó desierta por falta de aspirantes, por Orden Ministerial de 11/01/66 (BOE de 04/02/66).

Le siguió un nuevo concurso de traslado, convocado por Resolución de 28/02/66 (BOE de 26/03/66 y quedó desierto por falta de aspirantes, por Resolución de 05/05/66 (BOE de 26/07/66).

En una Orden Ministerial del mismo día en que se dictó la resolución en la que se declaró desierto el anterior concurso de traslados, publicada en el BOE de 10/05/66 se convoca nuevamente oposición. En esta oposición, inicialmente en una primera lista de admitidos, se declaró opositor al doctor y profesor de la Facultad de Derecho de la Universidad de Santiago José Lois Estévez, por Resolución de 26/08/66.

Se nombró el tribunal, por Orden Ministerial de 09/12/66 (BOE de 28/12/66), el cual estaba compuesto por Antonio Romañá Pujo (Presidente), como vocales de designación automática los catedráticos de las Universidades de Zaragoza, Madrid y Barcelona, respectivamente, Rafael Cid Palacios, discípulo de Ramón María Aller, José María Torroja Menéndez y Juan José de Orús Navarro. Como vocal de libre elección entre una terna propuesta por el Consejo Nacional de Educación se nombró al catedrático de la Universidad de Barcelona Joaquín Febrer Carbó.

Se abre un nuevo plazo de solicitudes por Orden Ministerial de 12/05/67 (BOE de 26/06/67), ya que había pasado un año desde que se iniciara el proceso sin que hubiesen comenzado los ejercicios. Por Resolución de 02/10/67 (BOE de 06/11/67) se excluye como aspirante a Antonia Ferrín Moreiras (aunque ella asegura que no firmó su participación en la oposiciones) por no presentar un trabajo científico relacionado con la cátedra y obligatorio en la convocatoria.

Por Resolución de 18/01/68 (BOE de 05/02/68) se readmite a la aspirante excluida inicialmente. En Resolución del Tribunal de 19/04/68 (BOE de 23/04/68) se hace el llamamiento a los dos opositores, citándolos el 17 de mayo de 1968 a las 17 horas en los locales del Instituto Jorge Juan en Madrid. Finalmente, la cátedra queda desierta por Orden Ministerial de 31/05/68 (BOE de 28/06/68). Parece claro que el Tribunal no estaba por la labor de que se ocupase la plaza ya que una persona tan preparada para el puesto como Antonia Ferrín, con el currículum que presentaba, tres licenciaturas, un doctorado y su enorme experiencia anterior en el Observatorio de Astronomía resulta extraño que no obtuviera la plaza.

Otra persona que podía haber desempeñado la cátedra pero que sin embargo no llegó a firmarla fue Juan Antonio Zaera de Toledo, que leyó su tesis doctoral (dirigida por Ramón María Aller con la colaboración de Cid Palacios) “Sobre la determinación de estrellas dobles visuales. Examen de varios métodos. Aplicación a los sistemas ADS 1833, 7704, 1959, 12469, 13169, 16826 y 6871” en 1962. Zaera frecuentaba el Observatorio y era la persona que impartía Astronomía tras la vacante dejada por don Ramón, pero él era también militar y fue destinado a Madrid, por lo que tuvo que dejar de impartir clase en la Universidad de Santiago de Compostela y de colaborar con el centro.

El otro aspirante, José Lois Estévez, en aquella época era un profesor de Derecho en la Universidad de Santiago de Compostela pero muy aficionado a la Astronomía, sobre todo a la Astrofotografía, y era asiduo del observatorio en vida de Ramón María Aller (Lois, 2004). Según sus palabras (que se indican más adelante), presentó la instancia para evitar la desaparición de la cátedra, algo que ocurriría años más tarde, concretamente por Orden de 17/04/73, cuando el entonces decano de la Facultad de Ciencias José Ramón Massaguer Fernández decidió suprimir la cátedra de Astronomía, facilitándosela al Departamento de Análisis Matemático, al parecer por indicaciones del profesor Antonio Valle Sánchez, catedrático entonces de aquel departamento (actualmente la plaza resultante de la transformación de la cátedra la ocupa un profesor de dicho departamento). Según palabras de Lois (Fernández, 2006):

Yo pensaba hacerlas [las oposiciones], pero yo las hacía con una finalidad única, para conservar la cátedra, porque sabía que intentaban cambiar la cátedra por una de química y entonces digo: si firmo, ya eso asegura que en el futuro no va a cambiar la cátedra.

Las oposiciones, al parecer, se celebraron finalmente. Digo al parecer porque la versión de Lois es que no se celebraron, de que tenía un gran deseo por presentarse, ya que había estado recibiendo durante dos años lecciones personales de Astronomía de Don Ramón Aller, y era aficionado adolescente de las Matemáticas

Además, Lois comenta que él tenía más relación con los profesores de ciencias que con los de Derecho, especialmente con Tomás Batuecas, que le introdujo en el estudio de la relatividad de Einstein y con Ignacio Ribas. Lois señala que “*la no celebración de las oposiciones fue una ilegalidad, una injuria administrativa*”.

Posteriormente a esa oposición hubo un concurso de traslado que se convocó por Resolución de 12/11/68 y se publicó en el BOE de 19/11/68 y que se declaró desierto por falta de aspirantes por Resolución de 15/01/69 y publicado en el BOE de 31/01/69.

Finalmente, se convocó otra vez a oposición por Orden Ministerial de 26/03/69 y publicada en el BOE de 16/04/69. Resultó admitido provisionalmente José Algué Perramón (en la actualidad catedrático jubilado de Física Aplicada en la Universidad Politécnica de Cataluña), por Resolución de 28/06/69, publicada en el BOE de 31/07/69, y admitido definitivamente por Resolución de 02/09/69, publicada en el BOE de 17/09/69.

Por Orden Ministerial de 06/07/70 de 11/08/70 se nombra el Tribunal, que estaba formado por José María Torroja Menéndez, como presidente; Juan José Orús Navarro; Francisco Navarro Borrás y Rafael Cid Palacios (catedráticos de las Universidades de Barcelona, Madrid y Zaragoza, respectivamente), como vocales de designación automática y Enrique Vidal

Abascal (catedrático de la Universidad de Santiago) como vocal elegido entre la terna propuesta por el Consejo Nacional de Educación.

Por Resolución del Tribunal de 25/11/70 publicada en el BOE de 14/12/70 se convocó a los opositores a las 19 horas del día 7 de enero de 1971 en la Sala de Grados de la Facultad de Ciencias, sección de Físicas, en la Ciudad Universitaria en Madrid.

Finalmente, por Orden Ministerial de 27/01/71, publicada en el BOE de 18/02/71, la cátedra se declara desierta.

El aspirante José Algué no se presentó, ya que firmó participar en varios procesos para obtener una cátedra y en uno de ellos ya la había conseguido. En una Orden Ministerial de 16/06/71 se eleva a definitivo el nombramiento de José Algué Perramón como catedrático Numerario de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de Oviedo. En esa Orden publicada en el BOE de 22/07/71 se cita que el interesado tomó posesión de su cargo en la cátedra del grupo II, Física, en virtud de oposición el 0/06/70.

Otra persona que podía ser un buen candidato en aquel momento era Félix Lahulla Forniés, que leyó su tesis doctoral (dirigida por Rafael Cid Palacios) "Movimientos de satélites artificiales. Eliminación de pequeños divisores en una teoría de segundo orden" el 4 de febrero de 1969 y que hoy es un miembro destacado del Observatorio Astronómico Nacional en Madrid. Lahulla sabía que la cátedra iba a salir y tenía gran interés en presentarse, pero al parecer no tuvo conocimiento de la noticia de la convocatoria, por lo que no pudo presentarse como era su intención.

Resulta curioso el papel que jugó el profesor Cid Palacios en estas convocatorias. Cid realizó su tesis con Don Ramón y fue colaborador en el observatorio, por lo que debería haber apoyado a algún candidato para el puesto (como hemos visto, la valía de algunos de ellos no tenía ninguna duda). Sin embargo, no ayudó a que se ocupara la plaza vacante, más bien todo lo contrario, puso muchas dificultades. También pudo ocuparla él mismo en alguno de los concursos de traslados que se convocaron, incluso hizo una visita al centro para ver en qué situación estaba varios años después de su marcha, pero finalmente decidió quedarse en Zaragoza. Quizás influyó en Cid el pensamiento de las muchas dificultades que iba a tener en Santiago o puede que su vocación más teórica, dirigida hacia la Mecánica Celeste, de la que fue un destacado especialista, pesara más que la posibilidad de dirigir un observatorio astronómico en Galicia. Él mismo indicó (Fernández, 2006):

Como he comentado anteriormente, la cátedra se suprime por Orden Ministerial de 17/04/73. En esa Orden, que se conserva en un documento existente en el archivo del Centro de Investigación y Documentación Educativa (sección del Archivo Central del Ministerio de Educación) aparece escrito con lápiz que fue publicada el 02/05/73. Sin embargo, en el BOE de dicha fecha no aparece publicada dicha orden. Esta supresión fue debida fundamentalmente al hecho de no encontrar a una persona para la Cátedra, pero quizás también influyeron los cambios en el plan de estudios, que disminuyeron grandemente el peso de la Astronomía entre las asignaturas de la carrera...

Otra de las circunstancias negativas que afectaron al observatorio fue el poco interés de la Universidad por la Astronomía en determinadas épocas, en especial cuando fue rector Manuel Jesús García Garrido. Este último, que fue nombrado para el cargo el 6 de agosto de 1968 por el Ministro de Educación Nacional Agustín Villar Palasí y se mantuvo en él hasta el 21 de

diciembre de 1972, pretendió destinar las dependencias del Observatorio a vivienda para bedeles. Así se lo comunicó a Vidal Abascal en una carta que le envió, extrañamente, a un piso que este tenía en Madrid. El rector mandó la misiva estando Vidal de viaje en París, pero cuando Vidal volvió de ese viaje pasó casualmente por su piso de Madrid, encontró la carta y al regresar a Santiago se entrevistó con Garrido para evitar la desaparición del Observatorio.

En todo caso y pese a la no adjudicación a Antonia de dicha plaza, José Ángel Docobo Durantes, quien se hizo cargo algún tiempo después, como Director del Observatorio, de la recuperación física y científica del mismo, opinaba de Antonia (en la Figura 14, en el observatorio) que *“ella fue la colaboradora más fiel, disciplinada y meticulosa de Aller”*, destacando además de ella *“su lucidez y memoria”* (Mato, 2013).



Figura 14. Antonia Ferrín con sus instrumentos astronómicos

Antonia se jubiló de manera forzosa en Madrid, en 1984, a los 70 años de edad, tras una estancia allí de veinte años, viviendo después su retiro entre Santiago y esa capital, donde se estableció permanentemente en los últimos años, en los que siempre mantuvo una intensa actividad (Macho, 2019). Falleció el 6 de agosto de 2009, en Santiago de Compostela, donde había pasado prácticamente toda su vida, a los 95 años (Verdejo, 2010).

Hasta unos meses antes de su fallecimiento siguió siendo una conversadora incansable, con una memoria prodigiosa, capaz de recordar un torrente de anécdotas de tantos años de dedicación a su trabajo.

Sus principales aportaciones a la astronomía las realizó en su etapa en el Observatorio de Santiago, y consisten en estudios sobre ocultaciones estelares por la Luna, medidas de estrellas dobles y medidas astrométricas, así como la determinación de pasos por dos verticales (lo que constituyó el objeto de su Tesis).

Como honores más relevantes, indicar que Antonia fue incluida en 2018 en la Tabla Periódica de las Científicas, en el grupo de astrónomas, con símbolo Fe y ocupando la posición del Uranio en el Sistema periódico de los elementos.

Referente a esta distinción, puede indicarse que el día 2 de noviembre de 2017, la Organización de Naciones Unidas proclamó el año 2019 como el Año Internacional de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos, al observar que ese año coincidía con los aniversarios de una serie de hitos importantes en la química, en particular los descubrimientos de varios elementos químicos, la publicación de una lista de 33 elementos químicos clasificados en gases, metales, no metales y térreos por Lavoisier en 1789; el descubrimiento de la ley de las tríadas por Döbereiner en 1829 y sobre todo la creación de la tabla periódica por Mendeleev 150 años antes. Pues bien, a semejanza de esa idea, el 23 de noviembre de 2018, la ingeniera química española Teresa Valdés-Solís publicó en la plataforma Naukas un artículo titulado "La Tabla Periódica de las Científicas" (Figura 15), en el que proponía una tabla periódica compuesta por nombres de científicas. Teresa comentaba en su entrada que, entre las muchas tablas periódicas que existen de temáticas tan variadas, aun nadie había dedicado una a las científicas. Para ello, creó esa Tabla Periódica de las Científicas, situando una científica en cada lugar de la tabla periódica. Las organizó en diferentes disciplinas, reservando las tierras raras a las mujeres españolas, lamentablemente muy poco conocidas. Cada símbolo está enlazado con una biografía de la científica mencionada (Teresa Valdés-Solís Iglesias es Ingeniera Química y Doctora en Tecnologías del Medio Ambiente. Es investigadora en el Instituto Nacional del Carbón del CSIC y preside la Asociación de Divulgación Científica de Asturias. Su línea de investigación se centra en los catalizadores para aplicaciones medioambientales. Es autora del blog "Ciencia y presencia" y colaboradora de "Naukas". También, forma parte del equipo de coordinación del proyecto "11defebrero", que tiene como objetivo visibilizar el trabajo de las científicas, crear roles femeninos en los ámbitos de la ciencia y la ingeniería y promover prácticas que favorezcan la igualdad de género en el ámbito científico). Su pasión es la divulgación científica. Ella asegura que tiene la necesidad de contar lo que hacen "l@s científic@s" y las maravillas que la ciencia esconde. Intenta iniciar a "l@s niñ@s", ya que, para ella: "a partir de los 3 años, la ciencia les encanta, la entienden y saben que es ciencia y no magia, porque los científicos explicamos lo que pasa y los magos no revelan sus trucos" (ver (web1) para mayor información).

Las mujeres científicas españolas que aparecen en esa Tabla (de izquierda a derecha y de arriba abajo) junto con Antonia, cuyo símbolo es AF, son las siguientes. Entre paréntesis se indica su titulación a partir de las siguientes claves: (A): Astrónoma. (B): bioquímica. (E): enfermera. (F): física. (I): inventora. (IA): ingeniera agrónoma. (M): matemática. (N): neurocientífica. (O): oceanógrafa. (P): paleontóloga y (Q): química. Por las siglas (PRJI, año) se indican las mujeres galardonadas con el Premio Rey Jaime I de Investigación Básica, el año que se trate):

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| Av: Ángeles Alvariño (O). | Bc: María Blasco (B), (PRJI.2007). |
| Bn: Dorotea Barnés (Q). | By: Pilar Bayer (M). |
| Cb: Pilar Carbonero (IA). | Cl: María Antonia Canals (M). |
| Cs: María Andrea Casamayor (M). | Ct: Assumpció Català (A). |
| Cv: Josefina Castellví (O). | F: Fátima de Madrid (A). |

- Fe: Antonia Ferrín Moreiras (A).
- Ju: Manuela Juárez (Q).
- Mb: Felisa Martín Bravo (F).
- Mr: Susana Marcos (F), (PRJI de Nuevas Tecnologías, 2017).
- Ni: Ángela Nieto (B), (N) y (PRJI.2009).
- Rr: Ángela Ruiz Robles (I).
- Sl: Margarita Salas (B) y (PRJI.1994).
- Wo: María Wonenburger (M).
- Zn: Isabel Zendal (E).
- Fu: Gertrudis de la Fuente (Q).
- Ma: María Martinón Torres (P).
- Mn: Rosa María Menéndez (Q).
- Rd: Teresa Rodrigo (F).
- Si: Alicia Sintes (F).
- Vr: María Vallet Regí (Q) y (PRJI.2018).
- Yz: Josefa Yzuel (F).

La Tabla Periódica de las Científicas



Figura 15. La Tabla Periódica de las mujeres científicas

También, el 24 de mayo de 2008, con motivo de la celebración del Cincuenta Aniversario de la creación de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, Antonia fue elegida madrina de esa efemérides por el hecho de (Fernández, 2010):

ser una estudiante y trabajadora infatigable, una docente versátil a lo largo de sus más de cinco décadas dedicadas a esta labor y por haber sido pionera en diferentes frentes de la facultad de matemáticas: la primera mujer en formar parte de su cuadro de profesores, en realizar trabajos de investigación en astronomía y en defender una tesis doctoral.

Con gran sentido del humor, Antonia comentó en ese evento que acudía “*en plena juventud, con 94 años cumplidos, para no correr el riesgo de emocionarme*” (Macho, 2019) y (Ríos, 2010).

Antonia consiguió el Premio de creación de materiales y recursos docentes con perspectiva de género de la Universidad de Vigo (Verdejo, 2010) y en reconocimiento a su trayectoria, ha sido también la primera mujer que ha dado nombre a un aula en el edificio de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela (Figuras 16 y 17).



Figuras 16 y 17. Antonia Ferrín junto al aula que lleva su nombre en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela

En agosto de 2009 se apagó finamente su vida, a los noventa y cinco años de edad. Desde entonces, Antonia ha sido objeto de muchos reconocimientos y Jornadas de Homenaje en su honor. Como ejemplo, el Diario “El Faro de Vigo”, en su edición de 17 de marzo de 2018, en una noticia firmada por Loño (2018) informa que el gobierno de Lalín anunció, hace ya un par de años, la convocatoria de una comisión para renovar el callejero del municipio y tras un tiempo sin avances, el Concello anunció ayer las primeras conclusiones de un órgano conformado por expertos y con representación del ejecutivo. La comisión dio sus primeros pasos al establecer los criterios que definirían las propuestas y comenzar con la designación de rúas que en la actualidad presentan nombres de letras o números, además de hacer hincapié en que la microtoponimia debe ser un elemento clave para bautizar otras o adaptar su nomenclatura a la oficial de la Xunta. Las primeras propuestas pasan por nombrar la actual calle B como Ramón de Valenzuela en honor al político y escritor trasdezano fallecido en 1980. Para la F se pone encima de la mesa al matemático, astrónomo y pintor Enrique Vidal Abascal, que, además es hijo adoptivo de la localidad donde tiene sus orígenes. La discípula de Ramón María Aller, Antonia Ferrín Moreiras, se propone para la D. Nacida en Ourense en 1914 y fallecida en Santiago en 2009, fue la primera mujer profesora de la Facultade de Matemáticas de la USC y realizó trabajos bajo la supervisión del sabio lalinense. El trovador medieval Nuno Eanes de Cercio pondría su nombre a la rúa C, destacando de este vecino de Cercio que su actividad poética y musical podría enmarcarse en el tercer cuarto del siglo XIII.

Igualmente, el diario “La Opinión”, de A Coruña, del día 23 de noviembre de 2018, anuncia que el ciclo divulgativo “As curiosas” va a celebrar en el Planetario de la Casa de las Ciencias, a las 20 horas de ese día, una Jornada dedicada a Antonia Ferrín, en la que la

escritora Estíbaliz Espinosa y la pianista Isabel Gómez Alonso harán un recorrido por sus aportaciones en textos sobre astronomía, acompañadas del piano, la penumbra y las estrellas (La Opinión, 2018).

El autor desea finalizar esta aportación manifestando su total admiración por la figura de Antonia Ferrín Moreiras. Ella, de brillantísima formación y con tantas licenciaturas a sus espaldas, pues no en vano fue maestra nacional, química, farmacéutica y matemática, fue también una de las mujeres pioneras de la Astronomía española tras su trabajo durante la mayor parte de su vida en el Observatorio Astronómico Ramón M^a Aller, de la Universidad de Santiago de Compostela (Figura 18). Sin lugar a dudas y tal como se explicita en el título de la aportación, Antonia constituye un notable ejemplo para las mujeres en la actualidad, para quienes puede ser considerada un verdadero referente.



Figura 18. El Observatorio Astronómico Ramón M^a Aller, de la Universidad de Santiago de Compostela, lugar de trabajo habitual de Antonia Ferrín Moreiras

Referencias

- [1] CID GALANTE, Rosa María. *Historia das nosas mulleres ourensás 2011*. Disponible en <http://mulleresourensas.blogspot.com/2011/04/celsa-ferrin-moreiras.html>
- [2] DIARIO EL CORREO GALLEGO. *Instituto Arcebispo Xelmírez*. 19 de julio de 2019
- [3] DIARIO LA OPINIÓN, SECCIÓN DE NOTICIAS, A CORUÑA. *Jornada sobre Antonia Ferrín*, 23 de noviembre de 2018.
- [4] FERNÁNDEZ PÉREZ, Iván. *El Observatorio Astronómico de Santiago de Compostela*, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico da Universidades de Santiago de Compostela, 2006.
- [5] FERNÁNDEZ PÉREZ, Iván, DOCOBO DURANTEZ, José Ángel. *13 biografías de astrónomos españoles de referencia en el siglo XX*, FECYT, Todocosmos, 2014.

- [6] GURRIARÁN RODRÍGUEZ, Ricardo. *Ciencia e conciencia na universidade de Santiago, 1900-1940* (en gallego). Univ. Santiago de Compostela. 2006.
- [7] JUANATEY, Héctor. *Fallece Antonia Ferrín Moreiras, pionera en las matemáticas y la astronomía gallega*, Diario La Voz de Galicia, 11 de agosto de 2009.
- [8] LISTE LÓPEZ, Socorro, PINTOS BARRAL, Xoana. *Abatendo muros. As primeiras docentes na Universidade de Santiago*, Boletín das ciencias, ISSN 0214-7807, Ano 23, nº. 71, 2010, 155-156 (en gallego, recoge los contenidos presentados a: ENCIGA. Congreso (23. 2010. Narón)).
- [9] MACHO-STADLER, Marta. *Antonia Ferrín, una pionera para las astrónomas españolas*. Nueva Revolución, 2019.
- [10] MATO, Mar. *Medio siglo de la primera astrónoma gallega*. Diario El Faro de Vigo, sección sociedad y cultura, 20 de enero de 2013.
- [11] MARCO, Aurora; ANXO, Serafín; PORTO, Ucha. *A Escola Normal de Santiago de Compostela: de Escola Normal Superior a Escola Universitaria, 1849-1996* (en gallego). Ed. Univ. Santiago de Compostela, 2000
- [12] MONTESINOS, Benjamín. *Fallece Antonia Ferrín Moreiras, primera astrónoma gallega*. Diario El País, 10 de agosto de 2009.
- [13] RÍOS FACHAL, Matilde. *Álbum de mulleres: Antonia Ferrín Moreiras. A contadora de estrelas* (en gallego), 2010. Disponible en <http://culturagallega.gal/album/detalle.php?id=220>
- [14] VÁZQUEZ ABAL, María Elena, Vila Avendaño, Pilar. *Josefina Ling Ling*. CEIP de Laredo, 2014.
- [15] VERDEJO, Amelia. *Antonia Ferrín Moreiras*. 2010, Disponible <http://igualmat.uvigo.es/>
- [16] WEB1: La Tabla Periódica de las Científicas. Actualidad, Blog Naukas. Disponible en naukas.com.

Sobre el autor:

Nombre: Juan Núñez Valdés

Correo Electrónico: jnvaldes@us.es

Institución: Universidad de Sevilla (España).

Juegos y Rarezas Matemáticas

Las matemáticas en la notación de ajedrez

Mathematics in chess notation

Ronnie Torres Hugues

Yudeimys Ymas Dávila

Enrique Nieves Santana

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 109-133, ISSN 2174-0410

Recepción: 16 mar'20; Aceptación: 5 may'20

1 de octubre de 2020

Resumen

En este trabajo se presenta un resumen histórico de las diversas notaciones que se han empleado para registrar partidas de ajedrez, a partir de un enfoque geométrico, donde se comentan los sistemas de coordenadas desarrollados. Además, se realizan análisis en los que se considera al tablero de ajedrez como un plano cartesiano, así como el componente vectorial que presentan las piezas y la importancia para los planes del juego. Por último, se presentan curiosidades sobre el juego y las matemáticas, destacando la figura de Euler.

Palabras Clave: Notación de ajedrez, matemáticas, tablero de ajedrez, plano cartesiano, análisis vectorial.

Abstract

This work shows a historical resume about many notations that has been employed to record chess play, taking into account a geometrical focus, where the coordinate systems developed are commented. Besides, analysis considering chess board as Cartesian plane, the vectorial component of pieces movement and its importance for game's plain is performed. At last, curiosities about the game and mathematics, lighting Euler, are shown.

Keywords: Chess notation, mathematics, chess board, Cartesian plane, vectorial analysis.

1. Introducción

El ajedrez: el juego de la complementación y de la discordia en la unión. Los eternos rivales se acoplan: letras y números limitan y descubren el teatro de operaciones conformado por colores que se alternan, ver Figura 1. Masculino y femenino, plebeyos y monarcas comprometidos luchan por un bien común. El blanco y negro se relacionan dándole sentido y explicando el significado implícito del famoso símbolo chino Yin-Yang.

En cualquier momento comienza la contienda. Se planifican las estrategias, poniendo atención al campo de batalla. A la hora indicada comienza la acción, primero la infantería, luego la caballería protagonista de interesantes maniobras, que le dan vida a la guerra, convirtiendo el juego en arte, ciencia y deporte.



Figura 1. Piezas gigantes en un jardín.

Durante todo el tiempo que dura la partida se anotan los movimientos propios y los del rival, ya que el análisis es el factor decisivo para el éxito. En esto es fundamental la forma en que el tablero de ajedrez está estructurado y el sistema de coordenadas que presenta.

Actualmente la notación de ajedrez sobrepasa las fronteras de los lenguajes juntando caracteres universales tanto de matemática, como del idioma. El uso del triángulo con la punta hacia arriba es tan enérgico como lo es en el misticismo. En ambos casos refiere una trascendencia, ya sea en forma de idea o de virtud. Otros tienen su turno, como es el de exclamación (!) para significar lo bien hecho, el de interrogación (?) para lo mal hecho, el de multiplicación (x) para la captura (o en buen español "comer"), el de igualdad (=) para la promoción de peones, entre varios otros, tales como: (∞), (...), (+) y (-).

A través de los años, se han desarrollado diversos tipos de notación de ajedrez, que han evolucionado hasta la actual. En estas el tablero se ha concebido como un plano cartesiano con un sistema alfanumérico de coordenadas. De ahí que es objetivo de este trabajo describir algebraicamente las distintas notaciones empleadas. Para ello se realiza un análisis histórico y geométrico del tablero, se desarrolla el movimiento de las piezas desde un punto de vista vectorial, se caracterizan las distintas notaciones empleadas a lo largo de la historia, así como

su evolución y se muestran algunas curiosidades del ajedrez, en cuanto a las notaciones y al tablero asociadas a las matemáticas.

2. Tablero de ajedrez

Desde los inicios de este juego-batalla se ha establecido un tablero para su desarrollo. Este tiene como célula básica un cuadrado subdividido por cuatro cuadrados iguales de colores alternos, que se repite 16 veces, ver Figura 2.

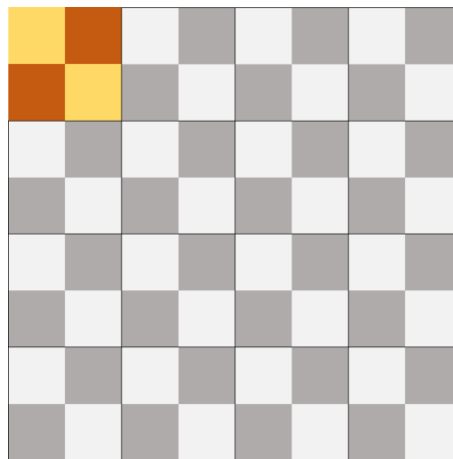


Figura 2. Célula básica del tablero de ajedrez.

Para poder representar gráficamente un movimiento, anotar una posición o dar respuesta a una situación específica, a este plano se le ha tenido que incorporar un sistema de coordenadas, de forma tal que cada casilla tenga una identificación única a partir de la nomenclatura que adopten los ejes ortogonales establecidos: eje horizontal X y eje vertical Y. La intersección de estos ejes (origen de las coordenadas) es extremadamente importante, y su ubicación depende de la notación que se adopta, las cuales se tratarán más adelante. Actualmente, la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE, por sus siglas en francés) ha establecido solo una [4].

Antiguamente esta superficie, en cuanto a colores, presentaba distintas configuraciones: casillas alternas rojas y negras, rojas y blancas o simplemente 64 blancas (delimitadas solo por líneas verticales y horizontales). Las formas escaqueadas se hicieron más populares y cómodas porque permitían visualizar mejor las jugadas y distinguir en cada campo los alfiles (que al inicio eran elefantes y luego bufones) [8]. Un cambio en el aspecto cromático ocurrió en el siglo XIII cuando las piezas y casillas no blancas (rojas preferiblemente) cambiaron al negro [8].

En la edad medieval, esta estructura alterna tuvo una gran influencia cultural ya que se podía apreciar en escudos y banderas, pavimentos, trajes y decoración. En todo aquello que se asociara al movimiento, a la dinámica [8]. Si se observa una fila o una columna se pudiera (con un poco de abstracción) ver una onda con los valles y las crestas, un patrón, ver Figura 3.

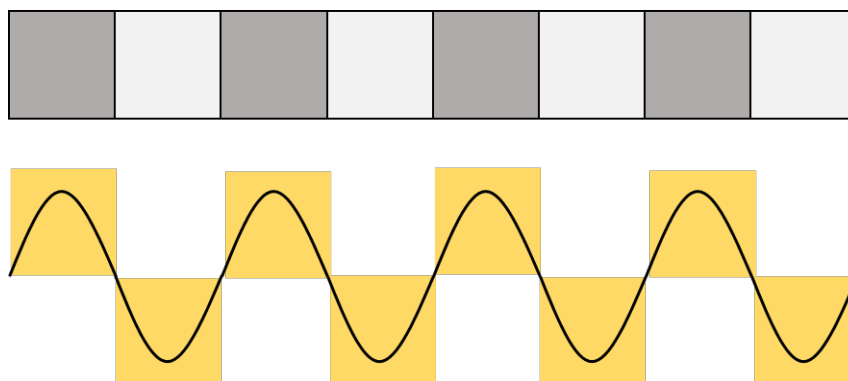


Figura 3. Representación como onda de una fila.

Por otra parte, para comprobar la sensación de movimiento de esta configuración basta con oscurecer algunas líneas del tablero, se podrán obtener algunos efectos como los mostrados en la Figura 4.

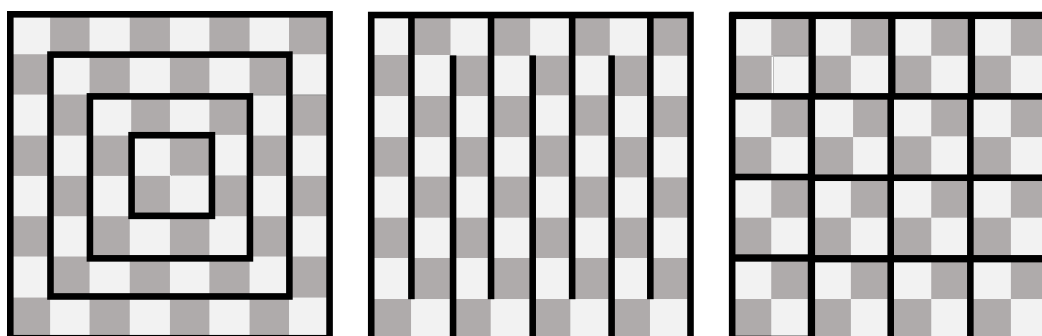


Figura 4. Diferentes formas de obtener la perspectiva de movimiento con el tablero.

Respecto al número de cuadrículas, los árabes no lo cambiaron, pero los europeos sí, ya que el 8 y el 64 no escondían ninguna simbología mística, más convenientes son el 3, el 7 y el 12 con sus múltiplos. En imágenes medievales se reproducen tableros de 3x3, 6x6 o 7x7 [8].

El empleo de un sistema de coordenadas se implementó casi con su origen, se plantea que los árabes lo usaban desde el año 880 y en 1295 Bonus Socius es el primer europeo en utilizar un sistema coordinado [10]. Nótese que fue en 821 cuando este juego entró en Europa, específicamente por la región de Algeciras, gracias a un cantante y músico persa de nombre Ziryab. Fue a partir de la segunda mitad del siglo XV que se reformó el ajedrez: el alfil y la dama alcanzaron la movilidad que presentan hoy [1], el peón podía avanzar dos pasos al inicio y se introdujo el enroque [1].

En la enciclopedia de variantes de ajedrez (más de 2000) aparecen varias en las que este cambia de forma, algunas de las cuales se muestran en la Tabla 1 [9].

Tabla 1. Algunas variantes de ajedrez cambiando el tablero [9].

No.	Nombre	Tablero	Observación
1	Cilíndrico	8x8	Como si el tablero fuera un cilindro. Por tanto, cuando una pieza sale por el lado derecho, reaparece por el lado izquierdo y viceversa.
2	de Capablanca	10x8	Se incorporan dos piezas más: un canciller y un arzobispo.
3	del mensajero	8x12	Se incorporan cuatro piezas más: el consejero, el bufón, el mensajero y el arquero.
5	hexagonal	hexágono regular	91 hexagonales, formando un hexágono regular (cada lateral tiene seis casillas). Se emplean tres colores en vez de dos para rellenar las casillas.
6	para cuatro jugadores		Hecho a partir de un tablero estándar de 8x8, con 3 filas adicionales de 8 casillas cada una en los lados
7	Grande Acedrex	12x12	Cada jugador tiene doce peones, un rey, un grifo, dos cocodrilos, dos jirafas, dos unicornios o rinocerontes, dos leones, y dos torres.
8	Circular	circular	Consistente en cuatro anillos, cada uno de 16 casillas.
9	de doble ancho	16x8	Se conectan dos convencionales y cada jugador juega con dos conjuntos completos de piezas. Debido a que cada jugador tiene dos reyes, el primer rey puede ser capturado sin terminar la partida.
10	Volador	8x8x2	Sólo ciertas piezas se pueden mover hacia y desde un nivel adicional.
11	en rejilla		El tablero tiene superpuesta una rejilla de líneas. Para que un movimiento sea legal, tiene que cruzar al menos una de estas líneas.
12	Infinito		El tablero tiene una forma de símbolo de infinito. Está conectado en el centro y se utilizan todas las piezas del ajedrez tradicional.
13	Los Álamos	6x6	Jugado en un tablero sin alfiles.
14	de Alicia	Dos tableros	Una pieza que se mueve en el tablero pasa "a través de un espejo" al otro tablero.
15	de Romanchenko	8x8	En el tablero tradicional las filas de la e-h se desplazan dos casillas verticalmente. Se incorporan dos números más: 9 y 10.

2.1 Sistemas de coordenadas

Dada la propia forma plana del tablero de ajedrez, este se puede ver como un mapa o un plano cartesiano, ya que en él se puede representar relaciones de movimiento. Para ello se dispone de dos coordenadas (x ; y) que pueden adoptar 8 valores cada una, para el total de 64 posiciones en las que se puede colocar cada una de las piezas. Este sistema bidimensional presenta ejes ortogonales que se extienden desde un origen hasta el último rincón de este espacio. Los ejes se interceptan en un único punto, que se denota punto de origen de coordenadas.

El plano cartesiano debe su nombre al filósofo francés René Descartes (1596-1650), creador del campo de la geometría analítica.

En la actualidad se ha impuesto un sistema de coordenadas que responde a la notación algebraica, con origen en la casilla negra ubicada en el extremo inferior izquierdo del tablero y extendiendo sus ejes hacia la derecha y hacia arriba, ver Figura 5.

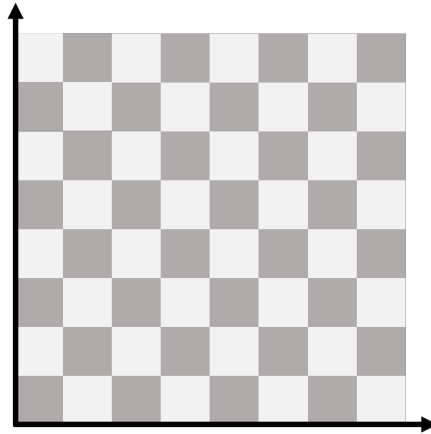


Figura 5. Ejes del sistema de coordenadas en la notación algebraica.

Pero este no es el único sistema creado. Han aparecido varios sistemas de notación, que han ubicado el origen de coordenadas para los ejes en un lugar diferente. En este sentido la variedad es abundante, por ejemplo: con un solo origen se encuentra las notaciones Koch, Forsyth y el código Uedeman, en el que el eje vertical tiene dos sentidos y con dos orígenes, uno para cada bando, aparecen las notaciones descriptiva y Gringmuth, ver Figura 6.

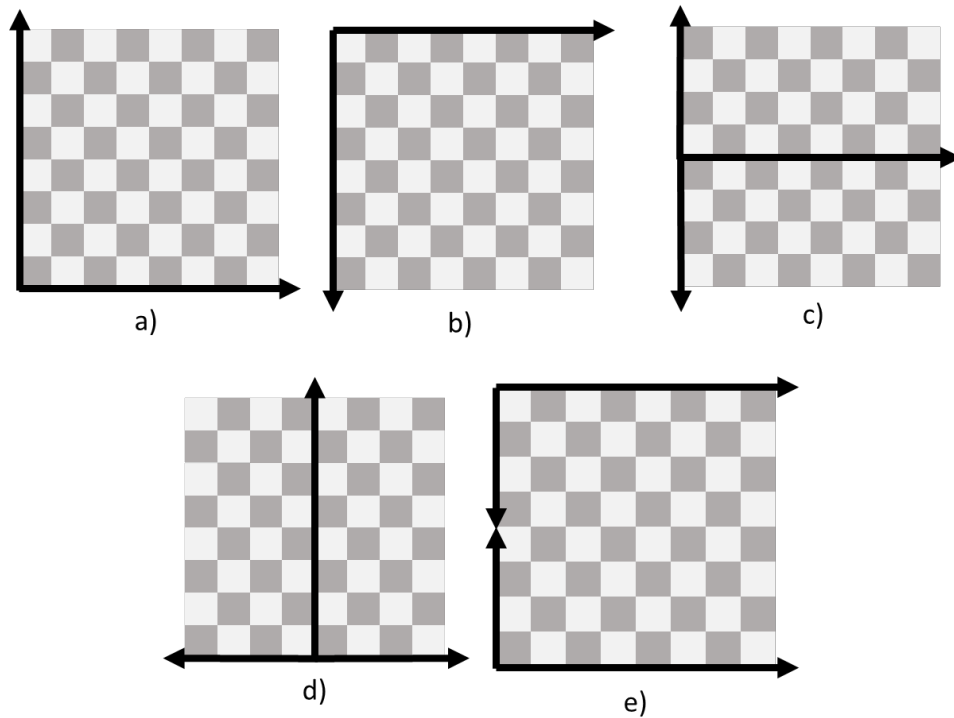


Figura 6. Ejes del sistema de coordenadas en notaciones a) Koch b) Forsyth, c) código Uedeman, d) descriptiva para las blancas y e) Gringmuth.

Por tanto, se puede establecer una tipología de ejes para los sistemas de coordenadas de las notaciones de ajedrez. Una primera clasificación tiene que ver con la cantidad de orígenes, otra tiene que ver con la posibilidad de un eje de tener un sentido o dos y una tercera con la ubicación del origen (en el extremo o en el medio). Una mayor descripción de estas notaciones se abordará más adelante.

3. Análisis vectorial

Como juego de mesa con piezas móviles, como las damas, damas chinas o parchís, entre otros, este es un juego dinámico en el que las piezas están en movimiento. A diferencia de estos, cada pieza tiene una forma diferente de moverse, ver Figura 7.

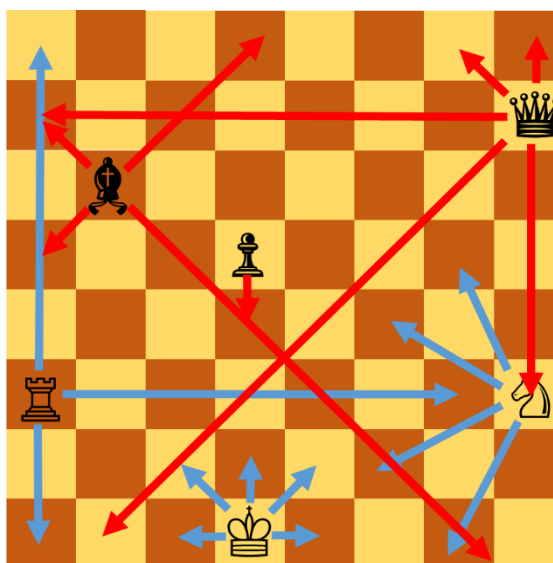


Figura 7. Movimiento de figuras y correspondencia con vectores.

Por tanto, a la hora de calcular los posibles desplazamientos hay que tener en cuenta el alcance del vector de cada una. Es decir, a partir de su posición inicial $(x_0; y_0)$ cual será la ubicación final $(x_1; y_1)$, lo que constituye un vector posición. Por ello, es tan importante establecer un sistema de coordenadas para la notación de las jugadas. Más adelante se abordará lo relacionado con las distintas notaciones que se han creado.

No debe confundirse este vector posición con la distancia, ya que el espacio recorrido por el objeto no tiene por qué coincidir con la longitud recta que une al punto de partida y al de llegada, por ejemplo: el movimiento en L del caballo. Para el resto de las piezas, como tienen un movimiento rectilíneo la cantidad de casillas recorridas es la misma que la cantidad que hay entre la posición inicial y final.

El máximo potencial de desplazamiento de cada pieza se encuentra en el centro del tablero, por eso su importancia. De ahí, el caballo presenta ocho vectores (dominando igual cantidad de casillas), el alfil cuatro vectores que coinciden con las diagonales mayores (dominando 14 casillas). Por su parte, las torres siempre pueden controlar la misma cantidad de casillas (16) con dos o cuatro vectores, pero desde el centro su vector posición es más corto hacia cualquier extremo. En el caso de la dama, en las casillas centrales despliega ocho vectores controlando 29 casillas.

El rey y el peón son los que tienen el vector más corto (de una casilla, salvo el peón cuando sale que puede tener un vector de dos casillas), pero el primero a diferencia del segundo puede controlar las ocho que tiene a su alrededor, mientras que el otro solo la de adelante. Como curiosidades el peón es el único que implementa un vector diferente cuando captura, que no tiene vector hacia atrás (retroceso) y puede cambiarse por otra pieza, cambiando su potencial vectorial.

Obsérvese que en el jaque mate el rey se ha quedado sin movimientos.

En la estrategia que deben seguir los jugadores se plantean determinados principios que tienen como objetivo darles mayor movilidad a las piezas, o sea, establecer un vector de

mayor alcance. Por eso, los caballos deben alejarse de las bandas, los alfiles ocupar la diagonal mayor, las torres las columnas abiertas y la dama ponerla en acción en posiciones abiertas [2].

Por supuesto, en el contrajuego se trata de que el rival pierda espacio, por eso en algunos casos se deben poner los peones propios en las mismas casillas del color del alfil rival, si la posición es cerrada cambiar alfiles por caballos para quedarse con la pareja de caballos, en caso de posiciones abiertas lo contrario. En otro orden, también se puede reducir el alcance haciendo jugadas que obliguen a inmovilizar las piezas, por ejemplo: copar al caballo para que no pueda moverse o clavar y esclavizar piezas [2].

4. Sistemas de notación

Cualquiera de los sistemas que se presentan a continuación responde a una matriz donde cada elemento se relaciona con un vector de desplazamiento en un sistema de coordenadas específico.

4.1 Notación de los movimientos en prosa

Cuando apareció la necesidad de registrar las partidas comentándolas en los libros impresos, estas aparecían en forma de un párrafo de texto, donde no había separación entre cada jugada [6] [5], por ejemplo: el movimiento de un caballo podría ser registrado de la siguiente manera [3]:

"Entonces el rey negro en su segundo lance lleva adelante su caballo y lo ubica en la tercera casilla, enfrente del peón de su alfil".

Un gran seguidor de esta notación lo fue el gran jugador y músico del siglo XVIII André Danican Philidor (1726-1795), y como ejemplo clásico se encuentra un tratado publicado en 1747. Sin embargo, la manera de registrar las jugadas de Philidor tenía que ser mejorada si se pretendía que la literatura ajedrecística inglesa creciera y, por eso, se fueron introduciendo abreviaturas a partir de 1817, que ganaron terreno dando paso a la notación descriptiva.

4.2 Notación descriptiva

La notación descriptiva también es llamada sistema inglés. Con esta forma más simplificada de registrar partidas, los libros de ajedrez incluyeron más información y se hicieron más populares. Para poder utilizarla las columnas se denominan por el nombre de la pieza que las ocupaba inicialmente y cada jugador anotaba considerando la fila 1 como la más cercana a él, ver figura 8. Esto quiere decir que pudieran darse casos en los que tanto blancas como negras tenían la misma notación. En la Figura 8 se muestra a modo de ejemplo la designación de cuatro casillas, entre paréntesis se indica el color de referencia de las piezas.

PARA LAS BLANCAS	8								PARA LAS NEGRAS
	7					7AR (B)			
	6								
	5			5D (B)					
	4								
	3					6AR (N)			
	2	7TD (N)							
	1								
		TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR

Figura 8. Denominación para filas y columnas en notación descriptiva.

Los libros de ajedrez impresos antes de 1820 tenían como norma escribir en una línea el movimiento de cada jugador. Aparentemente, fue Philidor el primero en introducir la regla moderna de enumerar cada movimiento y su respuesta con el mismo número. Se hizo popular en Inglaterra y Francia en el siglo XVIII [7]. Los grandes maestros del pasado como Steinitz, Lasker, Capablanca, Alekhine, Bobby Fisher, y muchos otros utilizaron esta notación [11], que se abandonó oficialmente posteriormente.

En la Figura 9 se muestra la evolución temporal de las maneras de escribir el movimiento que en notación descriptiva actual es C3AR. Se puede apreciar los cambios fueron graduales, ver Figura 9.

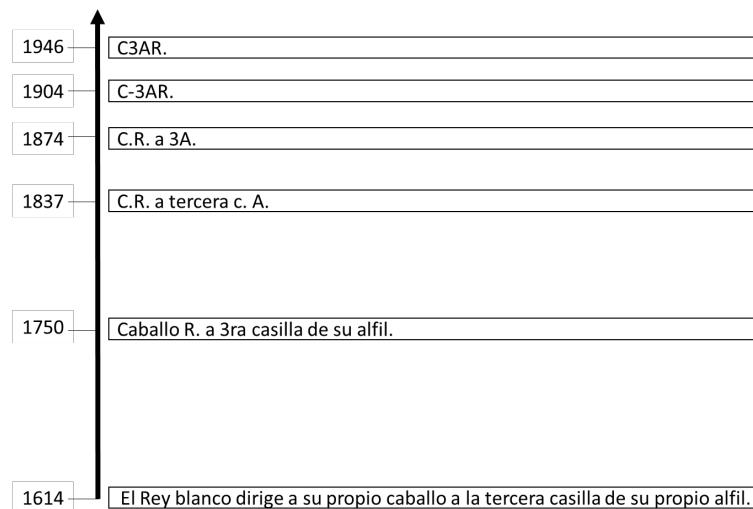


Figura 9. Línea del tiempo con la evolución de la notación descriptiva [3].

Por su parte, en el periodo del shatranj (antecesor árabe del ajedrez moderno) también fue utilizada una especie de notación descriptiva. Esto hizo posible registrar juegos y finales. Los jugadores comenzaron a analizar toda clase de posiciones desde el medio juego y los finales, y entonces comenzaron a elaborar los suyos propios, marcando el nacimiento de la composición en ajedrez [1].

4.3 Notación algebraica

También conocida como notación francesa. Se pueden encontrar diversas referencias sobre el uso de esta notación, por ejemplo, en 1173 se utiliza la notación algebraica en un manuscrito francés [10], también se dice que fue desarrollado por el sirio Philipp Stamma (1705-1755) en 1737 cuando publica en París el libro *Essai sur le Jeu des Échecs*, ver Figura 10, una colección de posiciones de partidas, partiendo de una determinada posición [6] y, por otra parte, se plantea que este la reintrodujo haciéndole unas mejoras [7].



Figura 10. La primera página del libro y la correspondiente a la partida LXXXVI [6]

Básicamente consiste en establecer un sistema de coordenadas con un único punto de referencia, en el que el eje horizontal está compuesto por las primeras ocho letras (minúsculas) del abecedario [a b c d e f g h], comenzando de izquierda a derecha. Por su parte, en el eje vertical, y de abajo hacia arriba, se establecen los [1 2 3 4 5 6 7 8], ver figura. Una casilla se refiere escribiendo primero la letra de la columna y luego el número de la. En la Figura 11 se muestra, a modo de ejemplo, la designación de cuatro casillas. Las blancas se colocan en las filas 1 y 2 y las negras en la 7 y 8. Desde 1981 es el único sistema de notación oficial en ajedrez, reemplazando al sistema de notación descriptiva [10].

8								
7					f7			
6								
5			d5					
4								
3					f3			
2	a2							
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

Figura 11. Denominación para filas y columnas en notación algebraica.

Existen varias formas de usarla:

1) Notación algebraica estándar o corta (SAN por sus siglas en inglés), en él solamente se escribe la inicial (en mayúscula y según el idioma) de la pieza y la casilla de destino, por ejemplo: 2. Cf3 Cc6, es la forma más popular de este sistema.

2) Notación algebraica ampliada o larga (LAN por sus siglas en inglés), en el que se registra la casilla de salida y de llegada de la pieza movida, por ejemplo: 1. e2-e4 e7-e5;

3) Notación algebraica mínima (MAN por sus siglas en inglés), es similar a la SAN, pero omite los indicadores para la captura ("x") y el jaque ("+").

4) Notación algebraica reversible (RAN por sus siglas en inglés) está basado en LAN, pero añade una letra adicional para la pieza que fue capturado, en su caso. El movimiento puede ser revertido moviendo la pieza a su plaza original, y la restauración de la pieza capturada. Por ejemplo, Td2xAd6.

5) Notación algebraica reversible concisa (CRAN por sus siglas en inglés) es como RAN, pero omite la casilla si no es necesaria para eliminar la ambigüedad del movimiento. Por ejemplo, Td2xA6. Véase que en este caso la torre solo puede capturar al alfil en d6, por lo que se puede prescindir de indicar la letra. Otro caso sería Td2xAg, en el cual no es necesario aclarar que la casilla es g2.

6) Notación de Smith, diseñada para ser reversible y representar cualquier movimiento sin ambigüedad. La notación codifica la casilla de origen, la de destino, y qué pieza fue capturada, en su caso.

7) Notación coordinada, no usa abreviatura o símbolo para mostrar la pieza que se está moviendo. Se incluye la casilla de la que se mueve la pieza, así como su destino. En caso de promociones se incluye el tipo de pieza promocionada entre paréntesis. Ha demostrado ser

difícil para escribir y leer, pero es utilizado internamente por algunos programas informáticos relacionados con el ajedrez.

8) Notación algebraica con figurines (FAN por sus siglas en inglés), en el que se sustituye la letra de la pieza por una imagen de esta, ver Figura 12, así se evita que el lector se confunda o no se demore en traducir la denominación de las piezas en otros idiomas y se hace de la misma una notación totalmente internacional. Como excepción la letra 'P' de Peón nunca se usa y únicamente se anotan las coordenadas de la columna y fila final.



Figura 12. Figurines y denominación de piezas correspondiente (en español).

Esta variante fue usada por primera vez por Count Robiano en el año de 1846 y se le llamó “notación parlante” [11]. En 1927 se emplea por vez primera esta notación en una revista belga [3]. El método ha sido popularizado por periódicos y revistas de ajedrez.

Por su parte, los primeros en implementarlo fueron los jugadores de habla germana (Alemania y Suiza) [7] y luego, a mediados del siglo XIX se propaga su uso en el resto de Europa [6]. Tanto esta notación como la descriptiva fueron adoptadas de los jugadores musulmanes [7].

Como ya se planteó, la figura que más se relaciona con este sistema es Philip Stamma, originario de Alepo, Siria. Fue un famoso ajedrecista del siglo XVIII y habitual del club londinense Café Slaughter. El libro anteriormente mencionado, de su autoría, tuvo una repercusión extraordinaria, ya que, por primera vez, era posible escribir una jugada y su respuesta en una sola línea, introduciendo un orden en el texto y facilitando las referencias [7].

Sin embargo, su propuesta no fue exactamente la que se conoce hoy, sino que intentó hacer la notación completamente internacional usando nombres de piezas estándar, según la letra en su posición inicial, así como letras en mayúscula y números para las casillas, ver Figura 13 [6].

8.			A. E.					
7.			G. T.		T. T.	X. T.		
6.	A. E.			D. E.				
5.			D. E.					
4.								
3.								
2.								
1.								
	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.

Figura 13. Denotación de filas y columnas establecida por Philipp Stamma en 1737 [6].

De esta manera la torre del rey se escribía "H" en lugar de "T" a lo largo del juego, porque inicialmente estaba en la columna h; el rey: "E", la dama: "D" y el caballo de la reina: "B", etc. [7]. Para el peón usó "p" y un asterisco en caso de tener que aclarar un movimiento, por ejemplo *pe4 quiere decir que el peón de la izquierda se mueve para e4 y pe4* hace referencia al de la derecha. Además, no usaba marca para la captura ni símbolo para el enroque, simplemente se escribía RG1 o RC1 para los enroques corto y largo, respectivamente [7].

La forma moderna de la notación usando la inicial de las piezas para su denominación, minúsculas para las celdas y 0-0 ó 0-0-0 para los enroques fue introducida por Moses Hirschel en 1784, quien usaba el sistema ampliado [7].

Pero antes de los arreglos realizados por Stamma, la denominación para las casillas tenía otros formatos, provenientes de los musulmanes. Donde este estableció para las columnas las letras de la A a la H se usaban las letras t, sh, r, f, m, l, k, y, mientras que, para las filas, en vez de 1 a 8: a, b, j, d, h, w, z, h, ver figura. En otra variante, para las columnas se destinaban las letras de la a hasta la h, pero las filas comenzaban desde arriba hacia abajo con las letras k, l, m, n, o, p, q. La fila superior no tenía ninguna letra especial [7], ver Figura 14. Así fue como por primera vez se introdujo este sistema antes [7].

h							
z					lz		
w							
h			fh				
d							
j					lj		
b	tb						
a							
	t	sh	r	f	m	l	k

		c					
k					fk		
l							
m			dm				
n							
o					fo		
p	ap						
q							
	a	b	c	d	e	f	g

Figura 14. Denominaciones anteriores a las de Stamma para filas y columnas en la notación algebraica.

Al comienzo del siglo XVI se usaron otras variantes para las casillas y llevar a cabo una notación de este tipo. Una fue propuesta por Köbel, que usa solamente letras, y otra fue empleada por los italianos con números, ver Figura 15. Ambas formas han sido consideradas como torpes y chapuceras para ser usadas [7].

a	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah
b	bc	bd	be	bf	bg	bh	bi
c	cd	ce	cf	cg	ch	ci	ck
d	de	df	dg	dh	di	dk	dl
e	ef	eg	eh	ei	ek	el	em
f	fg	fh	fi	fk	fl	fm	fn
g	gh	gi	gk	gl	gm	gn	go
h	hi	hk	hl	hm	hn	ho	hp

64	63	62	61	60	59	58	57
56	55	54	53	52	51	50	49
48	47	46	45	44	43	42	41
40	39	38	37	36	35	34	33
32	31	30	29	28	27	26	25
24	23	22	21	20	19	18	17
16	15	14	13	12	11	10	9
8	7	6	5	4	3	2	1

Figura 15. Otras variantes para denominar casillas. A la izquierda la de Köbel y a la derecha la italiana [7].

Por su parte, en las antiguas revistas soviéticas se implementaron ligeros cambios, por ejemplo: para la captura se omitía el signo "x" y, en su lugar se empleaba el signo ":", es decir, la jugada exd4 sería ed o e:d.

4.4 Notación Forsyth

En 1883 apareció una notación con un objetivo diferente: registrar posiciones. La idea fue del editor de ajedrez del *Glasgow Weekly Herald*, David Forsyth (1854 - 1909). En esta, de forma eficiente, no hace falta dibujar un diagrama y se emplean muy pocos caracteres. El tablero se mira desde la usual posición de las blancas (blancas abajo, negras arriba). Para anotar se comienza desde la parte superior izquierda del tablero y se va recorriendo fila por fila, a la par se van registrando las piezas y los espacios, estos últimos utilizando números (1=un espacio; 2=dos espacios, etc) [13]

Las piezas se denominan con su inicial y para diferenciar las blancas de las negras, las primeras se escriben con mayúscula, mientras que las otras en minúscula o mayúsculas encerradas en un círculo. Cada fila se puede indicar en un renglón [13] o separadas por el signo "/". A continuación, se muestra una posición y la correspondiente notación en este sistema, ver Figura 16. Véase que para las negras se ha usado la minúscula.

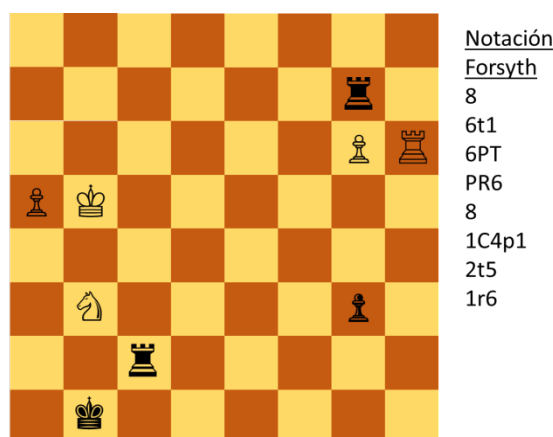


Figura 16. Posición y su correspondiente notación Forsyth.

Se puede entender que en la fila 8 no hay ninguna pieza. Luego en la 7 hay seis casillas deshabitadas, una torre negra y un espacio en blanco. En la 6 hay otras seis casillas vacías, un peón blanco y una torre blanca. Por su parte, en la 5 hay un Peón blanco y al lado el rey de este color seguido de seis espacios. La fila 4 tiene la misma situación que la 8. En la 3 hay un espacio, un caballo blanco, cuatro vacíos, un peón negro y un espacio. En la 2 dos casillas vacías, una torre negra y otras cinco vacías. En la última, la 1, hay un espacio, el rey negro y seis espacios más.

Más tarde, en 1993 Steven J. Edwards le hizo arreglos para poderlo implementar en programas de computación. A partir de esto se le puede identificar como FEN (*Forsyth-Edwards Notation*)

4.5 Notación Gringmuth

Este método fue inventado por Dimitri Alexeievich Gringmuth, ajedrecista de San Petersburgo, para facilitar el envío de jugadas por telegrama. Se referencia un match acontecido en 1886, en la que se implementó, entre Londres y St. Petersburgo.

Las filas están etiquetadas, partiendo de cada extremo, como "a", "e", "i", "o", "o", "i", "e" y "a" y las columnas como "b", "c", "d", "f", "g", "h", "k" y "l" para las blancas y "m", "n", "p", "r", "s", "t", "w" y "z" para las negras, ver figura. Cada casilla se denomina con las dos letras que corresponden con la columna y la fila (e4=go y e5=so), considerando que el tablero se divide a la mitad, de ahí que cada columna posea dos letras, una para cada bando. En la Figura 17 se muestra, a modo de ejemplo, la designación de cuatro casillas [13].

	m	n	p	r	s	t	w	z
a								
e						te		
i								
o			ro					
o								
i						hi		
e	be							
a								
	b	c	d	f	g	h	k	l

Figura 17. Denominación para filas y columnas en notación Gringmuth

A su vez, cada movimiento se anota con cuatro letras, las dos primeras para la casilla de origen y las otras dos para la casilla de destino (1. e2 e4...e7 e5 se anotaría 1. gego-seso). Se omiten signos, no se especifica qué pieza hay en la casilla de origen y el enroque se considera como un movimiento del rey.

Por su parte, hay quien lo identifica con el código Uedemann, ideado por Louis Uedemann (1854-1912) [10]. Fue muy usado entre los barcos de la marina de la URSS. En este, a diferencia con la otra notación, las columnas en vez de denominarse con dos letras (según el bando), lo hace con una sola: "b", "d", "f", "g", "h", "k", "l" y "p", ver Figura 18.

a								
e					ke			
i								
o			go					
o								
i					ki			
e	be							
a								
	b	d	f	g	h	k	l	p

Figura 18. Denominación para filas y columnas en el código Uedeman

4.6 Notación Koch

Este sistema es muy similar al algebraico. Fue empleado en juegos por correspondencia, pero en la actualidad ha dejado de utilizarse. Las casillas se identifican con dos cifras, la primera por las columnas y la segunda por las filas. Ambas se numeran de 1 a 8 de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, ver Figura 19 [13]. En esta se muestra, a modo de ejemplo, la designación de cuatro casillas.

8								
7					67			
6								
5			45					
4								
3					63			
2	12							
1								
	1	2	3	4	5	6	7	8

Figura 19. Denominación para filas y columnas en notación Koch.

4.7 Código Rutherford

Fue creado por Sir William Watson Rutherford (1853–1927) en 1880 ya que la oficina británica de correos solo admitía palabras en latín en los telegramas. Como ventaja, permitía que se transmitieran movimientos para dos juegos al mismo tiempo. Los movimientos legales en la posición se contaban utilizando un sistema hasta alcanzar el movimiento realizado. El número de movimiento del primer juego se multiplicó por 60 y se agregaba al número de movimiento del segundo juego. Se agregaban ceros hasta completar un número de cuatro dígitos. Los primeros dos dígitos serían del 00 al 39, que correspondían a una tabla de 40 raíces latinas. El tercer dígito correspondía a una lista de 10 prefijos latinos y el último dígito correspondía a una lista de 10 sufijos latinos. La palabra resultante era transmitida [13].

Después de que se cambiaron las reglas para permitir el cifrado en los telegramas, este sistema fue reemplazado por la notación de Gringmuth.

4.8 Sistemas de notación para computadoras

Con el desarrollo de las tecnologías de computación, el ajedrez también se vio beneficiado y aparecieron sistemas de notación para las máquinas. Estos son los más comunes:

- Notación Portable para Juego (PGN por sus siglas en inglés). Es la más común de todas y se basa en la algebraica.
- Steno-Chess. Es otro formato ideado para el procesamiento de las computadoras.
- Notación de Forsyth–Edwards. En este formato se anota en una línea la posición de las piezas en el tablero siguiendo los principios de la notación de Forsyth. Además, contiene otras informaciones asociadas al enroque, números de movimientos y color del bando en turno. Se ha incorporado al PGN.
- Descripción extendida de la posición (EPD por sus siglas en inglés). Usa caracteres ASCII para establecer la posición en el tablero. Se usa para comandos de intercambio entre programas de ajedrez.

5. Miniaturas

Philidor y Stamma fueron rivales como jugadores y autores. Philidor derrotó a Stamma en un match [7] razón por la cual su libro se hizo más popular que el de Stamma, en Inglaterra, y su sistema de notación se transformó en el dominante. Sin embargo, el libro de Stamma también fue ganando popularidad, y durante el siglo XIX su sistema se había convertido en la norma en algunos países europeos. De esta manera comenzó una batalla entre notaciones descriptiva y algebraica, que continuó en tiempos modernos [3].

Como se ha venido tratando en cada notación, se han escogido cuatro casillas para ejemplificar las notaciones. A modo de resumen se presentan estos ejemplos en la Tabla 2. En el caso de la notación descriptiva se indica entre paréntesis que color de piezas se ha tomado de referencia.

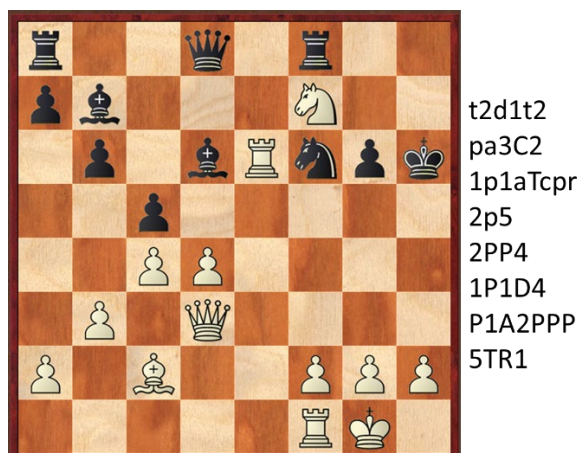
Tabla 2. Ejemplos de distintas formas de anotar un movimiento.

Notación						
Descriptiva	Algebraica	Gringmuth	Koch	Musulmán	Köbel	Italiana
7TD (N)	a2	be	12	tb, ap	g	16
5D(B)	d5	ro	45	fh, dm	dg	37
6AR(N)	f3	hi	63	lj, fo	fl	19
7AR(B)	f7	te	67	lz, fk	bg	51

Para mayor recreación se reproduce en las cuatro notaciones fundamentales una partida entre José Raúl Capablanca (con blancas) y Charles Jaffe (con negras), acontecida el 5 de marzo de 1910 en Nueva York, ver Tabla 3. La posición final se escribe en notación Forsyth, ver Figura 20.

Tabla 3. Partida registrada en varias notaciones.

No.	Algebraica		Descriptiva		Koch		Gringmuth	
1	d4	d5	P4D	P4D	4244	4745	fefo	rero
2	Cf3	Cf6	C3AR	C3AR	7163	7866	kahi	wati
3	e3	c6	P3R	P3AD	5253	3736	gegi	pepi
4	c4	e6	P4AD	P3R	3234	5756	dedo	sesi
5	Cc3	Cbd7	C3AD	CD2D	2133	2847	cadi	nare
6	Ad3	Ad6	A3D	A3D	6143	6846	hare	tari
7	O-O	O-O	O-O	O-O	5171	5878	gaka	sawa
8	e4	dxe4	P4R	PxPR	5354	4554	gigo	rogo
9	Cxe4	Cxe4	CxP	CxC	3354	6654	digo	tigo
10	Axe4	Cf6	AxC	C3AR	4354	4766	figo	reti
11	Ac2	h6	A2A	P3TR	5432	8786	gode	zezi
12	b3	b6	P3CDD	P3CD	2223	2726	ceci	neni
13	Ab2	Ab7	A2C	A2C	3122	3827	dace	pane
14	Dd3	g6	D3D	P3C	4143	7776	fafi	wewi
15	Tae1	Ch5	TD1R	C4T	1151	6685	baga	tizo
16	Ac1	Rg7	A1A	R2C	2231	7877	ceda	wawe
17	Txe6	Cf6	TxP	C3A	5156	8566	gasi	zoti
18	Ce5	c5	C5R	P4A	6355	3635	hiso	pipo
19	Axh6+	Rxh6	A6T+	RxA	3186	7786	dazi	wezi
20	Cxf7+		CxPA		5567	0	sote	



t2d1t2
pa3C2
1p1aTcpr
2p5
2PP4
1P1D4
P1A2PPP
5TR1

Figura 20. Posición después de la jugada 20 y en la notación Forsyth correspondiente.

Con la notación algebraica se puede obtener, en un solo movimiento, una cadena alfanumérica de 2 a 7 caracteres sin contar los relacionados con observaciones (ej: ! o ??, etc.). La primera cantidad corresponde con un movimiento de peón (ej: e4). Tres elementos se logran de dos formas: una captura de peón (ej: exd) y un movimiento de pieza (ej: Cc3). Cuatro caracteres hacen alusión a un movimiento con ambigüedad (ej: Cbd2), a la captura por una pieza (ej: Dxd7), a una jugada de jaque (ej: Ac5+) y a la promoción de un peón (ej: e1=D). Para obtener media decena debe estar involucrada una pieza con movimiento ambiguo como el caballo o la torre, la promoción de un peón y un jaque o una captura (ej: T2a4+; Chxf2 y e1=D+). Por su parte, la media docena se logra cuando se mueve una pieza con ambigüedad y se captura dando jaque (ej: Taxf1+). Por último, los siete caracteres solo se pueden conseguir con la captura por un peón a la vez que promociona y da jaque (ej: cxd1=D+). Véase cómo en cada cadena se combinan de forma armónica símbolos matemáticos y del lenguaje para expresar una acción.

Usando la notación Gringmuth, solo con la mitad superior del tablero, se pueden formar más de 130 palabras (en español) a partir de movimientos válidos de las piezas. Por ejemplo, que empiecen con PA se encuentran: PANA, PARA, PASA, PATA, PAPI, PARE, PATO y PASE.

Con la notación Koch la diagonal a1-h8 (en notación algebraica) está compuesta por los múltiplos del 11 y la otra diagonal a8-h1 (en notación algebraica) encierra los múltiplos del 9. La consecución de los números del 1 al 8 de uno en uno se puede lograr con la diagonal a2-g8 (en notación algebraica). Lo más sorprendente es que varios múltiplos del 4 ¡pueden encontrarse a partir del salto de caballo!, partiendo de la casilla h8 (en notación algebraica), ver Figura 21

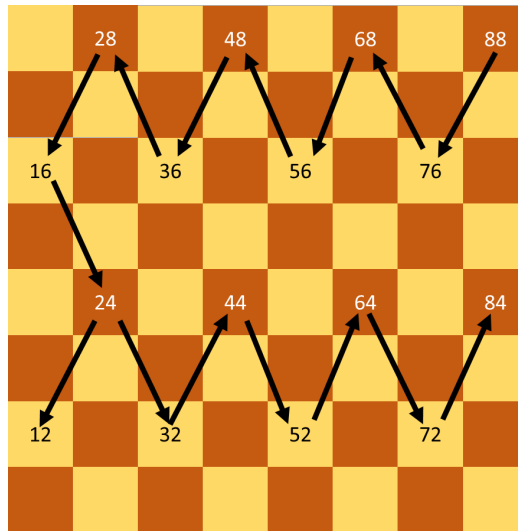


Figura 21. Patrón para hallar los múltiplos del 4 en la denominación de casillas de la notación Koch.

Otra notación que puede resultar confusa a los principiantes es cuando se informa lo que obtuvo un jugador respecto a otro después de haber jugado un match. Por ejemplo, en el encuentro entre Philidor y Stamma, mencionado anteriormente, el resultado a favor del primero fue de (+8 =1 -1). Esto quiere decir que ganó ocho partidas, una fue tablas y perdió igual cantidad, para un total de 10 partidas. El convenio en estos casos es que el número que acompaña al signo “+” son las victorias, al signo “=” las tablas y al signo “-” las derrotas.

Asociado con el tablero se presenta el problema del paseo del caballo, que es un famoso acertijo matemático de ajedrez. Este involucra el recorrido de la pieza por todo el tablero de ajedrez, siguiendo las reglas del juego de moverse en forma de L, y pasar por todos los escaques una sola vez en movimientos consecutivos. Uno de los que más aportó en la resolución fue el famoso matemático Leonard Euler en el siglo XVIII. Propuso como solución un cuadrado mágico de 8x8. Los escaques van numerados del 1 al 64, siguiendo una posible ruta, donde la suma de cada fila o columna da 260 [12], ver Figura 22.

8	1	48	31	50	33	16	63	18
7	30	51	46	3	62	19	14	35
6	47	2	49	32	15	34	17	64
5	52	29	4	45	20	61	36	13
4	5	44	25	56	9	40	21	60
3	28	53	8	41	24	57	12	37
2	43	6	55	26	39	10	59	22
1	54	27	42	7	58	23	38	11
	A	B	C	D	E	F	G	H

Figura 22. Cuadrado mágico de Euler.

Si se parte el cuadrado mágico en 4 pequeños cuadrados de 4x4, la suma es de 130.

Por último, se hace alusión a una notación especial para las piezas de ajedrez mágicas, aquellas que son usadas en variantes del juego que no sean las clásicas. Estas se pueden clasificar atendiendo al tipo de movimiento en saltadoras, corredoras, langostas, pieza marina y brincadoras. Esta forma fue propuesta por David Parlett en 1999 y modificada posteriormente. Las características de los distintos desplazamientos son especificadas a partir de una expresión que considera: condiciones, tipo de movimiento, distancia, dirección y otras. Por ejemplo, el Rey clásico sería: 1* (Distancia: 1 casilla, por eso 1; Dirección: todas las direcciones, por eso *), la Torres sería: n+ (Distancia: cualquier casilla, por eso n; Dirección: ortogonal cuatro sentidos, por eso +) y el Canciller (=C+T) sería: n+, ~1/2 (dos posibles movimientos, por eso la coma, uno como Torre y el otro saltando ortogonalmente 1 casilla y luego dos)

Conclusiones

A partir de lo relacionado anteriormente se puede concluir que:

El tablero de ajedrez, si bien mantuvo su forma cuadrada, a lo largo de la historia sufrió cambios asociados al número de casillas y alternancia entre los colores con vista a favorecer el desarrollo de las piezas y lograr un mayor entendimiento del juego. La simple idea de variar las dimensiones de este ha dado pie a otras variantes.

El registro de los movimientos de las piezas responde a una matriz cuyos elementos son vectores. Los planes trazados por los jugadores en el desarrollo del juego se pueden concebir a partir de analizar la amplitud del vector Desplazamiento, tratando de mejorar la movilidad de las piezas propias y a limitar la del rival. Con las capturas y los tenedores se logra ampliar el

campo de acción vectorial propio y con las entregas de piezas limitar parcial o totalmente el campo vectorial del Rey.

Cada notación empleada se ha logrado estableciendo en el tablero un sistema de coordenadas útil para sentar los movimientos de las piezas. La evolución de estas, buscando la forma de ser breves y efectivas, resolviendo cualquier ambigüedad, ha traído como consecuencia el establecimiento de una única forma: La algebraica, que en su variante con figurines logra sobrepasar las barreras del idioma y posibilitando estudiar de forma más eficiente.

En sentido general, el juego de ajedrez extiende su relación con las matemáticas a través de la notación de los movimientos de las piezas ya que el tablero es un plano cartesiano delimitado por un sistema de coordenadas y en las planillas de ajedrez, a medida que se va rellenando, se registra una matriz de dos columnas, cuyos elementos, como indican el movimiento de las piezas, son vectores de posición.

Referencias

- [1] AVERBACH, Yuri. *A History of Chess from Chaturanga to the present day*, pp., 69, 70 y 41, Russell Enterprises, EUA, 2012.
- [2] CAPABLANCA, José Raúl. *Arte y secretos del ajedrez*, pp. 57 y 45, Quetzal, Argentina, 2009.
- [3] ECHEVERRÍA, Juan. *La notación de ajedrez*, pp. 1, 4 y 3, monografías.com, 2012.
- [4] FIDE, *Leyes del ajedrez de la Fide*, pp. 13, FIDE, Atenas, 2017.
- [5] GANZO, Julio. *Historia general del ajedrez*, pp. 90, Ed. Ricardo Aguilera, España, 1973.
- [6] GUDE, Antonio. *Historia del ajedrez*, <https://antoniogude.com/stamma>.
- [7] MURRAY, Harold James Ruthven. *A History of Chess*, pp. 1199, 604, 1357, 293 y 1215, Skyhorse Publishing Inc., EUA, 2012.
- [8] PASTOUREAU, Michel. *Una historia simbólica de la Edad Media occidental*, pp. 318, 313 y 315, Editores Katz, Buenos Aires, 2006.
- [9] PRITCHARD, David. *The classified encyclopedia of chess variants*, pp. 93 y 113, John Beasley, England, 2007.
- [10] WALL, Bill. *Chess history and chronology*, <http://www.geocities.com/siliconvalley/lab/7378/histor y.txt>
- [11] MORENO, Enrique. Notación, <http://www.123ajedrez.com>
- [12] SIFUENTES, Aida. El caballo matemático de Euler, <https://chess24.com/es/informate/noticias/el-caballo-matematico-de-euler>

[13] WIKIPEDIA. Chess notation, https://en.wikipedia.org/wiki/Chess_notation

Sobre los autores:

Nombre: Ronnie Torres Hugues

Correo Electrónico: ronnie@cih.cujae.edu.cu

Institución: Centro de Investigaciones Hidráulicas. Universidad Tecnológica de La Habana “José Antonio Echeverría”, Cuba.

Nombre: Yudeimys Ymas Dávila

Correo Electrónico: yudeimys_ymas@unah.edu.cu

Institución: Departamento de BioSave. Universidad Agraria de La Habana “Fructuoso Rodríguez”, Cuba.

Nombre: Enrique Nieves Santana

Correo Electrónico: -

Institución: Dirección Municipal Boyeros del INDER., Cuba.

Juegos y Rarezas Matemáticas

El Gran Descubrimiento de Hummer

Hummer's Great Discovery

David Almorza

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 135–140, ISSN 2174-0410

Recepción: 6 abr'20; Aceptación: 13 may'20

30 de octubre de 2020

Resumen

A principios del siglo XX el mago Bob Hummer incluyó en su espectáculo un novedoso juego de magia con cartas al que llamó: el gran descubrimiento de Hummer. Un juego de los llamados automáticos o matemáticos que en este artículo se describe y se explica con detalle. Es un juego y a la vez una rareza matemática.

Palabras Clave: Magia, Matemagia, Hummer.

Abstract

At the beginning of the 20th century, the magician Bob Hummer included in his show a novel card trick that he called: Hummer's great discovery. A game of the ones known as automatic or mathematical that in this paper is described and explained in detail. It is a game and at the same time a mathematical oddity.

Keywords: Magic, Mathemagic, Hummer.

1. Introducción

Las referencias (Gardner (1969), Vinuesa (2011) y Alegría (2012)), señalan a Hummer como el primer mago en publicar un juego de magia que incluye la conocida como mezcla australiana. La publicación consistía en una hoja impresa editada por la tienda de magia Kanter's Magic Shop en Filadelfia en 1939, de la que trickshop.com ha hecho una reproducción: Hummer's Great Discovery (2018).

En términos generales, y a modo de introducción ya que ha aparecido el nombre, realizar una mezcla australiana en una baraja o en un grupo de cartas, consiste en colocar la primera carta, la que está arriba (en posición top, dicen los magos), la última de la baraja (posición bottom), y la siguiente carta de arriba se deja sobre la mesa. Así se repite el procedimiento hasta que solo queda una carta en la mano.

A este tipo de mezcla se le llama también Under - Down, porque una carta va debajo de la baraja (under) y la siguiente se descarta y se coloca sobre la mesa (down) con lo que ya no participa más.

En cualquier caso, el juego que realiza Hummer tiene un entramado mayor que finaliza con una mezcla australiana. Tiene dos versiones: una versión con diez cartas y otra versión con nueve cartas. Se le daba a escoger al espectador si quería usar nueve o diez cartas, y las instrucciones variaban según el número de cartas elegidas. En este trabajo se desarrollan ambos procedimientos y se describe en qué consiste el gran descubrimiento de Hummer.

Se trata de un juego de cartas de los que se definen como automático o matemático. Siguiendo las instrucciones del juego, siempre va a salir. Se trata de una rareza matemática porque no se ha dado una explicación de este tipo al procedimiento, y a la vez se trata de un juego matemático porque tiene el atractivo de descubrir qué le hace funcionar.

2. Versión con diez cartas

En el juego original, el mago entrega al espectador la baraja de cartas y se gira para no ver los movimientos que hará el espectador. Se le pide que escoja 10 cartas de la baraja y las mezcle. Las demás cartas no intervendrán en el juego. En este momento el espectador debe elegir una de esas 10 cartas, recordarla y ponerla en primera posición (top).

Con el mago todavía girado, se le pide al espectador que piense un número entre el 1 y el 9.487.365, y tendrá que pasar, una a una, tantas cartas desde arriba hasta abajo como el número que haya pensado. Ofrecer una cifra tan grande forma parte del espectáculo. Evidentemente el espectador pensará una cantidad razonable y pasará ese número de cartas. El espectador debe recordar su carta y también el número elegido, y avisar al mago cuando haya terminado de pasar las cartas.

Ahora el mago se da la vuelta y recibe el mazo de diez cartas. Pondrá el mazo a su espalda y, sin que el público lo vea, irá pasando una a una cada carta de su mano izquierda a su mano derecha. Con este procedimiento el orden de las cartas queda invertido. A continuación, pasará cinco cartas desde arriba hasta abajo.

Se le devuelve el mazo al espectador y se le pide que complete el juego. Para eso debe volver a pasar de nuevo tantas cartas desde arriba hasta abajo como hiciera antes, es decir, repetir el proceso. Si hubiera pensado en un número de dos o más dígitos (por ejemplo, el 28), solo debe pasar las cartas que indica el último dígito (8 en este caso).

Para finalizar, el espectador debe hacer una mezcla australiana Under - Down y la última carta que tendrá el espectador será precisamente su carta. Como ya se advirtió, la mezcla australiana forma parte solo del final del juego. Lo difícil es disponer las cartas de tal forma que la carta elegida se sitúe en la posición que se precisa para esta mezcla.

2.1. Explicación del juego.

El juego parte con diez cartas y la primera de ellas es la que ha elegido el espectador. Como al final se trata de una mezcla australiana, es necesario que esa carta acabe en quinta posición antes de empezar la mezcla (como demuestra en su trabajo Alegría, 2012).

El número de cartas que decida pasar el espectador desde arriba hasta abajo es irrelevante que sea mayor que diez, porque como solo hay diez cartas, cada diez cartas que pase ya después empezará con las cartas en la misma posición que al principio. Por tanto, podemos centrarnos en el caso de que elija un número entre el 1 y el 10.

Cuando el mago, con las manos a su espalda, invierte el orden, lo que ocurre es que la primera carta queda la última, la segunda queda en novena posición y así sucesivamente. Además, el mago pasa cinco cartas más desde arriba hacia abajo y por último el espectador tendrá que volver a pasar tantas cartas como al principio.

Vemos a continuación dos tablas con todas las opciones y cómo la posición final en que queda la carta pensada por el espectador siempre es la quinta posición, es decir, la posición buscada.

Tabla 1. Primeros movimientos del juego de Hummer con diez cartas.

Posición inicial carta elegida	Pasa x cartas desde arriba hacia abajo	Posición de la carta elegida	Se invierte el orden. Nueva posición:
1	$x = 10$	1	10
1	$x = 9$	2	9
1	$x = 8$	3	8
1	$x = 7$	4	7
1	$x = 6$	5	6
1	$x = 5$	6	5
1	$x = 4$	7	4
1	$x = 3$	8	3
1	$x = 2$	9	2
1	$x = 1$	10	1

Tabla 2. Últimos movimientos del juego de Hummer con diez cartas.

Se pasan 5 cartas. Nueva posición:	Pasa x cartas desde arriba hacia abajo	Posición final de la carta elegida
5	$x = 10$	5
4	$x = 9$	5
3	$x = 8$	5
2	$x = 7$	5
1	$x = 6$	5
10	$x = 5$	5
9	$x = 4$	5
8	$x = 3$	5
7	$x = 2$	5
6	$x = 1$	5

Supongamos que el espectador pasa 7 cartas desde arriba hasta abajo, la carta elegida se coloca en cuarta posición. A continuación, el mago invierte el orden, por lo que cambia a la séptima posición. Se pasan 5 cartas desde arriba hasta abajo y ahora la carta elegida subirá a la segunda posición. Para terminar, se vuelven a pasar tantas cartas como se pensaron en un principio, en este caso 7, y eso determina que la carta acabe en quinta posición.

En todos los casos ocurre esto y así puede aplicar la mezcla australiana y esa carta, la que ocupa la quinta posición, será la última que quedará y coincide con la que había elegido el espectador.

3. Versión con nueve cartas

El juego es el mismo, pero se realizan dos cambios en el procedimiento. El primer cambio es que el mago pasará seis cartas desde arriba hasta abajo en lugar de cinco. La otra modificación está en el número de cartas que pasa el espectador desde arriba hasta abajo justo antes de realizar la mezcla australiana. Si el número elegido tiene un dígito, pasará ese número de cartas, pero si el número elegido tiene dos dígitos o más, pasará tantas cartas como la suma de sus cifras hasta que quede una suma de un solo dígito.

Por ejemplo, si el espectador ha pensado el número 25, pasará tantas cartas como la suma de estas cifras, $2 + 5 = 7$. Y si ha pensado el 29 tendrá que hacer dos operaciones hasta que obtenga una cifra: $2 + 9 = 11$, y después: $1 + 1 = 2$. Este procedimiento convierte al número de nuevo en una cantidad entre 1 y 9 manteniendo el orden.

3.1. Explicación del juego.

El juego parte con nueve cartas y la primera de ellas es la que ha elegido el espectador. Como al final se trata de una mezcla australiana, es necesario que esa carta acabe en tercera posición antes de empezar la mezcla (como demuestra Alegría, 2012).

En cuanto al número de cartas que decida pasar el espectador desde arriba hasta abajo, es irrelevante que sea mayor que nueve, porque como solo hay nueve cartas, cada nueve cartas que pase ya después empezará con las cartas en la misma posición que al principio. Por tanto, podemos centrarnos al caso en que elija un número entre el 1 y el 9.

Cuando el mago invierte el orden la primera carta queda la última, la segunda queda en octava posición y así sucesivamente. Además, el mago pasa seis cartas más desde arriba hacia abajo y por último el espectador tendrá que volver a pasar tantas cartas como al principio con la consideración que se hizo antes para cuando haya pensado en un número de dos dígitos.

Vemos a continuación dos tablas con todas las opciones y cómo la posición final en que queda la carta pensada por el espectador siempre es la tercera posición, es decir, la posición buscada.

Tabla 3. Primeros movimientos del juego de Hummer con nueve cartas.

Posición inicial carta elegida	Pasa x cartas desde arriba hacia abajo	Posición de la carta elegida	Se invierte el orden. Nueva posición:
1	$x = 9$	1	9
1	$x = 8$	2	8
1	$x = 7$	3	7
1	$x = 6$	4	6
1	$x = 5$	5	5
1	$x = 4$	6	4
1	$x = 3$	7	3
1	$x = 2$	8	2
1	$x = 1$	9	1

Tabla 4. Últimos movimientos del juego de Hummer con nueve cartas.

Se pasan 6 cartas. Nueva posición:	Pasa x cartas desde arriba hacia abajo	Posición final de la carta elegida
3	$x = 9$	3

2	$x = 8$	3
1	$x = 7$	3
9	$x = 6$	3
8	$x = 5$	3
7	$x = 4$	3
6	$x = 3$	3
5	$x = 2$	3
4	$x = 1$	3

Supongamos que el espectador pasa 3 cartas desde arriba hasta abajo, la carta elegida se coloca en séptima posición. A continuación, se invierte el orden, por lo que cambia a la tercera posición. Se pasan seis cartas desde arriba hasta abajo y ahora la carta elegida bajará hasta la sexta posición. Para terminar, se vuelven a pasar tantas cartas como se pensaron en un principio, en este caso tres, y eso determina que la carta acabe en tercera posición.

En todos los casos ocurre esto y así puede aplicar la mezcla australiana y esa carta, la que ocupa la tercera posición, será la última que quedará y coincide con la que había elegido el espectador.

Referencias

- [1] ALEGRÍA, Pedro. Entre la matemática y la magia: la leyenda de Josefo y la mezcla australiana. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de la Ciencia*, 9 (3), pp. 410 – 421, 2012.
- [2] GARDNER, Martin. *The unexpected hanging and other mathematical diversions*, p. 155, The University of Chicago Press, 1991.
- [3] HUMMER, Robert. *Hummer's great Discovery*, pp. 1 – 4. Trickshop.com, USA, 2018.
- [4] VINUESA, Carlos. Círculos Mágicos. *Matematicalia*, 7 (4), pp. 1 – 9, 2011.

Sobre el autor:

Nombre: David Almorza.

Correo Electrónico: david.almorza@uca.es

Institución: Universidad de Cádiz, España.

Cuentos Matemáticos

Obsesionado con su imagen

Obsessed with her look

Marta María Paz Rodríguez

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 141-143, ISSN 2174-0410

Recepción: 10 Ene'16; Aceptación: 16 Feb'16

1 de octubre de 2020

Resumen

En este artículo se muestra uno de los cuentos presentados al concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE (Grupo de Innovación Educativa) Pensamiento Matemático de la UPM (Universidad Politécnica de Madrid), para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios. El juego de palabras y los conceptos que en él aparecen son muy bellos. Lenguaje cotidiano y técnico se juntan en un relato casi poético

Palabras Clave: Cuentos con contenido matemático, lenguaje matemático.

Abstract

This paper shows one of the tales presented to the contest about tales with mathematical content organized by the Innovation Educative Group "Mathematical Thinking". Ordinary language and technical concepts play together in a poetic story

Keywords: Tales with mathematical content, Mathematical Language.

1. Obsesionado con su imagen

Llevaba enamorado de ella demasiado tiempo. Le fascinaban sus *curvas* que parecían no tener *límite*. Perfecta la mirara por donde la mirara, *simétrica*, sin ninguna duda, como aquellas esculturas griegas en las que las *proporciones* se cumplían en cada pequeño detalle. Pero su belleza *infinita* y a la vez *indescifrable*, cada vez le robaban más el sueño. Vivía por y para ella. Y él sabía que todo aquello podría *derivar* en la nada. *Cero*. Y entonces quizás él empezase a verla como algo insignificante, reducida al *mínimo*. ¿O *máximo*? Aquella *función* le iba a volver loco.

Sobre la autora:

Nombre: Marta María Paz Rodríguez

Correo Electrónico: martapazro@gmail.com

Institución: Estudiante de la UPM en el momento del concurso.

Críticas y Reseñas

e-pi-log-0: Teatro interactivo. Un show inteligente
para ayudar a enseñar

e-pi-log-0: Interactive theater. A smart show to help
teaching

GIE Pensamiento Matemático

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 143–147, ISSN 2174-0410

Recepción: 30 Nov'19; Aceptación: 1 Jun'20

1 de octubre de 2020

Resumen

Esta es la reseña a una obra de teatro original creada por el Grupo de Innovación Educativa (GIE) “Pensamiento Matemático” de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) y que ha sido representada en diversas ocasiones. Se trata de un proyecto de innovación educativa que ha pretendido utilizar el teatro como instrumento de acercamiento a las matemáticas y como estímulo para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y el trabajo en equipo.

Palabras Clave: Teatro interactivo, innovación educativa, juegos de escape

Abstract

This paper describes the development of an original theater play created by the Innovative Education Group “Pensamiento Matemático”, from the Polytechnical University of Madrid. The play has been represented several times. It is included in an Innovative Education Project that aimed to use the theater as a tool of approaching to the Mathematics. The Project has also pretended to stimulate the logical and mathematical thinking and the team work.

Keywords: Interactive theater, Innovative Education, Escape games.

1. Introducción y descripción de la acción

La idea de escribir una obra de teatro como la que se presenta, nace de la experiencia que el GIE Pensamiento Matemático de la UPM ha adquirido a lo largo de los años sobre la

bondad de aplicar los retos, los juegos de estrategia y cooperativos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles.

En este caso, se ha querido ofrecer a la comunidad educativa una propuesta original e innovadora de teatro inteligente: el “e-pi-log-0 Show”. Un conjunto de retos colectivos llevado al teatro, donde todos los espectadores deben colaborar con su preparación, su razonamiento, su lógica, su capacidad deductiva y sus conocimientos matemáticos, para poder superar el desafío del show.

Se ha creado un espectáculo interactivo donde los espectadores (alumnos de diversas asignaturas de UPM, personal de la UPM y público general) deben resolver enigmas, superar pruebas, contestar preguntas relacionadas con las matemáticas, tomar decisiones, colaborar con el resto de los espectadores, y todo a tiempo real.

Con este tipo de acciones se ha pretendido presentar a la comunidad educativa y a los estudiantes, nuevas herramientas para el acercamiento a las matemáticas que sean un complemento para las asignaturas científicas de grado de la UPM, centrándose especialmente en las asignaturas del primer año de estudio y en el máster de formación del profesorado.

Con el proyecto desarrollado, se busca la diversión, la posibilidad de entrar en acción rápidamente, la cooperación y la activación del razonamiento lógico. Esto puede ser usado para fomentar el interés por las matemáticas, la lógica y otros temas importantes en la formación.

Es conocida la imparable corriente de los llamados Juegos de Escape, salas en las que grupos de personas se encierran para resolver retos que les llevan a salir, completando así el juego. El GIE ha utilizado la base de este tipo de actividades para desarrollar una propuesta diferente que permita una colaboración a gran escala entre los participantes y que se centre en retos de carácter científico.

Se trabaja entonces sobre la temática de los juegos de inteligencia que, en opinión de los miembros del grupo, resultan de gran interés para la docencia ya que fomentan el pensamiento matemático.

Uno de los resultados más importantes que se consiguen con acciones como la que se propone, es lo que se genera cuando un grupo numeroso de personas reacciona y consigue ponerse de acuerdo a través de la colaboración y el trabajo en equipo, compartiendo sus conocimientos en una cierta temática (en nuestro caso las matemáticas).

El proyecto podría definirse como un juego de lógica que, subido a un escenario, se juega con todas las personas que caben en el patio de butacas de un teatro. Para que la obra funcione, es necesario que tenga un ritmo adecuado y una complejidad accesible, trasladar esto a un escenario ha supuesto un reto importante para el que ha sido necesario contar, además de con los docentes que generen las pruebas a realizar, con un equipo de actores (alumnos de teatro de la UPM) y con una puesta en escena (luces, sonido e imágenes) adecuada, llevada a cabo también por alumnos UPM.

Después de años dedicados a la búsqueda de acciones de fomento del pensamiento lógico-matemático y del acercamiento a las matemáticas desde un punto de vista lúdico, el GIE Pensamiento Matemático ha querido crear un espectáculo didáctico y cooperativo donde todos los espectadores disponen de un tiempo limitado para resolver juntos los diferentes retos que se les proponen.

Pensamos que esta propuesta es muy novedosa, original y que ha captado el interés de los estudiantes y del público en general, a la vez que ha estimulado el ingenio y el raciocinio.

2. Descripción de la representación

La obra e-pi-log-0 centra su argumento en la búsqueda de un saboteador. Se trata de un show donde la trama gira en torno a la búsqueda de un personaje que, a lo largo de la historia, ha saboteado la carrera de ciertos científicos, artistas, deportistas, ingenieros, escritores, ... que vieron, de una manera u otra, su trayectoria truncada por algún suceso y/o no fueron reconocidos y valorados como merecían.

En este espectáculo, los maestros de ceremonia (Figura 1), con la ayuda de e-pi-log-0 (una inteligencia artificial, Figura 2), hacen viajar a los asistentes en el tiempo para ir presentando a ciertos personajes. El camino se complica y, para poder continuar, se deben resolver diversos y variados retos. Se guía a los espectadores hacia su resolución, lo que llevará a encontrar al saboteador que está poniendo trabas al viaje.



Figura 1: Actores de e-pi-log-0



Figura2: e-pi-log-0: la máquina

De esta forma, a lo largo de la representación, el público tiene que resolver los diferentes retos que se plantean y que están relacionados con cada una de las disciplinas que realizaban los personajes no reconocidos a lo largo de la historia, para poder dar con las pistas que lleven a desenmascarar al saboteador.

Puede verse el tráiler de las representaciones y un audiovisual explicativo del proyecto respectivamente en:

<https://www1.camino.upm.es/matematicas/teatro-e-pi-log-0/>

https://upm365-my.sharepoint.com/:v/g/person/marilo_lopez_upm_es/Ef2plyT3LphDi3sQ0_1EGyoBQOIg-hh8g_ymjBLiLt9rA?e=yW7euv

En la obra se trabaja, por un lado, la historia de la ciencia y del arte a través de la presentación de los personajes que van apareciendo en el desarrollo de la representación. Por otro, la resolución de los retos propuestos (Figura 3) que implica la utilización del razonamiento lógico del espectador, su ingenio, ciertos conocimientos sobre ciencia y arte, así como la capacidad de colaborar y trabajar en equipo con el resto de los asistentes.

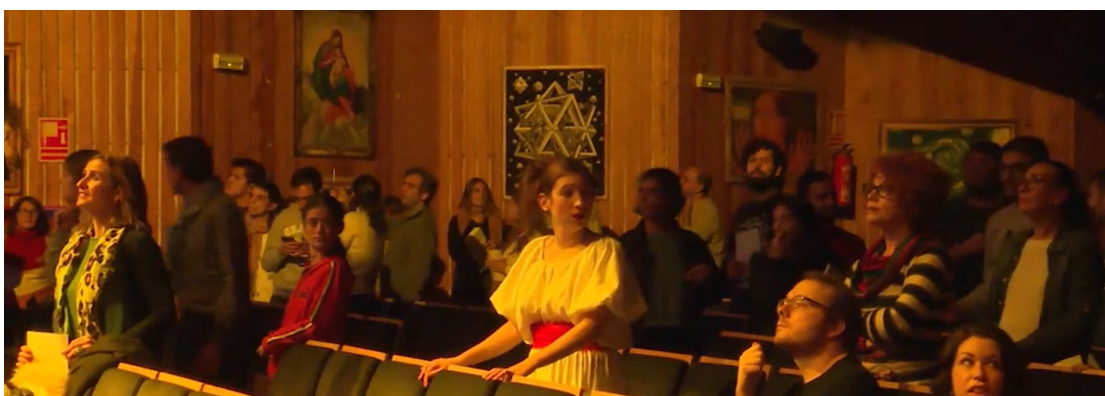


Figura 3: Imágenes de momentos de la representación donde se plantean diferentes retos relacionados con el cálculo, el arte, el ajedrez, ...

3. Impresiones del equipo

Cuando pensamos en realizar un proyecto como este, éramos conscientes de estar pisando un terreno desconocido. No teníamos referencias de acciones similares en entornos de enseñanza y tampoco habíamos trabajado directamente en teatro.

Nuestra experiencia en realización de actividades en el entorno de los juegos, adquirida durante los años de trabajo en el Aula Taller Museo de las Matemáticas π -ensa de la UPM, <https://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/> nos garantizaba la buena acogida y la utilidad de trabajar con retos, juegos y actividades dinámicas para el acercamiento a las matemáticas y para el desarrollo del pensamiento lógico, entre otras cosas.

Para el éxito de la propuesta era necesario contar con unos actores experimentados y con una puesta en escena complicada y llamativa. La UPM cuenta con alumnos altamente capacitados en estas líneas y una parte importante del éxito alcanzado se debe a su trabajo.

Hemos terminado muy satisfechos con la gran acogida de las actividades que se han puesto en marcha y el entusiasmo de los participantes. Todo el público asistente a las representaciones (especialmente los alumnos y personal UPM) participaron activamente y nos hicieron llegar la utilidad y la buena acogida de la propuesta, animándonos a poner en marcha nuevas obras orientadas específicamente a públicos concretos (alumnos de asignaturas específicas, carreras, ...).

4. Conclusiones

Con la puesta en marcha del proyecto presentado se ha querido dar respuesta a cuestiones como:

¿Se pueden utilizar de verdad los juegos en provecho de la enseñanza de las matemáticas? ¿De qué forma? ¿Qué objetivos pueden conseguirse a través de las propuestas de gamificación?

Con esta propuesta que consideramos altamente innovadora, hemos apostado por la gamificación de las matemáticas de una forma diferente, uniendo la ciencia, los retos y el teatro. Nuestra experiencia nos permite afirmar que se hace necesario incorporar nuevas herramientas metodológicas que resulten atractivas para los estudiantes. Los profesores de este grupo creemos en la necesidad de otra forma de enseñar, en la que se ponga el énfasis en las habilidades esenciales de las personas y se fomente la creatividad, la iniciativa personal y el trabajo en equipo.

Nuestro proyecto viene a encuadrarse en la línea del juego como instrumento para aprender y para acercar al público a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. En este caso enfocado principalmente a los estudiantes de grado y máster de las escuelas técnicas, pero también a todo el público en general.

Tenemos la convicción de que los juegos y los retos mejoran los procesos de aprendizaje, la motivación y la adquisición de habilidades como la cooperación, entre otras. La buena acogida de este nuevo formato nos ha reafirmado en ello y nos ha animado a realizar nuevas propuestas que queremos llevar a escena durante el próximo curso.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

Página Web: <http://www.camino.upm.es/matematicas/WEBGIE/>

Institución: Universidad Politécnica de Madrid.

Entrevista

Luis Balbuena, un tenaz docente con la Educación Matemática en los talones

Luis Balbuena, a tenacious teacher with Mathematical Education on his heels

Luis Balbuena y Adela Salvador

Revista de Investigación



Volumen X, Número 2, pp. 149-157, ISSN 2174-0410

Recepción: 21 Jun'20; Aceptación: 3 Ago'20

1 de octubre de 2016

Resumen

Luis Balbuena ha dedicado su vida a la enseñanza de las Matemáticas, siempre con ilusión, con eficacia, con tenacidad. En Canarias ha creado una potente Sociedad Matemática, una interesante revista: *Números*, un Museo de las Matemáticas ... En esta entrevista con proporciona una visión histórica de los inicios del movimiento asociativo en España en didáctica de la Matemáticas, que se hunde en el tiempo, pero que sigue vigente en la actualidad.

Palabras Clave: Matemáticas, Didáctica de las Matemáticas, Sociedades matemáticas.

Abstract

Luis Balbuena dedicated his life to teach Mathematics, always with enthusiasm, efficiency and tenacity. In the Canary Islands he created a powerful Mathematical Society, the interesting magazine "*Números*", a Museum of Mathematics ... In this interview he provides a historical vision of the beginnings of the associative movement in Mathematics didactics in Spain, from a long time ago but still in force today.

Keywords: Mathematics, Mathematics Didactics, Mathematical Societies.

Presentación

Luis Balbuena ha dedicado su vida a la enseñanza de las Matemáticas, siempre con ilusión, con eficacia, con tenacidad. En Canarias ha creado una potente Sociedad Matemática, una interesante revista: *Números*, un Museo de las Matemáticas... Socio fundador de la Sociedad Canaria Isaac Newton que, junto con otras sociedades, grupos, asociaciones... como FISEM

(Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, trabajaron con fervor para mejorar la enseñanza de las Matemáticas.

1.- Sabemos que has estado ligado al movimiento asociativo del profesorado de matemáticas, ¿cómo nació esa relación?

Si, puede decirse que estoy ligado desde el período de gestación. Recordarás que, tras la muerte del dictador, hubo unos años en los que, para mí, es muy válida la imagen del árbol que llega a la primavera sin hojas, tras el largo invierno y que, de repente, empieza a reverdecer por todos lados para mostrar que allí hay vida, aunque no se notara. Y eso fue lo que pasó durante ese período en, prácticamente, todos los aspectos. Y uno de ellos, fue la preocupación que sentíamos al observar las muchas dificultades que teníamos a la hora de enseñar las matemáticas y las de los alumnos para aprenderlas. La rígida estructura del régimen frustraba todos los intentos de modificar algo.

Un día del mes de noviembre de 1977, quedamos para vernos en mi casa Ángel Isidoro, Manuel Linares, Antonio Martín y yo. La idea sobre la que hablar se centraba en estudiar qué podríamos hacer porque el problema lo teníamos claro. Los cuatro trabajábamos en Secundaria (entonces se llamaba Enseñanza Media) y compartíamos la inquietud. Crear un grupo de trabajo nos parecía algo limitado y fue así como surgió la idea de crear una sociedad que aglutinase a cuantos tenían la misma inquietud. Además, a la hora de recabar apoyos, no era lo mismo ir a solicitarlas un grupo de cuatro “locos” (en el buen sentido de la palabra), que señalar que detrás está un numeroso conjunto de docentes de todos los niveles que desean trabajar en torno a la idea que he explicado. Salimos eufóricos de la reunión y dispuestos a lanzarnos a la aventura. Convocamos a los colegas para dos semanas después usando casi el *tam tam* porque no era tan sencilla la comunicación. El método boca-oído funcionó y el día fijado se puede decir que fue histórico. Lo curioso es que aquella tarde hubo en La Laguna una tremenda tormenta de agua y viento que me hizo temer que nos viésemos los cuatro en la reunión y ¡oh, sorpresa! el aula del IES *Viera y Clavijo* que utilizamos estaba a rebosar... No costó mucho convencer a los asistentes y pasamos a la tormenta de ideas que fue acorde con la meteorológica, porque llené un buen número de hojas de mi cuaderno con todo lo que allí se propuso. Me pusieron al frente de la “gestora” que debía preparar el papeleo, pero mientras todo eso se resolvía (duró diez meses), quedamos en vernos, los que pudiesen, los jueves por la tarde a partir del siguiente y “a tirar p’alante”. El método me vino bien porque, en alguna ocasión, me reuní conmigo mismo y eso hacía que los acuerdos los tomase por unanimidad. Bien es verdad que fueron pocos. Pero fíjate que las primeras Jornadas las hicimos en el mes de marzo de 1978, es decir, sin estar aun legalizados y que el primer Boletín (el precedente de la revista NÚMEROS) se editó en noviembre de 1978. En fin, empezamos con fuerza, aunque éramos unos pioneros con más intuición, voluntad y ganas de trabajar que con conocimientos... pero todo se andaría y además en poco tiempo.

El primer paso firme lo dimos cuando la Sociedad nos comisionó al recordado Manuel Fernández y a mí para acudir al IV ICME que se celebró en Berkeley, California, en agosto de 1980. ¡Unos 3000 profesores y profesoras de todo el mundo! Entre otras muchas cosas, descubrimos que no estábamos tan desorientados; nos trajimos una gran cantidad de material entre revistas y publicaciones y, sobre todo, conocimos a personas como Claude Gaulin que fue

nuestro guía y luego amigo. Por cierto, le rindo un emocionado homenaje pues nos ha dejado hace poco, víctima del dichoso virus.

2.- ¿Y después qué?

Quizá el hecho de vivir en islas nos estimulaba. La idea cuajó a gran velocidad de manera que llegamos muy pronto a los 500 socios, una cifra razonablemente alta si se tiene en cuenta no solo la población sino su enorme dispersión. Como te he dicho, recuerda la enorme efervescencia nacional que había en torno al tema: numerosos grupos de trabajo entre los que estaban los “Grupo Cero de Valencia” y “Grup Zero de Barcelona”, otro en Salamanca, las Escuelas de Verano, los llamados, en general, Movimientos de Renovación Pedagógica, ... Un hervidero apasionante.

A las Segundas Jornadas, que hicimos en Las Palmas, vinieron colegas desde Sevilla, entre ellos una persona de gran impulso como es Antonio Pérez Jiménez. Empezaron a nacer Sociedades en otros lugares (Navarra, Castellón, liderada por Xaro Nomdedeu, Aragón, impulsada por Guillermo Dorda, Florencio Villaroya y otros y, por supuesto, la potente Thales, en Andalucía). Era necesario que nos organizásemos para trabajar en serie y no en paralelo. Y así surgió la idea de reunirnos. Lo hicimos en Sevilla, en 1980, en el “puente” de la Purísima y me atrevería a decir que esa reunión marcó el antes y el después... Entre otros acuerdos, se tomó el de poner en marcha las hoy famosas JAEM. Las primeras, en Barcelona. Nosotros, con un esfuerzo organizativo sin precedentes, organizamos las IV en 1984, con Ana Alicia Pérez al frente, embarazadísima, y que, curiosamente, inauguré yo porque en aquel momento era el primer Consejero de Educación de la también bisoña Comunidad Autónoma de Canarias... El destino es así.



Figura 1. Entrega del premio Gonzalo Sánchez Vázquez. JAEM Girona en julio 2009.

Pero la actividad de la “Newton”, que es como se la designó, ha sido incesante desde que se creó. Fue una buena idea. Piensa que ha permitido desarrollar un amplio conjunto de actividades que las administraciones educativas no pueden hacer porque tienen otros cometidos: además de la revista (que ya pasó del número 100), y las Jornadas de cada año, añade un Torneo que ya tiene dos niveles, el concurso de fotografía y matemáticas, muchas exposiciones fijas e itinerantes, cursos, seminarios, etc. Pero quizá lo más destacado sea la oportunidad que ha supuesto para muchos profesores y profesoras de poder hacer una formación permanente, el intercambio de materiales, de ideas, de proyectos, etc. siempre en pro de la mejora de nuestro trabajo.

El Gobierno de Canarias ha reconocido ese trabajo y le otorgó a la Sociedad la Medalla de Oro de la Comunidad cuando cumplió sus bodas de plata.

3.- ¿Se podría decir que esa fue la simiente de la Educación Matemática en nuestro país?

Como te he indicado, la semilla sembrada aquí, en Canarias, ha ido dando sus frutos. Y uno que tengo bien claro es que los que hoy conocemos como Educación Matemática, se hizo fuerte e importante gracias al impulso que le dieron todos esos grupos que te he nombrado y muy especialmente, las Sociedades que, como sabes, decidieron federarse en 1989 siendo ya un referente en estos temas. Fue una inquietud nacidas desde la misma base o, como diría el admirado Gonzalo Sánchez Vázquez, surgida del “profesorado de a pie”.

Un hito en ese camino fue el ICME 8, convocado por la Federación y magníficamente organizado por la Sociedad Andaluza Thales, en Sevilla. Fue como una especie de reválida como las que hacíamos antes...



Figura 2. Comité de programa de las XI JAEM. Mayo 2003. Juan Antonio García Cruz, Emilio Palacián, Margarita Marín, Luis Balbuena, Xavier Vilella y Coque Pazos.

4.- ¿Y la Universidad?

Distinguiría entre las Escuelas de Magisterio, en las que se formaba para la docencia en Primaria y las Facultades. En las primeras, podría decirse que, en general, la didáctica formaba parte de la formación inicial y, por tanto, estaba presente si bien es verdad que quizá por falta de foros adecuados, no se conocían sus experiencias. En las Facultades, aunque a efectos formales podría existir una asignatura de Didáctica, no había especialistas ni escuelas por aquellos años. Desde luego hubo figuras destacadas, pensemos en Galdeano o en Puig Adam, pero creo que en la etapa que estoy reviviendo, tenía una existencia más bien “lánguida”. Precisamente otro hito lo representa Luis Rico, del Grupo Cero de Valencia, cuando se convierte en el primer catedrático de Didáctica de la Universidad creando el primer Departamento como tal. Pero eso sucedió en 1992. Y fue, además, un gesto de valentía porque, durante algún tiempo, hubo quien miraba “por encima del hombro” a los titulares de Didáctica. Y no solo en España pues el recordado Gaulín me comentó que también tuvo esa “batalla” en su país (Canadá). Afortunadamente el ejemplo fue seguido por otros de tal forma que el desarrollo ha sido exponencial y de prestigio. Así que, desde mi punto de visto y por lo que yo viví, la Educación Matemática se introdujo en esa época de la mano de los grupos de renovación y muy especialmente, por la Federación.

5.- ¿Y ahí acabó todo?

Pues no. Queda el desarrollo del movimiento asociativo en el ámbito iberoamericano. Yo suelo poner el inicio de ese período en agosto de 1995, en el seno del X CIAEM que se celebró en Santiago de Chile. Allí acudimos, comisionados por la Federación, Gonzalo Sánchez Vázquez (una figura central en todo este movimiento), Sixto Romero y yo. Uno de los objetivos era invitar a los congresistas a venir a Sevilla para participar el año siguiente en el nombrado ICME 8. Creo que ya habíamos decidido en la Junta de Gobierno crear una línea de ayudas económicas para los colegas iberoamericanos que decidieran participar. Pero aprovechamos el evento para convocar una reunión a la que asistieran líderes de grupos y sociedades. Fue interesante. Ya existían algunas sociedades y a nuestra propuesta de federarnos se decidió esperar a que se consolidaran las existentes y se crearan donde no había aún. Yo quedé encargado de algo así como de “mantener la llama encendida”. Fue un tortuoso camino y la llama no se apagó porque procuraba asistir a congresos y mantener reuniones en las que solíamos hablar de los borradores de Estatuto que llevaba y de firmar convenios de colaboración con nuestra Federación que, dicho sea de paso, dio la talla y se mostró siempre muy generosa con aquellas sociedades y, de manera singular, con las que se iban creando. En ese trayecto conté con apoyos importantes. Además de la Federación, destaco, entre otros muchos, a Doña Nelly Vázquez de Tapia (Argentina), Alicia Villar (Uruguay), Begoña Grigoriu (Bolivia), Martha Villavicencio (Perú), Avelina Jojot (Paraguay), Fredy González (Venezuela) y Ubiratán d’Ambrosio (Brasil). Total, que por fin se pudo crear la FISEM (Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática), en las XI JAEM que se celebraron en el Puerto de la Cruz y Las Palmas en 2003. Creo que se puede considerar como otro hito. La primera presidenta fue la profesora brasileña Sonia Carolino y yo el primer Secretario General. Hoy es un movimiento robusto, muy bien dinamizado especialmente por el SG actual Agustín Carrillo. Pensemos en que son de su responsabilidad los CIBEM y la revista UNIÓN, dos

vehículos extraordinarios para coordinar, expandir y escribir la EM también en nuestras lenguas. (www.fisem.org).



Figura 3. Ubiratán D'Ambrosio, Nelly Vázquez de Tapia y Luis Balbuena en Maldonado, Uruguay en 1999.

6.- Volvamos al inicio, a Canarias. ¿Qué nos puedes decir del presente y del futuro?

Lo primero que quiero destacar es que la renovación generacional ha sido completa y con equipos formados por colegas jóvenes con un alto grado de compromiso y de profesionalidad. Comparten plenamente los objetivos de la Sociedad. Siguen manteniendo la vitalidad que siempre tuvo la Sociedad y, si me apuras, diría que hasta más aun...

Han conseguido, además, crear convenios con instituciones, especialmente con el Gobierno de Canarias, para desarrollar interesantes proyectos en los centros públicos de todas las islas. Esto acompañado de un sinnúmero de actividades como cursos de formación permanente a cuyas

sesiones de los sábados acuden profesores de todas las islas. La cabeza visible de ese proyecto es Manuel García Déniz que continúa con su dinamismo intelectual y físico tras su jubilación. Estas acciones hay que mantenerlas en el tiempo porque dan sus frutos a medio y largo plazo.

El que la Consejería de Educación esté apoyando el Proyecto *Newton* lo considero un serio compromiso que no tiene precedente. Debo aclarar, no obstante, del desarrollo del Proyecto se inició en el Consejo Escolar de Canarias gracias al decidido apoyo de su presidenta Dolores Berriel. A pesar de los escasos medios con los que se contó, el proyecto funcionó durante tres cursos debido al esfuerzo realizado por la Sociedad Isaac Newton y la entrega de los pocos ponentes con los que se contaba. Se había restringido a la isla de Tenerife. Pero las evaluaciones que se hacían eran positivas así que, dado el éxito alcanzado, se hacía necesario ampliarlo al resto de las islas. Obviamente, eso suponía más medios y más personal que realizaran las sesiones de formación al profesorado. Tras muchas reuniones con los responsables de la Consejería de Educación, se aceptó tomar el relevo al Consejo Escolar. Ahora se llama Proyecto *Matemáticas Newton Canarias*.

A través de los Seminarios de Formación, la Sociedad *Isaac Newton* se encargará, de preparar a los ponentes que realizarán, tanto la labor de formación del profesorado participante como de asistir en acompañamiento didáctico, a las sesiones de aplicación en el aula. En el anómalo presente curso 2019-20, se han incorporado ya 74 centros de todas las islas tras cumplir con los requisitos exigidos de forma que están involucrados, directa o indirectamente, 775 docentes. Todo ello me parece muy positivo y en la dirección correcta.

7.- ¿Qué me cuentas del Museo de las Matemáticas?

Otra actividad a la que se está dedicando atención es a la *Casa-Museo de la Matemática Educativa*. Realmente era un proyecto planificado desde hacía años pero que encontraba un inconveniente insalvable para una Sociedad como la nuestra: tener un local apropiado. Pero se tuvo la suerte de dar también con las personas adecuadas (Georgina Molina y Demetrio Suárez, Directores Generales de la Consejería), que supieron apreciar la potencialidad de la idea y ahí está, desarrollándose y ofreciendo al profesorado y alumnado otras formas de acercarse a las matemáticas complementarias de las desarrolladas en el aula. Lola de la Coba se encarga de coordinar y dinamizar para que no decaiga. Durante toda la semana acuden centenares de estudiantes que reciben talleres y visitan la Expo-2000.

<http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/casa-museo>

Se celebran seminarios y actividades para el profesorado, se conmemoran días como el de Pi, el Día Escolar de las Matemáticas, el Día del Libro, encuentros de Literatura y Matemáticas coordinados por Carlos Bruno. Pero también se proyecta hacia fuera a través del *Komando Matemático*, que acude a los centros que lo han solicitado, a Ferias científicas y otras actividades culturales.

La *Ruta matemática de La Laguna* es otra actividad que se ofrece a los centros y grupos en general, y se pueden cifrar en miles los estudiantes que han conocido el Patrimonio de esa ciudad (Patrimonio de la Humanidad), a través de las matemáticas. Esta actividad la coordino yo. Hay que resaltar que muchas de estas actividades son llevadas a cabo por socios ya jubilados que se han comprometido a mantener vivo el espíritu de la Sociedad

Dentro de esta “movida” debo citar el movimiento OAOA que lidera Toni Martín Adrián.

Ha creado inquietud y preocupación por la didáctica en miles de maestros y maestras de todo el mundo. Sus resultados ya son medibles.



Figura 4. Buscando rectángulos áureos en La Laguna con el test de Paula. XXIV Jornadas de la Sociedad Newton.

8.- ¿Qué dirías a los más jóvenes?

Poco les tengo que decir porque observo el grado de implicación que asumen. Ellos saben que reciben el legado de cientos de personas que han conseguido crear y mantener una Sociedad que es un instrumento útil para mejorar su quehacer profesional. Espero que nunca pierdan esta ilusión por ser cada vez mejores aprovechando lo que aportan los demás y ofreciendo sus experiencias y conocimientos. Un detalle más que destaco es que son, en general, muy hábiles con las TIC.

De todos modos, sí les aconsejo asistan a Jornadas, Congresos y Seminarios, etc. así como leer revistas especializadas. La formación permanente entra en el rol del buen profesor.

En estas extrañas jornadas del confinamiento por la pandemia, quiero acabar reiterando mi felicitación y admiración por el esfuerzo realizado para hacer frente a una situación que les hizo pasar de profesores de aula a profesores virtuales en cuestión de horas. Ha sido un referente por su trabajo con los alumnos a través de los medios telemáticos, creando una red de colaboración muy estrecha, compartiendo y colaborando entre sí en el manejo adecuado de los

programas y apps que permitieron no perder contacto con sus alumnos ni con el correcto aprendizaje de las matemáticas. Todo un ejemplo.

Reflexión final

Antes de terminar esta entrevista quiero hacer una muy breve reflexión final. Luis Balbuena es, en efecto, un tenaz e incansable docente, siempre trabajando y buscando ideas nuevas que puedan ayudar al resto del profesorado en su labor. Muchos años de trabajo tenaz. Este último año, en el 2020, el año del confinamiento, ha regalado a toda la comunidad educativa “Ejercitando las neuronas”, (<https://www.canarias3puntocero.info/2020/04/24/ejercitando-las-neuronas-xv/>) una interesante colección de problemas de ingenio, para ayudar en este momento tan crítico, que ha encantado a todo el profesorado que la ha recibido.

Referencias

- [1] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *¡¡Hemos llegado al 100!!*, Números: Revista de didáctica de las matemáticas, ISSN 0212-3096, ISSN-e 1887-1984, N.º. 100, 2019, págs. 11-13. Canarias. España. Mayo de 2019.
- [2] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *Relatemáticos*. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, pp. 227-230, ISSN-e 1815-0640, N.º. 47, Canarias. España. 2016.
- [3] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *Martin Gardner, inspirador de la Expo 2000*. Números: Revista de didáctica de las matemáticas, ISSN 0212-3096, ISSN-e 1887-1984, N.º. 76 (Ejemplar dedicado a: Martin Gardner), págs. 7-18. Canarias. España. Marzo 2011.
- [4] BALBUENA CASTELLANO, Luis., *Guía matemática de San Cristóbal de La Laguna*.
- [5] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *El ñandutí y las matemáticas*.
- [6] BALBUENA CASTELLANO, Luis; GARCÍA JIMÉNEZ, Juan Emilio, *Cervantes, don Quijote y las matemáticas*.
- [7] BALBUENA CASTELLANO, Luis; CUTILLAS FERNÁNDEZ, Luis; DE LA COBA GARCÍA, Lola, *El Profesor de matemáticas en un instituto de Enseñanza Secundaria*.

Sobre los autores:

Nombre: Luis Balbuena Castellano

Correo Electrónico: balbuenaluisx@gmail.com

Institución: Presidente y Secretario General de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas.

Nombre: Adela Salvador Alcaide

Correo Electrónico: adela.salvador@upm.es

Institución: Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid. España.