Experiencias Docentes

Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales

Formulations and demonstrations of leg and height theorems using polygonal tessellations

José Enrique Martínez Serra, Marco Vinicio Vásquez Bernal,

Arelys García Chávez y Ramiro Infante Roblejo

Revista de Investigación

Volumen X, Número 1, pp. 051–072, ISSN 2174-0410
Recepción: 21 Oct'19; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

Resumen

Una de las estrategias didácticas que más contribuye al aprendizaje por descubrimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los niveles inicial y medio, es el trabajo con material concreto o manipulativo, el cual permite a los estudiantes el tránsito por procesos mentales de comparación, análisis, síntesis, abstracción, generalización, etc., conducentes a la formación de nuevos conceptos y/o la formulación de nuevas proposiciones. En esta dirección, pueden aprovecharse las potencialidades que ofrece el empleo de las teselaciones poligonales, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones y/o demostraciones de nuevos teoremas.

Se ilustra cómo el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar deducciones y demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

Finalmente, se deja claro que para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, de las cuales se presentan dos de ellas, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.

Palabras Clave: Teorema de Pitágoras, teorema de la altura, teorema de los catetos, material concreto, teselaciones poligonales, heurística, demostración geométrica

Abstract

One of the didactic strategies that most contributes to discovery learning in the process of teaching and learning of mathematical contents at the initial and middle levels, is the work with concrete or manipulative material. This work allows students to transit through mental processes of comparison, analysis, synthesis, abstraction, generalization, etc., conducive to the formation of new concepts and / or the formulation of new propositions. In this way, the potential offered by the use of polygonal tessellations can be exploited, in order to deduce in an elegant, motivating and creative way the formulations and / or demonstrations of new theorems.

It is illustrated how Pythagoras' theorem has had a vast amount of geometric proofs through polygonal tessellations. However, height and leg theorems, also members of the Pythagorean Theorem Group, have not run the same fate. For this reason, the main objective of the present work is to present deductions and geometric demonstrations of the theorems of height and legs by manipulating concrete material based on polygonal tessellations. At the same time, is offered recommendations to teachers for the treatment of these theorems in the teaching-learning process, based on the timely use of various heuristic resources.

Finally, it is clear that for students of higher levels, more powerful deductive tools can be used, of which two of them are presented, which although they are not contemplated in the curricular design of Mathematics, can be introduced as part of circles of interest, math club or other attractive ways to deepen mathematics.

Keywords: Pythagorean Theorem, height theorem, leg theorem, concrete material, polygonal tessellations, heuristics, geometric proof

1. Contextualización y antecedentes

1.1. La Geometría en el Sistema Educativo Ecuatoriano

En la generalidad de los sistemas educativos actuales, la Geometría es una de las áreas insoslayables que deben abordarse en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los diferentes niveles de enseñanza.

Refiriéndose a los niveles: inicial, medio y bachillerato, Andonegui, citado en Vargas y Araya (2013) afirma que el estudio de la geometría es importante porque:

> *"ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial que le permiten comprender e influir el espacio donde vive" (p. 77).*

De ahí la importancia de aprender geometría a partir de la experimentación, pues permite desarrollar diferentes tipos de habilidades y destrezas espaciales, a la vez que facilita la comprensión de objetos geométricos que se encuentran en el medio donde vivimos; sin embargo, la forma tradicionalista en que se lleva a cabo su proceso de enseñanza aprendizaje, solo requiere de la memorización de conceptos y fórmulas para que los estudiantes tengan éxito ante las pruebas estandarizadas.

En esta dirección, Araya y Alfaro (2010) indican que

> *"la enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfatizado en la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas" (p.127).*

Esta afirmación permite inferir que la metodología de enseñanza define la importancia de la geometría para el educando. Si la enseñanza se limita a llenar al estudiante de contenidos, fórmulas, propiedades, entre otras se tendrá como resultado una transferencia de contenidos y no una construcción activa de estos.

Estas ideas, conllevan a reflexionar sobre la conveniencia de que el aprendizaje de muchos contenidos geométricos procede a través de progresivas aproximaciones parciales a su formalización, y no ofrecer los resultados acabados; reafirmando esta idea, Fripp y Varela (2012) señalan que:

> *"El docente que ostenta un saber insiste con información geométrica, adelantándose a las necesidades intelectuales de sus alumnos. Presenta información sobre las figuras geométricas, pero sin establecer las relaciones que favorecen la construcción del concepto. Generalmente la presentación ostensiva apela a representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que puede provocar otras consecuencias. El alumno puede agregar a las figuras con las que trabaja dos pseudopropiedades geométricas: la posición y la dimensión. Si se considera un concepto geométrico como una terna conceptual, lo estaríamos pensando como una representación, un nombre y un conjunto de atributos. Hacer énfasis en la representación podría conducir a prácticas ostensivas. Hacer énfasis en el nombre podría conducir a prácticas nominalistas" (p. 13).*

Finalmente, se citan y se asumen por los autores, los principios didácticos del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, según Báez e Iglesias, citados por Araya y Alfaro (2010), de los cuales se mencionan solo los dos últimos, por ser los que mayor presencia tienen en el presente artículo:

- *"Aprendizaje por descubrimiento: Todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiantado, de manera que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.*
- *Innovación de estrategias metodológicas: El grupo docente debe buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje." (p.128)*

En aras de contribuir a estos principios didácticos y lograr el deseado aprendizaje por descubrimiento por los estudiantes en Geometría, se propone, como uno de los recursos didácticos oportunos, el empleo de material concreto para la deducción de algunas proposiciones geométricas.

1.2. Recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría

Martínez (2010) define los recursos didácticos como:

> *"… aquellos materiales, medios didácticos, soportes físicos, actividades, etc. que van a proporcionar al formador ayuda para desarrollar su actuación en el aula" (p.1).*

En el área de Geometría, actualmente se emplean disímiles recursos didácticos que facilitan la construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes, entre estos están: las presentaciones dinámicas, calculadoras gráficas (Geogebra, Cabri, Geometry, etc.), plataformas interactivas (Khan Academy, foros, chats, etc.), software educativo, vídeos, programas de ordenador de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos (rompecabezas, puzles), material concreto o manipulativo, el retroproyector, entre otros.

En el presente trabajo se hace énfasis en el empleo de material concreto o manipulativo para abordar el proceso de enseñanza aprendizaje del grupo de teoremas de Pitágoras, por medio de teselaciones convenientes de cuadrados y rectángulos.

1.3.1. El material concreto o manipulativo en Geometría

En Cenera (2015) se retoma la idea de Alsina, Burgués y Fortuny (1991), llegando a establecer:

> *"la necesidad de crear y manipular gran variedad de material se ha de remarcar la conveniencia de elevar el material a la categoría de experimentación regular y viva. Un uso esporádico del material convierte a éste más en una curiosidad que en una herramienta metodológica" p. 16.*

Bajo este criterio, los autores del presente artículo concuerdan en la necesidad de lograr la manipulación, por los estudiantes, de material concreto, a partir del cual puedan descubrir rasgos esenciales de ciertos conceptos, hasta llegar a su definición y de conjeturar ciertas hipótesis y conjeturas, hasta llegar a formular una proposición (verdadera o falsa) y demostrar un teorema.

Con el ánimo de clasificar los materiales manipulativos Cenera (2015) asume la clasificación de Cascallana (2002) en: materiales estructurados y no estructurados, estableciendo que:

> *"El material no estructurado es cualquier objeto tomado del entorno del/la niño/a…el primer material utilizado para la enseñanza es el que procede de sus propios juegos y actividades; los juguetes representativos como animales, muñecos, coches, material de desecho y de uso corriente… a partir de ellos se pueden establecer relaciones lógicas básicas, agrupar, clasificar, ordenar, seriar… una misma actividad debe realizarse con materiales diversos para favorecer el proceso de generalización de los conceptos…"p. 16-17.*

> *"El material estructurado es aquel que se diseña para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos… son multiuso, en la medida en que pueden utilizarse para varios conceptos y objetivos… en general, un material determinado no es privativo de una edad específica... el mismo material puede utilizarse de forma más o menos compleja en diferentes edades" p.17.*

Precisamente, uno de los materiales manipulativos estructurados es el empleo de figuras para realizar teselaciones de ciertas superficies planas.

1.3.2. Teselaciones

Como parte del conocimiento matemático, la palabra teselación o embaldosado hace referencia al uso repetido de polígonos u otras figuras que llenan completamente una región plana infinita sin vacíos ni superpuestos.

En este sentido, los autores Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez (2007) se citan en Uribe et all. (2014), estableciendo que

> *"una teselación de una región es su cubrimiento completo mediante una o más figuras en un patrón repetido, con ninguna figura superpuesta". p. 141*

Al analizar algunos casos particulares de teselaciones, puede resumirse de esta fuente, que cuando la teselación se realiza mediante polígonos, se denomina teselación poligonal y si estos polígonos fueran regulares y congruentes, se tendría una teselación regular. Finalmente, si se combinan dos o más polígonos regulares no congruentes, tendríamos una teselación semirregular, y si la combinación de polígonos no sigue ningún patrón, entonces se estaría en presencia de una teselación poligonal irregular. p. 142-143

Algunos ejemplos son:

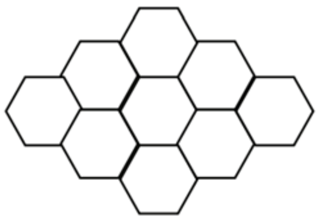

Figura 1. Teselación poligonal regular del plano mediante hexágonos

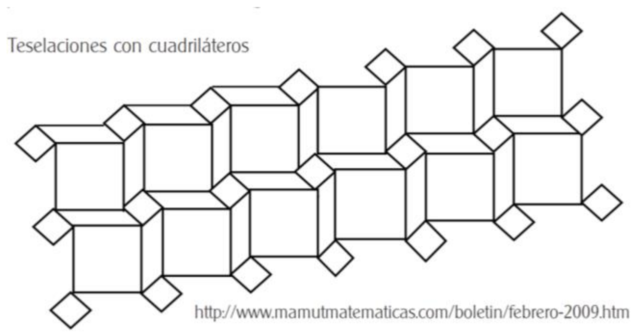

Figura 2. Teselación poligonal semirregular del plano mediante dos tipos de cuadrados y paralelogramos. Tomado de Miller (2009), p.2

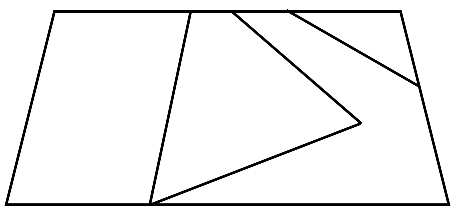

Figura 3. Teselación poligonal irregular de un trapecio isósceles

Uno de los teoremas de la Historia de las Matemáticas que más demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales ha tenido es el Teorema de Pitágoras, al cual se dedica el próximo epígrafe.

1.3. Teorema de Pitágoras con material concreto basado en teselaciones poligonales

El problema de la deducción y demostración geométrica del Teorema de Pitágoras se reduce a "teselar los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo mediante polígonos, con las cuales se pueda teselar el cuadrado construido sobre la hipotenusa".

Desde las obras de Euclides de Alejandría (325 a. C.- 265 a. C.), matemático y geómetra griego considerado el "Padre de la Geometría", ya se planteaban demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras, como puede verse en su tratado matemático "Los Elementos" que se compone de trece libros, escrito originalmente en papiro y que ha tenido múltiples ediciones por varios autores.

Figura 4. Imagen de una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras que aparece en "Los Elementos" de Euclides, tomada de Urbaneja (2008), p.124

1.3.1. La recopilación de Loomis

La Historia de la Matemática reconoce a E.S. Loomis (1852–1940), como el mayor recopilador de diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras, por medio de su agrupación oportuna, según ciertos criterios.

En Gonzáles Urbaneja (2008) se refleja cómo

> *"Loomis realizó durante muchos años una recopilación exhaustiva de múltiples pruebas que se han dado del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia. Su encomiable labor de investigación, dio como fruto la publicación en 1927 de una magna obra de gran valor didáctico, The Pythagorean Proposition. El texto de E.S.Loomis fue reeditado en 1940 (en Ann Arbor, Michigan) y en 1968 como el primer título de una serie de "Classics in Mathematics Education" de la National Council of Teachers of Mathematics" p. 120.*

En esta obra, también se recoge el discernimiento de Loomis entre lo que es una demostración y una simple ilustración del Teorema de Pitágoras y propone una clasificación de los diferentes resultados recopilados en cuatro tipos:

> *"Pruebas algebraicas: basadas en relaciones entre lados y segmentos, presentando un total de 109 resultados recopilados en este grupo. Pruebas geométricas: basadas en*

comparaciones de áreas, presentando 255 resultados. Pruebas dinámicas: basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc., mostrando 4 resultados. Pruebas cuaterniónicas: basadas en operaciones vectoriales, recogiendo 2 resultados". p. 120.

Como puede apreciarse, la recopilación de Loomis es la colección más importante de pruebas y demostraciones del Teorema de Pitágoras con un total de 370 resultados excelentemente agrupados en cuatro categorías.

En el sexto apartado de Gonzáles Urbaneja (2008) se presenta un epílogo que versa:

"El Teorema de Pitágoras, tesoro y símbolo de toda la geometría…. El Teorema de Pitágoras es la joya más bella de la tradición pitagórica. Como recuerdo inolvidable de los tiempos escolares pertenece a la base cultural común de la humanidad. Su soberbia grandeza introduce una radical inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el marco histórico cultural matemático como en el ámbito escolar de la Educación matemática. La multitud de demostraciones realizadas con pasión matemática, por una pléyade extensa y heterogénea de personajes ilustres, realza la idea de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad. Como origen de la Geometría racional, fundamento de multitud de teoremas, causa primera de la Inconmensurabilidad, umbral entre la Matemática empírica y la deductiva, paradigma para la Matemática y paradigma para la Educación matemática, el Teorema de Pitágoras pertenece al imaginario cultural de casi todos los pueblos de la tierra." p. 124.

Otra encomiable muestra de admiración de la humanidad por el Teorema de Pitágoras se presenta en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia, una joya gótica construida entre 1248 y 1880, en esta ciudad alemana, que hoy ostenta la condición de Patrimonio de la Humanidad, otorgada por la UNESCO en 1996.

Figura 5. Imagen del Teorema de Pitágoras como emblema de la Geometría en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia

Dos de las demostraciones geométricas por teselaciones poligonales reflejadas en la obra de Loomis se exponen en los siguientes subepígrafes.

1.3.2. La demostración de Perigal

En Casselman (2000), puede constatarse que Henry Perigal (1801 – 1898) fue un matemático británico que presentó en 1830 una elegante demostración geométrica del Teorema de Pitágoras consistente en una teselación poligonal del cuadrado construido sobre la hipotenusa en un cuadrado y cuatro trapezoides iguales, tal que dicho cuadrado es igual al cuadrado construido sobre el cateto menor y los trapezoides se obtienen dividiendo el cuadrado sobre el mayor de los catetos del triángulo rectángulo, mediante dos segmentos perpendiculares que se cortan en el centro del cuadrado, siendo uno de ellos paralelo a la hipotenusa.

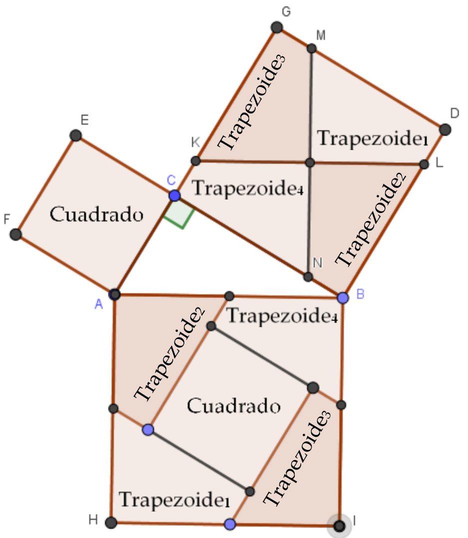

Figura 6. Versión de los autores hecha en Geogebra sobre la demostración de Perigal

1.3.3. La demostración de Anaricio – Göpel

En la figura de análisis de la demostración de Anaricio - Göpel se observa una teselación poligonal del cuadrado construido sobre la hipotenusa en cinco polígonos, que reordenados convenientemente, también teselan los cuadrados construidos sobre los catetos. Los polígonos se forman de la siguiente forma: el cuadrado construido sobre el cateto menor se divide en un trapecio y un triángulo mediante un segmento que pasa por el vértice A del triángulo, perpendicular a la hipotenusa y el cuadrado construido sobre el cateto mayor se divide en un trapezoide y dos triángulos mediante dos segmentos, el DK trazado por el vértice D del cuadrado paralelo a la hipotenusa y el segmento KL perpendicular a la hipotenusa, como se muestra en la figura.

Estos tres triángulos, el trapecio y el trapezoide teselan exactamente el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

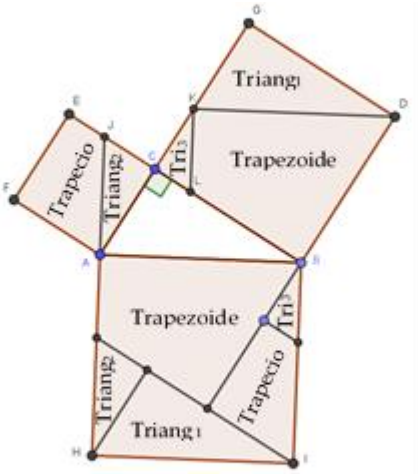

Figura 7. Versión de los autores hecha en Geogebra sobre la demostración de Anaricio-Gopel

Como se ha ratificado, el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

1.4. El Grupo de Teoremas de Pitágoras en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

Con respecto al Teorema de Pitágoras, en muchos países, entre los que se incluye el Ecuador, en la enseñanza general, no se aprovechan las posibilidades que ofrecen las teselaciones para deducir su formulación y demostrarlo geométricamente, incluso, su abordaje en el proceso de enseñanza aprendizaje se reduce a formular su planteamiento y proceder a la resolución de problemas representativos, tanto intramatemáticos como de aplicaciones del teorema a diferentes situaciones; por lo cual no se deduce ni se demuestra dicho teorema mediante teselaciones ni ningún tipo de material concreto que catalice los procesos de pensamiento de los estudiantes, tanto durante la deducción, como en la demostración.

Con respecto a los Teoremas de la Altura y de los Catetos, muchas veces, son introducidos mucho tiempo después de introducido el Teorema de Pitágoras, por ejemplo, en el Ecuador, se introduce el Teorema de Pitágoras en el séptimo grado de la enseñanza general, se ejercita durante el octavo y noveno grados y no es hasta el décimo grado que se introducen los teoremas de la altura y los catetos, también por una vía eminentemente informativa, sin establecer deducciones ni demostraciones oportunas, motivantes y creativas mediante el empleo de material concreto.

Un paso de avance en esta dirección se aprecia en otros países, como Alemania, donde estos tres teoremas son introducidos de manera deductiva en el mismo grado, como consecuencia de la semejanza de triángulos, pues al establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos entre las tres parejas de triángulos semejantes que se forman al trazar la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, se pueden escoger convenientemente la igualdad entre algunas razones, y al realizar operaciones elementales, se obtienen, de manera sencilla los planteamientos de los tres teoremas. Sin embargo, en este caso, tampoco se aprovechan las potencialidades del empleo de las teselaciones poligonales, como material concreto oportuno, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones de estos tres teoremas.

2. Principales resultados

1.5. Primera aproximación a los teoremas de los catetos y de la altura por medio de teselaciones con material concreto

Para abordar por primera vez el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas de la altura y de los catetos, puede conducirse a los alumnos al descubrimiento de sus planteamientos, por medio de la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales de un cuadrado en un rectángulo y haciendo empleo del aprendizaje basado en problemas (ABP), por medio de la resolución de los siguientes problemas sencillos:

Problema 1. En la figura de análisis que se presenta se conoce que:

ΔABC es rectángulo en C con catetos a y b e hipotenusa c.

CD es la altura relativa a la hipotenusa.

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son AD=p y BD=q.

ACEF es un cuadrado construido sobre el cateto de lado b.

ACHG es un rectángulo construido sobre la hipotenusa, con lados p y c.

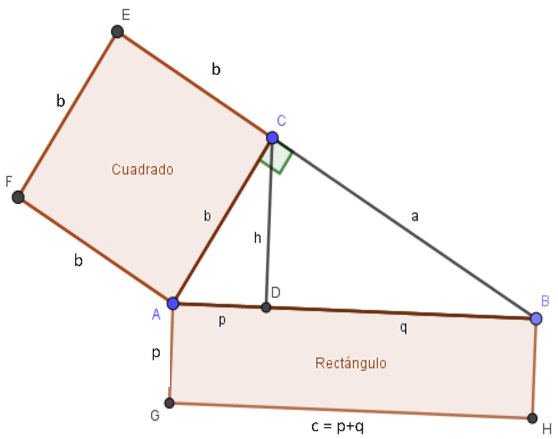

Figura 8. Figura de análisis del problema 1

¿Es posible teselar tanto el cuadrado como el rectángulo con los siguientes polígonos?

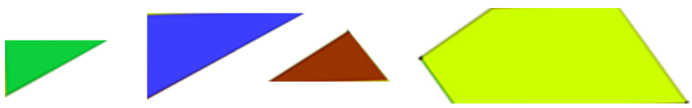

Figura 9. Polígonos como material concreto para trabajar en el problema 1

Durante la resolución de este problema, los estudiantes comprueban que una simple manipulación de las figuras conduce a que, tanto el cuadrado como el rectángulo, pueden ser teselados con estos cuatro polígonos, como se muestra en las figuras:

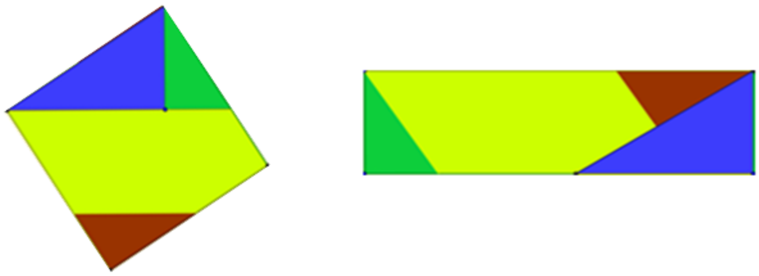

Figura 10. Resultado de los estudiantes al teselar el cuadrado y el rectángulo en el problema 1

A continuación, puede formularse el problema:

Problema 2. El resultado que muestra la anterior teselación se denomina "Teorema de los catetos". ¿Cómo puede formularse el Teorema de los catetos"

La teselación realizada conduce a los estudiantes a razonar que las áreas de ambos polígonos son iguales, y pueden establecerse intercambios heurísticos encaminados a formular este teorema de manera algebraica y verbal, concluyendo que

$$b^2 = p \cdot c$$

También puede hacerse notar que no se pierde generalidad si se hubiesen construido el cuadrado sobre el cateto de longitud a y el rectángulo de lados q y c sobre la hipotenusa, con lo que tiene lugar la igualdad:

$$a^2 = q \cdot c$$

Finalmente, formulando verbalmente el resultado obtenido se concluye que "En el triángulo rectángulo considerado se cumple que el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de su proyección sobre la hipotenusa por la longitud de la hipotenusa".

Hasta aquí se tiene una primera aproximación al conocimiento del teorema de los catetos por medio de la manipulación de material concreto.

Un tratamiento semejante puede llevarse a cabo con la primera aproximación al teorema de las alturas, como se muestra a continuación.

Problema 3. En la figura de análisis que se presenta se conoce que:

□*ABC* es rectángulo en *C* con catetos a y b e hipotenusa c.

$CD = h$ es la altura relativa a la hipotenusa.

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son $AD=p$ y $BD=q$.

CDGH es un cuadrado construido sobre la altura h.

BDEF es un rectángulo construido sobre el segmento *BD*, con lados p y q.

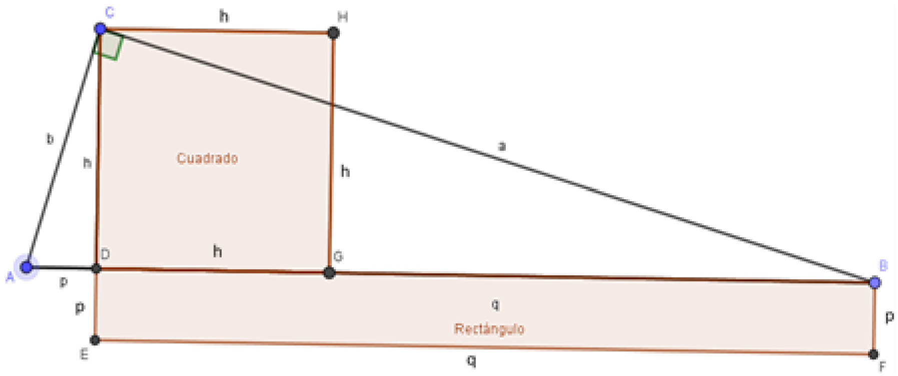

Figura 11. Figura de análisis del problema 2

¿Es posible teselar tanto el cuadrado como el rectángulo con los siguientes polígonos?

Figura 12. Polígonos como material concreto para trabajar en el problema 3

Al manipular estos polígonos sobre el cuadrado y el rectángulo, los estudiantes comprueban que, tanto el cuadrado como el rectángulo pueden ser teselados con estos seis polígonos, como se muestra en las figuras:

Figura 13. Resultado de los estudiantes al teselar el cuadrado y el rectángulo en el problema 3

Entonces, puede formularse el problema:

El resultado que muestra la anterior teselación se denomina "Teorema de la altura". ¿Cómo puede formularse el Teorema de la altura"

Análogamente al teorema anterior, las teselaciones realizadas conducen a los estudiantes a razonar que las áreas de ambos polígonos son iguales, y pueden realizarse análisis heurísticos encaminados a formular este teorema de manera algebraica y verbal, concluyendo que

$$h^2 = p \cdot q$$

Formulando verbalmente el resultado obtenido se concluye que "En el triángulo rectángulo considerado se cumple que el cuadrado de la longitud de la altura es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa".

Posterior a estas primeras aproximaciones de los teoremas de los catetos y la altura, se procede, haciendo uso de recursos heurísticos oportunos, a la formalización de la demostración geométrica de ambos teoremas.

3.2. Papel de la Heurística en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los teoremas.

Dado que la mayoría de los problemas a los que nos enfrentamos no pueden ser resueltos mediante algoritmos, deben emplearse procedimientos heurísticos para tener éxito.

Hoy la Heurística es aplicada en varias ramas del saber y es entendida como la capacidad de un sistema para realizar innovaciones positivas para sus fines, es el arte y la ciencia del descubrimiento y la invención mediante la creatividad y el pensamiento lateral-divergente; de ahí la conveniencia del empleo de la Heurística en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la resolución de problemas, viendo los procesos de formación, definición y caracterización de conceptos, así como la obtención, formulación y demostración de teoremas, como variantes de problemas.

Como metodología científica, la heurística es aplicable a cualquier ciencia e incluye la elaboración de medios auxiliares, principios, reglas, estrategias y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas; o sea, para resolver tareas de cualquier tipo para las que no se cuente con un procedimiento algorítmico de solución. Según Horst Müller, matemático y didacta alemán, citado en Ballester (1992):

> *"Los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes" p. 139.*

Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias.

Los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar —directamente— la idea de solución; posibilita determinar, por tanto, a la vez, los medios y la vía de solución. Dentro de estos principios se destacan: la analogía, la reducción (reducción del problema a otro ya resuelto, recursión, descomposición del problema en subproblemas, diferenciación de casos, reducción de una proposición a otra equivalente, demostración de refutaciones por contraejemplo), la modelación, inducción, generalización, movilidad, consideración de casos especiales y casos límites, los cuales poseen amplia presencia en la resolución de problemas de las diferentes áreas matemáticas y constituyen ingredientes importantes en el desarrollo de la metacognición de los estudiantes.

Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver los problemas. Entre las reglas heurísticas que más se emplean están: separar lo dado de lo buscado, confeccionar figuras de análisis: esquemas, tablas, mapas, representar magnitudes dadas y buscadas con variables, determinar si se tienen fórmulas adecuadas, utilizar estructuras más simples, reformular el problema, etc; aunque también existen reglas heurísticas específicas para determinadas clases de problemas.

Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado. Existen dos estrategias: el trabajo hacia adelante, en el cual se parte de lo dado para realizar las reflexiones que han de conducir a la solución del problema y, el trabajo hacia atrás, donde se examina primeramente lo que se busca y, apoyándose en los conocimientos que se tienen, se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado, hasta llegar a los dados.

Mediante el empleo de la Heurística, el docente no les informa a los alumnos los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, mediante el trabajo independiente o el trabajo cooperativo.

Específicamente, sobre el empleo de la heurística en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, Ballester (1992) expresa:

> *"El método heurístico se caracteriza por un método de enseñanza mediante el cual se le plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de sus soluciones. Al utilizar este método el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados que se someterán a su asimilación, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma independiente." P.142.*

En los próximos epígrafes puede verse cómo, a partir de preguntas heurísticas convenientes, pueden facilitarse los procesos de obtención y demostración geométrica de los teoremas de los catetos y de la altura, como elementos importantes dentro del Grupo de Teoremas de Pitágoras.

3.2. Demostraciones geométricas de los teoremas de los catetos y de la altura por medio de teselaciones con material concreto.

A partir de la comparación de las teselaciones obtenidas anteriormente en el epígrafe 2.1, puede dirigirse la reflexión hacia la determinación de semejanzas y diferencias en ambas, por medio de las preguntas heurísticas siguientes.

Pregunta heurística 1: ¿Cuáles semejanzas pueden apreciarse en la obtención de ambos resultados?

La reflexión conjunta sobre las semejanzas, conduce a que:

- En la deducción de ambos teoremas se utilizan los mismos polígonos para realizar la teselación de un cuadrado y de un rectángulo con la misma área.
- En ambas distribuciones de polígonos aparecen tres triángulos y un pentágono.

Pregunta heurística 2: ¿Cuáles diferencias pueden apreciarse en los procesos de obtención de ambos resultados?

Los intercambios heurísticos que se establecen en torno a esta interrogante conducen a que:

- La cantidad y variedad de polígonos que se emplean en la teselación de un cuadrado y de un rectángulo con la misma área, pueden ser diferentes al variar de un rectángulo a otro.
- En el rectángulo más alargado de la segunda teselación aparecen dos paralelogramos que no aparecieron en la primera.

En este punto, las condiciones están creadas para formular nuevas preguntas generalizadoras conducentes a la demostración geométrica formal y rigurosa de estos resultados.

Pregunta heurística 3. Para cualquier rectángulo ¿siempre es posible realizarle una teselación poligonal con la cual se pueda teselar el cuadrado que tiene su misma área?

En este punto puede informarse que la respuesta a esta pregunta es positiva, y se propone el empleo de la estrategia heurística de "trabajo hacia atrás" para deducir los tipos y dimensiones de los polígonos que se realizan en la teselación.

Pregunta heurística 4. Los resultados particulares obtenidos anteriormente, pueden visualizarse según las figuras:

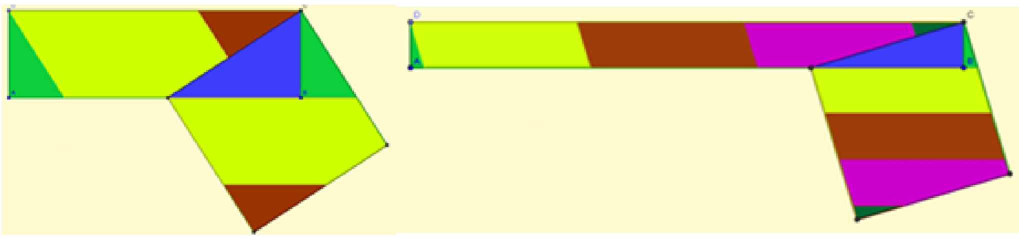

Figura 14. Presentación conveniente de los dos resultados obtenidos anteriormente

Donde se ratifica que la cantidad de polígonos de la teselación en el segundo caso es mayor que en el primero y se diferencia en dos paralelogramos. Teniendo en cuenta esta figura ¿cómo puede reformularse el problema de la teselación poligonal del rectángulo, con notaciones convenientes y posiciones adecuadas del rectángulo y el cuadrado?

Los debates heurísticos, pueden conducir a que una posible reformulación del problema es:

Reformulación conveniente del problema: Dado el rectángulo ABCD, de lados "a" y "b", determinar una teselación conveniente del mismo en polígonos y construya el cuadrado PQRC, P∈AB, que puede ser teselado con las mismas figuras que el cuadrado.

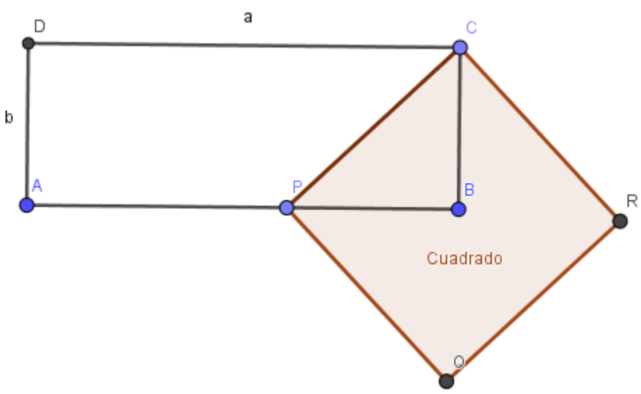

Figura 15. Figura de análisis que responde a la reformulación del problema

Pregunta heurística 5. Como se ha podido ver, la cantidad de polígonos a emplear en la teselación es directamente proporcional al alargamiento del rectángulo ABCD ¿De qué depende la cantidad de regiones en que se realiza la teselación?

Los primeros intercambios heurísticos para contestar esta interrogante son dirigidos a determinar una medida matemática del "alargamiento" del rectángulo, y esta es precisamente, la razón entre las longitudes de los lados del rectángulo, con lo cual se concluye que la cantidad de polígonos de la teselación depende de dicha razón.

De aquí, se deriva la interrogante

Pregunta heurística 6. Sea "k", la razón entre los lados del rectángulo, ¿cómo se pueden determinar las longitudes de los segmentos de los polígonos que teselan el rectángulo?

Considerando el primer caso mostrado anteriormente, se realiza la siguiente figura de análisis, con sus notaciones, donde se tiene que: el triángulo BCP es común al rectángulo y al cuadrado, el triángulo ADF es igual al triángulo BCE, el triángulo CGH es igual al triángulo IJQ y el pentágono DGHPF es igual al pentágono EPIJR.

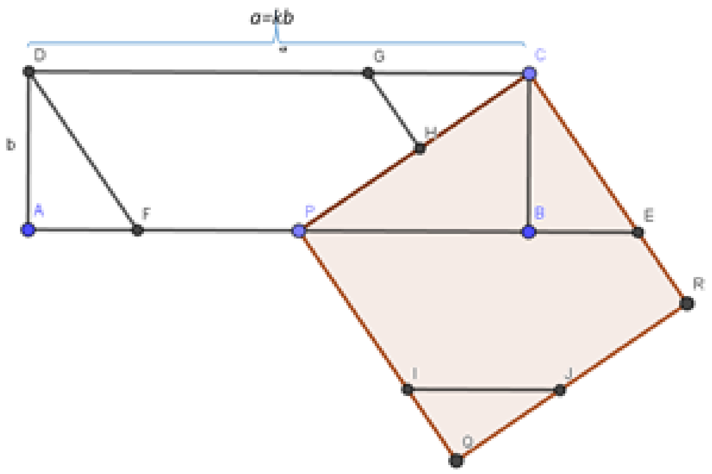

Figura 16. Figura de análisis con notaciones convenientes

Para proceder a la determinación de las longitudes buscadas y, con ello, los tipos y dimensiones de los polígonos que teselan el rectángulo y el cuadrado, se establecen intercambios heurísticos, basados en los principios de: analogía, reducción, movilidad, descomposición del problema en subproblemas, consideración de casos especiales, etc; conduciendo las conversaciones heurísticas a la obtención de los siguientes resultados.

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que $a > b$.

Si $\frac{a}{b} = k$, entonces se infiere que $k > 1$, y resulta:

$$a = kb, \text{ con } k > 1$$

Como las áreas del rectángulo ABCD y el cuadrado PQRS son iguales, se tiene

$$AD \cdot CD = CP^2,$$

$$\text{o sea, } b \cdot kb = CP^2,$$

de donde, el lado del cuadrado será:

$$CP = \sqrt{k} \cdot b$$

Por el Teorema de Pitágoras en el □PBC, se tiene

$$BP^2 = CP^2 - BC^2,$$

o sea, $BP^2 = k \cdot b^2 - b^2$,

de donde resulta:

$$BP = \sqrt{k-1} \cdot b$$

Por el Teorema de Pitágoras en el □CPE, se tiene

$$BE^2 = CE^2 - BC^2,$$

Análogamente, por el Teorema de Pitágoras en los □CPE y □CBP, respectivamente se tiene:

$$CE^2 = PE^2 - PC^2 \qquad \text{y} \qquad BC^2 = PC^2 - BP^2$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la anterior, resulta:

$$BE^2 = PE^2 - PC^2 - PC^2 + BP^2$$
$$BE^2 = PE^2 - 2PC^2 + BP^2$$

Pero, por suma de segmentos, $PE = BP + BE$, y sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$BE^2 = (BP + BE)^2 - 2PC^2 + BP^2$$
$$BE^2 = BP^2 + 2BP \cdot BE + BE^2 - 2PC^2 + BP^2,$$
$$0 = 2BP^2 + 2BP \cdot BE - 2PC^2$$

Donde, al despejar BE, resulta:

$$BE = \frac{PC^2 - BP^2}{BP}$$

Sustituyendo los segmentos ya calculados $CP = \sqrt{k} \cdot b$ y $BP = \sqrt{k-1} \cdot b$, resulta

$$BE = \frac{(\sqrt{k} \cdot b)^2 - (\sqrt{k-1} \cdot b)^2}{\sqrt{k-1} \cdot b}$$
$$BE = \frac{k \cdot b^2 - (k-1)b^2}{\sqrt{k-1} \cdot b}$$

$$BE = \frac{b}{\sqrt{k-1}}$$

Volviendo a la suma de segmentos $PE = BP + BE$, sustituyendo por las expresiones anteriores se tiene,

$$PE = \sqrt{k-1} \cdot b + \frac{b}{\sqrt{k-1}}$$

$$PE = \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Además, como el pentágono DGHPF es igual al pentágono EPIJR, se tiene que:

$$DG = PE = \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Pregunta heurística 7. Como se ha descubierto, la cantidad "C" de polígonos que conforman la teselación depende de la razón "k" entre los lados del rectángulo, ¿Cómo puede determinarse "C" en función de "k"?

Al comparar las figuras 3 y 4, puede notarse que la cantidad C varía en función de la cantidad de polígonos que se conformen con un lado igual al lado DG.

Como se aprecia, en general, existen 3 triángulos en la distribución de polígonos de las teselaciones, por lo que la cantidad de polígonos con lado DG será "C-3".

Luego, por diferencia de segmentos, la longitud del segmento CG será

$$CG = CD - (C-3) \cdot DG$$

Sustituyendo las longitudes de los segmentos involucrados en el miembro derecho, resulta

$$CG = k \cdot b - (C-3)\frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

$$CG = (\sqrt{k-1} - C + 3)\frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Por otra parte, resulta obvio que $0 \leq CG \leq DG$, y al sustituir, se tiene

$$0 \leq (\sqrt{k-1} - C + 3)\frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}} \leq \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Y al realizar transformaciones elementales, se obtiene:

$$\sqrt{k-1} + 2 \leq C \leq \sqrt{k-1} + 3$$

Con este resultado y conociendo que $C \in N$, se infiere que

$$C = \begin{cases} \sqrt{k-1} + 2, & si \ \ \sqrt{k-1} + 2 \ \in N \\ \left[\sqrt{k-1}\right] + 3, & si \ \ \sqrt{k-1} + 2 \ \notin N \end{cases}$$

donde $[x]$, significa "parte entera de x" y se refiere al mayor número entero menor o igual que x.

De esta forma, se ha conducido a los estudiantes, mediante el empleo oportuno de los recursos heurísticos, a la obtención y demostración geométrica de los teoremas de la altura y de los catetos, utilizando el manejo de materiales concretos adecuados para ello, consistentes en teselaciones poligonales óptimas.

No obstante, resulta válido señalar que, para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.

3. Otras herramientas para la deducción y demostración formal de los teoremas de la altura y de los catetos utilizando teselaciones

Las herramientas de profundización para la formalización deductiva de los resultados que se han expuesto, se presentan en los dos epígrafes siguientes, destinados a estudiantes, preferiblemente, de bachillerato o universitarios.

3.2. La equidescomposición y equicomplementación como fundamentación teórica del proceso de teselación poligonal

Como se ha visto hasta el momento, para realizar la teselación poligonal de una región plana, se requiere la descomposición de la región en polígonos que no deben superponerse el uno sobre el otro.

A continuación se presenta la formalización matemática de estas ideas, a la luz de la teoría de equidescomposición y equicomplementación de polígonos propias de David Hilbert (1862 - 1943), reconocido matemático alemán enfrascado en la formalización de la Matemática, expuestas en Pressiat (2002) y que se citan en Duque Navarro & Maca Cortés (2011).

"Dos figuras P y P′ son equidescomponibles si es posible expresar cada una de ellas como la unión de triángulos (polígonos) no superpuestos el uno sobre el otro, de modo tal que para cada i los triángulos Ti y T′i sean congruentes y se cumple:

$$P = T1 \cup T2 \cup \ldots . \cup Tn \ y \ P' = T'1 \cup T'2 \cup \ldots . \cup T'n$$

Dos figuras P y P′ son equicomplementarias (tienen la misma superficie) si existen dos figuras Q y Q′ que satisfagan las siguientes cuatro condiciones:

- *P y Q no se superponen la una con la otra.*
- *P′ y Q′ no se superponen la una sobre la otra.*

- *Q y Q′ son equidescomponibles.*
- *P∪Q y P′∪Q′ son equidescomponibles." p. 59-60*

Como consecuencia de estas definiciones, se tiene que la equidescomponibilidad es una "relación de equivalencia" (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), y que la equicomplementariedad es una condición necesaria para la equidescomponibilidad, es decir, que si las dos figuras P y P′ son equidescomponibles entonces, también son equicomplementarias (tienen la misma superficie).

Un ejemplo de esta situación es el triángulo equilátero formado por la unión de dos triángulos rectángulos congruentes, es equidescomponible con un triángulo isósceles o con un trapezoide simétrico, construidos uniendo dichos triángulos por su menor cateto y por su hipotenusa, respectivamente, tal y como lo muestra la figura:

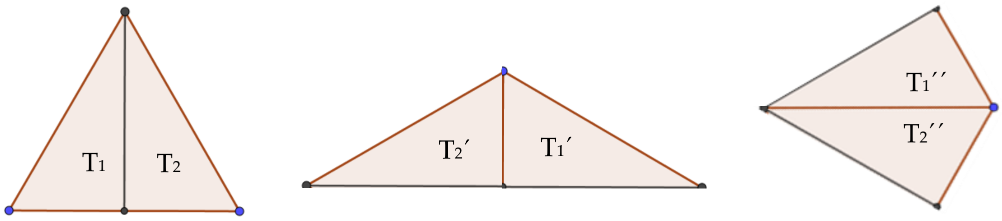

Figura 17. Ejemplo de figuras equidescomponibles

Aplicando estos conceptos a los teoremas de la altura y de los catetos ya discutidos, puede verse cómo ambos se reducen a la equidescomposición y equicomplementación de un rectángulo con el cuadrado de su misma área.

3.2. Método de la p-tira para la equidescomposición

El problema de encontrar una figura equidescomponible con otra puede resultar una tarea bastante ardua y a veces difícil, sin embargo, con el método de la p-tira, esto puede facilitarse en muchos casos.

Como puede verse en Duque Navarro & Maca Cortés (2011), el método de la p – tira

> *"consiste en encontrar la equidescomposición de dos rectángulos con igual área, las "piezas" en las que se descompone cada rectángulo, resultan del cruce de dos bandas, cada una de ellas, con la forma de su respectivo rectángulo, como se muestra en la siguiente figura" p.67*

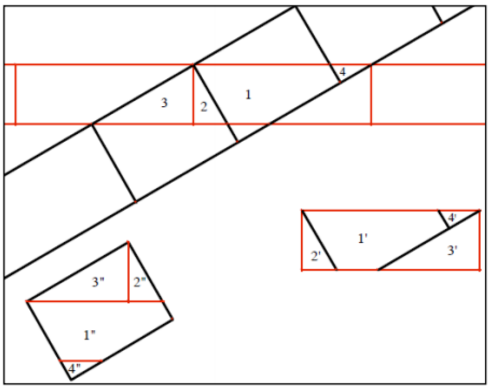

Figura 18. Ejemplificación del método de la p - tira en la equidescomposición de rectángulos. Tomado de Duque Navarro & Maca Cortés (2011), p.68

Para que este método ofrezca el resultado esperado, las bandas deben cruzarse de manera óptima, de tal manera que un extremo del lado del rectángulo de la segunda banda que se superpone, coincida con el vértice del rectángulo de la primera banda y el otro extremo corte el otro lado del rectángulo de la primera banda.

Como puede aprecirse, este método pudo haberse usado en la cuadratura del rectángulo, que se empleó en la deducción y demostración geométrica de los teoremas de la altura y de los catetos en epígrafes anteriores.

Referencias

[1] BALLESTER, Sergio y otros. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, pp.134 – 146, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1992.

[2] CASSELMAN, Bill. *On the dissecting table: Henry Perigal 1801 - 1898*, Plus Magazine, 16, December, https://plus.maths.org/content/dissecting-table, 2000.

[3] CENERA GARCÍA, Verónica. *El aprendizaje de la geometría con la ayuda de material didáctico en primer ciclo de primaria trabajo fin de grado de Licenciada en Educación Primaria*, Ediciones Universidad de Valladolid, España, 2015.

[4] COLL, César. *Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje*, pp. 157-186, Alianza Editorial, Madrid, España, 2001.

[5] DUQUE NAVARRO, Jonathan Har & MACA CORTÉS, Oscar Eduardo. *Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura en los libros I y II de Los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la Educación Básica*, Tesis en opción al título de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-0449756.pdf Universidad del Valle, Cali, Colombia, 2011.

[6] GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. *El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años*, Revista SIGMA Nº 32, Noviembre 2008, pp.103-130, España, http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

[7] LARROSA, Ignacio. *Cuadrando el rectángulo*. Animación en Geogebra, http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Rectangulo2Cuadrado.html. 2014.

[8] MILLER, María. *Un problema de teselación,* Boletín 11 Mamut Matemáticas, https://www.mamutmatematicas.com/boletin/febrero-2009.htm, 2009.

[9] SERRANO, José Manuel & PONS PARRA, Rosa María. *El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación*. Revista Electrónica de Investigación Educativa. ISSN: 1607-4041. Vol. 13, Núm. 1, http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html, México, 2011.

[10] URIBE GARZÓN, Sonia Milena; CÁRDENAS FORERO, Óscar Leonardo & BECERRA MARTÍNEZ, James Frank. *Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños,* Educación Matemática, vol. 26, núm. 2, pp. 135-160, Grupo Santillana México Distrito Federal, México, 2014.

Sobre los autores:

Nombre: José Enrique Martínez Serra
Correo Electrónico: jose.martinez@unae.edu.ec
Institución: Universidad Nacional del Ecuador.

Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal
Correo Electrónico: marco.vasquez@unae.edu.ec
Institución: Universidad Nacional del Ecuador.

Nombre: Arelys García Chávez
Correo Electrónico: arelys.garcia@unae.edu.ec
Institución: Universidad Nacional del Ecuador.

Nombre: Ramiro Infante Roblejo
Correo Electrónico: rinfanteroblejo@gmail.com
Institución: Universidad de Granma, Cuba.