

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



Volumen X, Número 1, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González
Sagrario Lantarón Sánchez
Javier Rodrigo Hitos
José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos,
José Manuel Sánchez Muñoz, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey,
Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla,
Trinidad Menárguez Palanca, María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre,
Susana Merchán Rubira

1 de abril de 2020

Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. X) 1

Investigación

Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de *Aonidiella aurantii* y de *Aphytis Mellinus* 11
Alfonso Garmendia y Adela Salvador

Experiencias Docentes

Errores frecuentes en el área de matemáticas, un análisis estadístico con alumnos de bachillerato 23
Pablo Sánchez Madrigal

Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales 51
José Enrique Martínez Serra, Marco Vinicio Vásquez Bernal, Arellys García Chávez y Ramiro Infante Roblejo

Historias de Matemáticas

Enseñando Relatividad Especial gráficamente 73
Daniel de la Fuente Benito, José Antonio Sánchez Pelegrín y Alfonso Zamora Saiz

El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides) 83
Juan Tarrés Freixenet

El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo 95
Román Ceano

Juegos y Rarezas Matemáticas

Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros 109
Rosa H. Herrera

Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden) 115
Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe

Cuentos Matemáticos

La historia de Gulliver 127
Rafael Rivera

El origen de los números complejos 139
Miguel Oscar Almarales Milán

Críticas y Reseñas

Informe sobre la película “Un Don Excepcional” 143
José Manuel Sánchez Muñoz

Entrevista

María Medina: “Historia de una investigadora en matemáticas que (sobre)vive lejos de casa” 151
Susana Merchán Rubira

Editorial del Número 1 (Vol. X)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 001-010, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Mar'20; Aceptación: 20 Mar'20

1 de abril de 2020

Resumen

Estamos viviendo un periodo extraño debido al confinamiento por culpa del COVID 19. Hemos querido comentar cómo está afectando esto al mundo científico, de las matemáticas, de la enseñanza ...

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física.

Abstract

We are experiencing a strange period due to the confinement by the COVID 19. We wanted to comment on how it is affecting the scientific world, mathematics, teaching ...

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal or theoretical point of view but Maths applied to different areas such as engineering or physics.

Introducción

Estamos viviendo un periodo para muchos sin precedentes, debido al confinamiento por culpa del COVID 19. Todos los días la televisión, los periódicos, los medios, nos dicen el número de contagiados, de muertos, de dados de alta. Las amistades toman esos datos, los ponen en una hoja de cálculo, hacen sus gráficas y dibujan sus curvas. Nos lo envían cada día. Los niños y niñas hablan de "crecimiento exponencial" del número de contagiados. Las matemáticas están cada vez más "en todas partes". Los correos electrónicos y los WhatsApp nos traen esos datos, esas gráficas. Se estudian por comunidades autónomas, los generales de toda España, los de los distintos países ...

Vamos a comentar únicamente tres de los muchos artículos, muy diferentes, que usan las matemáticas para explicar la situación actual.

En algunos países no hay contagiados, de momento, como en Indonesia, ¡por la gracia de Alá!¹. Entonces surge un problema, ¿cómo comparar todos esos datos? En algunas gráficas se representan los datos en escala logarítmica.

¿Cómo se explica qué es una escala logarítmica y cómo es conveniente representar estos datos de crecimiento exponencial en dicha escala para poder comparar los de distintos países?².

¹ [1] <https://lacienciaysusdemonios.com/2020/02/25/indonesia-esta-libre-de-coronavirus-por-la-gracia-de-ala/>

² RODRÍGUEZ, Pablo. *¿Qué es una escala logarítmica?*, <https://fuga.naukas.com/2020/03/20/que-es-una-escala-logaritmica/>.

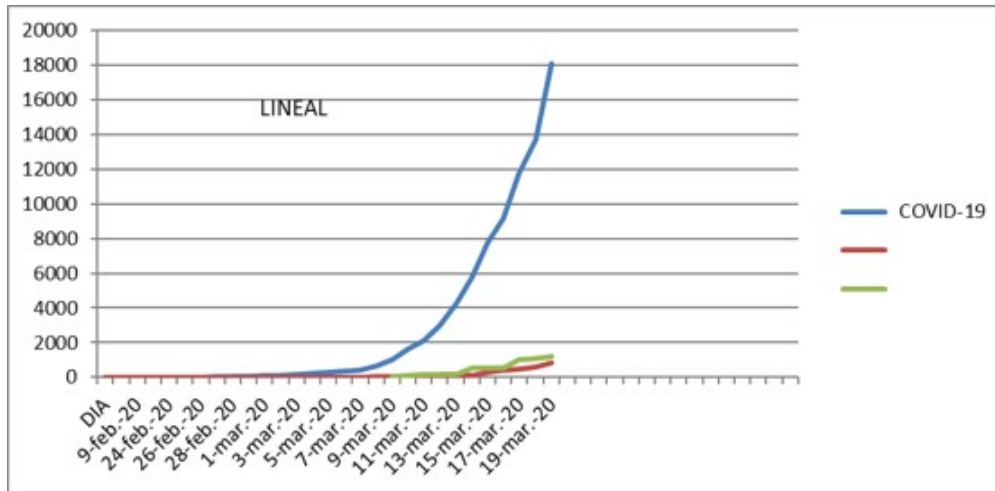


Figura 1. En azul, el número de contagiados en España, en verde, el número de muertos, en rojo, el número de curados.

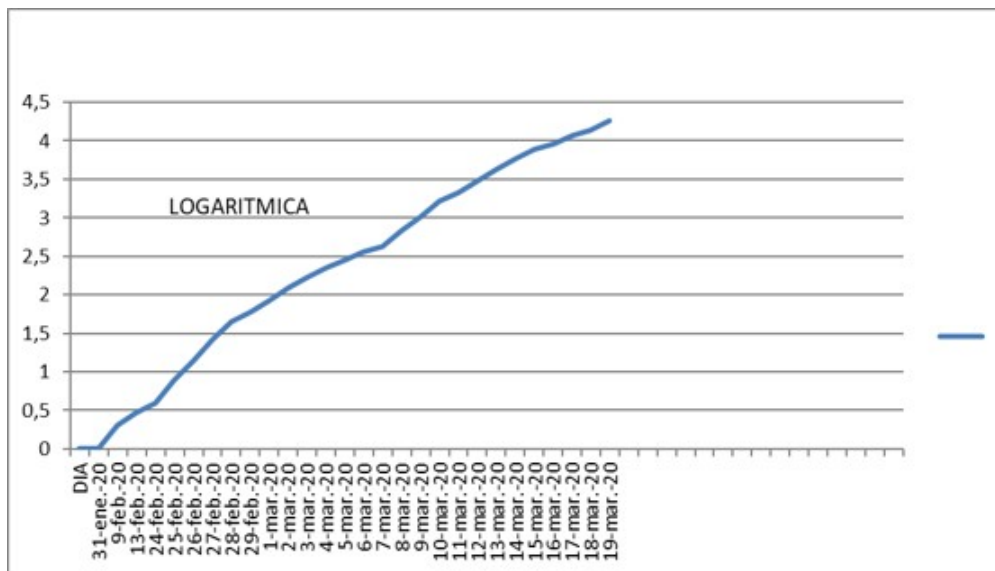


Figura 2. Los datos de número de contagiados en España, en escala logarítmica.

Primero vamos conociendo los datos en España en dicha escala, lo que nos permite saber cuándo la pendiente de la curva empieza a descender, es decir, cuando se empieza a vencer al virus. Las gráficas en escala logarítmica de los diferentes países, todas juntas, hasta a los más profanos, les dan una idea de la gravedad del problema. Permite conocer qué países van mejor que otros. La pregunta que suscita es si en todos los lugares se están tomando los datos con similares criterios. Con los datos publicados, parece que el virus ataca más a los países ricos. Pero suponemos que esa no es la explicación, sino que en esos países no se están tomando datos de contagiados, no se conocen los datos, todavía.

Otros quieren construir un modelo matemático que permita conocer de qué manera se van a comportar esos datos en el futuro³. Con los datos recogidos se puede construir un modelo que posibilite averiguar cómo se van a comportar el número de contagiados, por ejemplo, en los tres días sucesivos.

³ <https://covid19.webs.upv.es/>

Gráficas, gráficas y más gráficas. Hay artículos que recogen los datos de diferentes países y al conocer la evolución en cada uno, pueden analizar las distintas estrategias para luchar contra el virus: no hacer nada, confinar a la población en sus casas, otras posibles estrategias⁴. Así, cada gobierno toma la decisión de, si es preferible la economía del país o la salud de sus habitantes. En muchos países se pensó que el Covid 19 no era gran cosa, y se pospusieron las decisiones, como declarar el estado de alarma. Si se toma la decisión de “no hacer nada” muchas personas morirán. Señala el artículo un país donde probablemente van a morir ¡diez millones de personas! Es una pandemia mundial, luego es probable que ningún país pueda escapar, y que tarde o temprano, tenga que tomar decisiones. Si se toma la decisión del “confinamiento” voluntario aparecen las gráficas de los tiempos que tardará en vencerse al virus, diferentes cronogramas, y se comparan con las gráficas de no hacer nada. Si se toman medidas drásticas y obligatorias de confinamiento, aparecen otras gráficas y otras fechas. Pero la economía de los países se va a resentir. Según sean de drásticas esas medidas, el comportamiento es diferente. Lo que se intenta con esta medida es ganar tiempo. Ganar tiempo para que no se bloqueen los sistemas sanitarios, para que los enfermos no lleguen todos al mismo tiempo a las UCIs, para que aparezca una medicina que cure a estos enfermos, para que aparezca una vacuna ... Añade el artículo los datos de camas de UCIs en varios países, si todos los contagiados graves llegan a la vez, siempre insuficientes, del número de ventiladores, la falta de recursos, y añade los daños colaterales de los enfermos de otras patologías que no pueden ser tratados. Se conocen otros datos matemáticos: como tasa de mortalidad, la velocidad de transmisión, etc. Si una persona contagiada, contagia a su vez a dos o tres personas, tenemos un crecimiento exponencial. También si está velocidad está por encima de 1. En Wuham era en un principio de 3,9, y se redujo a 0,32. Basta con reducir dicha velocidad a menor que 1 y entonces se vence al virus. Por último, en este artículo se analiza la actuación de Corea del Sur. Allí se ha aplicado la prueba de contagio a toda la población, y sólo se han aislado a los contagiados, aunque de forma férrea, usando modernas tecnologías, como el reconocimiento facial, para saber si un contagiado sale de su aislamiento, y conocer todos los contactos que ha podido tener. Y ese procedimiento ha dado frutos. Pero es difícil que se pueda aplicar en otros sitios.

Todos estos artículos nos ayudan a conocer a nuestro enemigo, y a aceptar las antipáticas medidas que deben tomarse. Pero no todo es negativo. Hace nada hubo una cumbre sobre el cambio climático, y resultaba imposible tomar ciertas medidas. Ahora, ¡se han tomado! El aire de las ciudades, vacías, está más limpio. Se ha reducido drásticamente el tráfico aéreo que tanto contamina. Venecia tiene el agua de los canales limpia, y hasta con peces. Esto indica que, aunque no creo que se haga, si es posible luchar contra el cambio climático.

Por último, recordar que el alumnado está también confinado en sus casas. Que el profesorado le está enviando trabajos para que lo haga. Un sistema de autoaprendizaje. No todo el alumnado está en las mismas condiciones. Es diferente tener un ordenador en casa que no tenerlo. Y ahora no se puede ir a utilizar el de la biblioteca pública. Pero, tanto para el profesorado, que está trabajando para enviar esos materiales, como para el alumnado que debe utilizarlos y hacer los trabajos encomendados en solitario, es una nueva experiencia. Esos materiales didácticos que se están confeccionando en este momento pueden tener una utilidad práctica en el futuro. Estaría bien que las autoridades académicas gestionaran una forma de que lo que ha hecho uno, pueda ser utilizado por otros. Por ejemplo, en <http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html> se pueden encontrar materiales didácticos para secundaria obligatoria y bachillerato.

⁴ PUEYO, Tomás. *Historia de Coronavirus: The Hammer and the Dance*. <https://medium.com/@tomaspueyo/coronavirus-the-hammer-and-the-dance-be9337092b56>

Investigación

En “Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de *Aonidiella aurantii* y de *Aphytis Mellinus*”, se analiza la importancia del tipo de modelo para estudiar el efecto de la temperatura sobre el crecimiento de *Aonidiella aurantii* y su enemigo natural *Aphytis Mellinus*. Se han probado diferentes modelos con los datos existentes en la bibliografía y se propone que se utilice un modelo parabólico en vez de lineal. Los estudios de otros autores utilizan modelos lineales, más fáciles de calcular, pero se ajustan peor a los datos existentes. Tampoco desde un punto de vista conceptual, ya que no tiene sentido utilizar una función creciente (lineal o potencial $y = a \cdot T^b$), cuando los datos son primero decrecientes y luego crecientes (temperatura vs. número de días). En este artículo se analizan otros ajustes, comprobando que el mejor ajuste es mediante una función polinómica de segundo grado.

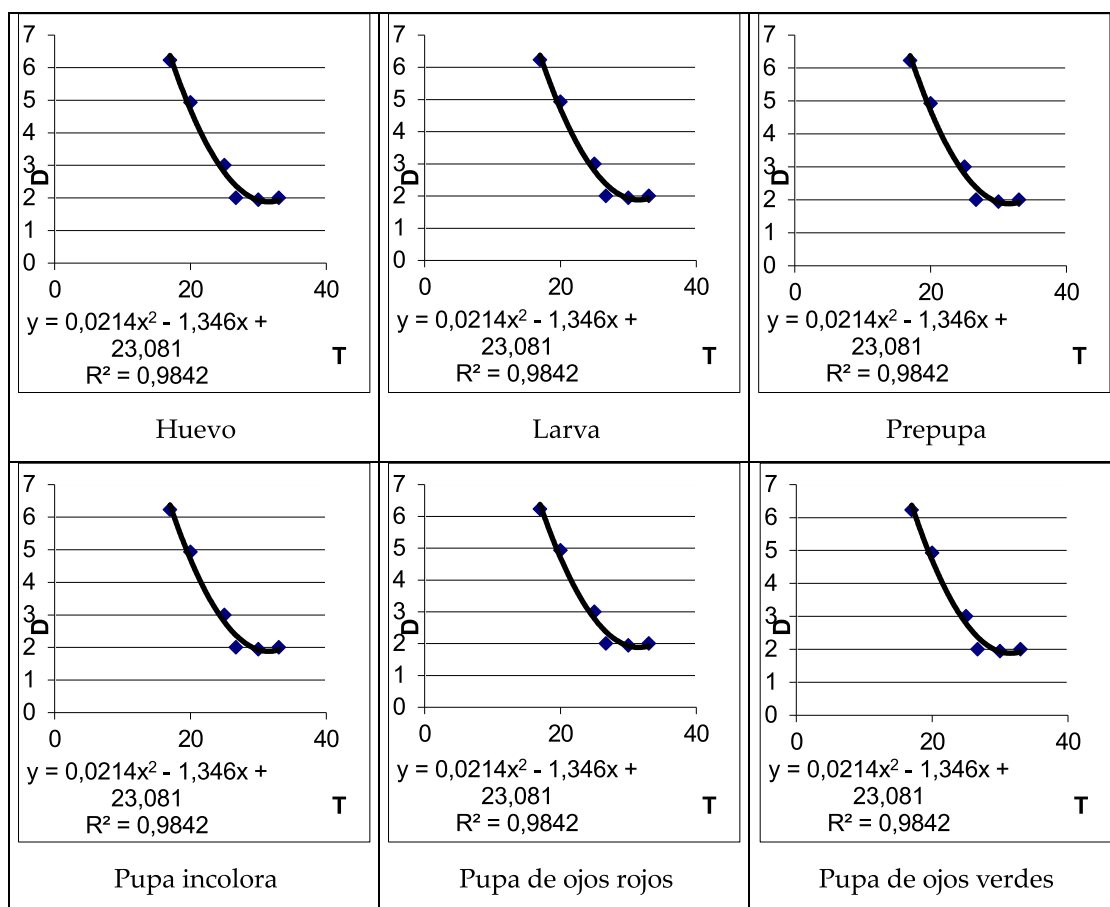


Figura 3. En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1988, y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, para cada una de las etapas, para *Aphytis mellinus*.

Experiencias Docentes

“Errores frecuentes en el área de matemáticas, un análisis estadístico con alumnos de bachillerato” hace un estudio estadístico de los errores matemáticos de los estudiantes de una Escuela de bachillerato en México, mediante una evaluación escrita elaborada y aplicada a una muestra de alumnos. Con la información recabada y con la ayuda de la estadística descriptiva, se detectaron

aquellos errores típicos que con frecuencia cometen los estudiantes. Una vez realizado lo anterior, se implementaron estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generaron más dificultades, con el objetivo de superar los errores detectados. Consecuentemente, se aplicó una segunda evaluación escrita a la muestra de alumnos, para entonces aplicar la prueba estadística t de Student y relacionar los datos recabados. El objetivo fue comparar los resultados de aprendizaje del grupo de estudiantes antes y después de recibir el entrenamiento focalizado en los errores más frecuentes.



Figura 4. Número de aciertos por estudiante (Fuente: Elaboración propia con software RStudio).

“*Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales*” pone de manifiesto que una de las estrategias didácticas que más contribuye al aprendizaje por descubrimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los niveles inicial y medio, es el trabajo con material concreto o manipulativo, el cual permite a los estudiantes el tránsito por procesos mentales de comparación, análisis, síntesis, abstracción, generalización, etc., conducentes a la formación de nuevos conceptos y/o la formulación de nuevas proposiciones. En esta dirección, pueden aprovecharse las potencialidades que ofrece el empleo de las teselaciones poligonales, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones y/o demostraciones de nuevos teoremas.

Se ilustra cómo el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar deducciones y demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

Finalmente, se deja claro que para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, de las cuales se presentan dos de ellas, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.



Figura 5. Imagen del Teorema de Pitágoras como emblema de la Geometría en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia.

Historias de Matemáticas

En *“Enseñando Relatividad Especial gráficamente”* se presenta una introducción a la Relatividad Especial sencilla y sin fórmulas, apta para ser explicada a un alumnado de Bachillerato. Gracias al planteamiento, los autores son capaces de demostrar de manera gráfica fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.

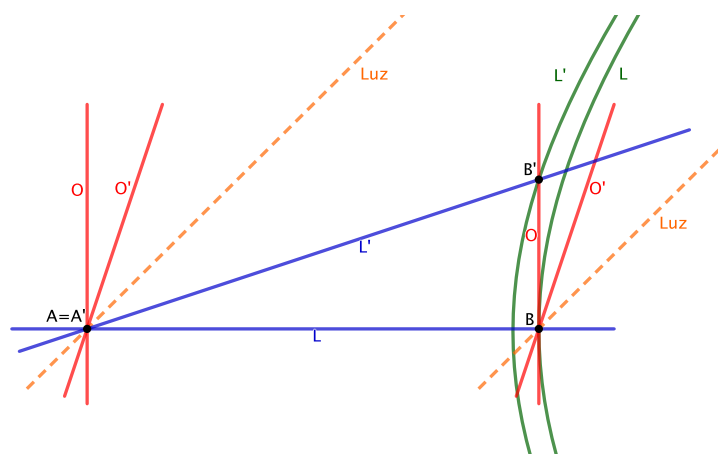


Figura 6. La longitud de la regla medida en reposo es $L = \overline{AB}$, mayor que la medida por un observador en movimiento O' , que vale $L' = \overline{A'B'}$.

En *“El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides)”* se pone de manifiesto que Euclides escribió un tratado de agrimensura que se perdió en las múltiples vicisitudes por las que atravesó la Biblioteca de Alejandría. Tenemos noticia de él gracias a la obra de Proclo (siglo V d.C.). Se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe, de los siglos XVI a XIX. Esto permitió a Raymond Clare Archibald publicar una reconstrucción del citado texto en 1915.

En *“El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo”* se explica a grandes rasgos cómo la matematización del conocimiento científico que se produjo en los siglos XVI y XVII exigió de las matemáticas una evolución súbita para poder hacer frente a las nuevas demandas. La matemática heredada de los griegos con su matriz geométrica, su aversión al infinito presente

y su torpeza en el manejo de curvas era incapaz de satisfacer las nuevas demandas.

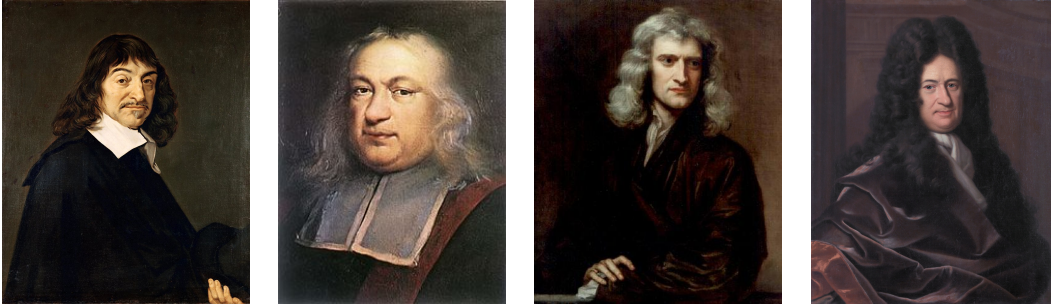


Figura 7. René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton y Gottfried Leibniz

Juegos y Rarezas Matemáticas

En *“Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros”* se ve que el principio de Fermat de mínimo tiempo sirve para elaborar un modelo mecánico, que se puede ejemplificar en el ejercicio propuesto, en el que se compara la geometría de la ley de Snell de la óptica, que se corresponde con el principio de Fermat, con el problema físico idealizado.

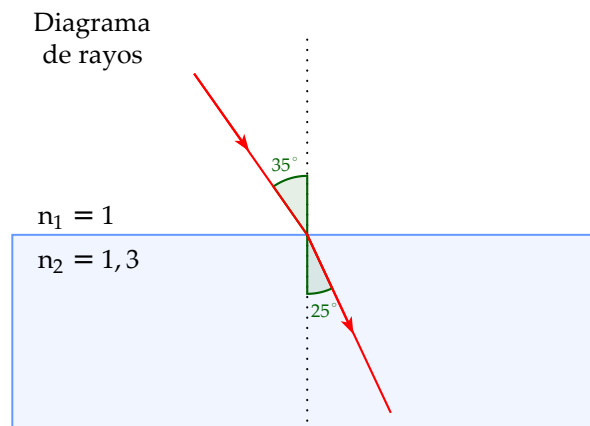


Figura 8. Un ejemplo de refracción de un rayo de luz.

En *“Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden)”* se muestra una manera curiosa en la que se pueden comportar los números combinatorios dando lugar a un nuevo concepto curioso (orden de número combinatorio). Además del orden, se analiza la suma, el binomio y algunos números primos interesantes empleando dicho concepto.

Cuentos Matemáticos

En *“La historia de Gulliver”* se muestra el cuento que el arquitecto Rafael Rivera, creador del Parque Gulliver de Valencia, cuenta a niños y niñas de corta edad para relatarles y enseñarles cómo se plantea y realiza un proyecto, en este caso, de un parque infantil.

Con *“El origen de los números complejos”* se pretende iniciar de forma amena y desde un punto de vista didáctico el comienzo del estudio de los números complejos.

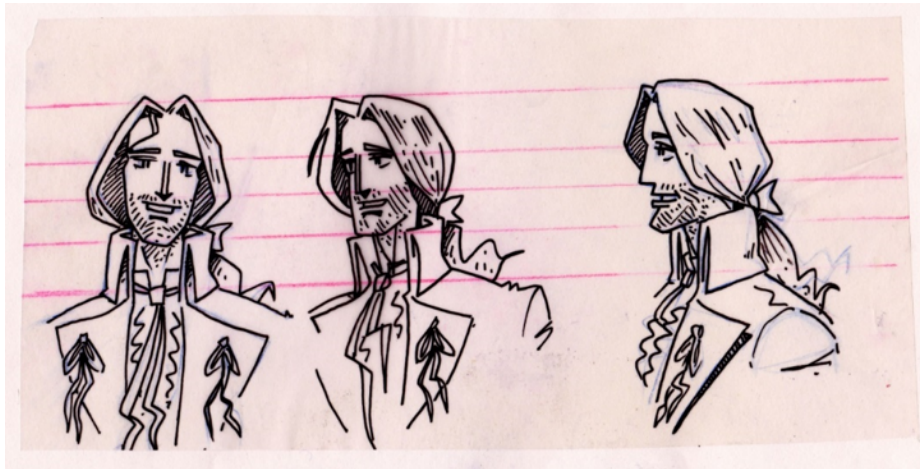


Figura 9. Esbozos de Sento Llobell.

Críticas y Reseñas

“Informe sobre la película: Un Don Excepcional” presenta una reseña de la película “Un Don Excepcional” dirigida por Marc Webb. El largometraje trata sobre una niña con capacidades especiales para las matemáticas que junto con su tío, intenta superar la dificultad para asimilar la realidad del entorno social, personal, sentimental y familiar que la rodea y que impide un desarrollo “normal” de su infancia.



Figura 10. Cartel anunciador de la película.

Entrevistas

“María Medina: Historia de una investigadora en matemáticas que (sobre)vive lejos de casa” muestra la cara más cercana de esta investigadora y profesora de la Universidad de Granada. Actualmente está viviendo en Roma e investiga en Ecuaciones en Derivadas Parciales.



Figura 11. María Medina.



Nos gustaría acabar poniendo de manifiesto que aunque actualmente no vivimos tiempos de celebración, debemos estar de enhorabuena por el hecho de que nuestro proyecto ya lleve 10 años vivo. ¡10 años! se dice muy pronto. Han sido 10 años de creer en un proyecto a pesar de la escasa o nula ayuda recibida para que siga adelante. Nos encantaría celebrarlo como un hecho así se merece, pero a los integrantes del equipo editorial nos parece que ahora todas nuestras fuerzas y objetivos tienen que dirigirse a paliar esta dura situación. Queremos que sepáis que vosotros lectores tenéis toda nuestra solidaridad y desde aquí os enviamos todos los ánimos que podamos hacerlos llegar. Si nuestra revista puede servir para paliar en cierto modo esta dura situación nos daremos por satisfechos.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

“Las enfermedades no nos llegan de la nada. Se desarrollan a partir de pequeños pecados diarios contra la Naturaleza. Cuando se hayan acumulado suficientes pecados, las enfermedades aparecerán de repente”

Hipócrates

El Comité Editorial

