Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
ISSN 2174-0410 Volumen VIII, Número 1, Abril 2018

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LOS MÉTODOS INFINITESIMALES PARA EL CÁLCULO DE CUADRATURAS Y CUBATURAS

TEORÍA DE NÚMEROS: DE CIENCIA PURA A CIENCIA APLICADA

EXPERIENCIAS DOCENTES

AUTO-CREACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN MATEMÁTICAS

INVESTIGACIÓN

LÓGICA BORROSA PARA LA EVALUACIÓN DE LA SOSTENIBILIDAD

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

LA FUNCIÓN BETA, COMO SUMA DE NÚMEROS COMBINATORIOS

UN CUADRADO, CUATRO NÚMEROS

ENTREVISTA A:

DON MANUEL: EL ARTE DE ENSEÑAR EN UNA PEQUEÑA ESCUELA

CUENTOS MATEMÁTICOS

CRÍTICAS Y RESEÑAS

NUESTRA EXPERIENCIA EN EL PROGRAMA: "4º ESO + EMPRESA"

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen VIII, Número 1, Abril 2018

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Foto de portada / Sfera con Sfera de Arnaldo Pomodoro (Cortile della Pigna, Museo Vaticano)
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid

Volumen VIII, Número 1, ISSN 2174-0410

1 de abril de 2018

Índice de Artículos

Investigación

Experiencias Docentes

Historias de Matemáticas

Juegos y Rarezas Matemáticas

Cuentos Matemáticos

Críticas y Reseñas

Entrevista

Editorial del Número 1 (Vol. VIII)

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 001–004, ISSN 2174-0410

Recepción: 5 Feb'18; Aceptación: 7 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física.

Abstract

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal o theorical point view but Maths applied to different areas such as engineering or physics.

Investigación

"Lógica Borrosa para la Evaluación de la Sostenibilidad", pone de manifiesto que en la evaluación de la sostenibilidad se tiene en cuenta el impacto que cualquier actuación produce en factores sociales, culturales, económicos y medioambientales. Este trabajo presenta el desarrollo de una metodología y un software usando lógica borrosa para la evaluación de la sostenibilidad social, económica y medioambiental de proyectos para llegar a conseguir una evaluación global de la sostenibilidad.

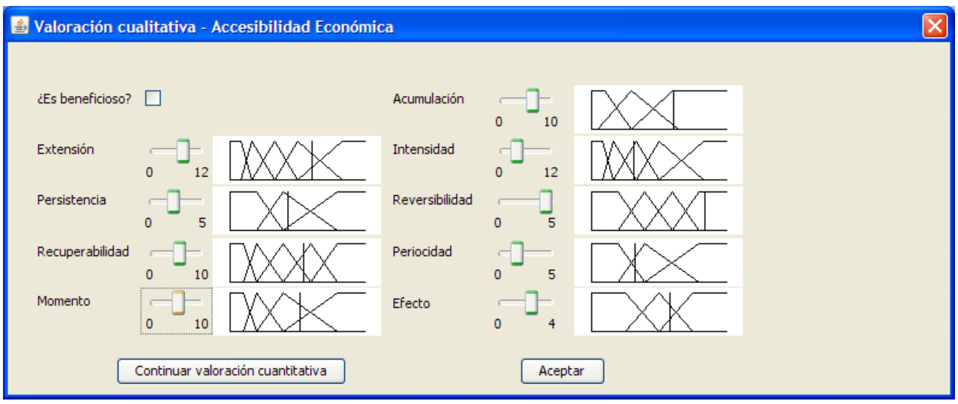


Figura 1. Fragmento de pantalla de la aplicación en la parte en que se ve el grado de pertenencia de cada valor a los conjuntos borrosos definidos en el sistema.

Experiencias Docentes

"Auto-creación de problemas para la resolución de sistemas de ecuaciones en Matemáticas" presenta una experiencia en el aula que intenta conseguir motivar al alumnado de 3º y 4º de ESO en la asignatura de Matemáticas Aplicadas. Nuestro objetivo es conseguir que los alumnos diseñen sus propios problemas de texto para trabajar el contenido de la resolución de sistemas de ecuaciones. Se verán algunos de estos problemas creados por el alumnado, así como algunas propuestas de mejora para esta dinámica de trabajo.

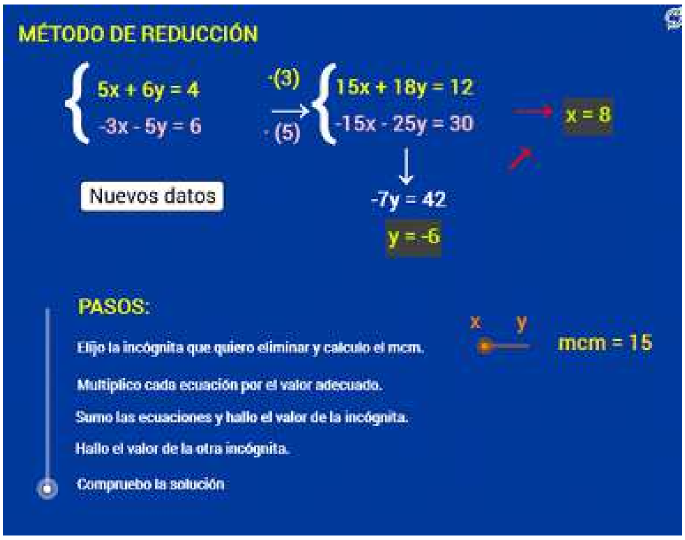
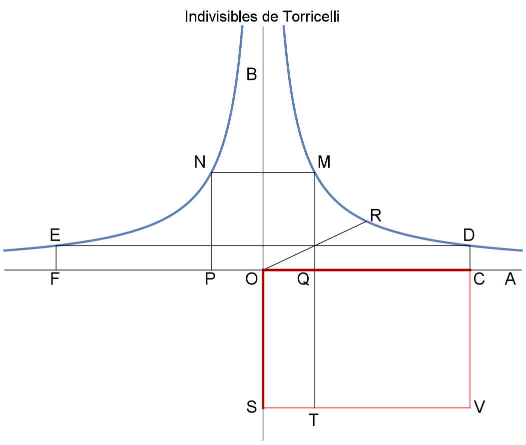


Figura 2. Applet de GeoGebra para el método de reducción, con todos los pasos visibles.

Historias de Matemáticas

En el artículo *"Los métodos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas y cubaturas"*, se estudian los métodos desarrollados por Cavalieri, Torricelli, Fermat y Pascal en la primera mitad del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Estos métodos fueron haciéndose cada vez más parecidos a nuestros actuales métodos de integración e iluminaron el nacimiento del Cálculo Infinitesimal, que se produjo a finales de siglo.



El objetivo del artículo de divulgación *"Teoría de Números: De Ciencia pura a Ciencia aplicada"* es presentar una reseña histórica de la evolución de la Teoría de Números y de su importancia actual para la Matemática y las Ciencias. Está dirigido a una amplia audiencia; en el caso de los matemáticos expertos esperamos que la información brindada sirva como un complemento a la formalidad: teorema - prueba y en el caso de los científicos una ilustración de la fascinación humana por los números.

Juegos y Rarezas Matemáticas

En *"La función Beta, como suma de números combinatorios"*, se busca estudiar la función Beta ($B_{(x,y)}$). Esta función está dentro de las funciones trascendentes y posee dos variables independientes. Se estudiará la función cuando estas variables son enteros positivos, y se obtendrá una expresión para la función como suma de números combinatorios.

En *"Un cuadrado, cuatro números"*, se presenta una curiosidad aritmética muy sencilla de enunciar y fácil de experimentar, cuya resolución involucra herramientas matemáticas elementales "y de las otras". Exploramos varias preguntas asociadas a este enunciado, y dejamos varias más planteadas para ejercicio del lector.

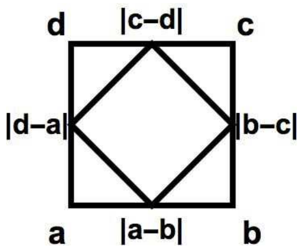


Figura 3. Cálculo de a′, b′, c′ y d′.

Cuentos Matemáticos

En este número se continúa con la publicación de los relatos premiados en el Primer Concurso de Relatos Cortos Matemáticos "π-ensa" convocado por el Aula Taller Museo de las Matemáticas "π-ensa" durante el curso 2015-2016. *"73"* resultó premiado con una mención especial del jurado en la categoría de estudiantes de bachillerato y universidad. Toda la información del concurso puede consultarse en la web del Aula: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas.

Críticas y Reseñas

"Nuestra experiencia en el programa «4ºESO+EMPRESA»" presenta una reseña sobre la experiencia de tres alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en el programa 4ºESO+EMPRESA de la Comunidad de Madrid.

Entrevistas

Figura 4. Don Manuel.

Enseñar siempre es complicado, y más hacerlo con pocos medios en una pequeña escuela de pueblo. Moralzarzal es una pequeña localidad de la sierra noroeste de Madrid. Manuel Alonso ha estado impartiendo docencia allí durante más de treinta y cinco años, simultaneando el trabajo de profesor con el de director del colegio. De la calidad de su trabajo y de su calidad humana, dan muestra el respeto y cariño con el que se le reconoce en el pueblo, por parte de sus antiguos alumnos, los padres de estos, las autoridades y todas las personas que lo han conocido. Desde el año 2005, el Ayuntamiento de Moralzarzal organiza un concurso de narrativa que lleva el nombre de Don Manuel. Esta entrevista trata de desvelar algunas de las claves que han permitido a Manuel Alonso elevar el trabajo de enseñar a la categoría de arte.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

> *"No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas ni ninguna de las basadas en las matemáticas."*
>
> Leonado Da Vinci

El Comité Editorial

Investigación

Lógica Borrosa para la Evaluación de la Sostenibilidad

Fuzzy Logic to Measure Sustainability

Raúl Martín Bonilla y Luis Garmendia Salvador

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 005–014, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En la evaluación de la sostenibilidad se tiene en cuenta el impacto que cualquier actuación produce en factores sociales, culturales, económicos y medioambientales. Este trabajo presenta el desarrollo de una metodología y un software usando lógica borrosa para la evaluación de la sostenibilidad social, económica y medioambiental de proyectos para llegar a conseguir una evaluación global de la sostenibilidad.

Palabras Clave: Impacto Ambiental, Lógica Borrosa, Soft Computing, Sostenibilidad Medioambiental, Sostenibilidad Social, Sostenibilidad Económica.

Abstract

The measure of sustainability takes into account the impact that social, economic and environmental factors can produce. This job presents the development of a methodology and software using fuzzy logic for the evaluation of social, economic and environmental sustainability of projects to pretend to come by a global sustainability evaluation.

Keywords: Environmental Impact, Fuzzy Logic, Soft Computing, Environmental Sustainability, Social Sustainability, Economic Sustainability.

1. Introducción: Sostenibilidad y lógica borrosa

El futuro está en nuestras manos, juntos, debemos asegurarnos de que nuestros nietos no tendrán que preguntarnos por qué no logramos hacer lo correcto dejándoles sufrir las consecuencias.

Ban Ki-moon, Secretario General de las Naciones Unidas, 2007.

El agotamiento de los recursos, el crecimiento de las zonas pobladas y el incremento de la población hacen que la sociedad tenga que preocuparse por la evolución del planeta a corto y medio plazo [16 - 20]. Esto, añadido a los efectos del cambio climático, hace que se estén tomando medidas a nivel mundial en la evaluación de la sostenibilidad de proyectos [9, 10]. Tradicionalmente, los estudios y análisis de proyectos se realizan desde el punto de vista a las empresas y lo que más les preocupa es la sostenibilidad económica. Sin embargo, un ciudadano cuando oye hablar de sostenibilidad suele pensar en el medio ambiente [3, 6]. Existen cuatro dimensiones de sostenibilidad: económica, social, cultural y medioambiental.

No sólo interesa que el proyecto tenga buenas expectativas y reporte un crecimiento económico a medio o largo plazo, sino que interesa que el impacto social que pueda representar dicho proyecto sea favorable, y que el impacto del mismo no sea nada agresivo, o simplemente, que no sea desfavorable a los recursos del medio ambiente. En otras palabras, evaluar si el proyecto es o no sostenible [1, 11].

La UNESCO, en su proyecto GAP (Programa de Acción Mundial) para la Educación en Desarrollo Sostenible (EDS) pretende:

Reorientar la educación y el aprendizaje para que todos puedan adquirir conocimientos, habilidades, valores y actitudes que los empoderen y les permitan contribuir a un futuro sostenible.

Fortalecer la educación y el aprendizaje en todas las agendas, programas y actividades que promuevan el desarrollo sostenible. [15]

La sostenibilidad es un criterio esencial en la calidad de un proyecto. Sólo aquellos proyectos que introduzcan cambios equitativos y aborden de forma duradera las causas de la vulnerabilidad estructural contribuirán a generar sistemas de sustento y un desarrollo humano también sostenible. Para lograrlo es preciso que las instituciones públicas, la comunidad o las familias destinatarias se impliquen y asuman la responsabilidad en el mantenimiento o gestión de las infraestructuras y bienes creados (que los bosques sean conservados, los sistemas de irrigación mantenidos, las carreteras reparadas, etc.).

La ejecución de un proyecto puede producir impactos no solo en la economía (propia de la empresa), sino en la economía de la zona, en el día a día de las personas, en el medio ambiente. Estos impactos se miden a través de unos indicadores. Existen métricas para medir la sostenibilidad de un proyecto [8]. Aun así, es complicado llegar a la conclusión de si un proyecto es o no sostenible, con un sí o un no. Se deben elegir bien los indicadores para calcular el impacto producido en los factores sociales, culturales, económicos y medioambientales.

Todas estas evaluaciones no siempre tienen valores concretos, de ahí la inclusión de la lógica borrosa en la estimación del impacto producido en un factor (a través de los indicadores) y a partir de los datos obtenidos de impactos en los factores, poder llegar a un resultado de sostenibilidad, primero, en cada una de las dimensiones, y después, para la sostenibilidad global. Esta inclusión de la lógica borrosa es una tecnología muy apropiada para la evaluación de la sostenibilidad, de ahí que sea el elemento principal de nuestro estudio.

Hemos desarrollado un sistema en Java, y hemos utilizado la herramienta XFuzzy 3.0 para el diseño inicial de los conjuntos borrosos y para la implementación del motor de inferencia con reglas [5]. Debido a la gran cantidad de combinaciones posibles en algunas de las reglas, se ha tenido que realizar un desarrollo propio de generación de reglas y almacenarlas en ficheros de librerías para no saturar el sistema.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: El primer apartado es una introducción de por qué aplicar la lógica borrosa a la sostenibilidad. En la siguiente sección se hace una introducción a la sostenibilidad y la evaluación de proyectos. El punto tres habla de los conjuntos borrosos que cubren las variables lingüísticas del sistema. El apartado cuarto explica qué operadores, reglas y métodos de defuzzyficación se utilizan en el estudio. En el quinto se muestra la evolución de la lógica borrosa en la sostenibilidad, que es una visión de futuro de la aplicación de la lógica borrosa a la sostenibilidad. Luego se comentan las conclusiones obtenidas durante este estudio y se termina con la bibliografía.

2. Evaluación de la sostenibilidad

Hasta ahora, la evaluación de la sostenibilidad de un proyecto se realiza basándose en la evaluación del impacto ambiental, mediante métodos manuales y poco automatizados. Una de las metodologías más utilizadas es la matriz de Leopold, que consiste en una matriz donde en las columnas hay 100 acciones y en las filas 88 factores ambientales. De los cruces se obtienen los impactos producidos en los factores ambientales. En cada evaluación de un impacto se marca, en una celda partida en dos, la magnitud del impacto, con una puntuación de 0 a 10, y en la inferior la importancia también en una escala de 0 a 10. De la suma producida se obtiene el impacto sobre cada uno de los factores ambientales, y sumando por columnas, el impacto por cada acción.

Existen otros métodos de evaluación de sostenibilidad de proyectos, pero no hemos encontrado ningún método informático estándar que evalúe la sostenibilidad de un proyecto. Este trabajo desarrolla un estudio de cómo se puede evaluar la sostenibilidad de cualquier tipo de proyecto o actividad y desarrolla una aplicación para resolver estos cálculos. La lógica borrosa se adapta a la evaluación de la sostenibilidad aplicando magnitudes de importancia y de impacto, cualitativas y cuantitativas de las acciones que se producen en los factores. Con esta tecnología hemos resuelto esta evaluación de sostenibilidad, y no sólo la evaluación del impacto ambiental de un proyecto, sino la evaluación de la sostenibilidad de un proyecto en cada una de las dimensiones y de forma global.

En este estudio se unifica la dimensión social y cultural. Para ver si un proyecto es sostenible, primero hay que evaluar la sostenibilidad social, económica y medioambiental del proyecto, y con estos tres resultados, se determina la sostenibilidad global.

En la Evaluación de Impacto Ambiental [2] se definen las acciones que produce el proyecto, los factores a los que afectan y qué indicadores los representan, para que el usuario pueda realizar la evaluación del impacto producido por estas acciones. De esta manera, el usuario asigna valores a los indicadores para la valoración cualitativa y cuantitativa, y con ambas, se evalúa el impacto producido en un factor medioambiental, social o económico.

La evaluación de los diferentes proyectos se realiza con la misma herramienta. Un usuario configura habilitando qué factores son los afectados y qué efectos hay que tener en cuenta. Esta configuración se hace teniendo en cuenta el tipo de estudio que se va a realizar, el destinatario del estudio, la zona geográfica donde se realiza el proyecto, aspectos sociales de la zona, nivel económico… Se tiene en cuenta las condiciones del hábitat donde se va a implantar el proyecto para asignar diferentes pesos a los factores que hay que evaluar. El cálculo de la evaluación de cualquiera de los tres ámbitos se realiza de la misma forma, tomando como base la normativa existente para la Evaluación de Impacto Ambiental: primero hemos obtenido los diferentes factores sociales, medioambientales y económicos sobre los que puede afectar un proyecto. Una vez identificado el proyecto e indicado el tipo, se habilitarán los efectos que son potencialmente impactos. Dentro de cada efecto, el usuario debe asignar los valores a los diferentes indicadores según el daño o beneficio causado para evaluar la magnitud. El siguiente paso es evaluar la importancia, a partir de sus propiedades (extensión, recuperabilidad, signo, periodicidad, reversibilidad, momento, acumulación, intensidad, persistencia y efecto).

La aplicación recoge los datos asignando valor a los indicadores que se solicitan, y a partir de ahí se obtiene la importancia y la magnitud, y a partir de estos valores se obtiene el impacto producido en cada uno de los factores de cada ámbito. Con estas valoraciones de los impactos, se obtiene la sostenibilidad por ámbitos, sostenibilidad social, económica y medioambiental, y a partir de estos tres datos, la sostenibilidad global del proyecto, pudiendo ver de manera sencilla, los puntos mejorables de los proyectos.

Este sistema de evaluación de la sostenibilidad ofrece la posibilidad de definir los indicadores para las dos valoraciones que definen el impacto en un factor, que son las valoraciones cualitativas y cuantitativas. Con el fin de construir una herramienta válida para cualquier tipo de proyecto o actividad, existe un apartado de configuración en el que se puede definir qué indicadores usar y asociarlos a los diferentes factores del ámbito social, económico y medioambiental. Además, para cada tipo de proyecto, se puede indicar el peso de cada indicador y de cada factor, pues, por ejemplo, no se deben tener en cuenta en la misma medida los mismos indicadores y factores para la construcción de un puente sobre un río, que para la construcción de una fábrica de cerveza en un polígono industrial a 200 metros del núcleo urbano.

Este análisis aplica lógica borrosa en todos los cálculos internos. Desde la entrada en la interfaz hasta la evaluación del resultado. La entrada no es un valor exacto, sino que es una barra de desplazamiento o *slice*. Pretende llevar la herramienta al máximo rendimiento de la lógica borrosa, y así obtener los máximos beneficios de esta tecnología matemática y evitar una entrada numérica donde se requeriría la participación de un experto. De esta forma, los datos introducidos son valores aproximados, aunque ciertos. A partir de estas entradas, se aplica la lógica borrosa para el cálculo de la magnitud, de la importancia, de la sostenibilidad de cada uno de los ámbitos o dimensiones y la sostenibilidad global [4].

Según el tipo de actividad a analizar, es posible añadir nuevos indicadores y factores dentro de cada ámbito. El sistema incorpora estos nuevos indicadores y factores, creando conjuntos borrosos para las etiquetas lingüísticas que lo caracterizan y mostrándoselos al usuario para que éste pueda realizar una valoración dentro de la lógica borrosa, quedando resuelto el problema de la ambigüedad y falta de cotas en la valoración de los indicadores. El cálculo de la magnitud del impacto (evaluación cuantitativa) se realiza igualmente con una operación borrosa entre los conjuntos borrosos de los indicadores. Dependiendo del número de indicadores, que puede ser diferente de un tipo de proyecto a otro (puentes, túneles, centros comerciales…), se aplican unas reglas u otras, variando incluso la manera de aplicar dichas reglas, pudiendo agrupar los indicadores y obteniendo el resultado en forma de árbol.

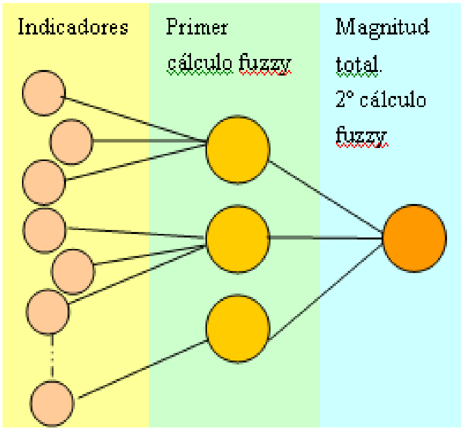


Figura 1. Cálculo de la magnitud del impacto en un factor

Para la evaluación cualitativa (importancia) de un impacto sobre un factor, se tiene como referencia la Evaluación de Impacto Ambiental, valorando las propiedades definidas en la Ley [9, 10] (extensión, recuperabilidad, signo, periodicidad, reversibilidad, momento, acumulación, intensidad, persistencia y efecto), de las cuales todas menos el signo son variables lingüísticas. El signo, bajo la pregunta de "Es beneficioso" se utiliza para darle sentido positivo o negativo a los valores. Además de estos valores, en este trabajo hemos incorporado otras variables lingüísticas a tener en cuenta: espacios nacionales protegidos, patrimonio cultural, superación de niveles críticos de indicadores que catalogan el proyecto directamente como "No Sostenible".

El resultado de la sostenibilidad se muestra con los términos lingüísticos: compatible, moderado, severo y crítico, dando como resultado un informe, que se puede descargar en formato PDF. En dicho informe se exponen las diferencias de usar unos operadores u otros. El sistema permite utilizar varios tipos de operadores (producto y mínimo de Zadeh, y operadores de Lukasiewicz), los diferentes tipos de implicación (S-implicación, residuada y QM-implicación), y método de defuzzyficación, para poder comparar unos resultados con otros, convirtiendo esta herramienta, no sólo en una herramienta útil para la evaluación de proyectos, sino en una herramienta potente para el estudio de la lógica borrosa. En cada una de las entradas, se representa gráficamente el grado de pertenencia de cada entrada a los conjuntos borrosos.

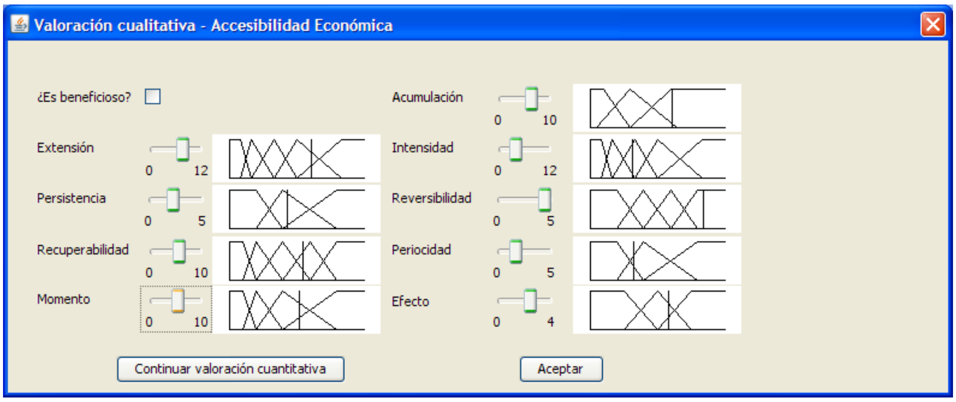


Figura 2. Fragmento de pantalla de la aplicación en la parte en que se ve el grado de pertenencia de cada valor a los conjuntos borrosos definidos en el sistema.

3. Conjuntos borrosos

Nuestro estudio calcula a partir de los indicadores introducidos por el usuario y que varían según el tipo de proyecto, la magnitud del proyecto. Para ello, las entradas son conjuntos borrosos permitiendo datos no concretos y subjetivos. Para el cálculo de la importancia (cualitativos) se sigue el mismo criterio, aunque en este caso, las entradas a evaluar son fijas siguiendo el criterio de Evaluación de Impacto Ambiental tal y como hemos comentado anteriormente. A partir de la magnitud y de la importancia se continúan haciendo inferencias borrosas para obtener el impacto en los factores y las sostenibilidades parciales, hasta llegar a la sostenibilidad global. En cada uno de estos datos de entrada y salida de estas inferencias, tenemos conjuntos borrosos perfectamente definidos y adaptados a las necesidades de las correspondientes evaluaciones.

Se definen conjuntos borrosos sobre los indicadores, su magnitud, su importancia y salidas de sostenibilidad (compatible, moderado, severo y crítico). Hacemos una descripción de algunos de estos cálculos y mostramos sus conjuntos borrosos.

En la operación de cálculo de la magnitud, cada indicador se mide con los conjuntos borrosos definidos en la Figura 3 y el resultado nos da el valor de la magnitud, que será entrada de la siguiente operación "cálculo de impacto en un factor".

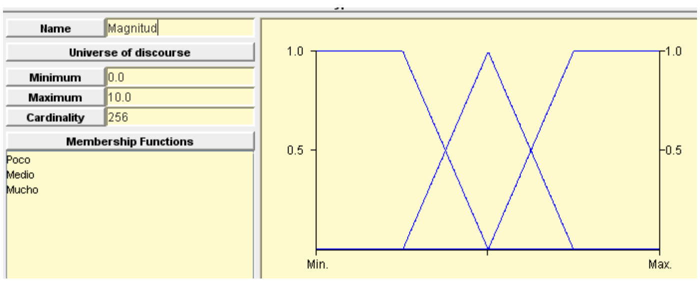


Figura 3. Conjuntos borrosos para los términos lingüísticos son "Poco", "Medio" y "Mucho" de un indicador.

En la operación que evalúa el impacto producido por las acciones del proyecto en un factor, intervienen como entrada la magnitud y la importancia. Esta se calcula a partir de sus parámetros (signo, momento, extensión, efecto, persistencia, recuperabilidad, reversibilidad, extensión, acumulación y periodicidad), cada uno con sus conjuntos borrosos, y obteniendo la importancia. Con la importancia y la magnitud, se obtiene el impacto producido en dicho factor.

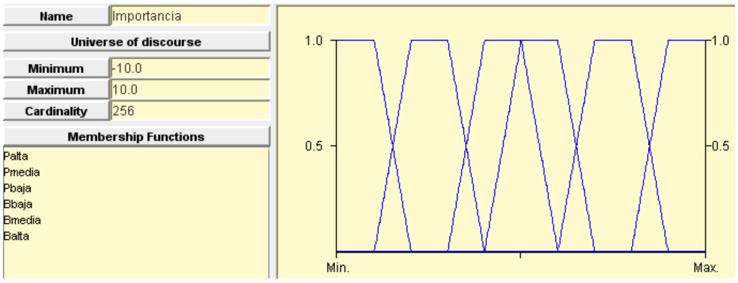


Figura 4. Conjuntos borrosos de la variable lingüística Impacto. Los términos lingüísticos son "Palta" (perjuicio alto), "Pmedia", "Pbaja", "Bbaja" (Beneficio bajo), "Bmedia" y "Balta". Con el fin de utilizar la variable "signo" y usarlo como constante multiplicativa (-1, +1), se ha asignado a BBaja(0.0) y PBaja (-0.001).

Una vez que se ha calculado el impacto, el sistema realiza la siguiente operación, que consiste en el cálculo de la sostenibilidad parcial a partir del impacto en cada uno de los factores. Así, se calcula la sostenibilidad social a partir de los impactos producidos en cada uno de los factores sociales. Lo mismo en el ámbito del medio ambiente y del ámbito económico.

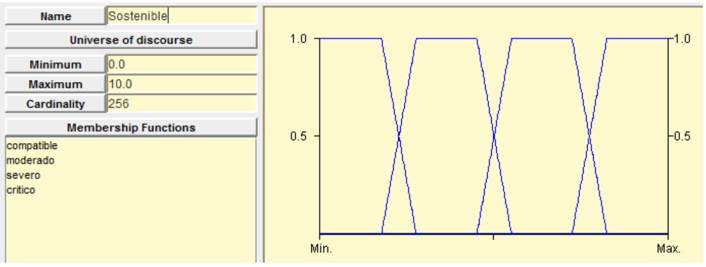


Figura 5. Conjuntos borrosos de la variable lingüística Sostenibilidad para evaluar si es "Compatible", "Moderado", "Severo" y "Crítico". Son las cuatro posibles respuestas a si un proyecto es sostenible

4. Operadores, Reglas y defuzzyficación

Para definir la intersección y unión de conjuntos borrosos (las premisas de las reglas son conjunciones de varios conjuntos borrosos), se utilizan las t-normas y t-conormas, estudiadas por Karl Menger [7] en "Statistical Metrics", y posteriormente axiomatizadas por B. Schweizer y A. Sklar [12].

Los operadores utilizados por Zadeh [14] para definir la intersección de conjuntos borrosos son el mínimo y el producto. Nosotros hemos incluido el operador de Lukasiewicz por satisfacer propiedades algebraicas diferentes.

Se puede seleccionar qué operadores utilizar en la evaluación. Además, en el informe de resultado se muestra una comparación de los resultados obtenidos en las operaciones de cálculo de importancia e impacto con los diferentes operadores.

Para las implicaciones también se utilizan distintos operadores. En la aplicación se puede escoger entre operadores de implicación residual de t-normas, S-implicaciones y QM-implicaciones [13].

Desde la aplicación, también se puede seleccionar el método de defuzzyficación que se utiliza en nuestro sistema. Gracias a la defuzzyficación, podemos, a partir del conjunto borroso que representa el resultado, obtener un valor nítido y dar un valor a cada resultado de cada operación borrosa. Los métodos de defuzzyficación que hemos utilizado son: centro de masas, medio de los máximos, primer máximo y último máximo

La definición de las reglas del motor de inferencia se implementa utilizando la herramienta XFuzzy. En este paso, nos hemos encontrado con el problema del gran número de reglas en algunas operaciones debido al uso de muchos conjuntos borrosos para una variable lingüística o por el número de variables utilizadas en las premisas. Para solventar este problema, se ha realizado en tres pasos: primero se ha creado una herramienta para establecer todas las reglas y guardarlas en un archivo; en el segundo paso se modifica el resultado obtenido de XFuzzy y se adapta para que lea las reglas del fichero, y el tercer paso es la técnica de descomposición de tamaño, en la que se han dividido los cálculos para combinarlos hasta llegar a un resultado final.

Este trabajo desarrolla un mecanismo automático por el que según el número de indicadores que están habilitados por cada tipo de proyecto, se generan las reglas automáticamente. El mecanismo consiste en, si son menos de 5 indicadores, se generan reglas para resolver estas operaciones con lógica borrosa. Si son mayores que cinco, se simplifican en cálculos de menor tamaño.

5. Evolución de la Lógica Borrosa en la Sostenibilidad

Este proyecto es un punto de partida. Actualmente aplica operadores de Zadeh y Lukasiewicz. Utilizar la lógica borrosa en este proyecto, aparte de facilitar los cálculos y permitir entradas subjetivas y no concretas, (y también las salidas) permite explotar el uso de la lógica borrosa y utilizar otros operadores de agregación como son OWA (Ordered Weighted Averaging). Esta tecnología podría optimizar los resultados obtenidos aplicando estos operadores de agregación, no sólo en el cálculo de la magnitud a partir de los indicadores, sino también en el cálculo de la sostenibilidad a partir del impacto en los factores dando más peso a unos factores u otros en función del tipo de proyecto.

Otra utilidad importante de la lógica borrosa y relacionada también con la sostenibilidad es en cartografía. Se pueden georeferenciar y localizar en un mapa todas las evaluaciones de los proyectos, pudiéndose llegar a hablar de regiones más o menos sostenibles.

6. Conclusiones

En este trabajo se presenta una metodología para la evaluación de la sostenibilidad social, económica y medioambiental de proyectos y de esta manera obtener una sostenibilidad global. Tradicionalmente la evaluación de proyectos se realiza solo desde el punto de vista económico o medio ambiental. El impacto en los ámbitos sociales y culturales es nulo. El hecho de que en el cálculo de la sostenibilidad se utilizan términos ambiguos ha favorecido el uso de la lógica borrosa frente a los métodos tradicionales de análisis de impacto. Se aplica la lógica borrosa a cada uno de los cálculos que se realizan en el análisis global de la sostenibilidad: valoración de indicadores, la evaluación cuantitativa y cualitativa del impacto que produce un proyecto en los diferentes factores medioambientales, sociales y económicos.

La posibilidad de un cálculo de sostenibilidad de proyectos que sea universal es una idea que de momento es lejana. No obstante el poder acercarse a ella puede convertir a un proyecto en una herramienta imprescindible de acuerdo a la idea de sostenibilidad global de la Agenda 21, en las Cumbres de la Tierra y en las Conferencias Europeas sobre Ciudades Sostenibles.

Destacar que la lógica borrosa en este proyecto abre la puerta a aplicar nuevas tecnologías de lógica borrosa como son los operadores de agregación de Yager optimizando el resultado. La aplicación de la lógica borrosa a un sistema de información geográfica es otro punto de especial interés a abordar usando diferentes operadores de agregación.

El software realizado se puede descargar para su uso en:
https://ramarbo.000webhostapp.com/analisisSostenibilidad.jar

Referencias

[1] BAYLIS, J. y SMITH, S. *La globalización de la política mundial*, 454-455, Oxford University Press, USA, 2005.

[2] GALLEGO, E.; GONZÁLEZ DE PAULA, L.; GARMENDIA, L. y GARMENDIA, A. *Método de decisión borrosa de si un efecto es impacto ambiental y su carácter*. Jornadas internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería. ETSI Caminos, UPM, Madrid, 2009

[3] GARMENDIA, A.; SALVADOR, A.; CRESPO, C. y GARMENDIA, L. *Evaluación de impacto ambiental*, Prentice Hall, USA, 2005.

[4] GÓMEZ, R. A. *Lógicas no clásicas: principios y fundamentos*. Universidad EAFIT Escuela de Ciencias y Humanidades. Colección Académica, 2006.

[5] IMSE CENTRO NACIONAL DE MICROELECTRÓNICA. *Herramientas de CAD para Lógica Difusa. XFuzzy. 3.0*. http://www.imse.cnm.es.

[6] MARTÍN, R. Directores: GARMENDIA, L.; CARO, R.; GARMENDIA, A. *Gestión de la Sostenibilidad utilizando Lógica Borrosa*. *Trabajo Fin de Máster de Investigación en Informática*. Facultad de Informática, UCM, Madrid, 2011.

[7] MENGER, K. *Statistical Metrics.* En: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, USA, 1942.

[8] *Primera Conferencia Europea sobre Ciudades Sostenibles*. Carta de Aalborg, 1994

[9] *Real Decreto 1131/1988*, de 30 de septiembre, por el que se aprueba el Reglamento para la ejecución del Real Decreto legislativo 1302/1986, de 28 de junio, de evaluación de impacto ambiental, España, 1988.

[10] *Real Decreto Legislativo 1/2008*, de 11 de enero, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Evaluación de Impacto Ambiental de proyectos, España, 2008.

[11] *Sexta Conferencia Europea sobre Ciudades Sostenibles.* Conferencia de Aalborg +10, 2004. http://www.aalborgplus10.dk

[12] SCHWEIZER, B. y SKLAR, A. *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[13] TRILLAS, E. y VALVERDE, L. *On mode and implication in approximate reasoning*. In *Approximate reasoning in expert systems*, 157-166, Ed. Gupta, M. M., North-Holland, 1985.

[14] ZADEH, L. A. *Fuzzy sets*. En *Proceedings of the IEEE (Information and Control)*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[15] UNESCO, www.unesco.com

[16] COMISIÓN MUNDIAL DEL MEDIO AMBIENTE Y DEL DESARROLLO. *Nuestro Futuro Común.* Madrid: Alianza, 1988.

[17] ANNE H. EHRLICH AND PAUL R. EHRLICH. *Optimum Human Population Size* Gretchen C. Daily University of California (Berkeley) Stanford University, July 1994

[18] BROWN, L. R. Y MITCHELL, J. *La construcción de una nueva economía*. En Brown, L. R., Flavin, C. y French, H. *La situación del mundo 1998*. Barcelona: Ed. Icaria. 1988

[19] FOLCH, R. *Ambiente, emoción y ética*. Barcelona: Ed. Ariel.

[20] SARTORI, G. Y MAZZOLENI, G. La Tierra explota. Superpoblación y Desarrollo. Madrid: Taurus, 2003

Sobre los autores:

Nombre: Raúl Martín Bonilla
Correo Electrónico: rmb2000@gmail.com
Institución: Facultad de Informática (Universidad Complutense de Madrid), España.

Nombre: Luis Garmendia Salvador
Correo Electrónico: lgarmend@fdi.ucm.es
Institución: Facultad de Informática (Universidad Complutense de Madrid), España.

Experiencias docentes

Auto-creación de problemas para la resolución de sistemas de ecuaciones en Matemáticas

Self-creation of problems for solving systems of equations in Mathematics

Óscar Jesús Falcón Ganfornina

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 015–030, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'17; Aceptación: 31 Ene'18

1 de abril de 2018

Resumen

Este trabajo presenta una experiencia en el aula que intenta conseguir motivar al alumnado de 3º y 4º de ESO en la asignatura de Matemáticas Aplicadas. Nuestro objetivo es conseguir que los alumnos diseñen sus propios problemas de texto para trabajar el contenido de la resolución de sistemas de ecuaciones. Se verán algunos de estos problemas creados por el alumnado, así como algunas propuestas de mejora para esta dinámica de trabajo.

Palabras Clave: Experiencia, creación, problemas, sistemas, ecuaciones, matemáticas.

Abstract

This paper presents an experience in the classroom that tries to motivate the students of 3rd and 4th of ESO from Applied Mathematics. Our goal is to get the students to develop their own problems to practice with the solution of systems of equations. The paper shows some of these problems created by the students, as well as some improvement proposals for this work.

Keywords: Experience, creation, problems, systems, equations, mathematics

1. Introducción

Esta experiencia se ha realizado en los cursos de 3º y 4º de ESO (Educación Secundaria Obligatoria) en la asignatura de Matemáticas Aplicadas, en el curso 2016/17. El objetivo de la experiencia es practicar la resolución de sistemas de ecuaciones mediante problemas de texto, mediante la auto-creación de problemas de texto (Fernández Bravo y Barbarán Sánchez 2015).

Las fases seguidas en esta experiencia han sido las siguientes:

- Aprendizaje/ Recordatorio de los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Uso de las nuevas tecnologías para una adecuada consolidación de los métodos.
- Resolución de problemas de texto con distintos enfoques.
- Creación de problemas de texto por parte del alumnado.

Como motivación a la creación de los problemas de texto, se informa al alumnado que uno de los problemas creados por ellos será incluido en la prueba escrita de la unidad didáctica. Además, se valorará positivamente la entrega de estos problemas, sumando medio punto en la prueba escrita de esta unidad didáctica.

A lo largo del artículo se irán detallando en qué consisten cada una de estas fases. Se podrá ver en el último punto algunos de los problemas creados por el alumnado.

2. Aparición de problemas de texto en el aula de Matemáticas

Existe mucha literatura y existen muchos autores que intentan dar la definición perfecta del concepto de problema en matemáticas. Podemos ver en el trabajo de Blanco Nieto et al. (2015), o en el de Salinas y Sgreccia (2017) un amplio trabajo del concepto de problema. La finalidad del artículo no es continuar ningún debate sobre ello. Vamos a tomar una posible definición. Consideraremos que un problema en matemáticas es una situación que supone una meta que debe ser alcanzada, donde existen distintos obstáculos que requieren del uso de herramientas matemáticas para solventarlos.

Sea con esta definición u otra que encaje en nuestra visión de un problema en matemáticas, debemos fijarnos que el propio texto de la LOMCE indica que "las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos". Añade además que "los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje".

Ahora bien, cuando un docente lleva al aula un problema de texto, se suele enfrentar a alumnos que rechazan de manera inmediata su resolución. Cada alumno puede tener sus propias razones para ese rechazo al intento de resolver problemas en nuestra asignatura. Entre los motivos más habituales se hallan la incomprensión del texto del problema (bajo nivel en competencia en comunicación lingüística), el no haber adquirido los contenidos matemáticos necesarios de manera correcta (bajo nivel en competencia matemática), o la falta de herramientas elementales en la resolución de cualquier tipo de cuestión matemática, ya no solo en el ámbito de los problemas matemáticos (bajo nivel en competencia para aprender a aprender). Debemos, por tanto, intentar llevar la resolución de problemas a nuestra aula sin generar esa sensación de repulsa ante este tipo de contenido.

Ocurre lo siguiente. Abordamos un problema en alguna de las sesiones de nuestras unidades didácticas, que suele provenir del libro de texto con el que estemos trabajando. Nos enfrentamos así a enunciados típicos que van apareciendo curso tras curso. Los propios alumnos se dan cuenta, y ya comienzan a recordar que en años anteriores ellos no fueron capaces de resolverlos. Es más, ellos nos llegan a confirmar que muchos de estos problemas están muy forzados en su redacción y en su contextualización. Se habla de situaciones extrañas, que no se encuentran en su día a día, o que directamente no les suele interesar.

Nuestra meta es llevar al aula la resolución de problemas de una manera distinta, utilizando una dinámica diferente, que se salga de la habitual sesión de problemas de texto. Vamos a fijar un par de objetivos: hacer ver al alumnado la dificultad real de la confección de un problema a partir de un contenido matemático; así como intentar conseguir que sean ellos los que traten ese contenido de manera que sí les interese la contextualización del problema. Buscamos conseguir que ellos sean los protagonistas de su aprendizaje (Sempere Ripoll y Rodríguez Villalobos, 2015).

Aunque estos sean nuestros objetivos deseados, la realidad que nos vamos a encontrar cuando finalicemos la actividad es que muchos de los alumnos se van a conformar con la adaptación de los ejemplos vistos. Van a cambiar los precios, los artículos en venta o los animales de la granja, pero no van a rebuscar entre sus intereses para diseñar un problema. Es posible que las características de los grupos con los que se ha trabajado tengan algo que ver. Las prisas, y la necesidad de acabar rápido con la tarea influyen demasiado. Pero en el momento en el que uno de nuestros alumnos se aproxime a los objetivos marcados, lo remarcaremos, tiraremos de su trabajo, e iniciaremos un camino que podrá ser seguido por sus compañeros.

No obstante, al final se evaluó la dinámica y se intentó generar algunas propuestas de mejora para futuros cursos. Se concluyó que una posible forma de resolver estos fallos mencionados sería la realización de un estudio previo de los intereses del alumnado. Con dichos intereses, deberíamos ser nosotros, como docentes, los que confeccionáramos unos primeros ejemplos que traten esos temas, que sirvan de base para su trabajo posterior.

3. Aprendizaje de los métodos de resolución y uso de las nuevas tecnologías

El contenido matemático con el que se decidió realizar la dinámica de auto-creación de problemas de texto fue el de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones se empiezan a trabajar en el 2º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Dicha unidad didáctica se suele comenzar a continuación de la unidad de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Por tanto, también debemos recordar que la resolución de ecuaciones lineales se empieza a realizar en el curso anterior de 1º de ESO. Una experiencia con la que trabajar nos la da Rodríguez González (2016) para estos contenidos.

En resumen, el alumno que consigue adquirir de manera correcta los contenidos propios de nuestra asignatura hasta ese momento, llega a la unidad de sistemas de ecuaciones conociendo los algoritmos básicos de resolución de ecuaciones.

Se debe recordar que la práctica que se expone en este artículo fue destinada a los cursos de 3º y 4º de ESO, con la opción de Matemáticas Aplicadas. Más adelante se detallará el contexto de estos grupos. Sin embargo, se puede adelantar que el alumnado objetivo se caracteriza por un bajo nivel en la materia, una escasa capacidad de asimilación de contenidos y una insuficiente motivación de estudio y trabajo académico.

Podríamos acudir a distintas dinámicas propias del aprendizaje colaborativo, que se presta muy bien a ser usado en este tipo de grupos. No obstante, debido al contenido con el que vamos a trabajar, se prefirió utilizar las nuevas tecnologías. De modo que para adquirir los conocimientos básicos y facilitarles el trabajo posterior, los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se llevaron al aula a través de applets de GeoGebra. Estos applets los podemos encontrar en la web Matematicaula, y son los siguientes.

El método de sustitución lo encontramos en:
http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=metodosustitucion2&cargar=1&tprefer=1

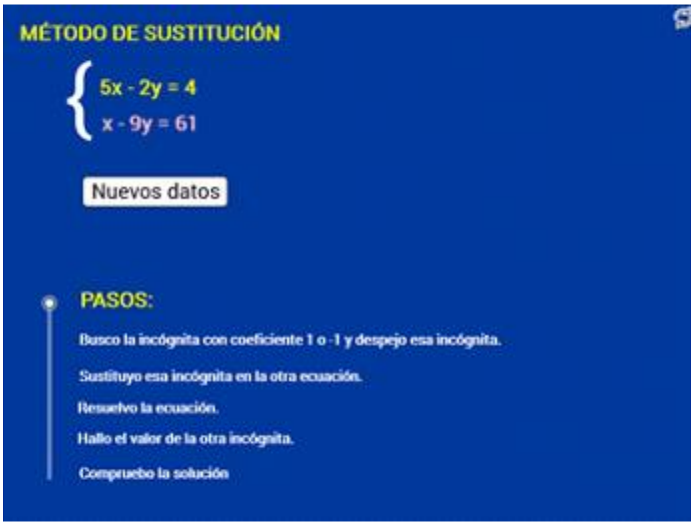


Figura 1. Applet de GeoGebra para el método de sustitución.

El método de igualación lo encontramos en:
http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=metodoigualacion2&cargar=1&tprefer=1

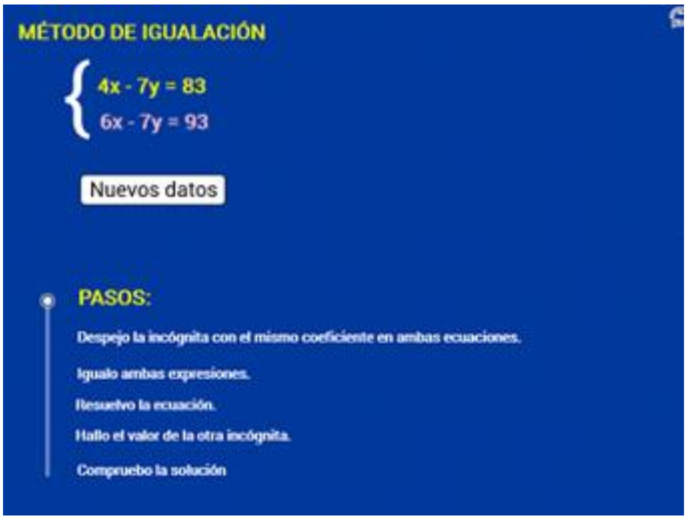


Figura 2. Applet de GeoGebra para el método de igualación.

Y el método de reducción lo encontramos en:
http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=metodoreduccion2&cargar=1&tprefer=1

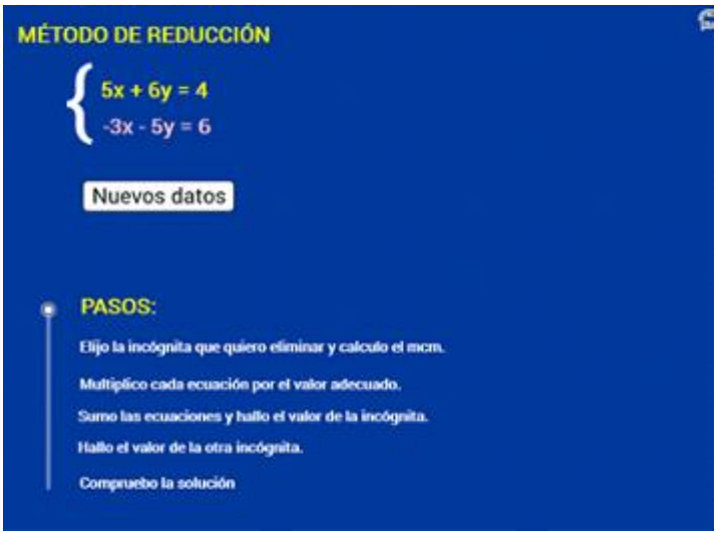


Figura 3. Applet de GeoGebra para el método de reducción.

Estos applets siguen la dinámica de actividades resueltas mediante razonamientos guiados y uso de variables aleatorias. Esto quiere decir que, en cada applet nos encontramos un deslizador con el que iremos avanzando paso a paso a través del algoritmo de resolución, que cada uno de los pasos viene indicado mediante una descripción, y que todos los valores que aparecen son aleatorios (por lo que podemos generar infinidad de sistemas de ecuaciones, todos resueltos).

Conseguimos evitar así las excusas del alumnado del tipo: “no sé qué hay que hacer”, “no tenía con qué trabajar”, o “no he hecho nada porque no sabía si estaba bien”. Un alumno descubre rápidamente que usar estas excusas le viene bien, pues devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al lado del profesor. Romperles estas excusas es sencillo si, desde un comienzo, hacemos usos de los applets con razonamientos guiados y variables aleatorias.

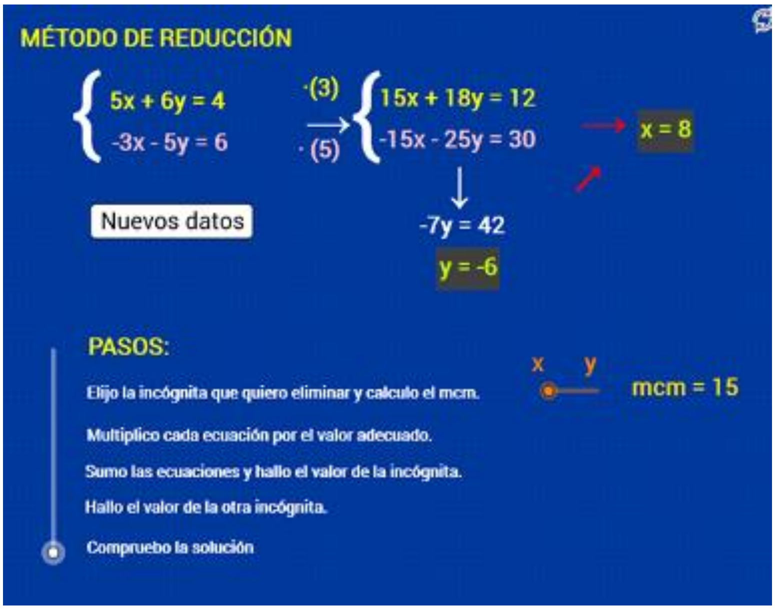


Figura 4. Applet de GeoGebra para el método de reducción, con todos los pasos visibles.

El siguiente paso debe ser la resolución de problemas de texto. Tal como se ha comentado en la sección anterior, es elemental que la elección de los problemas sea meditada por nosotros. Los alumnos van a basar la creación de sus problemas en la batería que hayamos elegido. De modo que, a la hora de elegir los problemas debe prevalecer tanto la temática como la variedad de los mismos.

A continuación, vamos a detallar las características de los grupos con los que se ha trabajado esta dinámica. Se mostrarán distintos problemas creados por los alumnos. En ellos se incluirán algunas observaciones interesantes que nos pueden permitir mejorar la dinámica para cursos posteriores.

4. Problemas creados por alumnado de 3º de ESO (Matemáticas Aplicadas) – 14-15 años

Este es el segundo año que la asignatura de Matemáticas Aplicadas es impartida en el tercer curso de la ESO. Aparece un alumnado que o bien tiene distintas dificultades en el aprendizaje y ya sabe que en su futuro no está la realización del Bachillerato, o bien ha elegido esta vía pensando que va a tener que trabajar menos. El problema principal se encuentra en que estos últimos, quizás, sí decidan hacer Bachillerato. Por tanto, el siguiente curso los alumnos tendrán que pasar a las Matemáticas Académicas y es posible que lleven un desnivel con los demás compañeros.

Existe, por tanto, dos grupos de alumnos con distintas capacidades matemáticas. De hecho, una vez finalizado el curso, se podría añadir un tercer grupo de alumnos: aquellos que para el curso siguiente han decidido abandonar sus estudios en la ESO para realizar un ciclo de Formación Profesional Básica. No obstante, y salvo excepciones, la característica común en todos ellos es la apatía y la desmotivación ante los estudios.

Pues resulta que la dinámica, que recordemos consiste en crear varios problemas y tener la posibilidad de que uno de ellos salga en el examen, hace que participen en mayor grado que en otras actividades propuestas anteriormente en el curso.

A continuación, veremos algunos ejemplos de los problemas creados. Comenzaremos comparando dos problemas similares.

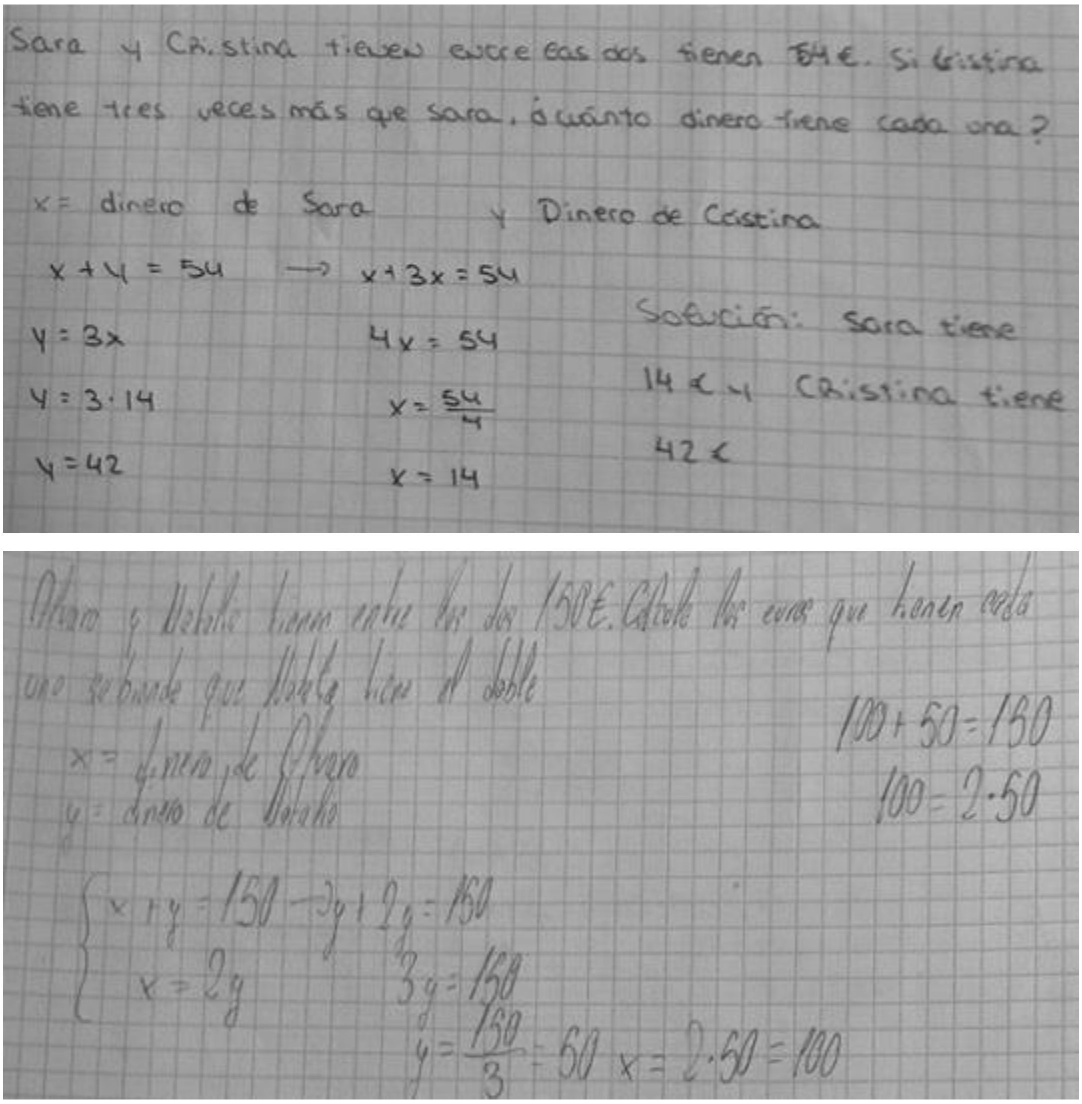


Figura 5. Problemas diseñados por alumnos.

En ambos aparecen dos personas que tienen cantidades distintas de dinero. Para poder resolver el problema se añade una condición que relaciona ambas cantidades. Se habla de "tres veces más" y de "el doble" uno que el otro. Podemos observar en ambos problemas como, al comienzo de la resolución, se indica el dinero de qué persona se corresponde con cada incógnita. También vemos cómo en el segundo problema, el alumno ha comprobado la solución.

En la siguiente imagen nos encontramos una mezcla de los anteriores dos problemas. Las únicas diferencias que existen son los nombres de los protagonistas, y que, en lugar de euros, se habla de libretas.

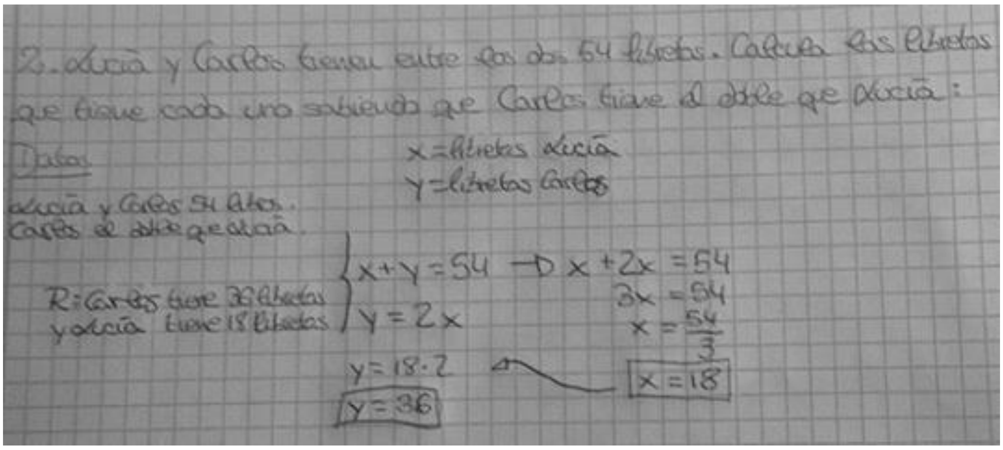


Figura 6. Problema diseñado por alumnos.

Esta misma alumna crea un problema de edades excesivamente enrevesado. Dicho problema nos sirve para hacerles ver la importancia de una correcta redacción, y hacerles imaginar qué ocurriría si en el examen entrase un problema similar.

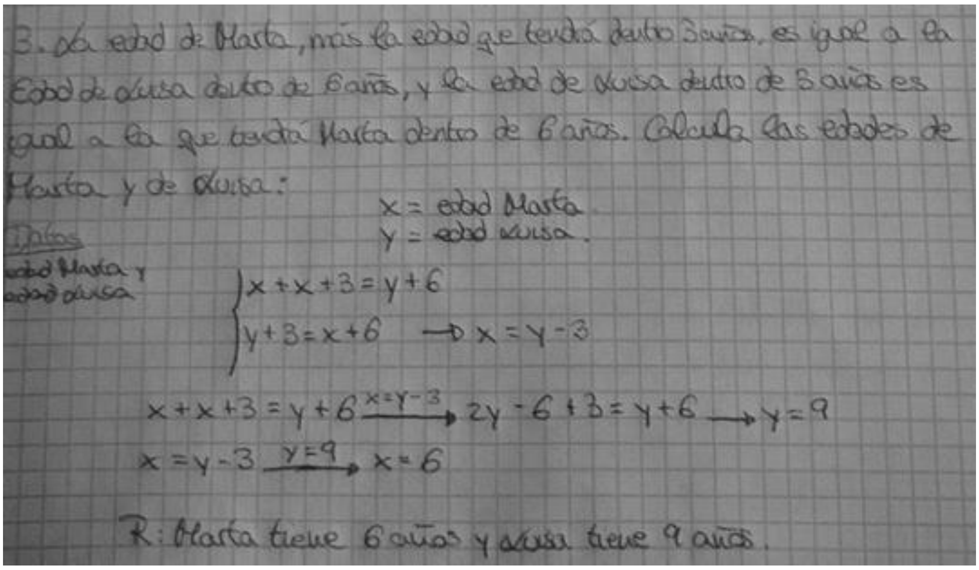
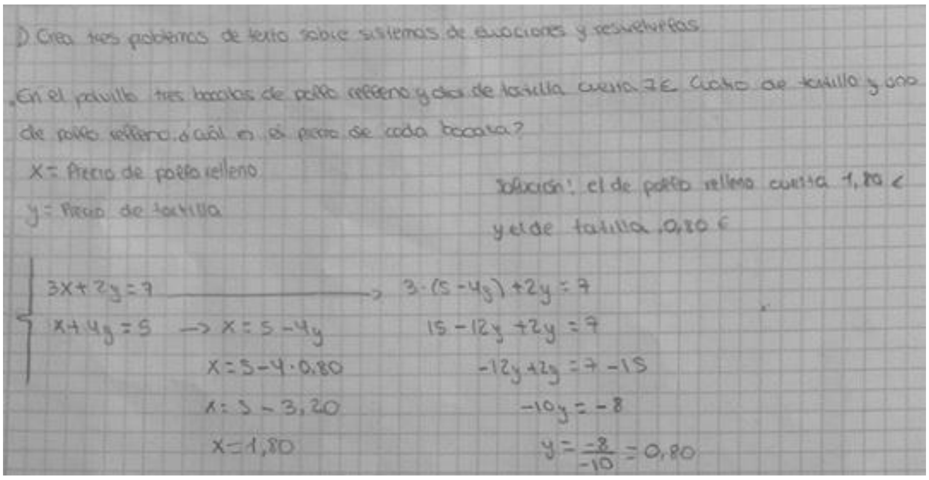


Figura 7. Problema diseñado por alumnos.

Parece en un primer momento que es difícil que el alumnado busque problemas cercanos a sus intereses. Sin embargo, leemos en el siguiente problema de compra de artículos una buena forma en el que uno de los alumnos ha conseguido relacionar los sistemas de ecuaciones con una tarea frecuente para ellos.



D. Crea tres problemas de texto sobre sistemas de ecuaciones y resuélvelos.

En el patio tres bocatas de pollo relleno y dos de tortilla cuesta 7€. Cuatro de tortilla y uno de pollo relleno ¿cuál es el precio de cada bocata?

x = Precio de pollo relleno

y = Precio de tortilla

Solución: el de pollo relleno cuesta 1,80 € y el de tortilla 0,80 €

$3x+2y=7 \rightarrow 3\cdot(5-4y)+2y=7$

$x+4y=5 \rightarrow x=5-4y$

$15-12y+2y=7$

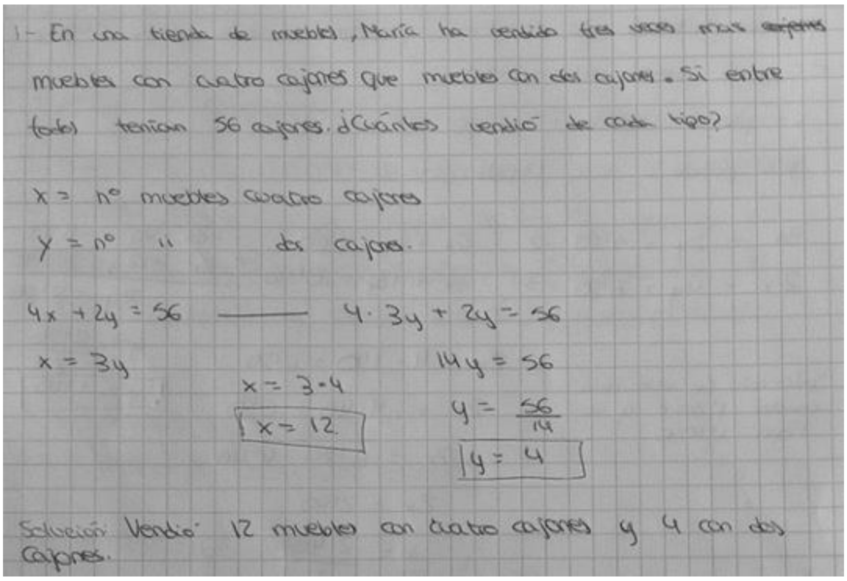
$x=5-4\cdot 0.80$ $\quad -12y+2y=7-15$

$x=5-3,20$ $\quad -10y=-8$

$x=1,80$ $\quad y=\frac{-8}{-10}=0,80$

Figura 8. Problema diseñado por alumnos.

El último problema que vamos a mostrar para este curso, es el que se tomó para el examen. Es una muy buena adaptación del problema del número de patas y cabezas en una granja, o el número de motos y coches en un garaje sabiendo cuántas ruedas hay en total. Esto no significa que este problema tenga ningún atractivo para ellos por el tema tratado, que no es otro que el de muebles con cajones. Pero es de valorar el esfuerzo para realizar esta curiosa adaptación.



1- En una tienda de muebles, María ha vendido tres veces más muebles con cuatro cajones que muebles con dos cajones. Si entre todos tenían 56 cajones ¿Cuántos vendió de cada tipo?

x = nº muebles cuatro cajones

y = nº " dos cajones.

$4x+2y=56$ — $4\cdot 3y+2y=56$

$x=3y$ $\quad 14y=56$

$x=3\cdot 4$ $\quad y=\frac{56}{14}$

$\boxed{x=12}$ $\quad \boxed{y=4}$

Solución: Vendió 12 muebles con cuatro cajones y 4 con dos cajones.

Figura 9. Problema diseñado por alumnos.

5. Problemas creados por alumnado de 4º de ESO (Matemáticas Aplicadas) – 15-16 años

Me encuentro que el curso de 4º de ESO para las Matemáticas Aplicadas agrupa tanto a alumnos que provienen de la anterior Diversificación Curricular, como a alumnos repetidores. Excepto estos últimos, más de la mitad del grupo tiene la asignatura pendiente del curso anterior.

Se trata, por tanto, de un grupo desmotivado y con unas capacidades matemáticas muy bajas. Por ello, desde un comienzo de curso, se han tratado todos los contenidos como si fuese la primera vez que se trabajan.

Las dificultades encontradas en el desarrollo de nuestra dinámica se deben principalmente a las características que se acaban de indicar. Al utilizar los applets de GeoGebra, y explicarles de forma clara, paso a paso, el algoritmo a seguir, el alumnado interesado consigue resolver sistemas de ecuaciones básicos.

Cuando comenzamos a trabajar con los problemas de texto, fue complicado que ellos tuviesen la confianza de tomar las riendas de la resolución los mismos. Es curioso, pero fue al proponerles la creación de los problemas de texto cuando esto cambió. Los alumnos se arriesgaron, no solo a inventar el texto del problema, sino también a su resolución sin preocuparse de hacerlo bien o mal.

A continuación, vemos algunos ejemplos de los problemas creados. Empezamos con uno de los alumnos más implicados en la asignatura.

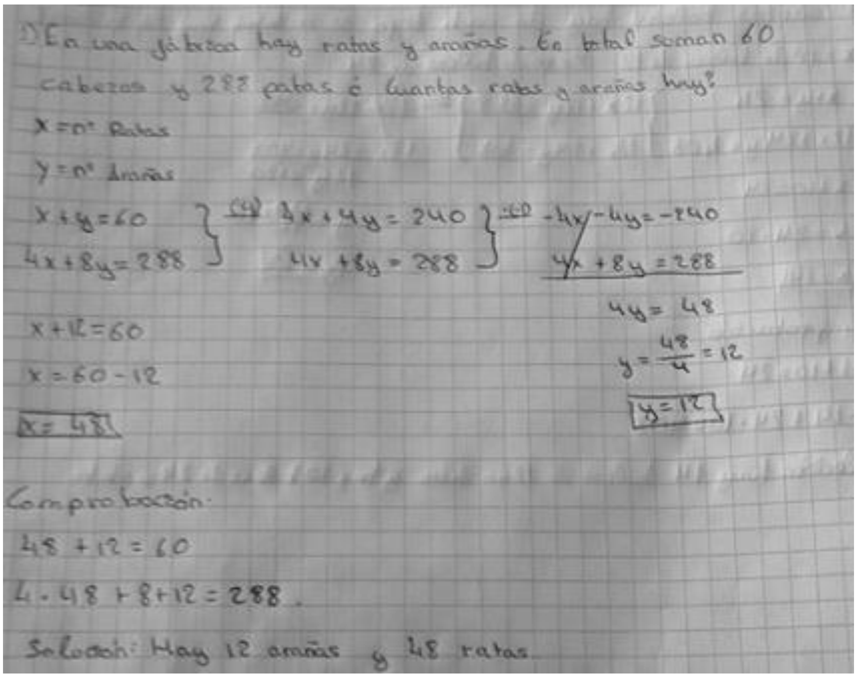


Figura 10. Problema diseñado por alumnos.

Observamos este problema basado en el número de patas. El alumno ha decidido utilizar ratas y arañas. Podemos comprobar que ha asumido los pasos de la resolución: indica qué es cada una de las incógnitas, plantea el sistema, lo resuelve, comprueba e indica la solución.

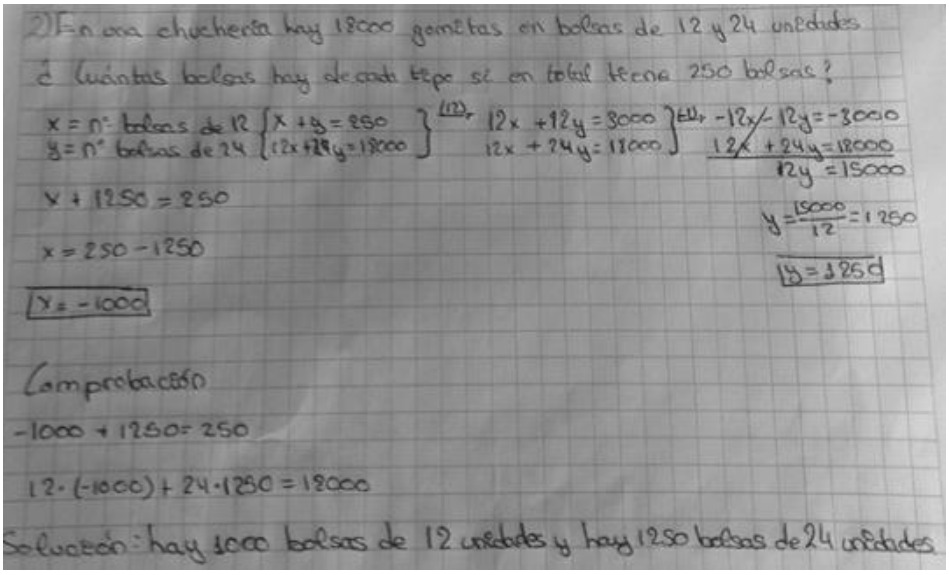


Figura 11. Problema diseñado por alumnos.

Este mismo alumno intenta ser original. Plantea un texto relacionado con gominolas. Sigue los mismos pasos que en el anterior problema. Pero comete dos fallos. Primero, no decide con antelación cuáles van a ser el número de bolsas de cada tipo, y hace que sea imposible que con 250 bolsas se pueda alcanzar las 18000 gomitas. Esto hace que la solución para la incógnita x sea negativa, y al no tener sentido, automáticamente el alumno convierte el -1000 en 1000.

Le pido al alumno que corrija estos errores. Finalmente presenta el siguiente problema.

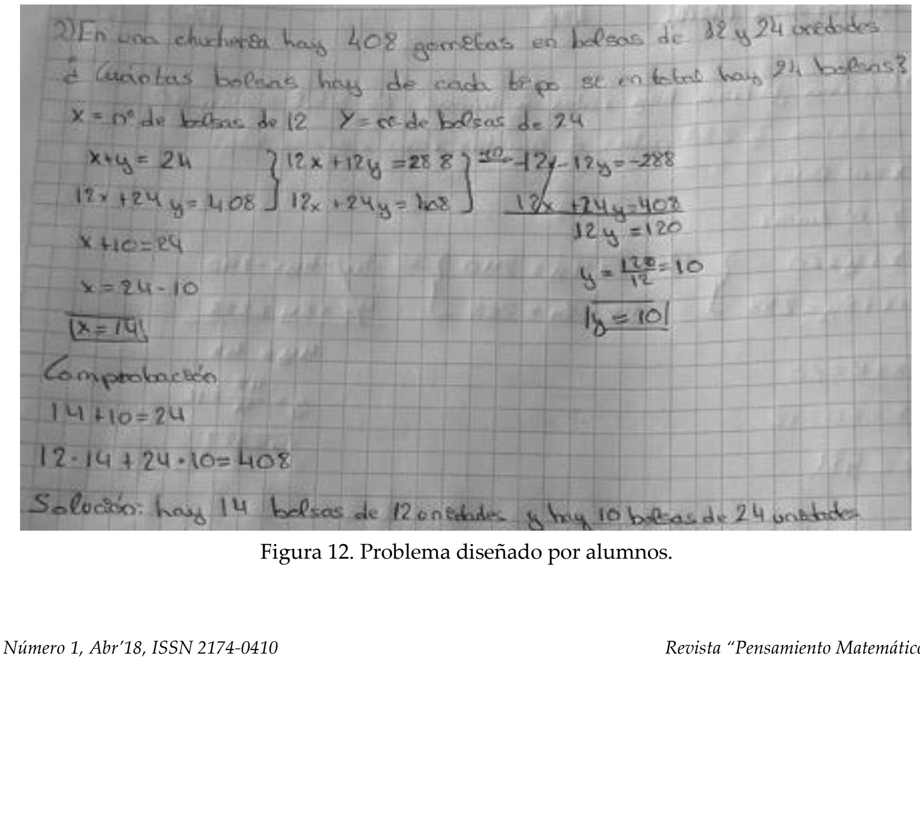
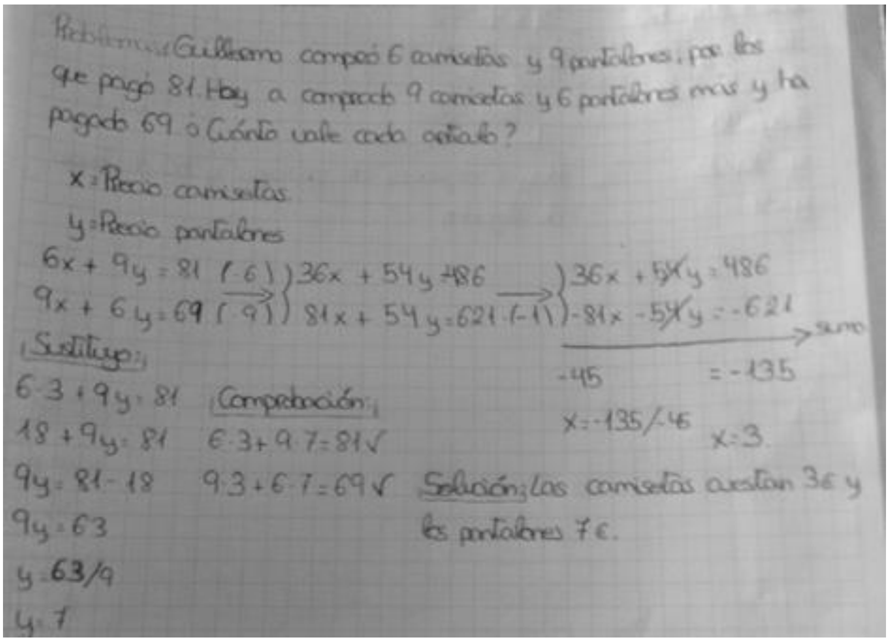


Figura 12. Problema diseñado por alumnos.

Pasamos a una alumna que proviene de Diversificación Curricular. Elige como primer problema uno basado en la compra de artículos.



Problema: Guillermo compró 6 camisetas y 9 pantalones, por los que pagó 81. Hoy a comprado 9 camisetas y 6 pantalones más y ha pagado 69 ¿Cuánto vale cada artículo?

x = Precio camisetas

y = Precio pantalones

$6x + 9y = 81$ (·6) } $36x + 54y = 486$ → } $36x + 54y = 486$

$9x + 6y = 69$ (·9) } $81x + 54y = 621$ (·(-1)) } $-81x - 54y = -621$

sumo

$-45 = -135$

$x = -135/-45$ $x = 3$

Sustituyo:

$6 \cdot 3 + 9y = 81$

$18 + 9y = 81$

$9y = 81 - 18$

$9y = 63$

$y = 63/9$

$y = 7$

Comprobación:

$6 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 81$ ✓

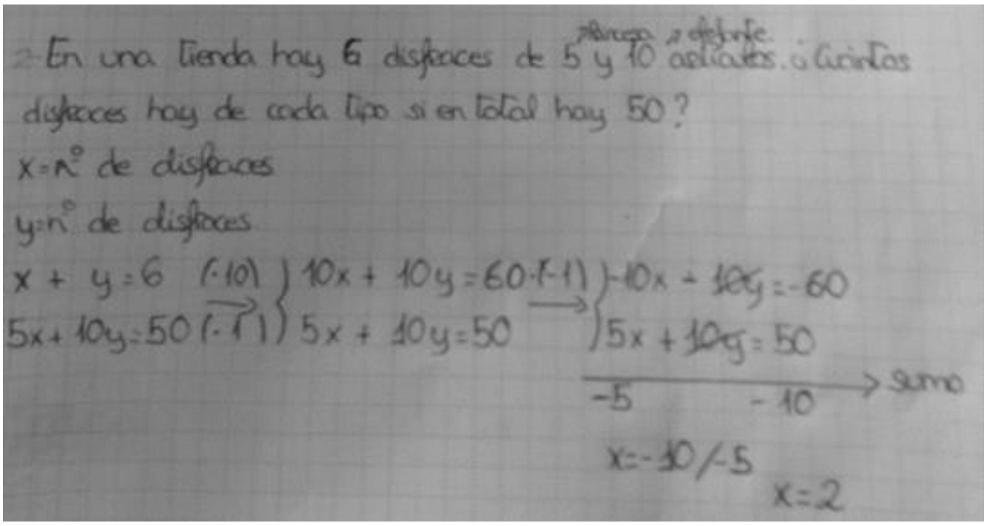
$9 \cdot 3 + 6 \cdot 7 = 69$ ✓

Solución: Las camisetas cuestan 3€ y los pantalones 7€.

Figura 13. Problema diseñado por alumnos.

Observamos cómo sigue el procedimiento elemental. El diseño del problema es básico. Es curioso cómo elige números altos (seis camisetas y nueve pantalones) y le basta con intercambiar esos dos números en la siguiente condición.

Cuando intenta ser más creativa, adaptando un problema de número de artículos en una tienda, hace lo siguiente:



2. En una tienda hay 6 disfraces de 5 y 10 artículos ¿Cuántos disfraces hay de cada tipo si en total hay 50?

x = nº de disfraces

y = nº de disfraces

$x + y = 6$ (·10) } $10x + 10y = 60$ (·(-1)) → } $-10x + \cancel{10y} = -60$

$5x + 10y = 50$ (·1) } $5x + 10y = 50$ } $5x + \cancel{10y} = 50$

sumo

-5 -10

$x = -10/-5$

$x = 2$

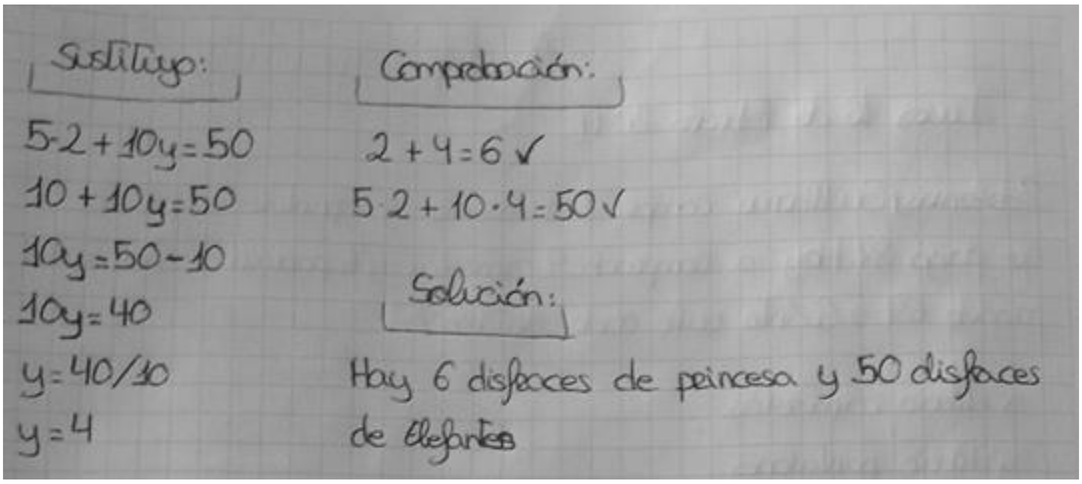


Figura 14. Problema diseñado por alumnos.

Vemos cómo no es capaz de indicar cuál es el significado de cada una de las incógnitas, cómo en el propio enunciado añade en pequeño el tipo de disfraz, o cómo se contradice en el número final de artículos de la tienda. Esto hace que el planteamiento del sistema de ecuaciones no tenga sentido. Aun así, ella sigue resolviendo el sistema e interpretando las soluciones. Comete un error final. Confunde la solución de la incógnita y con el término independiente de la segunda ecuación.

Terminamos con el siguiente problema. Fue el elegido para el examen. Pertenece a un alumno que empieza a interesarse en la asignatura en la mitad del segundo trimestre. Este alumno tenía la asignatura pendiente de 3º de ESO. Él mismo llega a reconocer que cuando ha empezado a estudiar, los resultados que ha ido obteniendo (en todas las asignaturas, no solo en matemáticas) han mejorado. El problema es el siguiente:

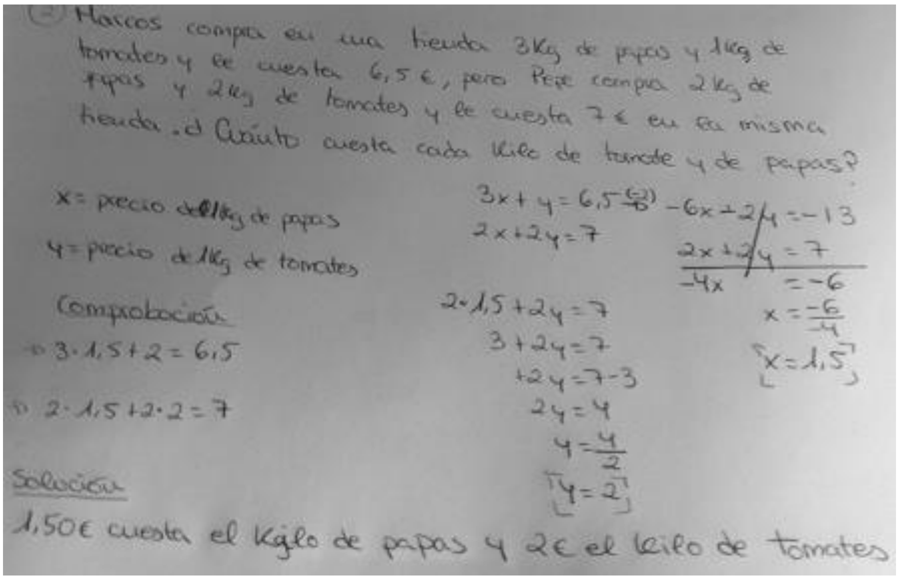


Figura 15. Problema diseñado por alumnos.

El interés del problema reside en el uso de números decimales. El alumno es el que asigna a la incógnita x el valor 1,50. Se puede observar cómo, a diferencia de los otros alumnos del grupo, este multiplica una ecuación por -2 para cambiar directamente el signo de la ecuación.

Este mismo alumno se atreve a inventar el siguiente problema con el que relaciona las dos variables indicando que una es la sexta parte de la otra.

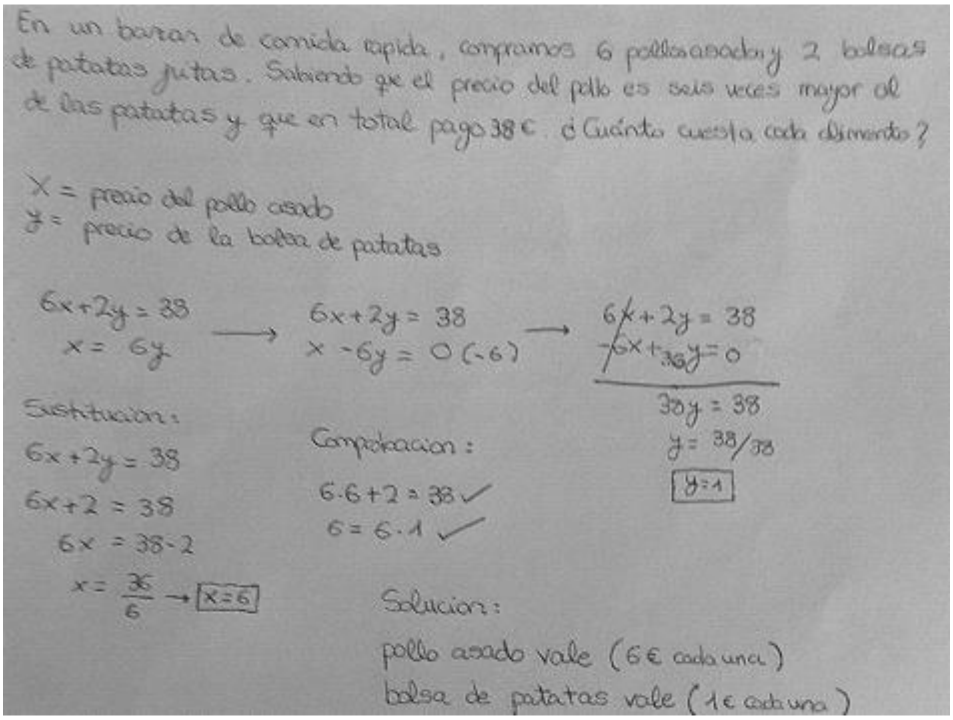


Figura 16. Problema diseñado por alumnos.

6. Conclusiones finales

De manera natural, el profesorado de matemáticas intenta mejorar su metodología para conseguir facilitar el aprendizaje del alumno. Ocurre que, a veces, por falta de tiempo o ganas, no indagamos en la búsqueda de estas mejoras.

Una vez que nos atrevemos a innovar en nuestra aula y llevar algo distinto, lo agradecen los alumnos y, aunque pensemos que no ha merecido la pena el esfuerzo, con el tiempo también lo agradeceremos nosotros. Puede que en el primer intento fallemos, pero, al igual que nuestro alumnado, no debemos rendirnos tan fácilmente.

En la dinámica de auto-creación de problemas no se obtuvieron los resultados esperados en todos los alumnos, pero todo el trabajo realizado no fue tiempo perdido. Tal como se ha comentado a lo largo del artículo, los alumnos tuvieron una nueva motivación para trabajar con los sistemas de ecuaciones que en cursos anteriores no adquirieron. No todos los problemas creados tuvieron las características que se exigían. Pero el hecho de que alumnos, que ni siquiera antes hubiesen intentado resolución alguna, se esforzaran en adaptar un problema ya resuelto y hallar su solución, es suficiente para decidir repetir la experiencia en cursos posteriores.

Referencias

[1] BLANCO NIETO, Lorenzo Jesús, CÁRDENAS LIZARAZO, Janeth Amparo y CABALLERO CARRASCO, Ana. *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria*. Cáceres. Universidad de Extremadura, 2015.

[2] FERNÁNDEZ BRAVO, José Antonio y BARBARÁN SÁNCHEZ, Juan Jesús. *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Editorial Arco/Libros-La Muralla S.L., Madrid, 2015.

[3] RODRÍGUEZ GONZÁLEZ, Javier. *El Álgebra no puede esperar*. Revista Números 93, pp. 131-139, 2016.

[4] SALINAS, Natalia y SGRECCIA, Natalia. *Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria*. Revista Números 94, pp. 23-45, 2017.

[5] SEMPERE RIPOLL, Francisca y RODRÍGUEZ VILLALOBOS, Alejandro. *El alumno como protagonista de su propio aprendizaje*. INNODOCT 3rd International Conference on Innovation, Documentation and Teaching Technologies. Universitat Politècnica de València, 2015.

Sobre el autor:
Nombre: Óscar Jesús Falcón Ganfornina
Correo Electrónico: oscfalgan@yahoo.es
Institución: Departamento de Matemáticas, IES San Pablo, Sevilla, España.

Historias de Matemáticas

Los métodos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas y cubaturas

Infinitesimal methods to calculate quadratures and cubatures

José María Ayerbe Toledano

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 031–056, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Sep'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En este artículo se estudian los métodos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas y cubaturas desarrollados por Cavalieri, Torricelli, Fermat y Pascal en la primera mitad del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Estos métodos fueron haciéndose cada vez más parecidos a nuestros actuales métodos de integración e iluminaron el nacimiento del Cálculo Infinitesimal, que se produjo a finales de siglo.

Palabras Clave: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Indivisibles, Cuadraturas, Cubaturas, Métodos infinitesimales.

Abstract

In this paper we study the infinitesimal methods to calculate quadratures and cubatures developed by Cavalieri, Torricelli, Fermat and Pascal in the first middle of XVII century. Several examples to ilustrate the methods are given. These methods played an important role in the birth of Infinitesimal Calculus what happened at the last years of the century.

Keywords: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Indivisibles, Quadratures, Cubatures, Infinitesimal methods.

1. Introducción

En los inicios del siglo XVII están desarrollando su trabajo científicos como Stevin, Galileo o Kepler que necesitaban, para sus estudios de mecánica o astronomía, los métodos de Arquímedes. Todos ellos querían evitar, sin embargo, las dificultades técnicas del método de exhaución, para lo que comenzaron a desarrollar diversos procedimientos de corte infinitesimal que, pese a su evidente falta de rigor, permitían por un lado confirmar los resultados obtenidos por los geómetras clásicos y, por otro, abordar nuevos problemas que hasta entonces no habían podido ser resueltos. Fue precisamente esta fertilidad en las aplicaciones lo que dio alas al desarrollo de estos nuevos métodos.

Esto propició un uso del infinito sin las cortapisas impuestas por la concepción aristotélica, permitiendo de esta forma que las cantidades infinitesimales e infinitamente grandes se convirtieran en herramientas potentísimas para el tratamiento de los problemas que hoy incardinamos en el campo del cálculo infinitesimal: máximos y mínimos, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad, rectificaciones de curvas, cálculo de tangentes,… Por lo que se refiere específicamente al cálculo de áreas y volúmenes, o en términos clásicos, al estudio de las cuadraturas y las cubaturas, los primeros trabajos sistemáticos los realizó Kepler en su obra *Nova stereometria doliorum vinarorum* de 1615, pero fueron muchos los matemáticos que durante este siglo desarrollaron diferentes procedimientos para abordar este tema.

En este artículo nos vamos a centrar en los antecedentes de lo que hoy llamamos cálculo integral que se desarrollaron en la primera mitad del siglo XVII. Para ello estudiaremos con cierto detalle los procedimientos de Cavalieri, que amplió y sistematizó los introducidos por Kepler, los desarrollos aritméticos de Pascal y, muy especialmente, los trabajos de Fermat que, hacia mediados de siglo, fue el primero, junto con Torricelli, en demostrar la cuadratura básica para exponentes racionales, es decir, la igualdad que actualmente escribimos en la forma

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1} \qquad (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$$

En todos los casos hemos procurado poner de manifiesto las ideas originales que iluminaron a estos grandes matemáticos en sus investigaciones, tratando de no desvirtuar la significación histórica de sus resultados, pero en general hemos utilizado la notación actual con objeto de facilitar la comprensión de los conceptos.

2. El método de los indivisibles de Cavalieri

Cavalieri (1598-1647) nació alrededor de 1598 en Milán e ingresó en 1615 en la orden de los Jesuatos, cuya sección masculina fue disuelta en 1668. Probablemente con motivo de ese ingreso tomó el nombre de Buenaventura. En el periodo 1616-1620 Cavalieri fue discípulo de Benedetto Castelli, notable matemático que colaboró con Galileo y que fue profesor en las universidades de Pisa y Roma. Tan satisfecho estaba Castelli con su alumno que, a partir de 1617, lo puso en contacto con el propio Galileo con quien Cavalieri sostuvo una intensa correspondencia. De hecho, Cavalieri envió a Galileo más de cien cartas entre 1619 y 1641 y, aunque Galileo no las respondió todas, sí que lo hizo ocasionalmente. No obstante, la mayor parte de esas cartas se han perdido.

En 1619 Cavalieri solicitó una plaza en la universidad de Bolonia, que no obtuvo, lo que él mismo atribuyó al hecho de que los Jesuatos no eran muy populares en Roma. No obstante, probablemente gracias a la influencia de Galileo, aparte naturalmente de a sus propios méritos, la plaza le fue finalmente concedida en 1629, al tiempo que pasaba a ocupar el cargo de prior en el monasterio Jesuato de Bolonia. Aunque en principio la plaza de profesor era sólo para un periodo de tres años, Cavalieri la fue renovando sucesivamente hasta su muerte acaecida en 1647.

Cavalieri publicó diez libros de matemáticas y una tabla de logaritmos. De hecho fue el primer matemático italiano que apreció en todo su valor los logaritmos. No obstante, la obra que lo hizo famoso en los círculos matemáticos fue su *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* o, en castellano, *Geometría de los continuos por indivisibles presentada por métodos nuevos*, de 1635 (en adelante la *Geometría*). Tan importante fue considerada en su tiempo que se reimprimió en 1653. También sobre indivisibles publicó en 1647 *Seis ejercicios geométricos* o, en latín, *Exercitationes geometricae sex*. Ambas obras se hicieron muy populares entre los matemáticos de la época e inspiraron a muchos de ellos a buscar sus propios procedimientos para el cálculo de áreas y volúmenes basándose, de manera más o menos directa, en el método de Cavalieri.

La principal razón por la que la *Geometría* de Cavalieri atrajo la atención de sus colegas fue, sin duda, porque la mayor parte de ellos estaban muy interesados en los problemas de cuadraturas y cubaturas, pero el número de publicaciones sobre el tema era muy escaso en aquellos años. No obstante, en [1, pág. 294] se hace notar que los matemáticos de la época que estudiaron a fondo la Geometría fueron posiblemente muy pocos, a pesar de que la existencia del libro era bien conocida. Esto se refleja en el hecho de que, aunque la obra de Cavalieri es citada en la mayor parte de los trabajos sobre este tópico que se realizaron a lo largo del siglo XVII, su contenido casi nunca es descrito en profundidad. Quizás uno de los motivos por los que la Geometría fue tan poco estudiada, en comparación con el conocimiento que había de la existencia de la obra, sea la dificultad que presentaba su lectura por la forma tan confusa en que estaba escrita. En este sentido Maximilien Marie, uno de los principales historiadores de la ciencia del siglo XIX, señaló en [6, vol. 4, pág. 90] que

> *si se estableciera un premio para el libro de lectura más difícil, la Geometria de Cavalieri sería un serio candidato a ganarlo.*

Cavalieri adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, es decir, son entes de dimensión menor respecto del continuo, del cual forman parte. Así, los puntos son los indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas y las secciones planas de los sólidos, pero Cavalieri no utiliza esta definición, ni ninguna otra, porque para él los indivisibles son una manera de hablar para referirse a los elementos que constituyen las figuras, lo que le permite compararlas y deducir, de áreas o volúmenes conocidos, las áreas o volúmenes de figuras planas o sólidos nuevos.

Cavalieri presentó en su *Geometría* dos métodos basados en los indivisibles que llamaremos, utilizando la terminología de [1], métodos colectivo y distributivo, respectivamente, aunque en realidad Cavalieri nunca usó esos nombres. Los seis primeros libros, de los siete que componen la *Geometría*, desarrollan el método colectivo y el último el método distributivo. En el primer libro Cavalieri clarifica algunas de sus asunciones sobre figuras planas y sólidos. En el Libro II introduce el método colectivo de los indivisibles y prueba los teoremas fundamentales sobre colecciones de líneas. Estos teoremas son aplicados en los Libros III, IV y V para la obtención de cuadraturas y cubaturas de secciones cónicas. El Libro VI está dedicado a la cuadratura de la espiral, pero contiene también resultados relativos a cilindros, esferas, paraboloides y esferoides. Finalmente el Libro VII presenta una nueva aproximación al método de los indivisibles, el llamado método distributivo.

Los *Exercitationes*, por su parte, se componen de seis libros. En el Libro I Cavalieri ofrece una versión reducida y simplificada del método colectivo y en el Libro II realiza una nueva presentación del método distributivo. El Libro III recoge las reacciones de Cavalieri a las duras críticas que su método había recibido por parte de Guldin, de lo que hablaremos más adelante, y el Libro IV generaliza el método colectivo de indivisibles, aplicándolo a curvas algebraicas de grado superior a dos, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n = 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ y } 9$$

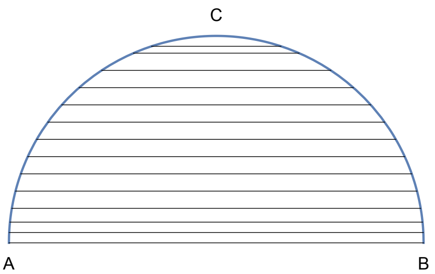
El Libro V está dedicado a la aplicación del método de los indivisibles para la determinación de centros de gravedad y en el Libro VI se ofrece una miscelánea de todo lo anterior.

La idea de Cavalieri se basa en la asunción, demostrada en el teorema I.1 de la *Geometría*, de que, dada una figura plana y cerrada [o un sólido acotado] y una dirección fija, la figura tendrá dos rectas tangentes [o dos planos] paralelas a la dirección fijada de modo que cualquier recta paralela [o plano] situada entre las dos tangentes [que Cavalieri llama tangentes opuestas] cortará a la figura en un segmento [o en una superficie], mientras que cualquier recta paralela [o plano] que no esté situada entre las tangentes opuestas no tendrá puntos en común con la figura.

El concepto fundamental de la teoría de Cavalieri es el de "Omnes lineae", "todas las líneas", que es introducido en la definición II.1 de la *Geometría*:

> *Dada una figura plana, se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura entre los que ésta está exactamente contenida [que podemos encontrar siempre en virtud del teorema anterior]. Si uno de los dos planos se mueve paralelamente hacia el otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forman la intersección entre el plano móvil y la figura dada, considerada en conjunto, se llaman omnes lineae de la figura, tomada una de ellas como regula [directriz].*

Así, dada la figura $F = ACB$, si tomamos como regula la dirección AB, todas las líneas o indivisibles de la figura F respecto de la regula AB, que denotamos por $O(F, l)$, es el conjunto de segmentos de la figura F paralelos a AB.



Parece claro que la noción de "Omnes lineae" está inspirada en la idea intuitiva de considerar una figura plana o un sólido como compuesto por infinitésimos. Muchos matemáticos, desde Demócrito en la antigua Grecia, habían usado ya esta idea como punto de partida para el cálculo de cuadraturas y cubaturas. En el caso de Cavalieri el antecedente inmediato es, sin duda, Kepler, pero no está claro si conoció su trabajo con anterioridad al desarrollo de su propio método. No obstante, debemos huir de una interpretación del concepto de "Omnes lineae", en la formulación de Cavalieri, como una suma de segmentos. En este sentido, se afirma en [1, pág. 308] lo siguiente:

> *La mayor parte de los historiadores de la matemática han descrito el concepto de "Omnes lineae" de Cavalieri como una suma de segmentos [...]. Esta interpretación es desafortunada, pues ni la definición de Cavalieri ni sus aplicaciones de "todas las líneas" implican el concepto de una suma.*

Mas adelante veremos que la idea de las colecciones de líneas como sumas es más propia de Torricelli, lo que podría explicar la confusión al respecto.

A partir de aquí, Cavalieri ya puede plantearse la relación entre las cuadraturas y las colecciones de líneas, lo que hace en el teorema II.3 de la Geometría:

> *La razón entre las figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma regula.*

Esta relación entraña, como condición preliminar, que la razón entre dos colecciones de líneas exista, lo cual conceptualmente no es trivial ya que se trata de colecciones de infinitas líneas. Para resolver este problema Cavalieri consideró las "Omnes lineae" como una nueva categoría de magnitudes a la que podía ser aplicada la teoría de magnitudes de Eudoxo recogida en Los Elementos de Euclides. Con este planteamiento Cavalieri demuestra en el teorema II.1 de la *Geometría* lo siguiente:

> *Las colecciones de líneas de figuras planas son magnitudes que tienen razón unas con otras.*

Recordemos que la definición 4 del Libro V de *Los Elementos* de Euclides nos dice que dos magnitudes guardan razón entre sí cuando, multiplicadas, pueden superar una a la otra. Por tanto, lo que hace Cavalieri en la demostración de este teorema es probar que dadas dos colecciones de líneas correspondientes a dos figuras planas F_1 y F_2, se verifica que existe un número natural n tal que $nO(F_1, l) > O(F_2, l)$. Para ello supone que las dos figuras tienen la misma altura y después argumenta que, como dos líneas l_1 y l_2 de F_1 y F_2 que están a la misma distancia de las bases guardan razón entre sí, es decir, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 l_1 > l_2$, es posible encontrar un múltiplo de $O(F_1, l)$ mayor que $O(F_2, l)$. Cavalieri soslaya el hecho de que para encontrar ese múltiplo necesita obtener el supremo de una colección infinita de números, que podría ser infinito, lo que supone un error en el razonamiento imposible de superar.

Otro teorema que presenta la misma debilidad argumental es el teorema II.2, que afirma lo siguiente:

> *Si dos figuras son iguales [tienen el mismo área] también lo son sus colecciones de líneas.*

En la prueba Cavalieri superpone las figuras y elimina la parte común. Una vez hecho esto, vuelve a superponer las partes residuales de cada figura y de nuevo elimina la parte común. Así, continúa el proceso

> *hasta que las partes residuales [de las figuras] son superpuestas unas con otras,*

de donde deduce que sus respectivas colecciones de líneas son iguales. El problema que plantea la demostración de Cavalieri es que el proceso de superposición de una figura sobre otra podría ser infinito. Esto es lo que ocurriría, por ejemplo, si se tratase de un círculo y un cuadrado de igual área, por lo que su discurso argumental tiene serios puntos débiles. Cavalieri no hizo ningún comentario al respecto de esta posibilidad en la Geometría, pero está claro que no le pasó inadvertido el hecho ya que lo comentó en una carta posterior a Torricelli y en su obra *Exercitationes*. Parece que pensó que podría darse una demostración correcta de su teorema, incluyendo el caso de que se produjera un proceso infinito, utilizando el método de exhaución, pero la realidad es que él nunca la detalló.

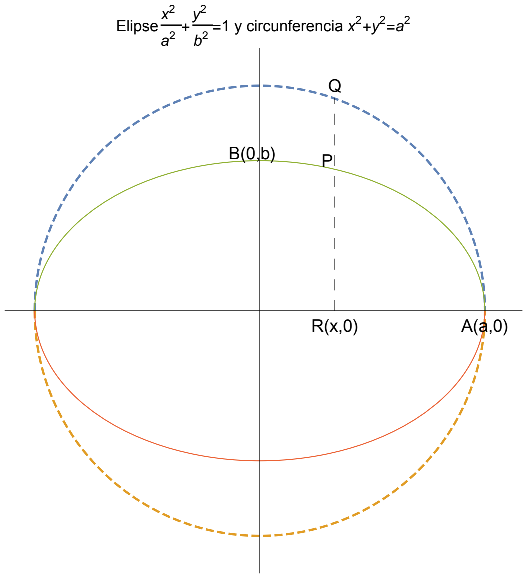
A continuación Cavalieri reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus colecciones de líneas, para lo que utiliza, como uno de sus instrumentos más útiles, el teorema II.4, conocido como principio de Cavalieri:

> *Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por dos líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas también están en la misma razón.*

Vamos a aplicar este principio para obtener el área de la elipse a partir de la del círculo. Este resultado se debe a Arquímedes que, en su obra Sobre conoides y esferoides, lo demostró de manera impecable utilizando el método de exhaución (Ver, por ejemplo, [5, pág. 259-262]). De forma independiente fue obtenido también por Kepler, siguiendo esencialmente el procedimiento detallado aquí.

Ejemplo 2.1. *El área de la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es igual a* πab.

En efecto:



Se verifica que $RP = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $RQ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Tomando como regula la dirección del eje de ordenadas se tiene que

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{b}{a}$$

de donde resulta, según el principio de Cavalieri, que la razón entre el área de la elipse y el área de la circunferencia es $\dfrac{b}{a}$. Por tanto, el área de la elipse se obtiene multiplicando por dicha cantidad al área de la circunferencia. Sigue que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab. □

Para tratar con sólidos, Cavalieri introduce en la definición II.2 de su Geometría las colecciones de planos, concepto que generaliza el de "omnes lineae". En dimensión tres el principio de Cavalieri se enunciaría de la siguiente forma:

> *Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces los volúmenes de los sólidos están en esta misma razón.*

Veamos cómo, aplicando este principio, puede obtenerse fácilmente el volumen del cono a partir del de la pirámide:

Ejemplo 2.2. *El volumen de un cono de radio de la base r y altura h es* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

En efecto: Consideremos una pirámide de base cuadrado de lado 1 y altura h y un cono de la misma altura y radio de la base r. Sean P_x y C_x las secciones de la pirámide y del cono paralelas a la base y a una distancia x de los vértices respectivos. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{l}{1} = \frac{x}{h} = \frac{r'}{r}$$

siendo l el lado de P_x y r' el radio de C_x.

Así obtenemos que el área de P_x es $l^2 = \frac{x^2}{h^2}$ y el área de C_x es $\pi r'^2 = \pi r^2 \frac{x^2}{h^2}$, de donde sigue que la razón entre ambas magnitudes es igual a πr^2. Por tanto, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que el volumen del cono es el de la pirámide multiplicado por dicha constante, de donde se deduce que el volumen del cono es $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. □

Es sorprendente la estrecha similitud que existe entre la aplicación del principio de Cavalieri y el método mecánico de Arquímedes que, naturalmente, Cavalieri no podía conocer ya que, como es bien sabido, está recogido en su libro El método que estuvo perdido hasta su descubrimiento por Heiberg en 1906. Pero, como señala González Urbaneja [4, pág. 99-100],

> *Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso mecánico de la palanca para sumar sus indivisibles, el álgebra le facilita esta operación y le proporciona una potencialidad de generalización inviable en el marco de la geometría griega.*

Cavalieri además generaliza sus "omnes lineae" definiendo otros "omnes conceptos", como por ejemplo, todos los cuadrados de líneas de una figura F dada, $O(F, l^2)$ o, en general, todas las potencias de orden n de líneas de una figura dada F, $O(F, l^n)$, obteniendo al aplicarlos a una figura triangular resultados equivalentes a nuestra cuadratura básica

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ y } 9$$

y conjeturó que este resultado podría extenderse a cualquier $n \in \mathbb{N}$, con lo que inició un importante proceso de generalización.

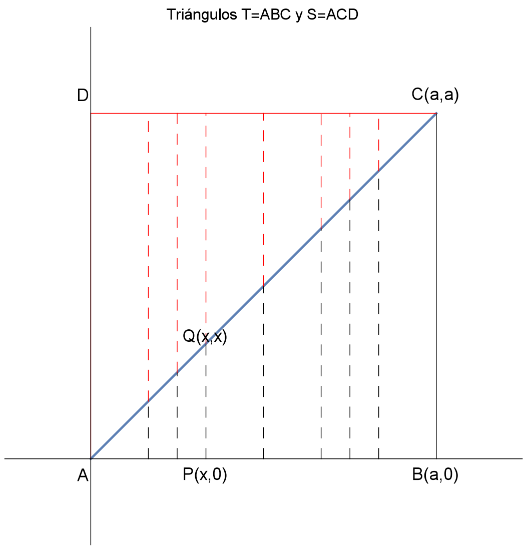
Veamos la esencia del razonamiento de Cavalieri en los dos primeros casos. El caso $n = 1$ es el resultado correspondiente al teorema II.19 de la Geometría, que está formulado en los siguientes términos:

> *Si se dibuja una diagonal de un paralelogramo, el paralelogramo es el doble de cada uno de los triángulos determinados por la diagonal.*

La demostración que recogemos a continuación se ajusta a la original de Cavalieri, utilizando un cuadrado en lugar de un paralelogramo cualquiera.

Teorema 2.3. $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$.

Demostración. Sea T el triángulo ABC en el que el lado AC está sobre la recta $y = x$ entre el origen de coordenadas A y el punto B de coordenadas $(a, 0)$.



Entonces, si tomamos el segmento BC como regula, la colección de todas las líneas del triángulo T es el conjunto de segmentos paralelos a BC incluidos dentro del triángulo, cuya longitud en cada punto x es $l(x) = x$. Así

$$O(T,l)_{BC} = \{l(x) : l(x) \text{ es un segmento en } T \text{ paralelo a } BC \text{ y } x \in [0,a]\} = [\text{omn}.x]_0^a$$

Cavalieri probó que las colecciones de líneas de los triángulos T y S, donde S es el triángulo de vértices ACD, son iguales. Para ello basta observar que coinciden las longitudes de los segmentos de cada triángulo que son simétricos respecto del segmento central (ver los segmentos en rojo y negro de la figura). De esta circunstancia se deduce que la razón entre las colecciones de líneas del triángulo T y del cuadrado Q de vértices $ABCD$ es $1/2$. Así, de acuerdo con el teorema II.3 de la *Geometría*, sigue que la razón entre las áreas $a(T)$ y $a(Q)$ del triángulo y del cuadrado también será $1/2$ y, como $a(Q) = a^2$, se concluye que

$$a(T) = [\text{omn}.x]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

esto es, obtenemos la fórmula que hoy escribimos en la forma

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

que es la cuadratura básica para el caso $n = 1$. □

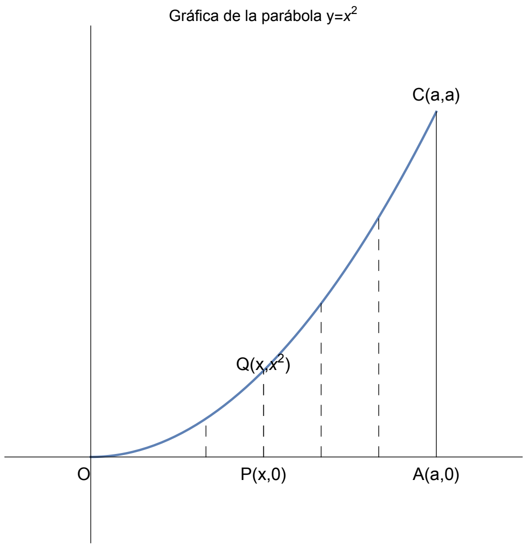
La cuadratura básica para $n = 2$ la recoge Cavalieri en el teorema II.24 de la *Geometría*, que enuncia de la siguiente forma:

> *Consideremos un paralelogramo y dibujemos en él una diagonal. Entonces, "todos los cuadrados" del paralelogramo será el triple de "todos los cuadrados" de cualquiera de los triángulos determinados por la diagonal, cuando uno de los lados del paralelogramo es tomado como regula común.*

Vamos a ver una demostración de este resultado utilizando en lo fundamental las ideas de Cavalieri, pero simplificando su farragoso procedimiento en aras de una mayor claridad.

Teorema 2.4. $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

Demostración. En este caso queremos calcular el área encerrada por la parábola $y = x^2$ entre el origen de coordenadas O y el punto $A(a, 0)$. Si utilizamos el segmento AC como regula, la colección de todas las líneas de la figura curvilínea OAC es el conjunto de los segmentos incluidos en dicha figura paralelos al segmento AC, cuya longitud en cada punto x es $l(x) = x^2$.



Obtenemos entonces que el área buscada es

$$O(OAC, l)_{AC} = \{l(x) : l(x) \text{ es un segmento en } OAC \text{ paralelo a } AC \text{ y } x \in [0, a]\} = [\text{omn}.x^2]_0^a$$

que es la expresión que hoy escribimos como $\int_0^a x^2 dx$.

Para calcular $[\text{omn}.x^2]_0^a$ vamos a buscar un sólido, de volumen conocido, que podamos relacionar con la expresión que queremos calcular. Para ello tomemos una pirámide de base cuadrada de lado y altura iguales a a. Observemos que la colección de todos los planos de este sólido, tomando como regula el plano de la base, es el conjunto de todas las secciones obtenidas al cortar la pirámide por planos paralelos a la base, cada una de las cuales es un cuadrado. Si llamamos x al lado de cada uno de estos cuadrados, sabemos que cada cuadrado tiene área x^2. Ahora bien, como el volumen de la pirámide es la colección de todos los cuadrados al variar x desde 0 hasta a, obtenemos que el volumen de la pirámide es también $[\text{omn}.x^2]_0^a$.

Sigue, por tanto, que el área encerrada por la parábola coincide con el volumen de la pirámide de base cuadrada de lado y altura iguales a a y, así, obtenemos que

$$O(OAC, l)_{AC} = [\text{omn}.x^2]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

o, en términos modernos, que $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$. □

Mediante razonamientos parecidos a estos, pero con creciente dificultad calculística, Cavalieri va obteniendo la cuadratura básica para los casos $n = 3, 4, 5, 6$ y 9 e inicia así un camino que fue seguido inmediatamente por otros ilustres matemáticos de esta primera mitad del siglo XVII como veremos a lo largo de este artículo.

Para finalizar esta pequeña introducción al método de Cavalieri no queremos dejar de insistir en la falta de rigor del procedimiento y de sus fundamentos teóricos. De hecho, la publicación de la Geometría en 1635 fue el final de un largo proceso. Así, en 1627 el manuscrito estaba ya casi listo para la imprenta y, sin embargo, tardó todavía ocho años en aparecer. Como se señala en

[1, pág. 296] este largo periodo no puede ser explicado por los cambios que Cavalieri introdujo en el texto definitivo, sino que otras razones debieron retrasarlo. Cavalieri mismo manifestó que fueron sus obligaciones docentes, su deseo de publicar libros de texto y sus problemas de salud los que motivaron el retraso. Sin embargo, podría haber otra razón más: Cavalieri estaba esperando la aprobación de su método por parte de Galileo, aprobación explícita que nunca tuvo lugar. En efecto, cuando en 1634 estaba ya todo preparado para la impresión, se produjo un nuevo retraso debido a que Cavalieri decidió incluir un séptimo libro. La inclusión de este último libro pudo estar motivada precisamente por el deseo de convencer a Galileo de la bondad de su método. Así, el 22 de julio de 1634 Cavalieri le escribe:

> *Ya que la impresión de los cinco primeros libros de mi Geometría está ya terminada, me gustaría enviártelos para que los mires cuando puedas; eso me haría un gran favor y te agradecería me dijeras lo que piensas sobre mis fundamentos de los indivisibles. Sospechando que este concepto de todas las líneas o planos pudiera causar dificultades a muchos, he decidido más tarde componer el séptimo libro en el cual muestro las mismas cosas de una forma diferente, también diferente de la de Arquímedes.*

Probablemente la referencia a la dificultad que podría causar a muchos el concepto de los indivisibles esconde la verdadera razón de Cavalieri para crear un segundo método, que no es otra que convencer a Galileo. Pero, ¿cuál es la diferencia entre los dos métodos de indivisibles? Quizás la mejor descripción de esa diferencia la hace el propio Cavalieri en el Libro I de *Exercitationes*. Para ello consideró dos figuras de la misma altura y con una regula común. A continuación trazó todas las rectas paralelas a esa regula en ambas figuras. Estas líneas pueden ser comparadas de dos formas, o colectivamente, esto es, considerando la colección de todas las líneas de una figura y comparándola con la colección de todas las líneas de la otra, o distributivamente, es decir, considerando separadamente las líneas de cada figura que están a la misma distancia de la base y comparándolas dos a dos. En Exercitationes Cavalieri llamó a estos dos procedimientos el primer y el segundo método de indivisibles, pero muy bien podría haber adoptado los nombres recogidos en [1] que hemos utilizado nosotros. En cualquier caso Cavalieri siempre consideró el método distributivo como suplementario al colectivo y nunca como una teoría independiente, motivo por el cual, quizás, no se molestó en ponerle un nombre distinto.

Aunque Galileo nunca fue muy explícito en relación con su opinión sobre las ideas de Cavalieri, está claro que no era muy entusiasta al respecto. Así Cavalieri escribe en una carta a Galileo, fechada el 23 de octubre de 1635, en la que posiblemente responde a otra perdida de éste, lo siguiente:

> *Siento que mi Geometría resulte tan dificultosa y laboriosa como dices. Esto es mi culpa, ya que me he explicado mal, pero el tema en sí mismo es muy difícil... Por tanto, pienso que deberías ser indulgente conmigo; el hecho de que no tenga a nadie aquí con quien discutir estas materias es la razón por la que me pareció fácil lo que una discusión me hubiera mostrado que era dificultoso.*

En cualquier caso Cavalieri era muy consciente de las dificultades conceptuales de su método. El problema fundamental estaba, como ya hemos indicado, en el tratamiento del concepto clave en su teoría, el de "omnes lineae" o conjunto de indivisibles de una figura dada. Ya hemos señalado que él consideraba las colecciones de líneas como una nueva categoría de magnitudes a la que podía ser aplicada la teoría de magnitudes de Eudoxo pero, dado que "todas las líneas" de una figura dada son infinitas en número, Cavalieri dudaba desde el principio sobre la piedra angular de su teoría que no es otra que la existencia de razón, en el sentido de Eudoxo, de unas colecciones de líneas con otras. Por sus primeras cartas a Galileo puede comprobarse que Cavalieri había reparado en este problema desde que comenzó con su trabajo sobre los indivisibles.

Así se lo traslada a Galileo, en una carta fechada el 15 de diciembre de 1621, en la que le pide su opinión sobre el dilema ya que, por un lado

> *parece que las omnes lineae de una figura dada son infinitas [en número] por lo que no están cubiertas por la definición de magnitudes que tienen razón,*

pero por otro lado

> *debido a que si una figura se hace más grande también las líneas se hacen mayores, parece que las omnes lineae están cubiertas por la mencionada definición.*

Finalmente se decidió a demostrar este hecho en el teorema II.1 de la Geometría, demostración en la que, como señalamos, aparece un proceso infinito que Cavalieri simplemente soslaya. En sus comentarios sobre las colecciones de líneas Cavalieri intentó explicar cómo era posible trabajar con unas magnitudes que contenían infinitas líneas. Así en un escolio al teorema II.1 de su Geometría explica que no es el número de líneas de una colección lo que es usado para la comparación, sino el espacio ocupado por estas líneas (que sí es finito). En cualquier caso, sus últimas cartas a Galileo, así como diferentes pasajes de la Geometría y de sus *Exercitationes*, muestran que Cavalieri se replanteó muchas veces este problema a lo largo de su vida.

Aunque, como hemos dicho, Galileo no fue precisamente un entusiasta del trabajo de Cavalieri, la realidad es que tampoco lo criticó abiertamente. Otros matemáticos no italianos expresaron sus dudas y escepticismo de manera mucho más explícita. Entre estos fue el suizo Pierre Guldin el que más se distinguió. Guldin rechazó de plano las ideas de Cavalieri, criticando todos los puntos débiles de la teoría que, como hemos señalado, no eran pocos. A propósito de la existencia de razón entre colecciones de líneas, se mostró tajante al escribir que

> *entre una infinidad y otra nunca puede haber una proporción o ratio.*

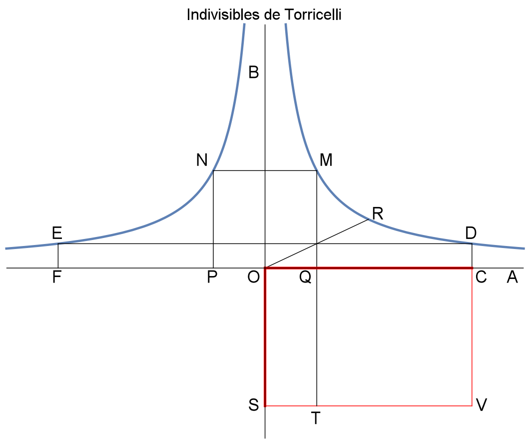
Pero Guldin fue más allá y acusó a Cavalieri de plagio, especialmente de Kepler y de Bartholomeus Sover. Cavalieri debió encontrar realmente insultantes estas afirmaciones y respondió a las mismas en el Libro III de *Exercitationes*. Refiriéndose específicamente a la acusación de plagio, él estableció fácilmente su independencia respecto de Kepler ya que la teoría de cuadraturas y cubaturas de éste, presentada como dijimos en su *Stereometría*, era muy diferente de la de los indivisibles, por más que pueda considerarse como un antecedente importante. En relación con Sover da un argumento temporal, señalando que su *Geometría* estaba lista en 1629, un año antes de la publicación del libro de Sover. En el terreno estrictamente científico Cavalieri responde a Guldin demostrando con el método de los indivisibles los teoremas, que figuran en Pappus, relativos al área y al volumen de los cuerpos de revolución, teoremas que Guldin había "demostrado" mediante razonamientos metafísicos sin valor matemático alguno. Eso no ha impedido, sin embargo, que esos teoremas estén hoy más vinculados al nombre de Guldin que al de Cavalieri, como sería mucho más justo.

Los ataques de otros matemáticos al método de Cavalieri no fueron tan fuertes como los de Guldin, pero ciertos círculos se opusieron al método. En relación a esto Stefano Angelli, jesuato como Cavalieri, señaló maliciosamente en su obra *De infinitis parabolis* de 1659 que en estos círculos había principalmente matemáticos jesuítas. Angeli pertenecía al grupo de matemáticos italianos que evaluaron favorablemente el método de Cavalieri, entre los que podemos destacar a figuras importantes como Pietro Mengoli, sucesor de Cavalieri en la cátedra de Bolonia, Honoré Fabri, a pesar de ser jesuíta, y, sobre todo, Torricelli que durante los primeros años después de la publicación de la *Geometría* se mostró bastante escéptico con el método de indivisibles, pero que hacia 1641 cambió de opinión y se convirtió en un firme defensor del mismo, utilizándolo con frecuencia, como vamos a ver enseguida, y contribuyendo a su popularización, aunque en una forma algo modificada. También fuera de Italia el método de indivisibles se fue conociendo y hacia 1650 era ampliamente aceptado. No obstante, lo que fuera de Italia era llamado el método de indivisibles y se atribuía a Cavalieri, tenía en realidad muy poco en común con su teoría de colecciones de líneas o planos. El método de indivisibles era pensado más bien como una suma de forma que, para el cálculo de áreas y volúmenes, una figura plana se podía considerar como una suma de segmentos y un sólido como una suma de áreas, idea esta que era propia de Torricelli y que, como hemos señalado, no se encuentra en los trabajos de Cavalieri. El hecho de que Torricelli utilizara su propia versión del método de indivisibles pero refiriendo la autoría siempre a Cavalieri es, probablemente, lo que motivó la errónea identificación de ambos métodos.

Para ilustrar el método de los indivisibles tal como lo utilizaba Torricelli vamos a recoger una interesante aplicación incluída en su obra *Opera geometrica* (y que nosotros hemos tomado de [7, pág. 74]) que aporta la novedad, en cierto modo paradójica para la época, de una figura no acotada que tiene volumen finito. Aunque Torricelli creyó haber sido el primero en descubrir que una figura de dimensiones infinitas podía tener una extensión finita, lo cierto es que probablemente se le adelantó Fermat en sus trabajos sobre las áreas bajo las hipérbolas de orden superior, a los que nos referiremos en próximas secciones, y, desde luego, Oresme, en el siglo XIV, que, en sus investigaciones sobre el movimiento uniformemente acelerado, calculó en determinados casos el área bajo el grafo velocidad-tiempo para obtener la distancia recorrida por un móvil, lo que le llevó a obtener la suma de algunas series convergentes como valores de los espacios recorridos.

Ejemplo 2.5. *El volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje de ordenadas una rama de la hipérbola equilátera $xy = \frac{a^2}{2}$ entre los puntos de abscisa 0 y b es igual al volumen del cilindro de altura b y radio de la base a.*

En efecto: De acuerdo con la figura, sean OA y OB las asíntotas de una hipérbola equilátera que pasa por los puntos M y D.



Hemos de probar que el sólido infinito que se obtiene haciendo girar el segmento DC y la rama infinita de la hipérbola que pasa por M y D alrededor de la asíntota OB tiene el mismo volumen que el cilindro de altura OC y de base el círculo de diámetro OS (en rojo en la figura), siendo OS el doble de la distancia OR de la hipérbola al origen de coordenadas.

Para ello recordemos que, si la hipérbola equilátera que pasa por M y D tiene de ecuación $xy = \frac{a^2}{2}$, entonces $a = OR$. Veamos ahora cómo razona Torricelli para llegar a la conclusión de que el sólido infinito y el cilindro mencionados tienen el mismo volumen.

Como indivisibles del sólido infinito tomamos las superficies laterales de los cilindros de eje OB, altura MQ y radio de la base OQ, moviéndose M por la hipérbola desde D hacia el eje OB.

Se verifica que el área lateral de cada cilindro es $2\pi \times OQ \times MQ$. Pero como (OQ, MQ) son las coordenadas del punto M que está sobre la hipérbola, se tiene $OQ \times MQ = \frac{a^2}{2} = \frac{OR^2}{2}$. Así el área lateral de cada cilindro es $2\pi\frac{OR^2}{2} = \pi\frac{OS^2}{4}$.

Como indivisibles del cilindro vamos a tomar la superficie de los círculos paralelos a la base de diámetro OS, variando entre O y C. Se tiene que la superficie de cada círculo es $\pi\frac{OS^2}{4}$.

Como vemos, los indivisibles del sólido infinito y del cilindro coinciden y ambos cuerpos se "completan" cuando el punto Q, que determina los indivisibles en cada cuerpo, varía entre O y C. En consecuencia ambos cuerpos tienen el mismo volumen, que será

$$\pi\frac{OS^2}{4} \times OC = \pi \times OR^2 \times OC$$

esto es, $\pi a^2 b$ si llamamos b a la abscisa del punto C. □

Evangelista Torricelli (1608-1647) fue uno de los científicos más destacados de la primera mitad del siglo XVII. Aunque en la actualidad es más conocido por la invención del barómetro, su obra matemática fue tan importante que Boyer señala en [2, pág. 451] que

> *si hubiera vivido una cantidad de años normal, es muy posible que hubiera sido él el inventor del cálculo infinitesimal, pero el cruel destino truncó su vida en Florencia sólo unos días después de haber cumplido* 39 *años.*

En efecto, en la época de Torricelli los problemas más populares eran los que podían ser atacados utilizando métodos infinitesimales, y él llegó a ser un maestro en este arte. Torricelli dio numerosos ejemplos del uso del método de los indivisibles en su *Opera geometrica*, publicada en 1644. Este libro fue muy bien recibido por los matemáticos europeos y llegó a ser la principal fuente del conocimiento que estos tuvieron del método de Cavalieri. Así, en la parte titulada *De dimensione parabolae de la Opera geometrica*, por ejemplo, presenta veintiuna demostraciones diferentes de la cuadratura de la parábola, que se reparten más o menos equitativamente entre el método de los indivisibles (once) y el de exhaución (diez). Esta misma obra incluye otro trabajo titulado *De infinitis hyperbolis* en el que Torricelli demuestra la cuadratura básica para exponentes racionales.

Torricelli también calculó la cuadratura de la cicloide, empleando tanto el método de exhaución como el de los indivisibles, y realizó la construcción de la tangente a la misma, es decir, abordó para esta curva específica los dos problemas básicos del cálculo infinitesimal. Estos resultados, que luego incluyó también en su *Opera geometrica*, le provocaron serias disputas con Roberval, al no hacer ninguna referencia en su obra a que este ya había obtenido esos resultados antes que él. Por ello Roberval acusó a Torricelli de plagio de él mismo y de Fermat, iniciándose una agria polémica entre ambos que continuó hasta su muerte. Como se señala en [2, pág. 448]

> *ahora está ya perfectamente claro que la prioridad en el descubrimiento corresponde a Roberval, pero la prioridad en su publicación a Torricelli que, con toda probabilidad, redescubrió de manera independiente los resultados sobre el área y la tangente.*

3. Las cuadraturas aritméticas de Fermat y Pascal

Después de la publicación de la Geometría de Cavalieri en 1635 Fermat y Pascal, entre otros, se dedicaron a generalizar sus resultados, estudiando de manera particular el área determinada por las parábolas generalizadas $y = x^k$ para cualquier exponente $k \in \mathbb{N}$. Para obtener la cuadratura

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

comenzaron a desarrollar nuevos métodos cada vez más parecidos a nuestra concepción actual de la integral y en los que la aritmética y el álgebra, que habían sido desarrollados en los años anteriores, jugaron un papel esencial que les permitió llegar a donde no pudieron hacerlo sus predecesores. Básicamente la idea consiste en sustituir los indivisibles de Cavalieri por rectángulos infinitesimales cuyas áreas aproximan "tanto como se quiera" la cuadratura buscada. Así, al asociar a cada rectángulo un número que representa su área los razonamientos puramente geométricos de Cavalieri podían ser sustituídos por razonamientos aritméticos mucho más sencillos y precisos, de forma que el conjunto de todas las líneas, que ya había sido sustituído por la suma de todas ellas en la concepción de los indivisibles de Torricelli, se transformaba en una suma de los números correspondientes a las áreas de los rectángulos. Así lo explica Pascal en una carta a un amigo que hemos tomado de [3, pág. 118]:

> *Quería escribirte esta nota para mostrarte que todo lo que se puede probar por las verdaderas reglas de los indivisibles también puede ser probado con el rigor y a la manera de los antiguos, [...] por ejemplo, eligiendo determinados puntos sobre el diámetro de un semicírculo, consideremos este dividido en un número indefinido de partes iguales. Tomemos las ordenadas de estos puntos. No encuentro ninguna dificultad al usar esta expresión, la suma de las ordenadas, que parece no ser geométrica a aquellos quienes no comprenden la doctrina de los indivisibles y quienes piensan que es un pecado contra la geometría expresar un plano por un número indefinido de líneas; esto sólo muestra su falta de inteligencia, porque aquello no significa otra cosa que la suma de un número indefinido de rectángulos teniendo la ordenada como altura y una porción igual de diámetro como base, cuya suma es ciertamente un área plana que difiere del semicírculo por una cantidad menor que cualquier cantidad dada.*

Blaise Pascal (1623-1662) nació en Clermont-Ferrand y, aunque su vida fue breve, fue uno de los más destacados científicos y filósofos franceses de su época. Nació en el seno de una familia noble y recibió una cuidada instrucción de su padre Etienne que, aunque no fue un matemático profesional, sentía verdadera predilección por esta ciencia. De hecho, el caracol de Pascal, es decir, la curva de coordenadas polares $r = a + b\cos\sigma$ lleva este nombre en honor del padre Etienne, y no del hijo Blaise como podría pensarse, ya que fue concienzudamente estudiada por aquél.

Se dice que Etienne trató de mantener a su hijo alejado de las matemáticas en los primeros años de su formación, con objeto de que adquiriera una sólida cultura general y se abriera también a otros intereses, pero siendo aún niño mostraba tal talento e inclinación hacia las matemáticas que él solo redescubrió muchos de los teoremas geométricos básicos contenidos en Los Elementos de Euclides. Ante esta evidencia, su padre decidió favorecer esa pasión y, siendo aún adolescente, le permitió acompañarle a las reuniones informales que en la celda del padre Mersenne en París celebraban los científicos acogidos a su círculo. Aquí fue donde se familiarizó con las ideas de Desargues, el padre de la geometría proyectiva, lo que le permitió en 1640, a la edad de dieciséis años, publicar su *Essay pour les coniques*, un artículo de una sóla página impresa pero, como se señala en [2, pág. 455],

> *sin duda una de las páginas más fecundas de la historia.*

En este ensayo Pascal prueba que en un hexágono los puntos de intersección de las rectas donde se sitúan los lados opuestos están alineados, teorema que hoy lleva su nombre y que el autor describió como "mysterium hexagrammicum". Pascal siempre reconoció que la inspiración para ese artículo le vino de la lectura de los trabajos de Desargues y, en un notable rasgo de humildad, poco frecuente en el gremio científico, escribió [2, pág. 456]:

Quisiera decir que debo lo poco que he descubierto yo mismo sobre el tema a sus escritos [de Desargues].

En 1642, con objeto de ayudar a su padre que era por entonces jefe de recaudación de impuestos en Normandía, Pascal inventó la "rueda de Pascal" o "Pascalina", una de las primeras máquinas de calcular, que inicialmente sólo hacía adiciones pero que posteriormente mejoró para que también pudiera hacer restas. Pascal patentó la máquina pero las dificultades que presentaba la construcción impidieron su comercialización para uso general. De hecho, sólo se construyeron cincuenta, de las que aún se conservan nueve.

Otro campo en el que Pascal hizo contribuciones destacadas fue en el de la teoría de probabilidades, de la que se le considera cofundador junto con Fermat. En efecto, durante los primeros años de la década que se inicia en 1650 Pascal realiza en París una vida social intensa, relacionándose con diferentes personajes entre los que se encuentra Antoine Gombaud, el caballero de Méré, que le planteó algunas cuestiones sobre juegos de azar. En relación con estos problemas comenzó una correspondencia con Fermat que se considera como el verdadero punto de partida de la actual teoría de probabilidades. Aunque ni Pascal ni Fermat publicaron sus resultados, su correspondencia fue utilizada por Huygens, otro de los grandes científicos de la época, para elaborar en 1657 su tratado *De ratiociniis in ludo aleae* o, en español, *Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados*, obra fundacional de esta rama de las matemáticas, con permiso siempre de Cardano y su *Liber de ludo aleae* que, como es sabido, fue en realidad la primera monografía que se publicó sobre el tema.

Un aspecto importante en la vida de Pascal es el religioso. Su familia era católica e inclinada hacia una nueva doctrina que por entonces comenzaba a tomar cierto auge en Europa, el jansenismo. El 23 de noviembre de 1654 Pascal sufrió, por lo que parece, aunque no está bien documentado, un accidente cuando conducía un coche de caballos. Esa misma noche cayó en un fuerte arrebato místico que le llevó a abandonar la vida social que frecuentaba y a recluirse en el convento de Port Royal, principal centro impulsor de las ideas jansenistas. Allí escribió sus principales obras filosóficas y religiosas Las lettres provinciales y los *Pensées sur la religion et sur quelques autres sujets*, o simplemente los *Pensées*, obra proyectada como una apología de la religión cristiana pero que quedó simplemente recogida en notas dispersas debido a su prematura muerte y que fue publicada póstumamente. En relación con su pensamiento religioso merece la pena destacar la llamada "Apuesta de Pascal" según la cual la fe en Dios no sólo es acertada, sino también racional ya que

si ganas, lo ganas todo y si pierdes, no pierdes nada.

Lástima que la gracia de la fe no le sea dada a todos los mortales, pues por lo demás no cabe duda de que el punto de vista de Pascal es incontrovertible.

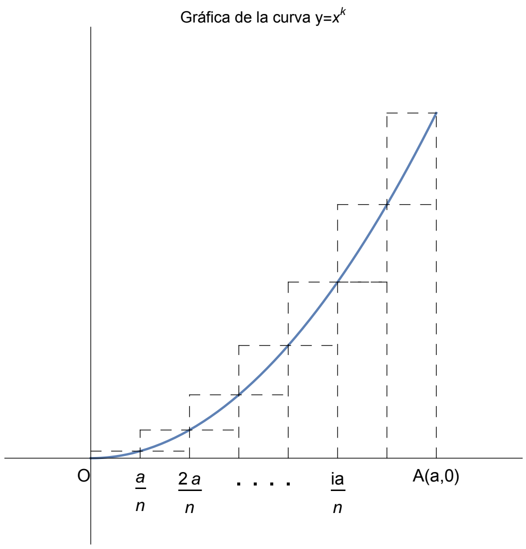
Después de su arrebato religioso Pascal se dedicó poco a las matemáticas. No obstante, en 1658 dedicó algunas horas del insomnio motivado por sus frecuentes dolores al estudio de la cicloide, que el llamaba "roulette", obteniendo algunos resultados que le animaron a proseguir en días sucesivos la tarea iniciada. Después de unos días dedicado a estas investigaciones se animó a convocar un concurso abierto en el que planteó, bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville, algunas preguntas sobre la cicloide. Debido al escaso periodo de tiempo que se estableció para la admisión de las respuestas, sólo se recibieron dos, una de ellas del notable matemático inglés John Wallis. El concurso fue declarado desierto, lo que provocó las protestas de los participantes y originó nuevas disputas en el siempre alterado mundo científico. Poco después Pascal, utilizando todavía el pseudónimo mencionado, publicó su *Histoire de la roulette* en la que recogió las soluciones a los problemas propuestos en el concurso.

Su última contribución a las matemáticas fue su *Traité des sinus des quarts de cercle* o, en castellano, *Tratado de los senos de los cuadrantes circulares*, de 1659, obra que resultó decisiva para el alumbramiento del cálculo infinitesimal. En ella Pascal introduce el triángulo característico en el círculo y lo utiliza para calcular el área encerrada por la función seno. Esto ponía de manifiesto que debía existir una relación muy estrecha entre los problemas de tangentes y cuadraturas, pues el triángulo característico también puede utilizarse para resolver el problema de la tangente. Aquí Pascal estuvo muy cerca de ser el primero en obtener lo que hoy llamamos el teorema fundamental del cálculo integral. La idea del triángulo característico fue generalizada por Leibniz para una curva cualquiera y está en la base del cálculo diferencial. A este respecto el propio Leibniz señaló que fue precisamente este trabajo de Pascal el que,"como un relámpago", le hizo ver con claridad el carácter inverso de los problemas de tangentes y cuadraturas.

Pascal tuvo muchos problemas de salud a lo largo de su vida, particularmente digestivos, que le provocaron mucho sufrimiento y que finalmente le causaron la muerte a los 39 años. En parte por ello y en parte por su carácter diletante, que le llevó a emplear su genio en temas muy diferentes, no obtuvo en matemáticas resultados a la altura de su enorme talento. En este sentido se afirma en [2, pág. 460] que

Pascal es, sin duda, el más grande podría-haber-sido de toda la historia de la matemática.

En esta sección vamos a explicar los métodos de cuadraturas aritméticas ideados por Pascal y por Fermat para el cálculo de la cuadratura básica para exponente natural. La idea en ambos casos consiste en dividir el intervalo $[0, a]$ en n partes iguales y hallar las áreas de los hoy habituales rectángulos inscritos y circunscritos P_i y Q_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$), respectivamente, teniendo todos ellos como base a/n y altura la correspondiente ordenada de la curva $y = x^k$.



Así para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos las siguientes aproximaciones S_n y S'_n, por defecto y por exceso, del área encerrada por la curva:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \left(\frac{(i-1)a}{n} \right)^k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a}{n} \left(\frac{ia}{n} \right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \left[1^k + 2^k + ... + (n-1)^k \right]$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \left(\frac{ia}{n} \right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \left[1^k + 2^k + ... + n^k \right]$$

Por tanto, si llamamos S al área encerrada por la curva $y = x^k$ en el segmento $[0, a]$ se tiene que para todo n natural

$$S_n < S < S'_n$$

lo que nos lleva a que para todo n natural

$$a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}\right]$$

En términos modernos, para obtener el resultado, esto es, para obtener que $S = \frac{a^{k+1}}{k+1}$, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}\right] = \frac{1}{k+1}$$

lo que hoy podemos comprobar fácilmente utilizando para resolver el límite el método de Stolz. En efecto, dado que la sucesión $\{n^{k+1}\}$ es creciente y divergente a $+\infty$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k}}{\binom{k+1}{0}n^{k+1} + \binom{k+1}{1}n^k + \ldots + \binom{k+1}{k+1} - n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + ... + \binom{k}{k}}{\binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1}\ldots + \binom{k+1}{k+1}} \\
&= \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Naturalmente en la época de Pascal y Fermat este razonamiento era imposible puesto que aún faltaban muchos años para que se desarrollara la teoría de límites. Veamos cuales fueron los procedimientos que siguieron cada uno de ellos para llegar al mismo resultado. Fermat envió en 1639 una carta al padre Mersenne en la que establece, aunque sin probarla explícitamente, la siguiente fórmula:

Proposición 3.1. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)...(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)...(n+k)}{(k+1)!}$$

Demostración. Veamos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$ la igualdad queda

$$\frac{1\cdot 2\cdots k}{k!} = \frac{1\cdot 2\cdots(k+1)}{(k+1)!}$$

que es evidentemente cierta. Supuesto para n, veámoslo para $n+1$. En efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!}+\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!}\\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(k+1)!}+\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)+(n+1)(n+2)\dots(n+k)(k+1)}{(k+1)!}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)(n+k+1)}{(k+1)!}\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. □

Corolario 3.2. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \textit{potencias de } n \textit{ inferiores a } (k+1)$$

Demostración. Escribamos, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la igualdad

$$i(i+1)\dots(i+k-1) = i^k + a_1 i^{k-1} + \dots a_{k-1} i$$

siendo los coeficientes a_1, a_2,..., a_{k-1} constantes que dependen de k. Se obtiene entonces, en virtud de la proposición anterior, que:

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^k + a_1\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \dots + a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(k+1)!}$$

y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1} - \left[a_1\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \dots + a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

de donde se deduce el resultado. □

A partir de aquí Fermat obtiene fácilmente la cuadratura de la parábola generalizada:

Proposición 3.3.

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Demostración. Partiendo de la desigualdad

$$a^{k+1}\left[\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}\right]$$

y aplicando el corolario anterior, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a^{k+1}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{b_1}{n}+\dots+\frac{b_{k+1}}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{b_1}{n}+\dots+\frac{b_{k+1}}{n^{k+1}}\right]$$

y cuando n tiende a infinito todos los sumandos del primer y último miembros de la desigualdad se hacen tan pequeños como se quiera, excepto los primeros de cada uno. De ahí sigue que

$$S = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

□

Por su parte Pascal, para obtener el mismo resultado, prueba en 1654 una fórmula recurrente para la suma de las k-ésimas potencias que es más explícita que la de Fermat. La fórmula de Pascal aparece en su obra *Potestatum Numericarum Summa*, publicada en 1665, y, utilizando la notación actual de los números combinatorios, es la siguiente [4, pág. 107]:

Proposición 3.4. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k + \binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + ... + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{k+1} - n - 1$$

Demostración. La fórmula puede obtenerse fácilmente teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{r=0}^{k} \binom{k+1}{r} i^r \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} i + \ldots + \binom{k+1}{k} i^k \right] \\
&= \binom{k+1}{0} n + \binom{k+1}{1} \sum_{i=1}^{n} i + \ldots + \binom{k+1}{k} \sum_{i=1}^{n} i^k
\end{aligned}$$

de donde sigue la igualdad buscada. □

A partir de esta fórmula se obtiene inmediatamente que

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{potencias de } n \text{ inferiores a } (k+1)$$

y ahora puede razonarse como en el caso anterior.

4. El método infinitesimal de la progresión geométrica de Fermat

En orden a generalizar la fórmula de la cuadratura básica para n entero negativo, $n \neq -1$, o fraccionario, Fermat atacó el problema y lo resolvió hacia 1640 mediante un enfoque puramente geométrico, utilizando rectángulos infinitesimales cuyas áreas estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad. En su trabajo *De aequationum localium transmutatione et emendatione, ad multimodam curvilineorum inter fe, vel cum rectilineis comparationem*, subtitulado *Proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis*, de 1658, Fermat comienza diciendo:

> *Arquímedes sólo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola. En sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizás fue que el artificio particular del que se sirvió para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a otras? Cualquiera que sea la razón yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar tanto parábolas como hipérbolas.*

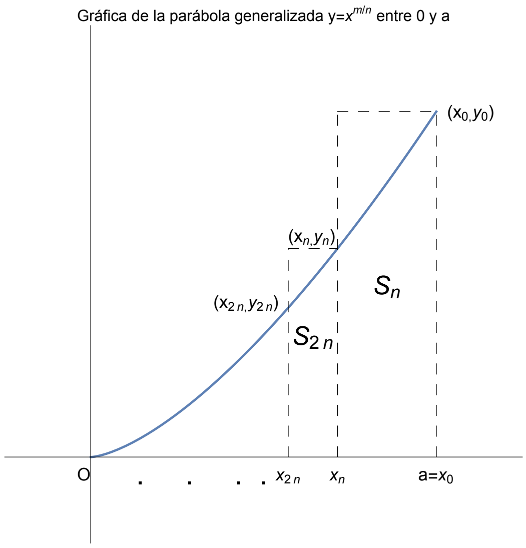
El método de Fermat se basa en el hecho de que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que uno es finita e igual al primer término dividido entre uno menos la razón. Este resultado es consecuencia de la proposición IX.35 de Los Elementos de Euclides que nos da la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Vamos a ilustrar a continuación el método de Fermat para calcular el área de la figura comprendida entre el eje $0X$, los puntos de abscisas 0 y a y la parábola generalizada $y = x^{m/n}$, m y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.1.

$$\int_0^a x^{m/n} dx = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}} \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

Demostración. Gráficamente la situación es la siguiente:



Denotemos $x_0 = a$ y $x_r = aq^r$ para todo $r \in \mathbb{N}$, siendo q un número arbitrario tal que $0 < q < 1$.

Consideremos las abscisas

$$x_0 = a, \; x_n = aq^n, \; x_{2n} = aq^{2n}, \; x_{3n} = aq^{3n}, \ldots$$

a las que corresponden las ordenadas

$$y_0 = a^{m/n}, \; y_n = a^{m/n}q^m, \; y_{2n} = a^{m/n}q^{2m}, \; y_{3n} = a^{m/n}q^{3m}, \ldots$$

y llamemos $S_n, S_{2n}, S_{3n}, \ldots$ a las áreas de los rectángulos de bases respectivas $x_0 - x_n$, $x_n - x_{2n}$, $x_{2n} - x_{3n}, \ldots$ y de alturas $y_0, y_n, y_{2n}, \ldots$, es decir,

$$\begin{aligned}
S_n &= (x_0 - x_n)y_0 = a(1-q^n)a^{m/n} = (1-q^n)a^{\frac{m+n}{n}} \\
S_{2n} &= (x_n - x_{2n})y_n = aq^n(1-q^n)a^{m/n}q^m = (1-q^n)q^{m+n}a^{\frac{m+n}{n}} \\
S_{3n} &= (x_{2n} - x_{3n})y_{2n} = aq^{2n}(1-q^n)a^{m/n}q^{2m} = (1-q^n)q^{2(m+n)}a^{\frac{m+n}{n}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{pn} &= (x_{(p-1)n} - x_{pn})y_{(p-1)n} = aq^{(p-1)n}(1-q^n)a^{m/n}q^{(p-1)m} = (1-q^n)q^{(p-1)(m+n)}a^{\frac{m+n}{n}}
\end{aligned}$$

Se observa que la sucesión $\{S_n, S_{2n}, S_{3n}, \ldots\}$ está en progresión geométrica de razón $0 < q^{m+n} < 1$ y, en consecuencia, la serie $\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn}$ es convergente por lo que su suma será finita y vendrá dada por:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} S_{pn} = \frac{S_n}{1-q^{m+n}} = \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} a^{\frac{m+n}{n}}$$
$$= \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} x_0 y_0 = \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} S_0$$

siendo S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Obviamente el área que hemos calculado es mayor que el área buscada, pero las cantidades tienden a hacerse iguales si los rectángulos considerados tienen la base cada vez más pequeña, lo que se consigue haciendo que q se aproxime a 1, por la izquierda, tanto como queramos.

Dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ es

$$(1-q)(1+q+q^2+...+q^{k-1}) = 1-q^k$$

se tiene que

$$\frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} = \frac{1+q+q^2+...+q^{n-1}}{1+q+q^2+\ldots+q^{m+n-1}}$$

y este cociente se hace igual a $\dfrac{n}{m+n}$ cuando q se hace igual a 1. O dicho en términos de límites, cosa que no podía hacer Fermat,

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} = \lim_{q \to 1^-} \frac{nq^{n-1}}{(m+n)q^{m+n-1}} = \frac{n}{m+n}$$

Sigue, por tanto, el resultado que dio Fermat para el área determinada por la parábola generalizada, esto es,

$$S = \frac{n}{m+n} S_0$$

lo que expresado con la notación de integrales y teniendo en cuenta que $S_0 = a^{(m+n)/n}$ es el resultado buscado. □

Fermat observó que el método vale análogamente para hipérbolas generalizadas del tipo

$$y = \frac{1}{x^{m/n}} \qquad m, n \in \mathbb{N},\ \frac{m}{n} \neq 1$$

Así se tiene que:

Proposición 4.2.

- $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}} dx = \frac{n}{n-m} a^{\frac{n-m}{n}}$ *si* $n > m$.
- $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^{m/n}} dx = \frac{n}{m-n} a^{\frac{n-m}{n}}$ *si* $n < m$.

Demostración. Consideremos igual que antes las abscisas

$$x_0 = a,\ x_n = aq^n,\ x_{2n} = aq^{2n},\ x_{3n} = aq^{3n}, \ldots$$

a las que corresponden las ordenadas

$$y_0 = \frac{1}{a^{m/n}},\ y_n = \frac{1}{a^{m/n}q^m},\ y_{2n} = \frac{1}{a^{m/n}q^{2m}},\ y_{3n} = \frac{1}{a^{m/n}q^{3m}}, \ldots$$

y llamemos S_n, S_{2n}, S_{3n},... a las áreas de los rectángulos de bases respectivas $x_0 - x_n$, $x_n - x_{2n}$, $x_{2n} - x_{3n}, \ldots$ y de alturas $y_0, y_n, y_{2n}, \ldots$, es decir,

$$\begin{aligned}
S_n &= (x_0 - x_n)y_0 = a(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}} = (1-q^n)a^{\frac{n-m}{n}} \\
S_{2n} &= (x_n - x_{2n})y_n = aq^n(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^m} = (1-q^n)q^{n-m}a^{\frac{n-m}{n}} \\
S_{3n} &= (x_{2n} - x_{3n})y_{2n} = aq^{2n}(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^{2m}} = (1-q^n)q^{2(n-m)}a^{\frac{n-m}{n}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{pn} &= (x_{(p-1)n} - x_{pn})y_{(p-1)n} = aq^{(p-1)n}(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^{(p-1)m}} = (1-q^n)q^{(p-1)(n-m)}a^{\frac{n-m}{n}}
\end{aligned}$$

En este caso las áreas de los rectángulos $\{S_n, S_{2n}, S_{3n}, \ldots\}$ constituyen una progresión geométrica de razón q^{n-m} por lo que para que la serie sea convergente debe ser:

a) Si $n - m > 0$ se toma igual que antes $0 < q < 1$.

Entonces

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn} = \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}}a^{\frac{n-m}{n}} = \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}}S_0$$

siendo S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Dado que

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}} = \lim_{q\to 1^-} \frac{nq^{n-1}}{(n-m)q^{n-m-1}} = \frac{n}{n-m}$$

obtenemos que el área determinada por la hipérbola generalizada es $S = \dfrac{n}{n-m}S_0$, lo que, expresado en términos modernos, sería

$$\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}}dx = \frac{n}{n-m}a^{(n-m)/n}$$

Obsérvese que en este caso no hay problemas de convergencia con la integral impropia ya que $0 < \frac{m}{n} < 1$.

b) Si $n - m < 0$ se toma $q > 1$.

Obsérvese que en este caso los puntos $x_n = aq^n$ tienden a $+\infty$ y en realidad lo que obtenemos es el área determinada por la hipérbola entre a y $+\infty$. Así se verifica que

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn} = \frac{q^n - 1}{1-q^{n-m}}a^{\frac{n-m}{n}} = \frac{q^n-1}{1-q^{n-m}}S_0$$

donde S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Como

$$\lim_{q\to 1^+} \frac{q^n-1}{1-q^{n-m}} = \lim_{q\to 1^+} \frac{nq^{n-1}}{-(n-m)q^{n-m-1}} = \frac{n}{m-n}$$

obtenemos que el área determinada por la hipérbola es $S = \dfrac{n}{m-n}S_0$, esto es, la igualdad que, en términos modernos, escribimos en la forma

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx = \frac{n}{m-n}a^{(n-m)/n}$$

□

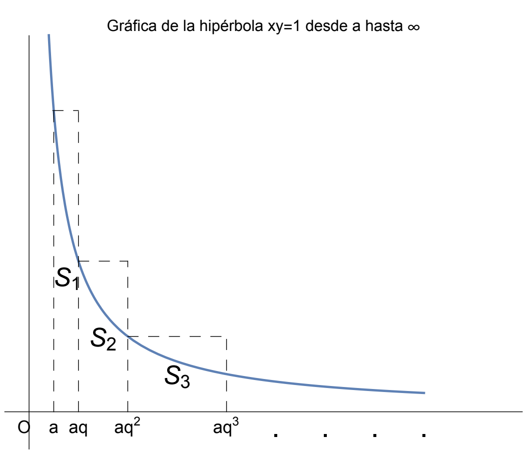
De hecho, en este caso la integral impropia $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}}dx$ no es convergente. No obstante, si quisiéramos calcular el área determinada por la hipérbola entre dos puntos de abscisas a y b, $0 < a < b$, basta tener en cuenta que

$$\int_a^b \frac{1}{x^{m/n}}dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx - \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx$$

Obviamente en el caso $m-n=0$, es decir, en el caso $\dfrac{m}{n}=1$ tenemos la hipérbola equilátera $y = \dfrac{1}{x}$ y el procedimiento falla pues la progresión geométrica formada por las áreas tiene razón $q^0 = 1$ y la suma no sería convergente para ningún valor de q. Fermat era muy consciente de este hecho y así lo señala en su memoria de 1658, en la que escribe expresamente:

> *No es difícil extender esta idea [la demostración realizada para la hipérbola $y = 1/x^2$] a todas las hipérbolas definidas anteriormente, excepto a la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio $y = 1/x$].*

Este caso singular fue "resuelto" por el matemático belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667), contemporáneo de Fermat, que fue profesor de matemáticas en Roma y Praga y que más tarde ocupó el puesto de tutor en la corte de Felipe IV de España. Saint Vincent resolvió este caso en su obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum coni* o, en español, *Obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas*. La mayor parte de esta obra fue escrita antes de la época en que Fermat se encontraba trabajando sobre los problemas de tangentes y cuadraturas, pero desgraciadamente no se publicó hasta 1647. En este tratado se demuestra que si tomamos a lo largo del eje $0X$ puntos a partir de $x = a$ tales que la longitud de los intervalos que determinan van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos puntos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola $xy = 1$, entonces las áreas correspondientes bajo dos ordenadas sucesivas son iguales.



En efecto, si tomamos como sucesión de abscisas $\{a, aq, aq^2, aq^3, \ldots\}$ (con $q > 1$ por ejemplo), la sucesión de ordenadas será $\{\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \frac{1}{aq^3}, \ldots\}$ y, en consecuencia, todos los rectángulos tienen el mismo área. En efecto:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (aq - a)\frac{1}{a} = q - 1 \\
S_2 &= (aq^2 - aq)\frac{1}{aq} = q - 1 \\
S_3 &= (aq^3 - aq^2)\frac{1}{aq^2} = q - 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n &= (aq^n - aq^{n-1})\frac{1}{aq^{n-1}} = q - 1
\end{aligned}$$

Observamos, por tanto, que las áreas bajo la curva crecen en progresión aritmética cuando las abscisas crecen en progresión geométrica. Esta relación entre las abscisas y la curva que va dando el área (cuando las abscisas crecen en progresión geométrica las ordenadas de la curva que da el área lo hacen en progresión aritmética) indica, y esto ya se sabía en tiempos de Saint Vincent pues es la esencia de los logaritmos, que la curva que da el área es la logarítmica, o sea, podemos decir que Saint Vincent vislumbró la igualdad que hoy escribimos en la forma

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(b) - \log(a)$$

En la obra citada, debido a una aplicación errónea del método de los indivisibles, Saint Vincent creyó haber conseguido cuadrar el círculo, error que perjudicó su reputación y que fue pronto rebatido por otros matemáticos como Huygens. No obstante, la obra contiene muchos resultados interesantes, como el que hemos comentado en el que se insinúa la relación entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola equilátera, además de que es la obra donde se introduce el vocablo "exhaución" para referirse al método de demostración ideado por Eudoxo y que, en manos de Arquímedes, alcanzó sus más altas cotas de depuración técnica.

Referencias

[1] ANDERSEN, K., *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Archiv of History of Exactes Sciences 31, 291-367, 1985.

[2] BOYER, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, 2007.

[3] DURÁN, A. J., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, 1996.

[4] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, 1992.

[5] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*, Nivola libros y ediciones, 2008.

[6] MARIE, M., *Histoire des sciences matématiques et physiques*, 12 vol. París (Reprint Nueva York), 1977.

[7] REY PASTOR, J., BABINI, J., *Historia de la Matemática, volumen 2*, GEDISA, S.A., 1985.

Sobre el autor:
Nombre: José María Ayerbe Toledano
Correo electrónico: jayerbe@us.es
Institución: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España.

Historias de Matemáticas

Teoría de Números: De Ciencia pura a Ciencia aplicada

Number Theory: From pure science to applied science

Jaime J. Gutiérrez G.

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 057–066, ISSN 2174-0410
Recepción: 28 Ago'17; Aceptación: 31 Ene'18

1 de abril de 2018

Resumen

El objetivo de este artículo de divulgación es presentar una reseña histórica de la evolución de la Teoría de Números y de su importancia actual para la Matemática y las Ciencias. Está dirigido a una amplia audiencia; en el caso de los matemáticos expertos esperamos que la información brindada sirva como un complemento a la formalidad: teorema - prueba y en el caso de los científicos una ilustración de la fascinación humana por los números.

Palabras Clave: Aplicaciones de la Teoría de Números, Historia de la Teoría de Números.

Abstract

The objective of this divulgation paper is to present a historical overview of the evolution of Number Theory and its current importance for Mathematics and Science. It is directed at a wide audience; in the case of the mathematical experts we hope that the information provided serves as a complement to the formality: theorem - proof and in the case of the scientis an illustration of human fascination with numbers.

Keywords: Applications of Number Theory, History of Number Theory.

1. Introducción

La utilidad de la Matemática se ha convertido en una exigencia social. Para muchos la Matemática sin aplicación es pérdida de tiempo. Sin embargo, un vistazo a la evolución de la Matemática deja en evidencia que la interrelación de ésta con las Ciencias no es tan simple como: Matemática creada-Matemática aplicada. En muchos casos los científicos no han contado con una teoría matemática que facilite y fundamente sus logros. De igual forma, muchos resultados matemáticos permanecen en el plano teórico sin ser de utilidad alguna para el desarrollo de las Ciencias. En este contexto contrastante, hay un ejemplo fascinante: La Teoría de Números. La Aritmética o Aritmética Superior como se le conocía antiguamente a la Teoría de Números, era el paradigma de la belleza y de la pureza de la Matemática. Aunque es posible distinguir acontecimientos aislados que ilustran la aplicabilidad de la Teoría de Números, es justo reconocer que la importancia de esta disciplina como una herramienta para las Ciencias se inicia a mediados del siglo XX y que los avances informáticos y tecnológicos son un catalizador determinante para esta transformación.

2. Orígenes de la Teoría de Números

Como toda actividad humana antigua, resulta imposible establecer con certeza los orígenes de la Teoría de Números. Las fuentes históricas sólo nos permiten formular algunas conjeturas que no necesariamente cuentan con una amplia aceptación. El hueso de Ishango, peroné fósil de un babuino descubierto por Jean de Henizelin en 1960 en una zona próxima a la naciente del río Nilo, data de 20 000 años y es la pieza más antigua con información de actividad humana de la que se tiene constancia [19]. En el hueso de Ishango aparecen unas series de muescas dispuestas en columna, que son prueba del desarrollo de las nociones de número y de conteo. Una de estas columnas muestra la sucesión de números 11, 13, 17 y 19, todos números primos. Para algunos, esto es una evidencia de que el hueso de Ishango no sólo era un registro o instrumento de conteo y que para entonces el hombre ya habría desarrollado la idea de divisibilidad, concepto fundamental de la Teoría de Números.

La tablilla Plimpton 322, atribuida a la civilización babilónica, fue hallada en el desierto de Irak y se supone que fue escrita alrededor del año 1800 antes de Cristo [16, 20]. La tablilla contiene un arreglo rectangular de quince filas y cuatro columnas. Salvo algunos errores, en cada fila el cuadrado del numero en la tercera columna menos el cuadrado del número en la segunda columna es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, se puede afirmar que se trata de una lista de quince ternas pitagóricas, once de ellas correctas. Se desconoce el método empleado para la generación de estas ternas, pero dada la cantidad y la magnitud de los valores es asumible el uso de un procedimiento que implica el conocimiento de relaciones numéricas más allá de las operaciones aritméticas básicas. Recientemente [16], se ha establecido que la tablilla Plimpton 322 es una poderosa tabla trigonométrica basada en razones exactas. En su obra *Los Elementos*, Euclides establece propiedades básicas de la Teoría de divisibilidad y con esto se inicia el estudio formal de las ideas teórico-numéricas. Podemos señalar los tres siguientes resultados como los grandes logros de Euclides en Teoría de Números [1, 17].

- Describir un algoritmo para determinar el máximo común divisor de dos números dados. Proposiciones 1 y 2 del Libro VII de Los Elementos.

- Demostrar la infinitud de los números primos. Proposición 20 del Libro IX.

- Establecer condiciones suficientes para que un número par sea perfecto. Proposición 36 del Libro IX.

Diofantos es otro de los matemáticos griegos con notables logros en la Teoría de Números [18]. Su obra Aritmética es de importancia trascendental en el desarrollo de la Matemática. Para Diofantos era de particular interés determinar las soluciones enteras de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y sus aportes en este tema son el origen de la Teoría de ecuaciones diofánticas, una de las ramas de investigación más activa de la Teoría de Números. Hay evidencias de que Diofanto conocía algunos resultados que hoy son considerados clásicos en la Teoría de Números como el Teorema de los cuatro cuadrados, demostrado por Lagrange en 1770, casi 2000 años después.

3. Desarrollo de la Teoría de Números

Después de Diofanto, la Teoría de Números no registra grandes avances. Aportes de las civilizaciones orientales resultan los más notables. Tal vez, lo más importante en este contexto es el llamado Teorema chino de los restos, encontrado por primera vez en un tratado matemático del Siglo III titulado Sun Zi Suan jing(Manual matemático de Sun Zi [11]). Se supone que propiedades de las congruencias lineales fueron empleadas para la elaboración de calendarios [13]. A finales del Siglo XII, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, se convierte en el pionero de la transferencia de conocimientos e ideas de Oriente a Occidente y además revive el interés en la Teoría de Números. Aunque la famosa sucesión de Fibonacci es tema relevante tanto en el sentido teórico como práctico, podemos considerar su *Liber Quadratorum* como un hito entre Diofantos y Pierre de Fermat. En *Liber Quadratorum*, Fibonacci desarrolla métodos originales para establecer identidades que involucran suma de cuadrados y resolver, para números racionales, ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas. En efecto, el problema de encontrar un número natural n tal que $n^2 + 5$ y $n^2 - 5$ sean ambos cuadrados fue propuesto a Fibonacci por Johannes Palermo para poner a prueba su talento matemático. La consideración de este problema, y otros relacionados, motivó a Fibonacci a escribir su *Liber Quadratorum* [15]. Luego de Fibonacci,la actividad teórico-numérica conocida decrece y se retoma al inicio de la era moderna con los aportes de Pierre de Fermat quien inspirado en la Aritmética de Diofantos estableció la corriente de investigación en Teoría de Números. Sus aportes son numerosos, para destacar algunos podemos citar: El método de descenso infinito y el llamado primer Teorema de Fermat. Ha sido ampliamente difundida la historia de las anotaciones hechas por Fermat al margen de su ejemplar de Aritmética de Diofantos, a través de las cuales se conocieron sus grandes ideas y logros. En una de esas anotaciones, Fermat declara la no existencia de enteros positivos x, y y z que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$ si n es un entero mayor que 2, y asegura tener una prueba maravillosa de esta afirmación, conocida desde Euler como el Último Teorema de Fermat. No se puede asegurar la existencia de la anunciada prueba de Fermat, y la elaboración de una prueba se convirtió en uno de los problemas más atrayentes de la Matemática [22]. En el año de 1995, más de 300 años después de Fermat, la comunidad matemática reconoce a Andrew Wiles el haber demostrado el Último Teorema de Fermat [27].

A pesar de la importancia de los resultados de Fermat, la Teoría de Números no atrajo la atención de los matemáticos. Esta apatía se extendió por casi un siglo y terminó con los aportes de Euler quien, motivado por Goldbach, se interesó intensamente en los trabajos de Fermat [26]. La profundidad y belleza de los resultados teórico-numéricos de Euler captaron la atención de destacados matemáticos como Lagrange, Legendre y Gauß.

Con *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauß, la Teoría de Números, la Reina de la Matemática, como la llamó el propio Gauß, se consolidó como un área de interés en la investigación matemática relacionada con Geometría, Álgebra y Análisis. A partir de entonces, la Teoría de Números es una de las áreas más activa, pero aún portaba su hábito de pureza y se mantenía ajena al "impuro mundo de las aplicaciones" [8]. Durante el Siglo XIX, se obtienen logros trascendentes. Dirichlet en 1835 demuestra el Teorema de números primos en progresiones aritméticas. Hadamard y de la Vallée-Poussin demuestran, independientemente, el Teorema de los Números Primos que había sido conjeturado por Gaußy Legendre [12]. El Siglo XX es una época de oro para la Teoría de Números, para muchos resultados fundamentales se obtuvieron grandes avances e incluso demostraciones definitivas. Hilbert demuestra la conjetura de Waring, Vinogradov prueba que todo número impar suficientemente grande es suma de tres primos y Chen prueba que todo número par suficientemente grande es suma de dos primos o suma de un número primo y un semiprimo (producto de dos primos), dos resultados estrechamente relacionados con las Conjeturas de Goldbach. Wiles prueba parcialmente la Conjetura de Shimura-Taniyama y con esto el Último Teorema de Fermat. Para el logro de estos y otros avances fue necesario el desarrollo de nuevos enfoques y nuevas teorías, así la Teoría de Números se ramifica, profundiza sus conexiones con otras disciplinas y se consolida como un área de intensa actividad investigativa. Durante los inicios del siglo XXI se producen resultados impactantes: Agrawal, Saxena, y Kayal presentan un algoritmo de primalidad incondicional, determinístico de tiempo polinomial, Preda Mihailescu prueba la conjetura de Catalan, Green y Tao demuestran que la sucesión de números primos contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud arbitraria, Zhang demuestra que existe una constante H tal que existen infinitas parejas de números primos cuya diferencia es a lo más H, el resultado más importante relacionado con la conjetura de los primos gemelos [28] y en enero de 2014, Helfgott anuncia una prueba de la conjetura ternaria de Goldbach: "Todo número impar mayor que 5 es suma de tres números primos" [10].

4. Las aplicaciones de la Teoría de Números

G.H. Hardy, uno de los más influyentes matemáticos ingleses, se opuso firmemente al uso de la Matemática con fines militares y bélicos, se declaraba un matemático puro y señalaba como ejemplo de pureza a la Teoría de Números y a la Teoría de la Relatividad [9]. Sin embargo en los tiempos actuales, la sentencia

> *No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda algún día aplicarse a los fenómenos del mundo real*

atribuida a Lobachevski se hace evidente y ubica en un nivel anecdótico la opinión de Leonard Dickson, prominente teórico-numérico del Siglo XX, quien afirmó:

> *Gracias a Dios, la Teoría de Números no está manchada por las aplicaciones.*

Aunque resultados teórico-numéricos hayan sido efectivamente aplicados antes [5, 14], podemos aceptar que el desarrollo de la Criptografía de clave pública en los años setenta del Siglo XX marca el inicio de la Teoría de Números como Ciencia Aplicada [7]. Las transformaciones tecnológicas han afectado en gran medida las formas de comunicación humana y modificado nuestros modos de vida. Uno de los aspectos más importantes en este contexto es la protección de la información y de datos, y la Teoría de Números ha sido aplicada en Criptografía y Teoría de Codificación, herramientas fundamentales para las comunicaciones modernas. El valor práctico de la Teoría de Números no se limita a estos ámbitos, y posiblemente esta sea la concepción generalizada. En la siguiente sección nos ocupamos de esta temática.

5. Otras aplicaciones

La Teoría de Números, de forma tal vez inesperada, ha sido relacionada con otras áreas de la Matemática y las ciencias y, ha encontrado aplicaciones en áreas como Física (mecánica cuántica, estado de la materia, difracción), Biología (morfología de plantas y animales, procesos evolutivos), Química (electronegatividad, estructura atómica, iteracción covalente, quiralidad molecular), Comunicación (codificación, criptografía), Acústica (arquitectura acústica y diseño de sonares y sintetizadores de voz), Música (variaciones rítmicas y sistemas de afinación), Diseño gráfico (imágenes computarizadas) [24]. A manera de ilustración, describimos una aplicación a la acústica y su relación con la mecánica cuántica.

5.1. Raíces primitivas y Acústica

En esta sección presentamos una aplicación del concepto teórico-numérico de primitiva a la Acústica, en particular al diseño de las salas de concierto. Para un tratamiento completo de este tema ver [24]. Sean un número primo p y un entero g. Decimos que g es una raíz primitiva módulo p, o simplemente una raíz primitiva de p, si $p-1$ es el menor entero positivo tal que

$$g^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$$

En lo sucesivo, g es una raíz primitiva de p. Si a es un entero no divisible por p, entonces existe un único entero k, $0 \leq k < p$ tal que

$$a \equiv g^k (mod\, p)$$

Consideramos, la sucesión de números complejos

$$a_n = e^{2\pi i g^n / p}$$

Esta sucesión es periódica con periodo $p-1$ y todos sus términos son de módulo 1. La sucesión $\{c_n\}$ de correlación periódica se define por:

$$c_n = \sum_{i=0}^{p-2} a_i \overline{a_{i+n}}$$

Resulta que

$$c_n = \begin{cases} p-1 & \text{si } n \equiv 0(mod\, p-1) \\ \\ -1 & \text{si } n \not\equiv 0(mod\, p-1) \end{cases}$$

Si consideramos la Transformada discreta de Fourier de $\{a_n\}$

$$A_n = \sum_{k=0}^{p-2} a_k e^{-\frac{2\pi i k n}{p-1}}$$

y aplicamos lo obtenido para $\{c_n\}$ nos queda

$$|A_n|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0(mod\, p-1) \\ \\ p & \text{si } n \not\equiv 0(mod\, p-1) \end{cases}$$

Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ tiene un espectro de potencia plano. Este tipo de sucesiones han encontrado importantes aplicaciones en Física y a continuación discutimos una aplicación en Acústica. Es conocido que las salas de conciertos en las que las ondas de sonido viajan lateralmente tienen un sonido superior que aquellas en las que el sonido sólo llega de la dirección frontal, como es el caso de las salas modernas con techos bajos. La alternativa para estas salas es modificar el diseño de los techos de manera que el sonido que viene desde el escenario se redirija en todas las direcciones, excepto en dirección especular. Este efecto se consigue en una superficie dura con 'entrantes" de diferentes profundidades d_n. Por reflexión , la fase de una onda normalmente incidente cambia por $4 d_n \pi / \lambda$ donde λ es la longitud de onda. Si las profundidades cumplen $d_n = \frac{1}{2}\frac{\lambda g^n}{p}$ donde p es un número primo, g una raíz primitiva de p y g^n el menor residuo modulo p, entonces la onda reflejada tiene amplitudes complejas $e^{2\pi i g^n / p}$, justamente la sucesión de espectro de poder plano considerada anteriormente. Si la distribución espacial de las amplitudes de ondas a lo largo de superficies planas tiene espectro de potencia plano, entonces las intensidades de las ondas dispersadas en distintos órdenes de difracción serán iguales y con esto se mejora la acústica de las salas de concierto

5.2. La hipótesis de Riemann

A continuación presentamos, muy sucintamente algunas de las ideas fundamentales de la fórmulación de la hipótesis de Riemann.

Para gran parte de la comunidad matemática el mayor desafío actual es demostrar la hipótesis de Riemann, de la cual damos a continuación una breve descripción. Riemann, en 1859, en su histórica y única publicación sobre Teoría de Números, *Über der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [23], formula su conjetura, hoy llamada la hipótesis de Riemann, que permitiría explicar la distribución de los números primos. La parte central del referido articulo, es la llamada función zeta de Riemann, definida por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La función así definida es analítica en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ y Riemann probó que puede ser extendida a una función meromorfa en todo el plano complejo, con un polo de residuo 1 en s = 1. La extensión se obtiene a través de la ecuación funcional

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{s/2} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{1-s}{2}}$$

Riemann demuestra que con excepción de los ceros triviales: los pares negativos, los ceros de la función ζ están contenidos en la región $0 < Re(s) < 1$, que se distribuyen simétricamente en torno a la recta $Re(s) = 1/2$ y afirma que es muy probable que todo los ceros no triviales de ζ tengan parte real $1/2$. Hasta aquí, sólo Análisis complejo y nos preguntamos, ¿y la Teoría de Números? Veamos: Riemann considera $\pi(x)$ definida, para $x > 1$, como la cantidad de números primos menores o iguales que x y la función J, definida para $x \geq 1$, por

$$J(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\pi\left(\sqrt[n]{x}\right)$$

y prueba que

$$\pi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} J\left(\sqrt[n]{x}\right)$$

donde μ es la función de Möbius, definida por:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1. \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ es producto de } k \text{ primos distintos.} \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por un cuadrado.} \end{cases}$$

A partir de la relación establecida por Euler:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos, obtiene

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln(2) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln(t)}$$

donde la suma es sobre los ceros no triviales ρ de ζ y

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

De esta forma Riemann establece una relación entre la distribución de los números primos y los ceros no triviales de la función ζ en el plano complejo. Riemann reconoció la importancia de dar una prueba rigurosa a su conjetura, que hizo en vano ligeros esfuerzos por una prueba pero que dejó de lado pues no parecía relevante para el próximo objetivo de su investigación [23]. Si Riemann hubiese probado su hipótesis, hubiese hecho realidad el Teorema de los Números Primos :

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

El sueño de Gauß, su maestro [6].

5.3. La Hipótesis de Riemann y la Física

La importancia de dar una prueba o un contraejemplo a la Hipótesis de Riemann ha motivado a muchos matemáticos y no son pocos los que aseguran tener la solución pero actualmente se considera un problema abierto. Los intentos de demostración han generado sorprendentes conexiones con otras disciplinas, en particular la generada a partir de la conjetura de Hilbert-Pólya. Hilbert y Pólya de forma independiente, sugirieron que para demostrar la Hipótesis de Riemann bastaba mostrar que las partes imaginarias de los ceros no triviales de la función ζ son el espectro de un operador autoadjunto. Evidentemente, la construcción de un tal operador no parece inmediata, pero formula una propuesta que establece una conexión con la Mecánica cuántica[16]. Concretamente, el operador es de la forma $1/2 + iH$, donde H es el halmitoniano de una partícula que se mueve bajo la acción de un potencial V . La Hipótesis de Riemann es equivalente a cada una de las afirmaciones: H es hermitiano, V es real [21]. En marzo de 2017, Bender, Brady y Müller anunciaron la construcción de un operador hermitiano cuyo espectro, de darse ciertas condiciones, coincide con los ceros no triviales de la función zeta de Riemann [3]. Esto puede ser interpretado como un paso importante, no obstante no todo está dicho; falta probar que en efecto las supuestas condiciones se cumplen y que el operador es autoadjunto, además de considerar la polémica surgida en torno a los argumentos analíticos de este enfoque, [2, 4].

6. Conclusiones

La Teoría de Números es una de las disciplinas matemáticas más antiguas, que experimentó largos períodos de letargo. A partir de Fermat y gracias a los aportes de grandes matemáticos, la Teoría de Números es una de las áreas de mayor actividad. Por muchos años, era considerada el paradigma de la Matemática pura, ajena a cualquier relación con la cotidianeidad y los problemas reales. Durante los años setenta del Siglo XX se inicia un movimiento que muestra otra cara de la Teoría de Números. Los métodos modernos de la Criptografía y de la Teoría de Codificación, indispensable para las nuevas formas de comunicación e intercambio de información confidencial, se fundamentan en propiedades de los números naturales, y estas aplicaciones se extienden a otras áreas como Acústica, Biología, Química, Música entre otras. En particular es notable la relación existente entre la función ζ de Riemann y algunas áreas de la Física [25].

Referencias

[1] BACKHOUSE, R.,FERREIRA, J., *On Euclid's algorithm and elementary number theory*, Science of Computer Programming 76(3), pp. 160–180, march 2011.

[2] BELLISARD, V., *Comment on Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function* , arXiv: 1704.02644, april 2017.

[3] BENDER, C. M.,BRODY, D. C., MÜLLER, M. P., *Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function*, Physical Review Letters, 130201, march 2017.

[4] BENDER, C. M.,BRODY, D. C., MÜLLER, M. P., *Comment on "Comment on Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function"* , arXiv: 1705.06767, april 2017.

[5] COHN, H., *Some Applied Number Theory*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 4(3), pp. 152–167, september 1956.

[6] CUTRONE, J., *On Riemann's 1859 paper and its Consequences.*, Master thesis, New York University, september 2005.

[7] DIFFIE, W., HELLMAN, M., *New directions in cryptography*, IEEE Transactions on Information Theory 22(6), pp. 644–654, november 1976.

[8] GAUSS, C., *Disquisitiones Arithmeticae*, Traducción al español por Barrantes, H., et al. Academia colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1995.

[9] HARDY, G., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940.

[10] HELFGOTT, H.A., *The Ternary Goldbach Conjecture is True*, arXiv:1312.7748, january 2014.

[11] ING, L.H., *The History of the Chinese Remainder Theorem*, Mathematical Medley. 1(30): pp. 54–62. june 2002.

[12] JAMESON, G., *The Prime Number Theorem*, Cambridge University Press, London, 2003.

[13] KANGSHENG, S., *Historical Development of the Chinese Remainder Theorem*, Archiv for the History of Exact Science. 36(4), pp.285–305, september 1988.

[14] LAWTHER, H. Jr., *An application of Number Theory to the Splicing of Telephone Cables*, American Mathematical Monthly 42(2), pp. 81–91, april 1935.

[15] MCCLENON,, R., B., *Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum*, The American Mathematical Monthly. 6(1), pp. 1–8, january 1919.

[16] MANSFIELD, D., F., WILDBERGER, N., J., *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry*, Historia Mathematica, In press, august 2017.

[17] NARKIEWICZ, W., *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Verlag, Germany, 2000.

[18] ORE, O., *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, USA, 1948.

[19] , PLESTER, V.,HUYLEBROUCK, D., *The Ishango Artefact: the Missing Base 12 Link*, Forma, 14, pp. 339–346, december 1999.

[20] ROBSON, E., *Words and Pictures: New Light on Plimpton322*, American Mathematical Monthly, 109(2), pp. 105–120, february 2002.

[21] ROCKMORE, D., *Stalking the Riemann Hypothesis*, Pantheon Books, USA, 2005.

[22] SINGH, S., *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London, 1997.

[23] RIEMANN, B., *Über der Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grössen* , Monatsberichte der Berliner Akademie, november 1859.

[24] SCHROEDER, M., *Number Theory in Science and Communication*, Springer Verlag, Germany, 2009.

[25] SCHUMAYER , D., HUTCHINSON , D., *Physics of the Riemann Hypothesis*, Reviews of Modern Physics, 83, pp. 307—330, april 2011.

[26] VARADAJAN , V. S., *Euler Through Time: A New Look at Old Themes* , American Mathematical Society, USA, 2006.

[27] WILES , A., *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics Second 141(3), pp. 443-551, may 1995.

[28] ZHANG, Y., *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics Second 179(3), pp. 1121-1174, may 2014.

Sobre el autor:
Nombre: Jaime J. Gutiérrez G.
Correo electrónico: jaime.gutierrez@up.ac.pa
Institución: Universidad de Panamá.

Juegos y Rarezas Matemáticas

La función Beta, como suma de números combinatorios

The Beta function, as the sum of combinatorial numbers

Alfredo Olmos Hernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 067–070, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En este artículo, se busca estudiar la función Beta ($B_{(x,\ y)}$). Esta función está dentro de las funciones trascendentes y posee dos variables independientes. Se estudiará la función cuando estas variables son enteros positivos, y se obtendrá una expresión para la función como suma de números combinatorios.

Palabras Clave: Función Beta, Número combinatorio.

Abstract

In this article, we seek to study of the Beta function ($B_{(x,\ y)}$). This function is within the transcendental functions and has two independent variables. The function will be studied when these variables are positive integers, and an expression for the function will be obtained as a sum of combinatorial numbers.

Keywords: Beta function, combinatorial number.

1. Introducción

La función beta, se encuentra entre las funciones trascendentes, siendo esta su vital importancia, pues se encuentra relacionada con la función Gamma y las funciones Bessel, importantes para las ecuaciones diferenciales ordinarias y en análisis matemático.

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x>0, y>0)$$

Al ser la función Beta ($B_{(x,y)}$) una función multiforme, se dificulta considerablemente un uso práctico de tablas, para hallar valores de la misma.

Del mismo modo por la estructura que presenta su integral, para hallarla es necesario el realizar numerosas veces la integración por partes, resultando dificultoso para valores enteros de x y de y muy grandes.

Una posible solución para estos problemas, es el utilizar un método numérico, con el fin de darle solución a la integral, sin embargo el objetivo de esta investigación es el obtener un valor exacto, de la función, con el fin de poder describir exactamente su comportamiento, acción no posible mediante el uso de un método numérico.

El método presentado soslaya las dificultades de resolución de la integral de la función Beta, al dar una forma alternativa de dar la función como suma de números combinatorios, lo que es útil a efectos prácticos.

2. Desarrollo de la función Beta como suma de números combinatorios

Sea $B_{(x,\,y)}$ la función Beta, con x, y números enteros positivos.

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Desarrollando el binomio.

$$(1-t)^{y-1} = \sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} t^i$$

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1}\sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} t^i\,dt$$

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 \sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} t^{x+i-1}dt$$

$$B_{(x,y)} = \left|\sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{t^{x+i}}{x+i}\right|_0^1$$

$$B_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{1}{x+i} - \sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{0}{x+i}$$

$$B_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{1}{x+i}$$

$$B_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{y-1} \frac{(-1)^i}{x+i} \binom{y-1}{i}$$

Siendo esta última la expresión que permite el cálculo de la función Beta como suma de números combinatorios.

Ejemplo de cálculo. $B_{(3,5)}$. Por integración se tiene

$$B_{(3,5)} = \int_0^1 t^{3-1}(1-t)^{5-1}dt = \frac{1}{105}$$

Utilizando la expresión obtenida

$$B_{(3,5)} = \sum_{i=0}^{5-1} \frac{(-1)^i}{3+i} \binom{5-1}{i}$$

$$B_{(3,5)} = \sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{3+i} \binom{4}{i}$$

$$B_{(3,5)} = \frac{\binom{4}{0}}{3+0} - \frac{\binom{4}{1}}{3+1} + \frac{\binom{4}{2}}{3+2} - \frac{\binom{4}{3}}{3+3} + \frac{\binom{4}{4}}{3+4} = \frac{1}{3+0} - \frac{4}{3+1} + \frac{6}{3+2} - \frac{4}{3+3} + \frac{1}{3+4} = \frac{1}{105}$$

3. Conclusiones

En este artículo, se obtuvo una expresión que permite el cálculo de la función Beta, sin necesidad de la función Gama y sin integrar. Para ello se utilizó la sumatoria de números combinatorios.

Existe una expresión de la función Beta con variables naturales deducida a partir de las propiedades de la función Gama:

$$B_{(x,y)} = \frac{(x-1)!\cdot(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Lo que da la siguiente identidad para x, y naturales utilizando la expresión obtenida en este artículo:

$$\sum_{i=0}^{y-1} \frac{(-1)^i}{x+i} \binom{y-1}{i} = \frac{(x-1)!\cdot(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Esto es equivalente a:

$$\sum_{i=0}^{y-1} \frac{(-1)^i}{(x+i)\cdot i!\cdot (x+y-1)!} = \frac{(x-1)!\cdot (y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Referencias

[1] ANDREWS, George; ASKEY Richard; ROY Ranjan. *Funciones especiales,* Cambridge Univerity Press, Cambridge Inglaterra, 1999.

[2] ABRAMOWITZ, Milton y STEGUN, Irene. *Manual de Funciones Matemáticas con Fórmulas, Gráficos y Tablas Matemáticas,* pp. 258 y 263, Dover, Nueva York, 1972.

[3] WEISSTEIN, Eric Wolfram Math World. *Función Beta, http://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html*

Sobre el autor:
Nombre: Alfredo Olmos Hernández
Correo Electrónico: alfredooh16@gmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, México.

Juegos y Rarezas Matemáticas

Un cuadrado, cuatro números

One square, four numbers

Carlos D'Andrea y Adrián Paenza

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 071–082, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Mar'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

Presentamos una curiosidad aritmética muy sencilla de enunciar y fácil de experimentar, cuya resolución involucra herramientas matemáticas elementales "y de las otras". Exploramos varias preguntas asociadas a este enunciado, y dejamos varias más planteadas para ejercicio del lector.

Palabras Clave: Juego, estrategias, principio del mínimo, iteraciones, sucesión de Tribonacci, números de Ducci.

Abstract

We present a curiosity from the field of the Arithmetic. It is easy to state and to check it, but its resolution involves elementary and no so elementary mathematical tools. We explore some questions addressed to this statement and leave other questions as an exercise for the reader.

Keywords: Game, strategies, principle of the minimum, iterations, Tribonacci sequence, Ducci numbers.

1. Introducción

Imagínese en un lugar en donde no le queda más alternativa que sentarse y esperar: en una estación de tren o de autobús, en un aeropuerto, o incluso adentro de un avión o del propio tren. O quizás en la sala de espera de un dentista o de un médico. Usted está entre aburrida/aburrido y tranquila/tranquilo. Tiene un lápiz y un papel y quisiera encontrar algo que la/lo entretenga, algo que le ayude a que "el tiempo pase más rápido".

Entonces se encuentra con un problema como el que sigue, y sin ofrecer demasiada resistencia, se propone a seguir las instrucciones. En definitiva, ¿qué se puede perder? Tiempo es lo que me/le sobra. Hagámoslo juntos.

- "Tome un cuadrado". Lo tomo.
- "Ponga un número cualquiera en cada vértice". Lo pongo.
- "Concéntrese en un lado cualquiera del cuadrado. Ahora hay solamente dos vértices involucrados. Cada uno tiene un número asociado. Reste el número más pequeño del más grande y anote el resultado en el punto medio de ese lado (si son iguales, anotará un 0)."
- "Repita este proceso con los 4 lados del cuadrado". Me lleva un poco de tiempo (poco), pero me sale fácil (es que había elegido números pequeños).
- "Ahora usted tiene otros 4 números que están ubicados en los puntos que marcan la mitad de cada uno de los lados del cuadrado original. Con estos 4 puntos, uno puede imaginar un nuevo cuadrado incluido en el cuadrado original."
- "Repita ahora el proceso con los 4 nuevos números". Lo hago. Como no sabía que tendría que escribir tantos números y trazar tantos segmentos, tuve que empezar de nuevo. Elegí ahora un cuadrado más grande. No me importó demasiado porque tenía (y aún tengo) mucho tiempo por delante.... ¿Y ahora, qué?
- "Siga con el proceso que en cada paso le sirve para obtener un nuevo cuadrado y 4 nuevos números. ¿Alcanza a ver algún patrón? ¿Algo que le llame la atención?".

Sí, acabo de 'descubrir algo'. Voy a empezar de nuevo, con otro cuadrado y otros 4 números porque lo que apareció me parece muy raro.

Después de intentar con varios cuadrados, aunque esencialmente lo que resulta obvio es que no son los cuadrados sino los números con los que etiqueté cada vértice, empiezo a sospechar que hay algo que me sorprende. ¿Será verdad? ¿No habrá dependido fuertemente de los números que elegí? Y sí… depende... dependió seguro, pero... me asaltan muchísimas preguntas. El tiempo empezó a pasar más rápido pero ni siquiera me di cuenta. No sé si tengo suficiente papel y no tengo claro si quiero que esto me distraiga demasiado de la actividad por la que estoy aquí (avión, tren, autobús, dentista, doctor, oculista... lo que sea)... pero ahora no quiero interrumpir. Esto que acabo de ver me tiene perplejo: ¡no puede ser cierto siempre! ¿O sí?

Lo fascinante de este problema es que se presenta con total ingenuidad. Lo más probable es que uno no le preste demasiada atención. Sin embargo, 'pica'... o 'muerde'... y después, 'no suelta'. Hay muchísimas preguntas asociadas; nosotros enumeraremos algunas. Pero si hay algo que podemos proponerle (a usted... sí, a usted) es que más allá de lo que nosotros escribamos más abajo, el verdadero placer está en descubrir los miles de caminos que se presentan delante suyo en soledad. Podemos asegurarle que hay varias conclusiones que uno estaría dispuesto a apostar dinero que son ciertas y que no lo son, y quizás otras, que parecen imposibles, pasan. Pero, ¿qué gracia tiene si se las contamos nosotros?

En todo caso, le proponemos un trato: el artículo que sigue contesta algunas preguntas... solo algunas. Lo que <u>no</u> podemos hacer, es contestar las suyas. Y el trato consiste en que nos tenga confianza y nos crea: solamente recurra a leer lo que escribimos nosotros si llega a un punto en donde siente que está 'metida (o metido) en el barro y no puede salir', o si quiere comparar cómo resolvimos nosotros algo que quizás usted resolvió probablemente mucho más fácilmente. Y una última observación: escribir lo que sigue, nos llevó muchísimo tiempo, pero no por el tiempo de escritura propiamente dicho, sino por el tiempo que tuvimos que invertir para pensar cómo resolver el problema. Y ese placer solamente se lo puede proveer uno mismo. No se lo pierda...

2. Una solución (para números enteros)

Supongamos que usted razonablemente decidió que su universo de *números disponibles* para este *juego* son los números enteros {...,-2, -1, 0, 1, 2, 3,...}. Una primera observación es que aunque hayamos comenzado con uno o algunos números negativos en los vértices del cuadrado, todos los otros números que aparezcan después en el juego serán positivos o cero, así que bien podríamos suponer que estamos "jugando" siempre con enteros no negativos, lo cual es una gran ventaja ya que este conjunto es el lugar natural donde el principio del mínimo (o su equivalente, el principio de inducción) puede ser utilizado para "acabar" con ciertos procesos en un número finito de pasos. Vamos a ver cómo -aplicando este principio con cierto cuidado- podremos encontrar una respuesta.

Pero para resolver un problema, primero necesitamos un *enunciado*, y el que proponemos (y esperamos que usted haya llegado a la misma conclusión o a alguna equivalente a ella) es el siguiente: "*sin importar cuáles fueron los 4 números iniciales que pusimos en los vértices del primer cuadrado, en una cantidad finita de pasos, conseguiremos un cuadrado que tendrá 4 ceros en sus vértices.*" Y a partir de allí, claro, el juego se habrá acabado porque habremos llegado a una situación estable, todos los cuadrados que le sigan tendrán 4 ceros en sus vértices.

Una manera de utilizar el principio del mínimo para resolver este problema podría ser la siguiente: dado que los números iniciales que hay en los vértices del cuadrado -que de aquí en adelante llamaremos **a**, **b**, **c** y **d**- son todos enteros no negativos, decir que son todos iguales a cero es lo mismo que decir que el máximo entre ellos es igual a cero,

$$\max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}=0.$$

Hecha esta observación, llamemos **a'**, **b'**, **c'** y **d'** a los nuevos números que aparecen -en algún orden- en el cuadrado formado por los puntos medios de los lados del que tenía **a**, **b**, **c** y **d** en los vértices. Si uno pudiera demostrar lo siguiente:

$$\max\{\mathbf{a'}, \mathbf{b'}, \mathbf{c'}, \mathbf{d'}\} < \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \qquad (*)$$

(siempre y cuando el número de la derecha sea estrictamente positivo), entonces el problema estaría resuelto, e incluso sabríamos que a lo sumo en max{**a**, **b**, **c**, **d**} pasos habríamos llegado a tener (0, 0, 0, 0).

Calculando explícitamente **a'**, **b'**, **c'** y **d'** en función de **a**, **b**, **c** y **d** (ver figura 1) se deduce fácilmente que

$$\max\{\mathbf{a'}, \mathbf{b'}, \mathbf{c'}, \mathbf{d'}\}\leq \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}.$$

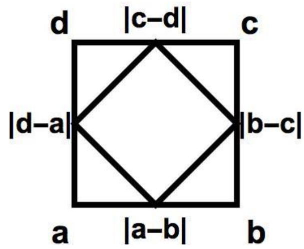


*Figura 1. Cálculo de **a'**, **b'**, **c'** y **d'**.*

Pero es muy fácil construirse una situación donde no hay una desigualdad estricta, por ejemplo la siguiente (figura 2):

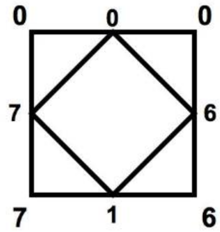


Figura 2. Ejemplo en el que no se da la desigualdad estricta.

O sea que nuestra "pista inicial" no va a ser tan fácil de seguir a menos que tengamos un cierto cuidado en el análisis de los casos que hacen que la desigualdad se convierta en igualdad. Y esto es lo que haremos. Lo invitamos a pensar primero cuáles son esos casos, y cómo se podrían resolver. Lo que sigue es nuestro camino, pero seguro que hay otros más elegantes, simples e interesantes que el nuestro. Por eso le sugerimos que no se pierda la oportunidad de conocerlos intentándolos usted en soledad antes de continuar leyendo esta nota.

Y aquí vamos nosotros. Comencemos por el caso "genérico", el que aparecerá con más frecuencia por ejemplo si uno elige sus números enteros al azar, que es cuando **a**, **b**, **c** y **d** son todos distintos de cero. Aquí sí que la desigualdad será estricta, como le será fácil de demostrar viendo cómo se escriben los números **a'**, **b'**, **c'** y **d'** que aparecen en la figura 1. Así que en esta situación no hay nada que nos complique la vida, la desigualdad deseada (*) se cumple y el máximo "baja".

El problema se nos presenta cuando nos aparece algún cero entre los vértices.

¿Cómo se "sale de allí"? Analicemos los posibles casos:

<u>3 ceros</u>: en esta situación, como se ve en la figura 3, es fácil verificar que 4 cuadrados más adelante habremos llegado a tener ceros en todos los vértices. Con lo cual, no solamente conseguimos "bajar" el máximo (que es **a** en este caso) sino que en realidad... ¡el juego se acaba 4 pasos más adelante! Esto es una gran ventaja.

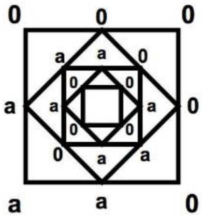


Figura 3. Caso de tres ceros.

2 ceros: aquí se ha de distinguir si los ceros son "consecutivos" o no. En el caso en que no lo sean, la situación es fácil de resolver ya que como se ve en la figura 4, el cuadrado siguiente tendrá en sus vértices 4 números estrictamente positivos, así que en un paso más habrá "bajado" el máximo como vimos en el caso "genérico" tratado más arriba.

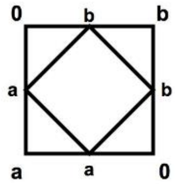


Figura 4. Caso de dos ceros no consecutivos.

Si los ceros son consecutivos, el siguiente cuadrado será así (figura 5):

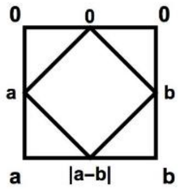


Figura 5. Caso de dos ceros consecutivos.

Si **a**=**b**, estaremos en la misma situación que el caso anterior -dos ceros no consecutivos- con lo cual el máximo bajará dos cuadrados más adelante.

Si **a**≠**b**, un cuadrado más adelante nos encontraremos con lo siguiente (figura 6):

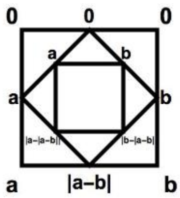


*Figura 6. Caso de dos ceros consecutivos con **a**≠**b**.*

Observe que como estamos asumiendo **a**≠**b**, todos los números en los vértices del cuadrado más pequeño serán ahora distintos de cero excepto en los casos en que 2**a**=**b** o 2**b**=**a**. Si no estamos en esta situación singular (es decir, si todos los vértices del tercer cuadrado son estrictamente positivos), en el próximo cuadrado conseguiremos bajar el máximo.

Si ocurriera que 2**a**=**b** (el otro caso se resuelve de manera análoga), entonces en 4 pasos más habremos acabado el juego, como se ve en la figura 7

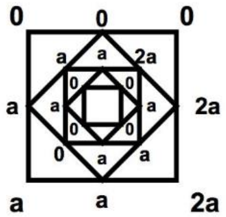


*Figura 7. Caso de dos ceros consecutivos con 2**a**≠**b**.*

O sea que estos dos casos singulares también están cubiertos, y con ello hemos mostrado que en la situación en la que hay dos ceros entre los vértices del cuadrado, siempre en un número finito de pasos (menor que 5) se consigue bajar el máximo.

<u>1 cero:</u> en este caso, el siguiente cuadrado será (figura 8)

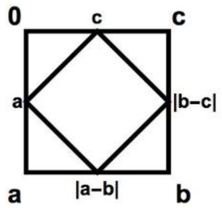


Figura 8. Caso de un cero.

Si **a**≠**b** y **b**≠**c**, el cuadrado más pequeño tendrá 4 números estrictamente positivos, y tal como razonamos al principio de esta sección, en el próximo paso conseguiremos bajar el máximo de estos números. Por otro lado, si **a**=**b**=**c**, obtendremos un cuadrado con dos ceros consecutivos, que ya hemos estudiado antes, y el análisis hecho para ese caso nos dice ahora que 4 cuadrados más adelante a partir del segundo, habremos conseguido bajar el máximo.

Solamente resta analizar qué pasa si **a**=**b**≠**c** (que tiene el mismo análisis que **c**=**b**≠**a**), o **a**=**c**≠**b**. En el primer caso, se tiene este esquema (figura 9):

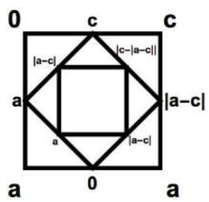


*Figura 9. Caso de un cero con **a**=**b**≠**c**.*

Como antes, si 2**c**≠**a**, los 4 números del cuadrado más pequeño en la figura serán todos positivos, y por lo tanto en el cuarto cuadrado el máximo bajará.

El caso 2**c**=**a** nos dice que 4 cuadrados más adelante habremos conseguido bajar el máximo (y en el quinto paso acabaremos), ya que se tendrá (figura 10):

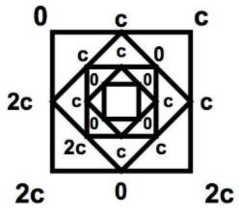


*Figura 10. Caso de un cero con **a**=**b**=2**c**.*

Finalmente, para **a=c≠b** no estando las dos **a'**s en el mismo lado, se tiene el siguiente diagrama (figura 11):

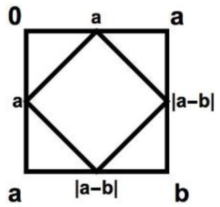


*Figura 11. Caso de un cero con **a**=**c**≠**b**, las **a**'s no comparten lado.*

y aquí se ve fácilmente que el segundo cuadrado tiene sus 4 vértices positivos, así que en un paso más su máximo bajará.

Después de este largo y minucioso análisis podemos concluir con el siguiente

<u>*Teorema*</u>: Comenzando con 4 números enteros no negativos **a**, **b**, **c**, **d** en los vértices del cuadrado, si no son todos iguales a cero, denotando con **a'**, **b'**, **c'**, **d'** los números que aparecerán en los vértices del cuadrado (en algún orden) que se encuentra 5 veces más adelante en el juego, se tendrá

$$\max\{\mathbf{a'}, \mathbf{b'}, \mathbf{c'}, \mathbf{d'}\} < \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}.$$

<u>*Corolario:*</u> Comenzando con cualquier cuaterna de números enteros no negativos (**a**, **b**, **c**, **d**) sobre los vértices de un cuadrado, iterando 5 veces usando las normas del juego, obtendremos la situación estable (0, 0, 0, 0).

3. ¿Solamente números enteros?

El argumento de la sección 2 se puede adaptar bien a números racionales, ya que multiplicando por el denominador común de **a**, **b**, **c** y **d** uno podría llevar los números de los vértices del cuadrado inicial a ser todos enteros, y se llegará a (0, 0, 0, 0) en la misma cantidad de pasos que con los números racionales del principio. Esto no es más que una manifestación de la "homogeneidad" del juego, ya que se ve fácilmente que si uno multiplica todos los números del cuadrado inicial por un escalar cualquiera (real o complejo), los números que aparecen en todos los cuadrados que siguen se multiplican por el valor absoluto de este escalar. Y si este escalar es no nulo, la situación estable (0, 0, 0, 0) aparece al mismo tiempo en el juego original que en el "re-escalado".

Yendo más en general aún, se nos ocurren varias preguntas asociadas a este juego, y seguramente a usted se le ocurrirán varias más. He aquí algunas de ellas:

- ¿Será verdad que el juego "se acaba siempre" si comenzamos con números reales o complejos cualesquiera?
- Si es así, ¿en cuántos pasos acabaremos?
- ¿Hay un número **N**>0 para el cual sea cierto lo siguiente: "con cualquier dato inicial (**a**,**b**,**c**,**d**), luego de **N** pasos estaremos en (0, 0, 0, 0)"?
- Si lo anterior no es cierto.... ¿podría usted dado un **N**>0 cualquiera, construirse un dato inicial ($\mathbf{a}_N$, $\mathbf{b}_N$, $\mathbf{c}_N$, $\mathbf{d}_N$) tal que luego de **N** pasos todavía no hayamos llegado al (0, 0, 0, 0) comenzando con estos valores?

Con la ayuda de alguna calculadora o programa de cálculo simbólico, pruebe usted utilizando sus números irracionales favoritos ($\sqrt{2}$, e, π,...) y saque sus propias conclusiones. Nosotros en lo que sigue le vamos a dar unas pistas más, pero por favor no se prive usted de experimentar antes.

4. Números de Tribonacci

Aquí volvemos con más, y fíjese la aparición inesperada de esta sucesión de la cual quizás nunca haya oído hablar en su vida: definimos $\{\mathbf{t}_n\}_{n\geq 0}$ como sigue:

$\mathbf{t}_0=0$, $\mathbf{t}_1=1$, $\mathbf{t}_2=1$ y $\mathbf{t}_n=\mathbf{t}_{n-1}+\mathbf{t}_{n-2}+\mathbf{t}_{n-3}$ para $n\geq 3$.

Por motivos que esperamos no le resulten extraños, esta secuencia se llama "de Tribonacci", y sorprendentemente cumple con esta propiedad que no le será difícil de demostrar usando inducción (ver [Web1982]):

"Comenzando el juego planteado con (**a**, **b**, **c**, **d**)=($\mathbf{t}_n,\mathbf{t}_{n-1},\mathbf{t}_{n-2},\mathbf{t}_{n-3}$) para $n\geq 3$, se llega al (0,0,0,0) después de 3[n/2] pasos".

¿Sorprendente, verdad? Igual usted todavía puede dudar sobre la "finitud" del juego. Esto es, el enunciado que acabamos de mostrarle no contradice el hecho de que, comience donde comience, en un número finito de pasos (ahora ya sabemos que puede ser un número tan grande como a uno se le pueda ocurrir) el juego se acabará. De hecho, todos los números de Tribonacci son enteros así que el teorema que enunciamos más arriba ya nos garantizaba que en algún momento íbamos a llegar al (0, 0, 0, 0). ¿Ocurrirá esto también si comenzamos con cualquier cuaterna (**a**, **b**, **c**, **d**) de números reales? De momento ya sabemos que hay un conjunto denso de $\mathbf{R}^4$ (el de las cuaternas racionales) donde sabemos que el problema se resuelve en un número finito de pasos. ¿Será verdad esta propiedad para todo $\mathbf{R}^4$?

Con un poco más de esfuerzo se puede demostrar que lamentablemente (o afortunadamente dependiendo de cuál haya sido su conjetura) esto último no es cierto. De hecho, gracias a la homogeneidad del problema comentada más arriba, y "pasando al límite" del cociente $\mathbf{t}_n/\mathbf{t}_{n-1}$ (con el mismo proceso con el cual uno demuestra que el límite del cociente de 2 términos consecutivos en la sucesión de Fibonacci es el número de oro $(1+\sqrt{5})/2$), se obtendrá la única raíz positiva del polinomio x3-x2-x-1. Llamemos a esa raíz **q**≈1,839286755...

Lo siguiente tampoco le será difícil de demostrar, utilizando las propiedades algebraicas del número q o las propiedades de la sucesión de Tribonacci que "pasan al límite" (ver [Lotan 1949]):

Teorema: comenzando con (**a**, **b**, **c**, **d**)=(1, **q**, **q²**, **q³**), sucesivamente todos los cuadrados del juego tendrán entre sus vértices un múltiplo no nulo de (1, **q**, **q²**, **q³**).

Corolario: existe un "dato inicial" (**a**, **b**, **c**, **d**) para el cual el juego no se acaba nunca.

5. ¿Solamente cuadrados?

Esta sección nos la sugirió Leandro Cagliero, de la Universidad de Córdoba (Argentina). Uno podría pensar en una "simplificación" del problema y reemplazar el cuadrado por un triángulo equilátero. O, si se quiere ser audaz, puede plantearse la misma situación sobre pentágonos, hexágonos,... un polígono regular de L lados, y preguntarse por la evolución del juego... Por ejemplo, podemos preguntarnos si acabaremos siempre en una situación estable al comenzar con números enteros. Y si es así, si será el vector nulo de $\mathbf{R}^L$ esta solución estacionaria.

Jugando un poco con el triángulo equilátero ya nos encontramos con una situación inesperada: si comenzamos poniendo (1,1,0) en los vértices, el juego será "cíclico" de la manera siguiente: (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0),... (figura 12)

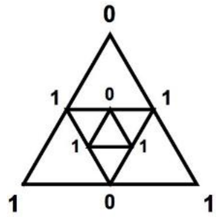


Figura 12. El juego puede ser cíclico en el triángulo.

Lo invitamos a encontrar ciclos de este tipo en pentágonos, hexágonos y heptágonos. Otro experimento que puede hacer es el siguiente: pruebe poniendo 3 números de Fibonacci consecutivos en los vértices del triángulo, y fíjese cómo evoluciona el juego... ¿No le parece sorprendente? ¿Se le ocurre cómo se debería generalizar esto para pentágonos, hexágonos, etc?

Otras preguntas que se podría plantear son las siguientes: ¿para qué valores de L se tiene que el juego se acaba siempre en (0, 0, 0, 0) comenzando con cualquier L-upla de números enteros o racionales? ¿Y qué pasa en general, con una L-upla de números reales cualesquiera? Si uno comienza con un dato inicial cualquiera, ¿converge siempre el juego a un ciclo o a una solución estable?

6. Los 4 números de Ducci

Este problema cayó en nuestras manos de la mano de Emiliano Gómez, de la Universidad de California en Berkeley. Emiliano se encontró en una feria de profesores de matemática en California con esta camiseta (figura 13):

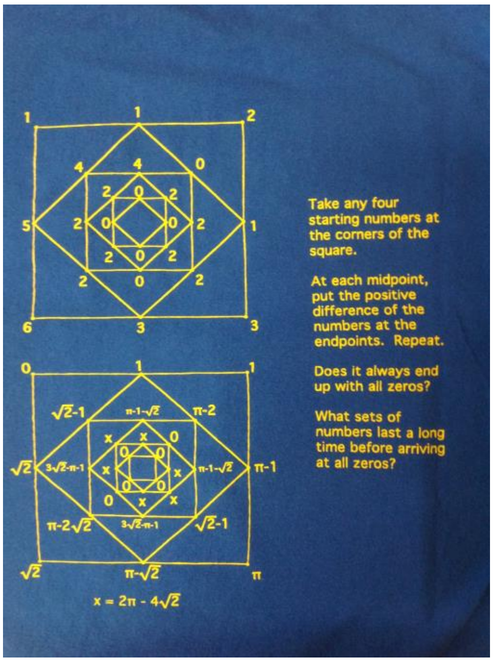


Figura 13. El problema de encontrar el conjunto de números que maximizan el tiempo de convergencia.

Por un buen tiempo pensamos que tenía que haber una solución "simple y elemental" al problema (¿por qué si no alguien la propondría en una camiseta?), y nos lanzamos a la búsqueda de ella. En el camino nos acompañaron el mismo Emiliano, Florian Enescu de Georgia State University, y José Ignacio Burgos del ICMAT de Madrid. Todo un lujo de equipo... Fue una gran sorpresa habernos encontrado con que el planteo y la resolución del problema involucraban herramientas elementales de álgebra lineal como valores y vectores propios, números de Tribonacci y soluciones que no son estables. Averiguando más sobre el tema, nos enteramos que éste es uno de esos problemas que tiene "nombre y apellido": *el problema de los 4 números de Ducci*. La resolución total del mismo, así como respuestas y experimentos a varias de las preguntas que le hemos propuesto durante este escrito y otras que seguramente usted se habrá hecho, las encontrará en cualquiera de las referencias que siguen, y seguro que hay mucho más escrito sobre el tema "en el aire". ¡A disfrutar!

7. Agradecimientos

Una primera versión de este manuscrito fue enriquecida con muy valiosos comentarios y correcciones hechas por Leandro Cagliero de la Universidad de Córdoba (Argentina), Teresa Cortadellas de la Universitat de Barcelona, Alicia Dickenstein de la Universidad de Buenos Aires, Emiliano Gomez de la Universidad de California en Berkeley, Juan Carlos Naranjo de la Universitat de Barcelona y Juan Pablo Pinasco de la Universidad de Buenos Aires. A todos ellos, nuestra infinita gratitud.

Referencias

[1] BEHN, Antonio, KRIBS-ZELTA, Christopher, PONOMARENKO, Vadim. *The Convergence of Difference Boxes*, pp. 426-439, The American Mathematical Monthly, Vol. 112, 5, USA, 2005.

[2] BERLEKAMP, Elwyn R. *The Design of Slowly Shrinking Labelled Squares*, Mathematics of Computation, Vol. 29, 129, 1975.

[3] BROWN, Ron, MERZEL, Jonathan L. *The Length of Ducci's Four-Number Game*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 37, 1, USA, 2007.

[4] CHAMBERLAND, Marc. *Single Digits: In Praise of Small Numbers*, Princeton University Press, USA, 2015.

[5] LOTAN, Moshe. *A Problem in Difference Sets*, pp. 535-541, The American Mathematical monthly, Vol. 56, 8, USA, 1949.

[6] MEYERS, Leroy F. *Ducci's Four-Number Problem: A Short Bibliography*, pp. 262-266, Crux Mathematicorum, Vol. 8, 9, 1982.

[7] SHAPIRO, Daniel. *The Four-Number Game*, Disponible en línea:

https://people.math.osu.edu/shapiro.6/4NumbersGame.pdf

[8] WEBB, William A. *The Length of the Four-Number Game*, pp. 33-35, Fibonacci Quart., Vol. 20, USA, 1982.

Sobre los autores:

Nombre: Carlos D'Andrea
Correo Electrónico: cdandrea@ub.edu
Institución: Universitat de Barcelona, España.

Nombre: Adrián Paenza
Correo Electrónico: paenza@elosoproducciones.com.ar
Institución: Página/12, Argentina.

Cuentos Matemáticos

73

Tatiana Cociu

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 083–086, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Mar'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En este número se continúa con la publicación de los relatos premiados en el Primer Concurso de Relatos Cortos Matemáticos "π-ensa" convocado por el Aula Taller Museo de las Matemáticas "π-ensa" durante el curso 2015-2016. Este cuento resultó premiado con una mención especial del jurado en la categoría de estudiantes de bachillerato y universidad. Toda la información del concurso puede consultarse en la web del Aula: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/.

Palabras Clave: Cuentos con contenido matemático.

Abstract

This issue continues with the publication of the awarded tales in the First Mathematical Short Tales Contest "π-ensa" organized by the Mathematics Museum Workshop Classroom "π-ensa" during the 2015-2016 course. This tale awarded a special jury award in the high school and college student category. All information on the contest is available on the website of the Classroom: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/.

Keywords: Tales with mathematical content.

Verónica era la persona más rara que había conocido en mi vida.

No era ni alta ni baja, ni rubia ni morena, ni lista ni tonta, ni guapa ni fea; simplemente, del montón. O eso creía yo.

El primer día que la vi me resultó curiosa. Con esos ojos verdes tirando a marrón claro y ese pelo anaranjado con reflejos de un color que no tiene nombre en mi opinión. Llevaba gafas. De pasta. Y un collar. Ponía 73 en las letras más feas que había visto nunca.

Creo que el 73 era su número. Y lo descubrí (bueno, me di cuenta) desde el primer momento: todas y absolutamente todas sus cosas tenían ese número escrito, ya fuera por ella o por alguien más. Incluida la ropa, holgada a veces y otras que la hacía parecer un chorizo embutido.

Me acerqué a ella ese mismo primer día de curso. Estábamos ya en Bachillerato. Era la nueva de la clase que mezclaba letras con ciencias. La nueva de mi clase. En verdad, me acerqué a ella el primer día porque me veía obligado a sentarme con ella, ya que el tutor así me lo dijo. Estuvimos, al contrario que los demás compañeros, en silencio absoluto durantelas seis asignaturas. En el recreo y a la salida se fue sola.

Al día siguiente fue exactamente igual. Pero me fijé en que llevaba una camiseta negra con el número 73 estampado en ella. Qué número tan feo.

Así pasaron los días. Dos trimestres exactos. Sin hablar nada durante las clases (de hecho, creo que escuché su voz no más de diez veces durante el primer y el segundo trimestre, cuando el profesor de turno la hacía hablar). Ni nos mirábamos siquiera. No hablaba con nadie. Nunca.

El primer día del tercer trimestre, el trece de marzo, martes, era su cumpleaños. Lo supe porque el tutor la felicitó. Nadie más lo hizo. ¿Quién iba a felicitarla si no hablaba con la gente?

Ese día decidí hablarla. Demasiada curiosidad como para contener las preguntas un curso entero.

En el recreo dije a mis amigos que iba a estar en la biblioteca porque tenía que hacer los deberes. No me creyeron, pero ni se molestaron en averiguar lo que iba a hacer.

En verdad sí que iba a la biblioteca. Por ella.

Subí las escaleras y abrí la puerta inmediatamente después de que el niño de segundo se fuera al patio.

Supongo que en este instituto nadie estudia en los recreos, o al menos en la biblioteca, porque estaba sola. En las mesas más alejadas de la puerta. Leyendo un libro que se veía grueso desde donde yo estaba. No levantó la vista para mirar a quien entraba.

Me acerqué a su mesa lentamente creyendo que me miraría, pero no lo hizo.

Me senté al lado. Mirándola fijamente. Nada.

- Oye. – dije. Giró la cabeza, impasible. – Verónica, ¿verdad?
- Un poco. – contestó. "Vaya, qué simpática." Pensé, sarcásticamente.
- ¿Qué lees?

Levantó la tapa del libro y me la enseñó. El Conde de Montecristo. Vaya.

- Es largo.
- Un poco. – repitió la afirmación.
- ¿Te está gustando? – intenté sacar conversación.
- Un poco. – y ya iban tres veces. Mi paciencia se estaba agotando.
- ¿Sabes decir otra cosa además de eso?
- Unas pocas. – por lo menos había cambiado de género y número.
- ¿Qué coño te pasa en la cabeza? – mi intento de ser amable había terminado.

Giró la cabeza y me miró.

Ya me caía mal.

Al día siguiente volví. Así continuamente hasta que pasó todo el trimestre.

La chica que no hablaba con nadie habló conmigo. Todo el tercer trimestre. Al final descubrí que era simpática. A medida que pasaba el tiempo era más abierta. Pero costaba.Y mucho.

Me empezó a gustar. Su manera extraña de pensar. Todo lo que decía me parecía curioso. Y me di cuenta de que "Un poco" era como su muletilla personal. "Personal e intransferible" me dijo ella. Ni personal ni intransferible. La empecé a usar yo poco a poco, como siempre pasa.

Un día de biblioteca salió el tema de si éramos amigos (bueno, en verdad lo saqué yo a posta). Se puso nerviosa. Empezó a temblar. No me contestó. Cambió de tema. Fue el primer y último día que se fue a su casa, creo, después del recreo.

Poco a poco fuimos contándonos cosas.

Ella vivía con su abuelo, como Heidi, pero en la ciudad. Se fue de su casa a los doce años porque no le gustaba que hubiera peleas continuas y que la tomaran todas con ella. Su color favorito era el negro, aunque eso no lo dudé en ningún momento. Sus ojos no eran ni verdes ni marrones claritos, eran azules oscuros, pero a una luz determinada parecían verdes. Tenía un diario aunque no escribía nada nunca. Quería ser arquitecta, pero de hospitales.

No le pregunté sobre el número 73 hasta el viernes de la penúltima semana de clases.

Subí a la biblioteca y estaba ahí, como siempre. Leyendo otro libro gordo.

Me acerqué y le hablé. Contento.

- Oye, tengo una duda.
- Dime.
- 73. – dije. Levantó la mirada y la dirigió hacia mí, como siempre hacía cuando un tema le parecía interesante.
- ¿Sí…? – preguntó, sorprendida.
- ¿Por qué en todas las carpetas? – por fin lo decía. Siempre se me olvidaba preguntarla.
- Es el número perfecto, en mi opinión.
- No lo entiendo, señora matemática. – le sonreí.
- El número 73 es el vigesimoprimer número primo. – soltó.
- Ajá.
- Y si lo lees del revés, 37, es el decimosegundo número primo, que si te das cuenta es la lectura al revés de 21.
- Es verdad.
- Si lees 12 al revés de nuevo, da 21: resultado de multiplicar siete por tres.
- No lo veo especial. – dije.
- Yo sí.

- Vale, sigue. – contesté, alucinado.
- Siete al cubo es 343, un número capicúa; se lee igual del derecho que del revés.
- ¿Hay más?
- Por supuesto. – rió. – 73 en sistema binario en 1001001, lo que es un palíndromo y a la vez capicúa. Y por último, en sistema octal, 73 es 111; palíndromo de nuevo.
- Vaya. Nunca lo había pensado.
- Te preguntarás por qué lo pongo en todos lados.
- Desde que te vi por primera vez.
- Bien pues. Estamos continuamente diciendo que la perfección no existe, nada ni nadie es perfecto, ni siquiera el círculo, en opinión de algunos. Pero no podrás negarme que tantas coincidencias, que en verdad no lo son, no sean maravillosas ni símbolo de la perfección, ¿verdad? – levantó una ceja.
- Totalmente cierto.

Volvió a posar su mirada en el libro.

Yo me quedé pensado.

- Y además, sus cifras suman diez. – dije de repente.

Levantó la vista, me miró y sonrió.

Y además, sus cifras suman diez.

Sobre la autora:
Nombre: Tatiana Cociu
Correo Electrónico: tatianacociu@yahoo.es
Institución: IES Mariano José de Larra, Madrid, España.

Críticas y Reseñas

Nuestra experiencia en el programa “4ºESO+EMPRESA”

Our experience in the activity “4ºESO+EMPRESA”

Silvia Cano, Daniel Chavero y Daniel Martínez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 087–090, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep’17; Aceptación: 1 Feb’18

1 de abril de 2018

Resumen

Este artículo presenta una reseña sobre la experiencia de tres alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en el programa 4ºESO+EMPRESA de la Comunidad de Madrid.

Palabras Clave: Programa 4ºESO+EMPRESA.

Abstract

The paper presents a report about the experience of three students in the 4ºESO+EMPRESA project, for High School students.

Keywords: 4ºESO+EMPRESA project.

1. El programa 4ºESO+EMPRESA

La Dirección General de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, en colaboración con las cinco Direcciones de Área Territorial, han puesto en marcha el programa 4º ESO+Empresa. Este programa, considerado como una actividad extraescolar, se desarrolla de forma voluntaria en los centros educativos de enseñanza secundaria, con la finalidad de conectar el sistema educativo y el mundo laboral. Se trata de facilitar mediante estancias educativas en empresas e instituciones que los jóvenes estén mejor preparados para tomar decisiones sobre su futuro académico y profesional, motivándoles y dotándoles de las destrezas necesarias.

Se realiza por estudiantes del cuarto curso de enseñanza secundaria y consiste en estancias educativas que se centran básicamente en la visita, durante unos días, a las instalaciones de una empresa, centro u organismo para observar cómo se desarrolla la actividad y pudiendo incluir a los estudiantes en el desarrollo de tareas o funciones.

Para el desarrollo de este programa, la Comunidad de Madrid cuenta con la ayuda de empresas de la Comunidad, así como de instituciones educativas.

En este artículo queremos contar nuestra experiencia en el programa. Nosotros, por nuestro gusto por las matemáticas, decidimos realizar la estancia en el Aula Taller Museo de las Matemáticas π-ensa situado en la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid. Allí pudimos colaborar en las actividades que desarrollan, concretamente en las dirigidas a los centros educativos.

2. Nuestra experiencia

2.1. La experiencia de Daniel Martínez y Daniel Chavero

¿Te interesan las matemáticas?, a nosotros sí. Somos estudiantes en el Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) Gabriel Cisneros de Madrid, que durante el año que cursamos 4º de ESO pudimos disfrutar de unos días de prácticas en el Aula Taller Museo de las Matemáticas π-ensa de la Universidad Politécnica de Madrid. Para los que no hayáis podido disfrutar de esta experiencia, el programa 4ºESO+EMPRESA consiste en abandonar la rutina escolar durante una semana para poder formarte en un entorno profesional. En nuestro caso decidimos dirigirnos a nuestra profesora de matemáticas para que nos ayudase a encontrar algún empleo relacionado con su asignatura, y entonces comenzó nuestra aventura. Ella nos recomendó participar en las actividades que el Aula Taller Museo de las Matemáticas "π-ensa" realiza con la finalidad de acercar las matemáticas a todo tipo de público y, especialmente, a los estudiantes de todas las edades.

Nada más llegar tuvimos un buen recibimiento por parte de las profesoras Sagrario Lantarón y Mariló López (responsables del aula "π-ensa" donde íbamos a realizar nuestro trabajo). Nos enseñaron la sala donde se llevan a cabo las actividades con los estudiantes que visitan el Aula Taller Museo y nos explicaron los distintos juegos y talleres que se imparten, estos últimos de distinta temática. El primer día, para empezar, nos permitieron asistir al taller de "Matemagia", allí nos impresionaron con trucos que se realizan gracias al álgebra.

El segundo día nos pudimos sentir como si fuéramos verdaderos espías, enseñándonos sus mejores formas de comunicación gracias a la criptografía, utilizando el cifrado de César con un disco de Jefferson.

El último taller en el que participamos era para los más pequeños. En este se construían distintos poliedros con palillos, plastilina y polígonos de plástico.

Nuestra misión en todas las actividades, además de aprender, era ayudar a los estudiantes cuando iban al Museo (los visitantes realizaban dos actividades: taller y visita al Museo donde se enfrentaban a retos de ingenio y lógica).

Nosotros ayudamos en visitas de niños de 6º de primaria, 1º, 2º y hasta 3º de la ESO. Los ayudábamos con los diversos juegos relacionados con la lógica.

En conclusión, esta experiencia nos ha ayudado a desenvolvernos en distintos ámbitos a los que no estamos acostumbrados y a iniciarnos en el mundo laboral. En nuestro caso, hemos contactado con el mundo de las matemáticas visto desde el punto de vista de sus aplicaciones y además, hemos podido relacionarnos con la enseñanza de esta ciencia.

Esta práctica se la recomendamos a cualquier amante de las matemáticas y el programa 4ºESO+EMPRESA a todo estudiante de 4º.

2.2. La experiencia de Silvia Cano

Durante tres mañanas, las de los días 19, 20 y 24 de abril, tres estudiantes del IES Gabriel Cisneros participamos en un proyecto llamado 4° ESO + Empresa en la Universidad Politécnica de Madrid. Los alumnos de los institutos que deciden inscribirse en este proyecto tienen la oportunidad de hacer prácticas (o asistir personalmente a ellas) dentro de una institución o empresa perteneciente a una materia de su gusto, desde un hospital o una comisaría hasta un locutorio de radio. Nosotros tres fuimos ayudantes en el Aula Taller Museo de las Matemáticas π-ensa (en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid) y participamos en sus talleres de geometría y criptografía cuando asistieron grupos de distintos colegios e institutos. Nuestro trabajo consistió básicamente en resolver dudas a los chicos y chicas en el museo y en los talleres y echar una mano a los más despistados, además de colocar el material y organizarlo antes de la llegada de los niños.

En general, esta experiencia me parece muy recomendable porque, aunque descubras que algo no te gusta tanto como pensabas o que es más duro de lo que creías, es una práctica muy diferente a lo que solemos hacer en el instituto y es una desconexión de las clases y los estudios que te permite centrarte por unos días en el mundo laboral e incluso ayudarte a decidir qué es lo que preferirías hacer en el futuro.

Personalmente, participar en el proyecto aquí fue más tranquilo de lo que pensaba. Los grupos de chicos más mayores (de primero de la ESO) casi no tenían dudas y necesitaban menos atención que los demás, además de que en todo momento tuvimos algún adulto (profesor o estudiante mayor) cerca para solucionar nuestros problemas, si es que surgía alguno. El trato por su parte fue muy bueno, se preocuparon por nosotros para que tuviéramos la mejor experiencia posible (incluso pudimos almorzar en la cafetería de los profesores) y creo que hablo por todos si doy las gracias por ello.

De todos modos, aunque tranquila, fue una experiencia interesante ya que trabajar con niños y resolverles dudas, estar atentos por si tenían alguna pregunta y ayudarles en los talleres fue algo nuevo para todos nosotros.

Sobre los autores:

Nombre: Silvia Cano
Correo Electrónico: silvia2cr2@gmail.com
Institución: IES Gabriel Cisneros, Madrid, España.

Nombre: Daniel Chavero
Correo Electrónico: --
Institución: IES Gabriel Cisneros, Madrid, España.

Nombre: Daniel Martínez
Correo Electrónico: danielmartinezmartin.dmm@gmail.com
Institución: IES Gabriel Cisneros, Madrid, España.

Entrevista

Don Manuel:
el arte de enseñar en una pequeña escuela

Don Manuel:
the art of teaching in a small school

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 091–094, ISSN 2174-0410
Recepción: 7 Feb'18; Aceptación: 13 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

Enseñar siempre es complicado, y más hacerlo con pocos medios en una pequeña escuela de pueblo. Moralzarzal es una pequeña localidad de la sierra noroeste de Madrid. Manuel Alonso ha estado impartiendo docencia allí durante más de treinta y cinco años, simultaneando el trabajo de profesor con el de director del colegio. De la calidad de su trabajo y de su calidad humana, dan muestra el respeto y cariño con el que se le reconoce en el pueblo, por parte de sus antiguos alumnos, los padres de estos, las autoridades y todas las personas que lo han conocido. Desde el año 2005, el Ayuntamiento de Moralzarzal organiza un concurso de narrativa que lleva el nombre de Don Manuel. Esta entrevista trata de desvelar algunas de las claves que han permitido a Manuel Alonso elevar el trabajo de enseñar a la categoría de arte.

Palabras Clave: Enseñanza, Matemáticas.

Abstract

Teaching is always a complicated task, and doing it with little resources in a small village school is still more complicated. Moralzarzal is a small village in the northwest of Madrid. Manuel Alonso has been teaching there for more than thirty-five years, combining the professor work with that of the school director. The quality of his work and his human quality, are shown by the respect and affection with which he is recognized in the town, by his former students, their parents, the village authorities and all the people who have known him. Moralzarzal organizes a literary narrative award named Don Manuel since 2005. This interview tries to reveal some of the keys that have allowed Manuel Alonso to elevate the work of teaching to the category of an art.

Keywords: Teaching, Mathematics.

Figura 1. Don Manuel.

Cuando a finales del pasado verano me propusieron formar parte del jurado del Premio Don Manuel de narrativa corta, que organiza cada año el Ayuntamiento de Moralzarzal, apenas había oído hablar del personaje. Comencé a documentarme como pude, a través de la web del ayuntamiento y de conversaciones con conocidos que habían sido alumnos suyos. Llegué a la conclusión de que estaba ante un gran docente, un maestro que había dejado una huella imborrable en todas las personas que lo conocieron y tuvieron el privilegio de ser sus alumnos.

Según detalla la web del ayuntamiento de Moralzarzal, Don Manuel nació en 1944 en Almeida de Sayago (Zamora). Estudió interno en el Colegio de los Escolapios, en Toro, y más tarde en Salamanca, durante cuatro años. Allí empezó Magisterio y lo terminó en Toledo. Sacó las oposiciones sin idea de ejercer, aunque tuvo que hacerlo para no perder la plaza ganada. Su primer destino fue Andújar (Jaén). Todas sus dudas se disiparon. La profesión le pareció preciosa y decidió continuar. El siguiente año ejerció en Martos y los dos posteriores en La Carolina.

Don Manuel quería venir a Madrid. Conocía la zona de la carretera de La Coruña de sus desplazamientos de Madrid a Zamora, Salamanca ... Sobre un mapa de 1936 que había en su colegio, trazó un arco con un compás y en el concurso de traslados pidió todos los pueblos que quedaron dentro del arco, a izquierda y derecha de la carretera de La Coruña.

Pensó que no le iban a dar plaza en Madrid, así que fue a Jaén en septiembre para ver su nuevo destino, con intención de volver a La Carolina. Y allí, para su sorpresa, un compañero le dijo que le habían dado un pueblo de Madrid. La Delegación estaba al lado de la Plaza Mayor, en un edificio muy antiguo. Miró la lista y vio que el pueblo se llamaba Moralzarzal. Buscó en su mapa y Moralzarzal no aparecía. A pesar del susto inicial, le consolaba ver que a un compañero que iba detrás de él en la lista le habían dado Manzanares, así que Moralzarzal debía de estar más cerca de la carretera de La Coruña.

En Moralzarzal en 1969 había una escuela de niños, otra de niñas y una de párvulos. Las escuelas se hicieron mixtas, se construyó un nuevo colegio en 1981 y luego otro en 2000, el actual San Miguel Arcángel.

Don Manuel ha sido director del colegio desde que llegó a Moralzarzal, con algún pequeño paréntesis que otro. El gran maestro se jubiló en 2005 y ha dejado un recuerdo imborrable tanto en los alumnos como en sus padres.

Concerté una entrevista con él las pasadas navidades. Quedamos a tomar un café en una de las cafeterías de la localidad. Desde el primer momento me sentí cómodo. Era sencillo y muy instructivo charlar con el acerca de los temas relativos a la enseñanza.

- ¿Qué asignaturas impartías en el colegio?

Fundamentalmente Matemáticas y Ciencias, aunque había que tocar muchas materias.

De hecho, los alumnos me han contado que, a los mayores, Don Manuel les daba todas las asignaturas menos religión, que la daba Don Paco (el cura del pueblo). Les pregunté: ¿aprendíais bien?. Sí, me contestaron, nos hicieron las pruebas de evaluación en Villalba, para poder entrar al Instituto, y aprobamos. Parece ser que hasta llegó a dar clases de inglés. Fue el quién propuso dar inglés en vez de francés. Las clases se daban con un casette. También me han contado sus alumnos que, mientras Don Manuel preparaba concienzudamente las clases de inglés cada día, hubo una profesora que, al sentirse incapaz de dar esas clases a las chicas, utilizaba esas horas para darles clases de costura, ¡qué cosas!. También me han contado que castigaba sin recreo a los revoltosos y que, algunos días, había tantos castigados que hasta el mismo se tenía que quedar sin recreo.

- Me han contado tus alumnos que organizaste la recogida de datos meteorológicos.

- Sí, nos proporcionaron una estación meteorológica del Instituto Meteorológico Nacional. La situamos en el patio del colegio y, cada semana, una pareja de alumnos, chico y chica, se encargaba de anotar los datos de precipitación, humedad y temperatura.

- También me han contado tus alumnos que les ponías películas, veíais los telediarios y proponías jugar al ajedrez en los recreos.

- Sí -Manuel sonríe -, las películas las poníamos en un proyector de súper 8.

- Me han dicho que también diste clases de Educación Física.

- Sí, hacíamos atletismo: salto de longitud y salto de altura. Para el salto de longitud teníamos que cavar en el patio del colegio.

- Creo que también organizaste la primera excursión fuera del pueblo con los alumnos del colegio.

- Sí, la hicimos a Santander. Acompañamos a los chicos yo mismo, Don Paco, el cura, y Francisco Larrea.

- ¿Cómo era la escuela que te encontraste al llegar a Moralzarzal?

- Cuando llegué, los chicos y las chicas estudiaban separados, varios cursos en la misma clase. Propuse a los padres que, para optimizar recursos, podríamos dar las clases juntos a chicos y chicas y separar más por edades. A los padres les pareció bien y el ministerio no puso pegas, así que, con permiso de la inspección, así lo hicimos.

- Tus alumnas me han hablado de que organizaste un equipo de baloncesto femenino.

- Sí, así fue. Conseguimos una canasta que no era más un aro puesto encima de un poste y organizamos el equipo de baloncesto femenino.

- Me han comentado que alternabas y, un día jugabas en el patio al futbol, y al otro jugabas al baloncesto.

- (... sonrisas)

- ¿Crees que ahora se enseña mejor?

- Creo que ahora los conocimientos en algunas materias son más bajos. ¡Cómo escribe la gente!. Ahora se intenta que sean los alumnos los que alcancen sus desarrollos. La LOGSE estima el razonamiento y desestima la habilidad en el cálculo.

- ¿Piensas que hay que descartar los nuevos métodos?

- No hay que descartar nada y tampoco hay que ser selectivo. En educación todo está inventado y, al mismo tiempo, nada está inventado. Todo puede ser útil, depende de cómo se apliquen las cosas, de cómo tenga el niño estructurada la mente.

- ¿Tiene sentido hoy en día enseñar los logaritmos?

- Al enseñar, lo que se hace es dar recursos a los alumnos que favorezcan la creación de estructuras mentales. Son recursos que estructuran la mente. En ese sentido todo lo que se enseña es de utilidad.

- ¿Hay que tender a enseñar orientados al mercado de trabajo?

- Hay que procurar dar una formación amplia y general. En España no hay una buena formación profesional.

- ¿Hay que enseñar Filosofía?

- Es lo mismo, hay que dar recursos para que la persona se pueda desarrollar por sí misma.

- ¿Cómo formar a la gente en principios? ¿Es útil enseñar Religión?

- Inútil no es.

- ¿Cómo se pueden distribuir los centros de enseñanza? ¿Se debe separar a los chicos superdotados o a los menos dotados en centros especializados?

- Es mejor que la enseñanza sea integrada. En el caso de los inmigrantes, de los chicos que van retrasados o de los chicos superdotados, se pueden establecer apoyos específicos para cada uno de ellos. Se trata de individualizar dentro de una enseñanza integrada.

- ¿Utilizas el ordenador?

- Sí, empecé con un Spectrum. Utilizaba MS-DOS y programaba en Basic y en Pascal. También me gustaba mucho jugar al Flight Simulator.

- Dime un libro que te gustaría recomendar.

- El Principito.

- ¿Y alguna película?

- Casablanca . . . , bueno, déjame que lo piense un poco más.

- ¿Y de música?

- Los Beatles.

- ¿Cómo surgió lo del concurso Don Manuel de Narrativa?

- Lo organizaron antiguos alumnos míos con motivo de mi jubilación. ¡Buf, hasta me han dedicado una calle!.

En cada concurso se publica un libro con los mejores relatos. Según he podido saber después, los libros con los relatos del primer concurso se pagaron vendiendo papeletas para una rifa.

Sin darme cuenta, llevo más de una hora hablando con Don Manuel. Podría seguir largo rato, pero no quiero abusar de su amabilidad y, además, tengo ya una buena colección de notas para procesar esta entrevista. Nos despedimos en la puerta de la cafetería y le aseguro que le enviaré la revista cuando salga publicada en unos meses.

Sobre el autor:
Nombre: Santiago Higuera de Frutos
Correo electrónico: santiago.higuera@upm.es
Institución: Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil y Naval, Universidad Politécnica de Madrid.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto


G.I.E
Pensamient
Matemátic
MAIC