Juegos y Rarezas Matemáticas

La función Beta, como suma de números combinatorios

The Beta function, as the sum of combinatorial numbers

Alfredo Olmos Hernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VIII, Número 1, pp. 067–070, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En este artículo, se busca estudiar la función Beta ($B_{(x,\,y)}$). Esta función está dentro de las funciones trascendentes y posee dos variables independientes. Se estudiará la función cuando estas variables son enteros positivos, y se obtendrá una expresión para la función como suma de números combinatorios.

Palabras Clave: Función Beta, Número combinatorio.

Abstract

In this article, we seek to study of the Beta function ($B_{(x,\,y)}$). This function is within the transcendental functions and has two independent variables. The function will be studied when these variables are positive integers, and an expression for the function will be obtained as a sum of combinatorial numbers.

Keywords: Beta function, combinatorial number.

1. Introducción

La función beta, se encuentra entre las funciones trascendentes, siendo esta su vital importancia, pues se encuentra relacionada con la función Gamma y las funciones Bessel, importantes para las ecuaciones diferenciales ordinarias y en análisis matemático.

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x>0, y>0)$$

Al ser la función Beta ($B_{(x,y)}$) una función multiforme, se dificulta considerablemente un uso práctico de tablas, para hallar valores de la misma.

Del mismo modo por la estructura que presenta su integral, para hallarla es necesario el realizar numerosas veces la integración por partes, resultando dificultoso para valores enteros de x y de y muy grandes.

Una posible solución para estos problemas, es el utilizar un método numérico, con el fin de darle solución a la integral, sin embargo el objetivo de esta investigación es el obtener un valor exacto, de la función, con el fin de poder describir exactamente su comportamiento, acción no posible mediante el uso de un método numérico.

El método presentado soslaya las dificultades de resolución de la integral de la función Beta, al dar una forma alternativa de dar la función como suma de números combinatorios, lo que es útil a efectos prácticos.

2. Desarrollo de la función Beta como suma de números combinatorios

Sea $B_{(x,\,y)}$ la función Beta, con x, y números enteros positivos.

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Desarrollando el binomio.

$$(1-t)^{y-1} = \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} t^i$$

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 t^{x-1} \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} t^i\,dt$$

$$B_{(x,y)} = \int_0^1 \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} t^{x+i-1}\,dt$$

$$B_{(x,y)} = \left| \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{t^{x+i}}{x+i} \right|_0^1$$

$$B_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{1}{x+i} - \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i \binom{y-1}{i} \frac{0}{x+i}$$

$$B_{(x,y)}=\sum_{i=0}^{y-1}(-1)^i\binom{y-1}{i}\frac{1}{x+i}$$

$$B_{(x,y)}=\sum_{i=0}^{y-1}\frac{(-1)^i}{x+i}\binom{y-1}{i}$$

Siendo esta última la expresión que permite el cálculo de la función Beta como suma de números combinatorios.

Ejemplo de cálculo. $B_{(3,5)}$. Por integración se tiene

$$B_{(3,5)}=\int_0^1 t^{3-1}(1-t)^{5-1}dt=\frac{1}{105}$$

Utilizando la expresión obtenida

$$B_{(3,5)}=\sum_{i=0}^{5-1}\frac{(-1)^i}{3+i}\binom{5-1}{i}$$

$$B_{(3,5)}=\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{3+i}\binom{4}{i}$$

$$B_{(3,5)}=\frac{\binom{4}{0}}{3+0}-\frac{\binom{4}{1}}{3+1}+\frac{\binom{4}{2}}{3+2}-\frac{\binom{4}{3}}{3+3}+\frac{\binom{4}{4}}{3+4}=\frac{1}{3+0}-\frac{4}{3+1}+\frac{6}{3+2}-\frac{4}{3+3}+\frac{1}{3+4}=\frac{1}{105}$$

3. Conclusiones

En este artículo, se obtuvo una expresión que permite el cálculo de la función Beta, sin necesidad de la función Gama y sin integrar. Para ello se utilizó la sumatoria de números combinatorios.

Existe una expresión de la función Beta con variables naturales deducida a partir de las propiedades de la función Gama:

$$B_{(x,y)}=\frac{(x-1)!\cdot(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Lo que da la siguiente identidad para x, y naturales utilizando la expresión obtenida en este artículo:

$$\sum_{i=0}^{y-1}\frac{(-1)^i}{x+i}\binom{y-1}{i}=\frac{(x-1)!\cdot(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Esto es equivalente a:

$$\sum_{i=0}^{y-1} \frac{(-1)^i}{(x+i)\cdot i!\cdot (x+y-1)!} = \frac{(x-1)!\cdot (y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Referencias

[1] ANDREWS, George; ASKEY Richard; ROY Ranjan. *Funciones especiales,* Cambridge Univerity Press, Cambridge Inglaterra, 1999.

[2] ABRAMOWITZ, Milton y STEGUN, Irene. *Manual de Funciones Matemáticas con Fórmulas, Gráficos y Tablas Matemáticas,* pp. 258 y 263, Dover, Nueva York, 1972.

[3] WEISSTEIN, Eric Wolfram Math World. *Función Beta, http://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html*

Sobre el autor:
Nombre: Alfredo Olmos Hernández
Correo Electrónico: alfredooh16@gmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, México.