

SUCESIONES

3º ESO

Sucesiones numéricas.

- Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
- Cada elemento de la sucesión se denomina término, el subíndice es el lugar que ocupa en la sucesión.
- El primer término es a_1 , el segundo a_2 , el tercero $a_3 \dots$
- Ejemplo: En la sucesión de los números pares:

$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$

¿Cuál es el primer término?

2

¿Cuál es el quinto término?

10

Término general de una sucesión.

- Representa un término cualquiera de la sucesión
- En las sucesiones que siguen una ley de formación, la fórmula del término general, a_n , permite determinar cualquier término de la sucesión.

Ejemplos:

- En la sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, ...

El término general es: $a_n = 2n$

- En la sucesión: 1, 4, 9, 16, 25, ...

El término general es: $a_n = n^2$

- En la sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, ...

El término general es: $a_n = 2n - 1$

Sucesiones recurrentes.

- Los términos de estas sucesiones se obtienen a partir de los anteriores.
- Ejemplo: La sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

¿Cuál es el sexto término? 8

¿Cuál es el séptimo término? 13

¿Cuál es el octavo término? 21

¿Cuál es la ley de formación?

Cada término es la suma de los dos anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

La sucesión cambia si se modifican los dos primeros términos

- Calcula los 9 primeros términos de una sucesión con la misma ley de formación con $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

Progresiones aritméticas.

- Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad constante llamada, d , diferencia.

Cuál es la sucesión si el primer término, $a_1 = 3$ y la diferencia, $d = 2$:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

Cuál es la diferencia de la siguiente progresión aritmética:

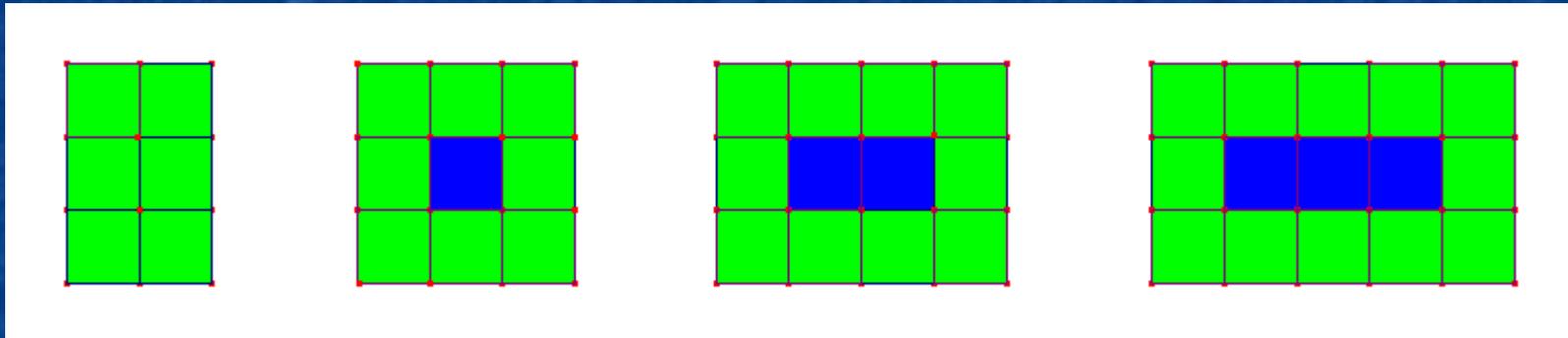
$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots$$

$$d = 4$$

En una progresión aritmética la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante.

Ejemplos de progresiones aritméticas

- En la sucesión numérica del número de cuadrados azules. ¿Cuál es el valor del primer término? ¿Cuál es la diferencia?



- En la sucesión numérica del número de cuadrados verdes. ¿Cuál es el valor del primer término? ¿Cuál es la diferencia?

Término general de una progresión aritmética.

- En una progresión aritmética:

- $a_2 = a_1 + d$

- $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

- $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

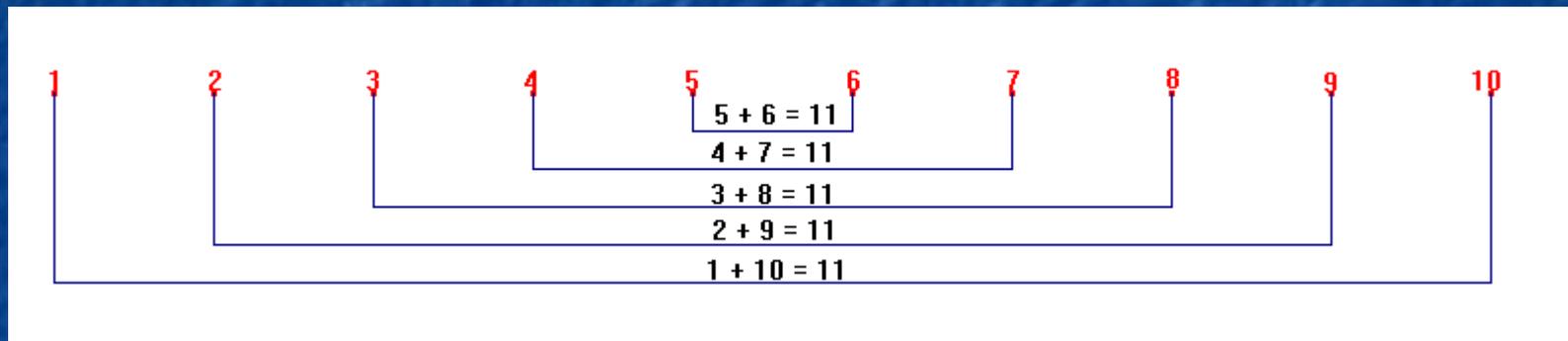
- $a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$

-

- $a_n = a_1 + (n-1)d$

Suma de términos de una progresión aritmética

- Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... forman una progresión aritmética de diferencia, $d = 1$.
- Para sumar los diez primeros términos se observa que:



- La suma de los 10 primeros términos, $S_{10} = 11 \cdot 5 = 55$
- En general para sumar n términos:

$$S_n = (a_n + a_1) \frac{n}{2}$$

Progresiones geométricas.

- Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad constante llamada, r , razón.

Cuál es la sucesión si el primer término, $a_1 = 3$ y la razón, $r = 2$:

$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$

Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica:

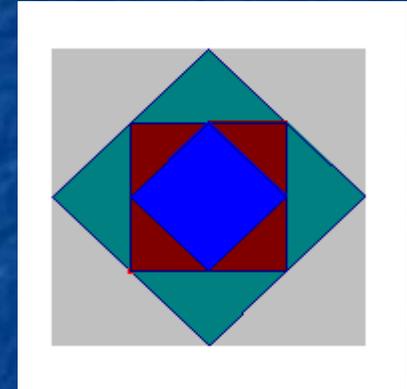
$2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$

$$r = 3$$

En una progresión geométrica el cociente entre dos términos consecutivos es una constante.

Ejemplos de progresiones geométricas

- El lado del cuadrado gris de la figura mide 1 unidad
- ¿Cuál es el valor de su área?
- ¿Cuánto vale el área del cuadrado verde?
- ¿Y el área del cuadrado rojo?
- ¿Y la del cuadrado azul?
- Observa que el proceso de construcción de los cuadrados puede continuar indefinidamente y sus áreas forman la sucesión:
 - $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, que es una progresión geométrica de razón $1/2$
 - Considera la sucesión formada por las longitudes de los lados:
 - $1, 1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2\sqrt{2}, \dots$, ¿Es una progresión geométrica?
 - ¿Cuál es la razón de esta progresión?



Término general de una progresión geométrica.

- En una progresión geométrica:

- $a_2 = a_1 \cdot r$

- $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$

- $a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

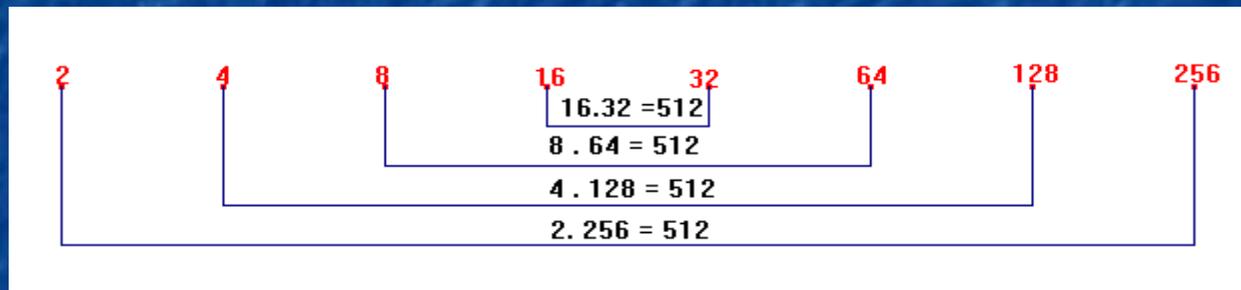
- $a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

-

- $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Producto de términos de una progresión geométrica

- La sucesión: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... es una progresión geométrica de razón, $r = 2$.
- Para multiplicar los 8 primeros términos se observa que:



- El producto de los 8 primeros términos, $P_8 = (512)^4 = 2^{36}$
- En general el producto de n términos es:

$$P_n = (a_n \cdot a_1)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(a_n \cdot a_1)^n}$$

Suma de términos de una progresión geométrica

- Imagina la siguiente situación:
- Un alumno de 3º de ESO cuenta un secreto, a las 9 de la mañana, a dos compañeros, a las 10, cada uno de ellos se lo han contado a otros dos, una hora más tarde, los cuatro alumnos que acaban de conocer el secreto se lo cuentan a otros dos y así sucesivamente.
- Determina la sucesión del número de personas que conocen el secreto cada hora a partir de las 8 de la mañana.
 - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...
- ¿Es una progresión geométrica? ¿Por qué? ¿Cuál es la razón?
 - $r = 2$
- ¿A cuántas personas les cuentan el secreto a las 2 de la tarde?
 - 64
- ¿Cuántas personas conocen el secreto a las 2 de la tarde?
 - $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = ?$
 - Para realizar esta suma con facilidad se va a buscar una fórmula.

Suma de términos de una progresión geométrica

- Sea S_n la suma de n términos de una progresión geométrica:
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$
- $r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + \dots + r \cdot a_n$ y por lo tanto:
- $r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + r \cdot a_n$
- Al calcular la diferencia entre $r \cdot S_n$ y S_n se obtiene:
- $r \cdot S_n - S_n = r \cdot a_n - a_1$, sacando factor común S_n en el primer término:
- $S_n(r - 1) = r \cdot a_n - a_1$, al despejar S_n se obtiene la fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

- Para sumar los siete primeros términos de la progresión anterior:
- $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, se aplica la fórmula y se obtiene:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{64 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 127$$

Progresiones geométricas crecientes, decrecientes y oscilantes.

- Una progresión geométrica es creciente si su razón r es mayor que 1
- Por ejemplo la sucesión de los múltiplos de 3:
- 3, 9, 27, 81, 243, ...

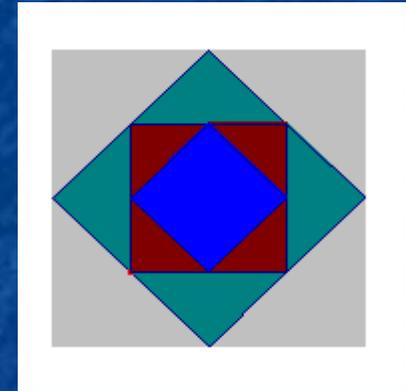
- Una progresión geométrica es decreciente si su razón r es mayor que 0 y menor que 1
- Por ejemplo la sucesión con $r = 1/2$ y $a_1 = 1$:
- 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...

- Una progresión geométrica es oscilante si su razón r es un número negativo
- Por ejemplo la sucesión con $r = -1$ y $a_1 = 1$:
- 1, -1, 1, -1, 1, -1. ...

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica

- En la sucesión de cuadrados de la figura, la sucesión numérica formada por las áreas de los triángulos que sobran para obtener el siguiente cuadrado es:
- $1/2, 1/4, 1/8, \dots$
- La suma de estas infinitas áreas es el área del cuadrado gris que vale 1:
- $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$

- En general, en una progresión geométrica decreciente la razón, r , es menor que 1 y cuando n es muy grande el término a_n se aproxima a 0.
- Eliminando este valor en la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica:
- Se obtiene la expresión que calcula la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente:



$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

El interés compuesto y las progresiones geométricas

- Se ingresan en un banco 3000 € a un interés anual del 4%
- Al finalizar el primer año se tiene un capital:
- $C_1 = 3000 \cdot (1 + 0,04)$
- Después de dos años:
- $C_2 = 3000 \cdot (1 + 0,04)^2$
- Cuando han pasado cinco años:
- $C_5 = 3000 \cdot (1 + 0,04)^5$
- Y después de n años:
- $C_n = 3000 \cdot (1 + 0,04)^n$
- C_n es el término general de esta progresión geométrica.
- En general si se ingresa en un banco una cantidad, C , a un interés anual del $i\%$, la fórmula que permite calcular la cantidad que se tiene después de n años es:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$