RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MODELOS TEÓRICOS

DATOS

INICIO

MODELO DE POLYA

MODELO DE MASON - BURTON - STACEY

EJEMPLOS

RESUMEN

AUTOEVALUACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

María Molero y Adela Salvador

DATOS

- **Título:** Resolución de problemas. Modelos teóricos
- **Autoras:** María Molero y Adela Salvador
- **Nivel educativo:** Secundaria, Bachillerato y Universidad
- **Descripción:**
  - Se definen conceptos básicos: Heurística, problema, fases de los modelos.
  - Se estudian diferentes modelos de resolución de problemas.
  - Se consolidan los conceptos teóricos con ejemplos prácticos.
  - Se realiza un breve resumen
  - Se incluye una breve bibliografía

ÍNDICE

VOLVER

MODELOS TEÓRICOS

- Modelo de G. POLYA

- Modelo de MASON – BURTON – STACEY

Otros modelos:

- Modelo de M. GUZMÁN
- Modelo de BRANSFORD - STEIN
- Modelo del GRUPO CERO

¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Un problema matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

- Diferencias entre ejercicio, problema e investigación.
- La importancia de los conocimientos de la persona que se plantea el problema.

¿QUÉ ES LA HEURÍSTICA?

La heurística como "arte de resolver problemas" trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos.

- Los **procesos generales** son los ejes que articulan la resolución de problemas como son la generalización, la inferencia, la deducción, la simbolización, la particularización ...;
- Las **estrategias heurísticas** son herramientas que nos permiten transformar el problema en otra situación que nos acercan hacia la solución;
- Las **pautas heurísticas** son sugerencias que nos prestan una gran ayuda en aspectos muy concretos del problema y en momentos de bloqueo.
- Hay **actitudes** que facilitan el proceso como son la flexibilidad, la perseverancia, el gusto por el riesgo y por afrontar situaciones que supongan un reto, y la práctica de reflexionar sobre la experiencia acumulada.

FASES DE LOS MODELOS. CARACTERÍSTICAS:

- Las fases que plantean los distintos modelos, no siempre se presentan explícitamente, depende en parte del tipo de problema y de su dificultad.
- Hay problemas muy sencillos que se resuelven al comprender el enunciado, y puede haber enunciados muy simples que esconden problemas de verdadera dificultad.
- Tampoco se presentan separadas sino que normalmente cada fase interfiere con la anterior o con la siguiente.

MODELO DE POLYA

El modelo teórico que G. Polya desarrolla, incluye un diccionario de heurística que agrupa, las estrategias, las pautas, los procesos generales, los métodos de demostración, las emociones, ... que intervienen en la resolución de problemas.

Considera que el razonamiento heurístico aunque poco riguroso resulta un método muy plausible para resolver un problema.

Compara la intuición y la demostración formal con la percepción de un objeto por dos sentidos diferentes.

FASES DEL MODELO DE POLYA

1. **Comprender el problema.**
2. **Concebir un plan.**
3. **Ejecutar un plan.**
4. **Examinar la solución obtenida.**

- En cada una de estas fases hay pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.
- No todas las pautas sirven para todos los problemas, sino que forman un conjunto de posibilidades entre las que debemos elegir aquellas que se adaptan a cada problema determinado.
- No se pretende enfrentarnos a un problema con una lista de sugerencias heurísticas, sino interiorizarlas para que posteriormente surjan de forma espontánea.

FASE 1: Comprender el problema

Es una fase de preparación donde

- **Se examina la situación**
- **Se manipula para entenderla mejor**
- **Se relaciona con situaciones semejantes**

En esta fase se pretende que después de leer el enunciado del problema y aceptar el reto de resolverlo seamos capaces de contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿La condición permite determinar la incógnita?

FASE 2: Concebir un plan

Consiste en determinar las estrategias que

- Transforman el problema.
- Facilitan la solución.
- Determinan las conexiones entre los datos y las incógnitas.

Si nos encontramos atascados las preguntas que nos pueden ayudar a superar el bloqueo son:

- ¿Conoces algún problema parecido a este? ¿En qué se parece? ¿En qué se diferencia?
- ¿Qué relación tienen los datos entre sí?
- ¿Qué puedo deducir a partir de los datos?
- ¿Puedo dividir el problema en partes?
- ¿Puedo enunciar el problema de forma diferente?
- ¿Y si el problema no tiene solución? ¿Hay algún dato contradictorio en el problema?
- ¿Has utilizado todos los datos? ¿Hay alguno redundante o irrelevante?

FASE 3. Ejecutar un plan.

En esta fase

Se realizan los cálculos y operaciones necesarias para aplicar los procedimientos y estrategias elegidos en la fase anterior.

Es importante tener en cuenta las siguientes sugerencias:

- Comprueba cada uno de los pasos.
- ¿Puedes justificar que cada paso es correcto?
- ¿Puedes demostrarlo?
- Si tienes dificultades no desistas hasta que veas claramente que tu plan no es válido y en ese caso debes ser flexible, abandonarlo y volver a la fase anterior de búsqueda.

FASE 4: Examinar la solución

Consiste en examinar a fondo el camino seguido:

- Comprobar cálculos, razonamientos, y que la solución corresponde al problema propuesto.
- Localizar rutinas útiles.
- Resolverlo de una forma más sencilla o más elegante.
- Intentar generalizarlo a un contexto más amplio.
- Buscar problemas relacionados, y la posible transferencia de resultados, métodos y procesos.

Las pautas heurísticas asociadas a esta fase son:

- ¿Puedes verificar el resultado?
- ¿Puedes verificar el razonamiento?
- ¿Te parece lógica la solución? ¿Puede haber otra solución?
- ¿Eres capaz de transformar el problema resuelto en otro similar?
- ¿Puedes resolverlo de otra forma?
- ¿Puedes generalizar el resultado?
- ¿Puedes plantearlo con datos más generales?

VOLVER

MODELO DE MASON - BURTON - STACEY

- Este modelo analiza el pensamiento y la experiencia matemática en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas.
- Muestra la influencia que tiene el desarrollo del razonamiento matemático en el conocimiento de nosotros mismos y del mundo que nos rodea.
- Las emociones de quien resuelve el problema, son elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente, que considera motivado por una situación en la que se mezclan contradicción, tensión y sorpresa en una atmósfera de preguntas, retos y reflexiones.
- El enfoque positivo que se concede al hecho de estar atascado o atascada, que considera una situación muy digna y constituye una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento, valorando más un intento de resolución fallido que una cuestión resuelta rápidamente y sin dificultades ya que lo que importa no son las respuestas sino los procesos.

MODELO DE MASON - BURTON - STACEY

- Una sugerencia importante es dejar por escrito todo el proceso de resolución con objeto de poder recordar y reconstruir un momento determinado del problema y como un método para superar el bloqueo, cuando el resolutor/a se encuentra sin saber que hacer.
- Las notas, también son importantes los rótulos que son símbolos que indican los estados de ánimo por los que se pasa, las ideas felices, los bloqueos, las situaciones delicadas en las que hay peligro de equivocarse, ...
- La actividad de razonar se describe, como si hubiera un agente externo dentro de nosotros mismos, que nos aconseja lo que tenemos que hacer, lo denominan monitor interior y actúa como un tutor que vigila los cálculos y los planes a ejecutar, identifica los estados emocionales sugiriendo alternativas, examina críticamente los razonamientos y el proceso, y nos recuerda que hay que revisar y generalizar resultados, en definitiva controla el proceso de resolución desde fuera.

FASE 1: Abordaje.

Esta fase está encaminada a comprender, interiorizar y familiarizarnos con el problema.

Después de leer cuidadosamente el problema es necesario contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que sé?
- ¿Qué es lo que quiero?
- ¿Qué es lo que puedo usar?

La fase puede darse por concluida cuando somos capaces de representar y organizar la información mediante símbolos, diagramas, tablas, o gráficos.

FASE 2: Ataque.

Es la fase más compleja ya que en ella se trata de asociar y combinar toda la información de la fase anterior.

Es en esta fase donde intervienen las distintas estrategias heurísticas que nos permiten acercarnos a la solución del problema.

- Los estados de ánimo más característicos son el de estar **¡Atascado!** y el de las ideas **¡Aja!**

- Los procesos matemáticos fundamentales, que aparecen en esta fase son:
  - La inducción, que se materializa en el hecho de hacer conjeturas orientadas a conseguir la solución del problema,
  - La deducción que pretende justificar dichas conjeturas mediante las leyes lógicas a través de los teoremas matemáticos.

FASE 3: Revisión

Cuando se consigue una solución es conveniente revisarla e intentar generalizarla a un contexto más amplio, para esto es necesario:

- Comprobar la solución, los cálculos, el razonamiento y que la solución corresponde al problema.
- Reflexionar en las ideas, en los momentos clave, en las conjeturas y en la resolución.
- Generalizar a un contexto más amplio, buscar otra forma de resolverlo o modificar los datos iniciales.
- Redactar la solución dejando claro qué es lo que se ha hecho y porqué.

VOLVER

EJEMPLO 1: “*Los vigilantes*”

Las calles de una ciudad forman una malla de horizontales y verticales en cuadrados de 100 m de lado. En cada cuadrado hay una manzana de casas.

Se pretende montar un servicio de vigilancia. Cada guardia colocado en una esquina puede vigilar como máximo una distancia de 100 m en cada una de las cuatro direcciones.

Busca el menor número de vigilantes necesarios para vigilar una ciudad con forma de cuadrado y n calles en cada lado.

“*Los vigilantes*”. Abordaje 1:

- Después de leer detenidamente el problema, lo primero que hacen es realizar un gráfico que represente la información: Contar calles, esquinas y vigilantes.

- A continuación consideran casos particulares, y cuando no se les ocurre, es necesario indicarles la necesidad de hacer una tabla que agrupe de modo sistemático los resultados obtenidos al particularizar.

- La forma de realizar la tabla es muy variada, hay quien relaciona el número de vigilantes con el número de manzanas en cada lado de la ciudad, otros con el número de esquinas y otros con el número de calles en cada lado, no sabemos si estos últimos lo hacen por casualidad, aunque posiblemente se han leído mejor el problema y saben que es el dato que tienen que utilizar.

“*Los vigilantes*”. Abordaje 2:

En nuestra tabla recogeremos todos estos datos.

Manzanas	Calles	Esquinas	Vigilantes
1	2	4	2
2	3	9	5
3	4	16	8
4	5	25	13
5	6	36	18
6	7	49	25
7	8	64	32

“*Los vigilantes*”. Ataque 1:

- A partir de los resultados, buscamos una regla que nos permita relacionar el número de calles en cada lado de la ciudad con el número mínimo de vigilantes necesarios.

- Lo normal es que observen que necesitan un regla diferente para las ciudades que tienen un número par de calles por lado y las que tienen un número impar, y los que han considerado el número de esquinas enseguida concluyen que para "los pares la mitad de las esquinas y para los impares la mitad del numero de esquinas más uno".

- En este momento es necesario hacerles ver que el dato del problema es el número de calles en cada lado de la ciudad por lo que es necesario expresar la solución en función de ese dato que llamaremos *n*.

“*Los vigilantes*”. Ataque 2:

- Con más o menos ayuda son capaces de plantear la siguiente hipótesis: si n es el número de calles en cada lado y v es el número de vigilantes:

  $v = n^2/2$ si n es par y $v = (n^2 + 1)/2$ si n es impar

- Lo difícil es conseguir que justifiquen las conjeturas incluso en el caso de un número par de calles.

- Esta falta de justificación les impide darse cuenta de que si el número de calles es impar la conjetura no es válida por que hemos comenzado suponiendo un vigilante en la esquina superior izquierda y observamos que si lo suprimimos de tal forma que esta esquina quede vigilada por los de las esquinas contiguas necesitamos menos vigilantes.

- En la primera calle horizontal necesitamos $(n - 1)/2$ vigilantes y en la siguiente $(n + 1)/2$ como hay $(n + 1)/2$ calles de $(n - 1)/2$ vigilantes y $(n - 1)/2$ calles de $(n + 1)/2$ vigilantes la hipótesis correcta es:

  $v = (n^2 - 1)/2$ cuando n es impar.

“*Los vigilantes*”. Revisión:

- Después de comprobar que la solución encontrada es efectivamente la que nos pide el problema intentamos generalizarlo.
- Entre las ideas que suelen surgir en clase, esta la de considerar una ciudad rectangular con *n* y *m* calles respectivamente en cada uno de los lados.
- Aunque también podemos olvidarnos de la ciudad y los vigilante e intentar trasladar nuestro problema a una malla de puntos triangular, exagonal, o pentagonal.
- A partir de ahora vuelve a comenzar el problema.

VOLVER

EJEMPLO 2: *"La tira de papel"*

Con una tira de papel, pliégala por la mitad y luego por la mitad otra vez, doblando siempre en el mismo sentido. Si la desdoblas, observas que hay tres marcas una "hacia arriba" y dos "hacia abajo". Si la doblas n veces y luego la desdoblas completamente. ¿Cuántas marcas tendrás en total? ¿Cuántas de ellas son "hacia arriba" y cuántas "hacia abajo"?

“*La tira de papel*”. Abordaje. 1

- Después de leer detenidamente el problema, la primera acción es coger una tira de papel para doblarla y desdoblarla sucesivamente, señalando una de las caras para doblarla en el mismo sentido.
- A veces es necesario indicar la necesidad de hacer una tabla que agrupe de modo sistemático los resultados obtenidos.
- La tabla se puede realizar de diferentes formas, contando sólo el número de marcas, determinando las marcas hacia arriba y hacia abajo, o mucho mejor estableciendo el orden en el que aparecen, para lo que es necesario elegir una notación adecuada para diferenciar las marcas, por ejemplo, *a* para las marcas hacia arriba y *b* para las que están hacia abajo.
- Normalmente hay que coger varias tiras de papel doblarlas varias veces y una buena idea es nombrarlas como *a* o *b* en cada doblez.
- A partir del quinto doblez es difícil determinar las marcas en una tira de papel de medida A4 por lo que conviene formular hipótesis a partir de los resultados y encontrar una regla para determinar las marcas sin necesidad de plegar la tira

“*La tira de papel*”. Abordaje. 2

Tabla:

Doblez	Nº de marcas hacia arriba	Nº de marcas hacia abajo	Nº de marcas totales	Marcas
1	**0**	**1**	**1**	b
2	**1**	**2**	**3**	bba
3	**3**	**4**	**7**	bbabbaa
4	**7**	**8**	**15**	bbabbaab bbaabaa
5	**15**	**16**	**31**	

“La tira de papel”. Ataque

- **Con respecto al número total de marcas 1, 3, 7, 15, 31, …, una buena hipótesis es que si *n* es el número de dobleces el número total de marcas es: $2^n - 1$.**
- **Se observa también que el número de marcas hacia arriba es una menos que el número de marcas hacia abajo.**
- **Además si para *n* dobleces el número de marcas hacia abajo es 2^{n-1} y el número de marcas hacia arriba es $2^{n-1} - 1$, su suma, el número total de marcas, es: $2^n - 1$.**

“*La tira de papel*”. Revisión

- Se trata de demostrar que la hipótesis sugerida es cierta, en el primer doblez la tira queda dividida en dos partes, en los sucesivos cada parte sin marcas del doblez anterior queda dividida en 2, por lo tanto después de *n* dobleces la tira queda dividida en 2^n partes separadas por $2^n – 1$ marcas.
- Una buena experimentación permite determinar el orden en el que aparecen las diferentes marcas, se trata de intercalar las marcas del doblez anterior simbolizadas por (*) en la serie: b*a*b*a*b*a … b*a
- Esta regla nos permite explicitar el tipo de marca que ocupa un lugar para un número de dobleces dado, por ejemplo, cómo es la marca, hacia arriba o hacia abajo, que ocupa el lugar 25 cuando se realizan 7 dobleces.

María Molero y Adela Salvador

RESUMEN

- La resolución de problemas es una actividad mental que incluye los diversos procesos que rigen el pensamiento matemático, modulada por ciertos estados emocionales que interfieren, obstaculizando o facilitando dichos procesos.
- El éxito en la resolución de problemas mejora con la práctica y mediante la reflexión sobre el estudio del proceso en sí mismo, examinando las estrategias que proporcionan herramientas para afrontarlo con confianza, y las pautas o sugerencias heurísticas que son indicaciones o preguntas que sirven para fijar la atención en aspectos concretos del problema y nos permiten avanzar en su resolución.
- En el proceso de resolución de problemas resulta útil considerar varias fases que son similares en los distintos modelos. Así en el de G. Polya son: Comprender del problema, Concebir un plan, Ejecutar el plan y Examinar la solución y en el modelo de Mason-Burton-Stacey: Abordaje, Ataque y Revisión.

RESUMEN. MODELO POLYA

En el modelo de resolución de problemas que propone G. Polya podemos considerar 4 fases:

La primera es comprender el problema, lo que significa saber cuáles son los datos, la incógnita y la condición.

A continuación es necesario concebir un plan utilizando las estrategias de resolución de problemas y con la ayuda de las pautas o sugerencias heurísticas.

Después tenemos que ejecutar dicho plan intentando justificar la solución.

Por último hay que examinar y generalizar la solución obtenida.

RESUMEN. MODELO MASON - BURTON - STACEY

- El modelo de resolución de problemas de Mason-Burton-Stacey considera tres fases.
- En la fase de abordaje además de comprender el problema y familiarizarnos con el, se representa y organiza la información.
- En la fase de ataque intervienen procesos matemáticos fundamentales como son, hacer conjeturas y justificarlas, asociados a estados emocionales.
- La fase de revisión consiste en comprobar los resultados de forma reflexiva y generalizarlos a un contexto más amplio

VOLVER

AUTOEVALUACIÓN

1. Redacta el proceso de resolución, estableciendo las distintas fases del siguiente problema:

   Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?.

2. Establece la relación que existe entre las fases del modelo de Polya y las del modelo de Mason-Burton-Stacey.

3. Indica dos pautas o sugerencias heurísticas en cada una de las fases del modelo de Polya.

4. Indica tres características generales del modelo de Mason-Burton-Stacey.

AUTOEVALUACIÓN: SOLUCIÓN 1

1. :

- **Abordaje:** Consiste en ir considerando las puertas que van quedando abiertas, hasta observar que estas son: 1, 4, 9 ...
- **Ataque:** Por una parte parece que la solución es que se quedan abiertas las puertas cuyos números son cuadrados perfectos. Por otra parece que para que una puerta quede abiertas es necesario que su número tenga un número impar de divisores.
- **Revisión:** Esta ambivalencia desaparece si demostramos que los cuadrados perfectos son los únicos números con un número impar de divisores

2. La relación entre las fases de los dos modelos es la siguiente: la fase de Abordaje se corresponde con la fase de Comprender el problema y de la parte preparatoria de Concebir un plan en la que se representa la información mediante gráficos, tablas o diagramas. La fase de Ataque coincide con el final de la fase de Concebir un plan y con la de ejecutarlo y la fase de revisión coincide con la de revisar la solución.

AUTOEVALUACIÓN: SOLUCIÓN 2

3. :

- Comprender el problema. Sugerencias : ¿Qué datos tengo para encontrar la solución?, ¿Qué es lo que quiero conseguir?.
- Concebir un plan. Sugerencias: Pongo ejemplos concretos. Empiezo por lo más fácil.
- Ejecutar el plan. Sugerencias: ¿Qué consigo con hacer esto?, ¿Puedo justificar lo que estoy haciendo?.
- Examinar la solución. Sugerencias: ¿Tiene sentido el resultado?, ¿Puede haber otra solución?.

4. :

- El importante papel que juegan las emociones en el razonamiento matemático y que podemos expresar mediante rótulos al resolver un problema.
- Lo positiva que puede resultar la situación de estar atascado.
- La necesidad de desarrollar un monitor interior que vigile y critique nuestros razonamientos.

VOLVER

BIBLIOGRAFÍA.

- BRANSFORD J. D., STEIN B. S. (1986): **Solución ideal de problemas.** Labor, Barcelona
- J. BRIHUEGA; M. MOLERO; A. SALVADOR. (1994) (2002) **Didáctica de las Matemáticas**. Formación de Profesores de Educación. Secundaria. Editorial Complutense. Madrid**.**
- GRUPO CERO. (1985): **De 12 a 16: Un proyecto de Curriculum de Matemáticas.** Mestral. Valencia
- GRUPO DECA (1991): **Didáctica de la resolución de problemas.** Cep de Burgos. Burgos.
- GUZMÁN M. de (1991): **Para pensar mejor.** Labor, Barcelona.
- MASON J., BURTON L., STACEY K. (1989): **Pensar matemáticamente.** Labor-M.E.C., Barcelona.
- POLYA G. (1981): **Cómo plantear y resolver problemas.** Trillas, México**.**

VOLVER