RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
MÉTODO HEURÍSTICO

DATOS

INICIO

EL ENFOQUE HEURÍSTICO

PARTICULARIZAR Y GENERALIZAR

EJEMPLOS

CREATIVIDAD

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

RESUMEN

AUTOEVALUACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

María Molero y Adela Salvador

Datos

- **Título:** Resolución de problemas. Método heurístico
- **Autoras:** María Molero y Adela Salvador
- **Nivel educativo:** Secundaria, Bachillerato y Universidad
- **Descripción:** Se pretende destacar las ventajas del método heurístico frente al deductivo, analizando y reflexionando sobre procesos generales del razonamiento matemático que intervienen y favorecen la creatividad.

ÍNDICE

- INTRODUCCIÓN
- ENFOQUE HEURÍSTICO
- PARTICULARIZAR Y GENERALIZAR
- INFERENCIA
- DEDUCCIÓN
- CREATIVIDAD
- TRABAJO SUBCONSCIENTE
- TÉCNICAS MATEMÁTICAS
- RESUMEN
- AUTOEVALUACIÓN
- BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN. 1

- En los planteamientos metodológicos sobre el aprendizaje de las matemáticas hay dos enfoques el **heurístico** y el **deductivo**, que aunque no podemos considerar opuestos porque tienen procesos comunes, como la lógica y la deducción, están absolutamente diferenciados.
- En este tema se pretende destacar las ventajas del método heurístico frente al deductivo, analizando y reflexionando sobre procesos generales del razonamiento matemático que intervienen en él y favorecen la creatividad.
- El contexto adecuado para ejercitar el método heurístico es la **resolución de problemas**, ya que permite múltiples formas de ejercitar y reflexionar sobre procesos, como son la inducción, la deducción, la generalización y la particularización, que son las claves del pensamiento heurístico y aunque están presentes en otros campos de la actividad humana y de las matemáticas, la resolución de problemas los dotan de un significado muy preciso.

INTRODUCCIÓN. 2

- Muchas veces cuando pretendemos educar matemáticamente a nuestros alumnos y alumnas les enseñamos qué pensar, pero no cómo hacer para pensar, y esto no lo hacemos con objeto de ocultarles ningún secreto, sino porque no tenemos conciencia de los procesos que estamos aplicando y aunque los estemos utilizando inconscientemente, no se nos ocurre formularlos explícitamente y enseñarlos.

- Estamos obligados a preparar individuos que en el futuro se van a enfrentar a problemas que no conocemos y mucho menos sus soluciones. Los contenidos matemáticos que hoy nos parecen importantes, mañana pueden quedar obsoletos. Sin embargo los procesos del pensamiento matemático que intervienen en el razonamiento heurístico, siempre serán importantes ya que tienen un valor universal más amplio que el mundo de las matemáticas.

EL ENFOQUE HEURÍSTICO. 1

- El enfoque heurístico consiste en formular conjeturas (apoyándonos en el comportamiento de casos particulares), que intentamos refutar mediante contraejemplos concretos, que nos permiten rechazarla o nos dan la clave para justificarla.
- En el extremo opuesto de los planteamientos metodológicos está el que Lakatos denomina "estilo deductivista", de uso habitual en las clases de matemáticas, basado en la metodología euclídea. Consiste en enunciar una lista de definiciones y axiomas, impuestas de forma autoritaria, que suelen ser artificiales y complicadas, y que nos permiten establecer una serie de teoremas matemáticos mediante la deducción formal. Así las matemáticas se presentan como un conjunto de verdades eternas que no podemos refutar ni criticar. Se oculta la historia de cualquier descubrimiento matemático, que está llena de sucesivas formulaciones y pruebas aproximadas, para sólo destacar la infalibilidad del resultado final.

EL ENFOQUE HEURÍSTICO. 2

- La característica común de estos dos planteamientos metodológicos es que ambos utilizan el razonamiento lógico o deductivo, como proceso del pensamiento matemático. La diferencia esencial es que el método heurístico intenta producir matemáticas y el deductivo exponer resultados matemáticos.

- El método heurístico favorece la adquisición de conceptos, que se van formando paulatinamente mediante pruebas y refutaciones, frente al método deductivo en el que se pretende dotar de significado a una palabra mediante una definición formal.

INFERENCIA

- La inferencia es una forma de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Lo hemos llamado inferencia, aunque podríamos llamarlo inducción, razonamiento heurístico o acción de conjeturar.

- La inferencia trata de descubrir, a partir de la observación, la regularidad y la coherencia, basándose en la particularización, la generalización y la analogía.

- Para que surja una conjetura ante un problema se necesita confianza en sí mismo y valentía, que se consigue con el poso que dejan los éxitos anteriores al resolver otros problemas, y relajando las tensiones que produce el hecho de querer encontrar una solución y haber agotado las posibles sugerencias.

- **Conjeturar** supone generalizar, pero no basta con acumular una serie de casos y esperar que a surja la regla general, es necesario organizar la información de forma sistemática, y no hay que olvidar, que formular una conjetura no es resolver el problema, es necesario justificar que es cierta.

Deducción

- **Justificar una conjetura** es descubrir una estructura subyacente o una relación que une los datos con la solución mediante una serie de razonamientos. Es responder ¿por qué? mediante una serie de razonamientos lógicos o teoremas matemáticos.
- Si recordamos el problema ¡Vaya corte!, las conjeturas que proponían los alumnos y alumnas no eran definitivas, porque surgían del resultado de considerar una serie de particularizaciones, y en ningún momento se preguntaban el por qué de esa conjetura.
- Conseguir que alumnos y alumnas de Secundaria justifiquen las inferencias que realizan es bastante difícil. Una vez que han hecho una conjetura y la han comprobado para cuatro o cinco casos, ya es cierta para ellos. Por lo que, al menos, si no conseguimos que la justifiquen, si podemos enseñarles a ser críticos en la comprobación, intentando refutar las conjeturas, eligiendo hábilmente casos particulares para adquirir cierto grado de escepticismo con respecto a nuestros razonamientos y los de los demás.

VOLVER

PARTICULARIZAR Y GENERALIZAR

Los procesos de generalización y particularización son especialmente importantes en la resolución de problemas.

A pesar de que parecen conceptos opuestos cada uno interviene decisivamente en el otro.

Además si particularizar es una de las bases cuando empezamos a enfrentarnos al problema, generalizar es imprescindible en el momento de hacer conjeturas y cuando después de encontrar la solución, intentamos establecerla en contextos más amplios.

PARTICULARIZAR. 1

Particularizar consiste en concentrar la atención en ejemplos concretos, para entender mejor el significado del problema.

Es además una sugerencia muy útil para salir de una situación en la que nos encontramos atascados, porque proporciona seguridad en momentos clave en los que hay peligro de abandonar la tarea, también se utiliza para verificar una solución.

En este caso es conveniente, que aunque pensemos que una hipótesis es cierta, tengamos la habilidad suficiente de encontrar, si existen, las excepciones para refutar la regla.

PARTICULARIZAR. 2

- Cuando elegimos **ejemplos,** podemos hacerlo de forma aleatoria, para hacernos una idea del significado del problema. Si lo hacemos de forma sistemática, con la vista puesta más en el porqué que en el qué, preparamos el camino a la generalización y cuando los elegimos hábilmente estamos comprobando si el esquema descubierto es o no el correcto.

- Al particularizar es importante analizar los casos extremos, porque normalmente proporcionan información relevante. También es esencial que los objetos físicos o matemáticos que utilizamos como figuras, números más pequeños, símbolos matemáticos, … se puedan manejar con la confianza de no cometer errores.

- No hay que olvidar, que en los momentos de máximo bloqueo, en los que no sabes que hacer, particularizar extremadamente, puede ser una solución, intentando alterar el problema hasta hacerlo más concreto, o incluso cambiando las condiciones hasta conseguir realizar algún progreso.

PARTICULARIZAR. RESUMEN

- Particularizar un problema en casos concretos permite progresar en su resolución y es una ayuda en momentos de bloqueo.

- Particularizar sistemáticamente conduce a descubrir un esquema general que da una idea de por qué el resultado es verdadero. Comprobar si el esquema descubierto es o no correcto exige nuevas particularizaciones.

GENERALIZAR. 1

- Generalizar significa pasar de un conjunto de objetos a otro conjunto más amplio que contenga al primero. Es también descubrir una ley general que permita justificar una conjetura, así como buscar un planteamiento más amplio del problema, cambiando el contexto, los datos o la solución.

- La generalización permite **hacer conjeturas** a partir de unos pocos ejemplos. Ser sistemático y ordenado a la hora de particularizar ayuda mucho para generalizar, aunque es fácil engañarse y es preciso conseguir el equilibrio entre el crédulo que acepta toda generalización y el demasiado escéptico que no es capaz de dar un salto en el vacío.

GENERALIZAR. 2

- Otra idea importante sobre el proceso de generalización, es que muchas veces es conveniente **transformar un problema numérico en uno literal**, ya que tiene una dificultad similar y tener una solución general en función de unos parámetros nos permite variar los datos y verificar los resultados.

- Cuando se modifica el problema original y se buscan analogías con otros resueltos anteriormente, estamos utilizando una mezcla de generalización y particularización. Por una parte estamos considerando características particulares y por otra buscamos en la experiencia personal un caso más amplio que las pueda abarcar.

- Esta es una de las razones por la que la práctica influye tanto en la resolución de problemas. Cada problema resuelto añade información que nos ayuda a resolver otros problemas, además el hecho de resolverlo satisfactoriamente aumenta la confianza en nosotros mismos y nos genera el deseo de resolver otros problemas.

GENERALIZAR. RESUMEN

- Generalizar significa observar aspectos comunes en distintos casos particulares con objeto de formular conjeturas.

- También permite buscar contextos más amplios que generalicen nuestro problema.

GENERALIZAR. EJEMPLO

- A veces generalizar un problema puede ser útil para resolverlo si éste es un caso particular de uno más general que conocemos, como ocurre en el siguiente problema de geometría del espacio que propone G. Polya:

  Dada una recta y un octaedro regular en el espacio determina un plano que contenga a la recta y divida al octaedro en dos partes de igual volumen.

- Este problema puede sugerirnos otro más general: Dada una recta y un sólido en el espacio con centro de simetría, determinar el plano que contiene a la recta y divide al sólido en dos partes iguales.
- El plano que tenemos que hallar pasa por el centro de simetría del sólido. Luego el problema inicial se reduce a calcular un plano que contenga a la recta y al centro de simetría del octaedro.
- Esto sugiere lo que llama G. Polya *"La paradoja del inventor: El plan más ambicioso puede ser también el mejor"*. Y aunque resulte paradójico ocurre a veces, que un problema más general, se resuelve más fácilmente que uno particular.

EJEMPLO

- Vamos a analizar detenidamente el siguiente problema, poniendo de manifiesto planteamientos metodológicos como las fases de resolución, las estrategias heurísticas y principalmente la utilización de la generalización y la particularización como procesos generales del método heurístico y del razonamiento matemático.

  ¡Vaya corte!:

  En un papel cuadriculado trazamos rectángulos que tengan un número entero de cuadraditos en cada lado. Una diagonal del rectángulo puede cortar o no a los cuadraditos por los que atraviesa, se considera que no corta si sólo contiene a un vértice. Se trata de encontrar una regla para poder calcular (sin necesidad de contarlos) el número de cortes de la diagonal de un rectángulo cualquiera.

EJEMPLO: Fase de "Abordaje"

- El primer paso es comprender bien el enunciado. Lo normal cuando se plantea este problema en clase, es que comiencen a dibujar casos particulares.
- Trazan distintos rectángulos y cuentan el número de cortes, a veces hay que aconsejarles que realicen una **tabla** con los datos obtenidos.
- Es importante que elijan una **buena notación** para los datos y la incógnita llamando, por ejemplo, a y b a los lados del rectángulo y c al número de cortes.

- Otra forma de particularizar más sistemática, que aparece usualmente cuando se propone este problema en clase es confeccionar una tabla considerando primero el caso de un cuadrado y a continuación dejando un lado fijo
- En esa tabla la primera regularidad que observan es que al aumentar una unidad uno de los lados, el corte va también aumentando en una unidad.

Y después de esta observación lo normal es lanzarse a formular hipótesis.

a	b	c= nº cortes
3	3	3
3	4	6
3	5	7
3	6	6
3	7	9

EJEMPLO: Fase de "Ataque".1

- La primera conjetura que establecen es que el número de cortes c es igual a a+b-1 (ya que al añadir una unidad a un lado, tenemos un corte más) salvo en el caso específico de un cuadrado que entonces no se verifica.
- Aunque parece correcta la solución encontrada, no resulta satisfactorio que no se verifique para un cuadrado, es decir, que no se cumpla para "un caso límite".
- Una vez que han formulado esta conjetura se les aconseja volver a leer el enunciado y a particularizar más con otros datos por ejemplo cambiando a=5 por a=4.

Después de considerar a=4 con b=5, b=6, b=7, b=8, llegan a la conclusión de que si a+b es impar c es igual a a+b-1, si es par c vale a+b-2 y si uno es múltiplo del otro c es igual al mayor.

Cuando preguntas ¿Qué pasa cuando dos números verifican dos de las condiciones? o ¿Cuál de ellas hay que aplicar primero? observas que el objetivo que tienen es encontrar rápidamente una fórmula general, sin la menor intención de justificarla, haciendo gala del principio de que si una fórmula se verifica para cinco casos se verifica para todos.

a	b	c= nº cortes
2	1	2
4	5	8
4	6	8
4	7	10
4	8	8

EJEMPLO: Fase de "Ataque".2

- Ante este bloqueo y con la suerte de tener quien les dirija, cosa que a todos nos gustaría tener cuando nos enfrentamos a un problema, se les propone que consideren a=12 b=9 c=18.
- Aún así les cuesta mucho aceptar que cualquier hipótesis ha de estar justificada. En este caso lo importante es considerar los casos en los que la diagonal pase exactamente por el punto que es vértice común de dos de los cuadraditos y esto ocurre precisamente cuando los lados tienen divisores comunes.
- Por ejemplo en el caso a=4 y b=8 el número de cortes es 8, y cada dos cuadrados consecutivos, el corte es el mismo que los dos cuadrados siguientes. Luego la solución es cuatro veces lo que ocurre en el rectángulo a=2 y b=1, luego c=4.(2+1-1).
- Por tanto la hipótesis c = a + b - 1 es válida cuando a y b son primos entre sí. En caso contrario como a/mcd(a,b) y b/mcd(a,b) son primos entre sí, tenemos que el valor de c es igual a mcd(a,b).(a/mcd(a,b)+b/mcd(a,b)-1), luego c vale a+b-mcd(a,b). De esta manera, al intentar justificar la conjetura, encontramos la solución.

EJEMPLO: Fase de “Revisión”

- Es muy difícil conseguir que los alumnos y alumnas, una vez que han conseguido resolver el problema, comprueben cálculos, razonamientos, soluciones y revisen el proceso.

- Sin embargo les gusta especialmente inventarse nuevos problemas que lo generalicen.

- En este caso un problema más general, en el que además podemos utilizar los logros conseguidos en este, es considerar una cuadrícula formada por rectángulos.

VOLVER

CREATIVIDAD. 1

- La creatividad es un fenómeno muy raro, y cuando se presenta se encuentra tan impregnado de azar, casualidad y trabajo que nos resulta muy difícil determinar las conductas y procedimientos que la facilitan. Sin embargo lo que si podemos asegurar es que cuando se produce un descubrimiento el inventor/a posee las habilidades necesarias para lograr dar el salto en el vacío que separan un conjunto de conocimientos conocidos de uno nuevo y desconocido.

- Probablemente valoramos tanto la creatividad por las ventajas que tiene para la sociedad todo descubrimiento, y porque no conocemos los mecanismos que hacen surgir el pensamiento creativo. Sin embargo lo que si parece posible es aprender a ser más creativos, de forma parecida a como aprendemos comportamientos dirigidos a un objeto como leer o hablar.

- También hay rasgos característicos de la personalidad creativa como son la originalidad, la flexibilidad, la autoconfianza, la curiosidad intelectual y la capacidad de analizar, sintetizar e imaginar.

CREATIVIDAD. 2

- Sin embargo al formular hipótesis, o visualizar ideas que nos conducen hacia la solución de un problema, cuando generalizamos el resultado, o modificamos los datos para obtener un nuevo problema, tenemos la sensación de haber realizado un descubrimiento. La creatividad ha estado siempre relacionada con la resolución de problemas.

- Y aunque no podemos afirmar que el método heurístico favorezca la creatividad, si sabemos que ha estado muy ligado a los descubrimientos y de lo que si estamos seguros es que un método formalista no la facilita y si alguna vez con él se han conseguido resultados relevantes, es una rara casualidad.

TRABAJO SUBCONSCIENTE

Todos hemos tenido alguna experiencia en la que nos sentimos atascados resolviendo un problema y después de una noche de descanso, o de varios días sin pensar conscientemente en él, ¡Eureka!, se nos ocurre la solución.

Este hecho sólo puede explicarse si admitimos que hemos seguido trabajando en el problema de forma inconsciente. Sin embargo para que surja la idea es necesario que previamente hayamos realizado un trabajo consciente y que éste nos haya provocado una tensión mental producida por el ardiente deseo de resolverlo.

VOLVER

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. REDUCCIÓN AL ABSURDO

- El método matemático de **reducción al absurdo** consiste en partir de una hipótesis falsa, deducir consecuencias correctamente derivadas pero igualmente falsas, hasta llegar a una consecuencia evidentemente falsa.

- Para G. Polya *"La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la contraria"*.

- Una demostración indirecta es más fácil de realizar y aunque este método no es tan aplicable como otros puede ser muy eficaz en muchas ocasiones. Además, en ocasiones, no es difícil convertir una demostración indirecta en una demostración directa.

- Existen ejemplos clásicos de demostraciones indirectas en la historia de las Matemáticas como la que demuestra que el conjunto de los números primos es infinito (Euclides. Proposición 20 del libro IX de los Elementos)

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

- La **inducción matemática** es un método que se utiliza para *demostrar conjeturas sobre números naturales*.

- Una forma de que los alumnos de Secundaria entiendan lo que es la inducción matemática es plantear la siguiente situación:

Tenemos infinitos soldados colocados en una fila y queremos asegurarnos de que todos lleven la gorra puesta, una manera de conseguirlo es comprobar que el primero de la fila lo cumple y elaborar un mecanismo que nos garantice que si uno la lleva puesta también la lleva el siguiente.

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. PRINCIPIO DEL PALOMAR

- Un método de demostración matemática que Dirichlet utilizó en teoría de números y con el que logró resultados asombrosos es el **principio del palomar o principio de Dirichlet** que podemos formular del siguiente modo: *"Si m palomas ocupan n nidos y m>n, entonces hay al menos un nido con dos palomas".*
- Un ejemplo concreto en el que podemos aplicar esta técnica es el siguiente:

  Tenemos una caja con fichas blancas y negras. ¿Cuál es mínimo número de fichas que tenemos que sacar para tener dos fichas del mismo color?. ¿Y si las fichas son blancas, negras y rojas?.

OTRAS TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

- Otro principio cuyo enunciado es tan sencillo que parece imposible obtener de él algo interesante es el **método de descenso de Fermat** que podemos enunciar así: *En un conjunto de números naturales, hay uno que es el más pequeño.*
- Entre los resultados que Fermat obtuvo aplicándolo está la demostración de que raíz de tres no es un número racional.
- También tenemos que citar el **proceso diagonal de Cantor** con el que este matemático demostró que los números naturales y los números reales, no tienen el mismo número de elementos.

VOLVER

RESUMEN

- Hemos argumentado la relevancia del enfoque heurístico frente al deductivo, como planteamiento metodológico en el aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, analizando los distintos procesos del razonamiento matemático que intervienen en él, como son particularizar, generalizar, formular hipótesis o inferir y justificar hipótesis o deducir. También destacamos algunos aspectos que mejoran la creatividad o provocan el trabajo inconsciente.
- Por último comentamos brevemente, algunos métodos de demostración específicos de las matemáticas como son la reducción al absurdo, la inducción matemática, el principio de Dirichlet, el método del descenso de Fermat y el proceso diagonal de Cantor

AUTOEVALUACIÓN

- 1.- Indica tres razones por las que el enfoque heurístico sea mejor que el deductivo, como planteamiento metodológico en la resolución de problemas.
- 2.- ¿Qué proceso del razonamiento matemático tienen en común estos dos planteamientos metodológicos?
- 3.- ¿En qué fases del modelo de Mason-Burton-Stacey de resolución de problemas utilizamos los procesos de generalizar y particularizar?. ¿Con qué objeto los usamos?
- 4.- ¿Qué técnica matemática hay que utilizar para resolver el siguiente problema?.
- *Si tenemos cinco puntos en un triángulo equilátero de lado 1, hay como mínimo dos que distan menos de 1/2.*

AUTOEVALUACIÓN. SOLUCIÓN

- 1.- El método heurístico favorece la adquisición de conceptos, el pensamiento crítico y el descubrimiento matemático.
- 2.- La deducción.
- 3.- Particularizamos en la fase de abordaje para familiarizarnos con el problema y para intentar establecer una conjetura, y en la fase de ataque cuando antes de demostrar la hipótesis comprobamos casos particulares.

  Generalizamos en la fase de ataque cuando a partir de regularidades formulamos una hipótesis y en la fase de revisión al ampliar el contexto en el que se verifica la solución obtenida.
- 4.- El principio de Dirichlet. Uniendo los puntos medios de los tres lados, tenemos cuatro triángulos equiláteros de lado 1/2, como tenemos cinco puntos, al menos dos están en un mismo triángulo de lado 1/2 y por tanto su distancia es menor que este valor.

BIBLIOGRAFÍA

- J. BRIHUEGA; M. MOLERO; A. SALVADOR. (1994) (2002) **Didáctica de las Matemáticas.** Formación de Profesores de Educación. Secundaria. Editorial Complutense. Madrid. GUZMÁN M. de (1986): **Aventuras matemáticas.** Labor, Barcelona.
- LAKATOS I. (1978): **Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático**. Alianza, Madrid.
- POLYA G. (1981): **Matemáticas y razonamiento plausible**. Tecnos, Madrid.
- WEISBERG. (1987): **Creatividad. El genio y otros mitos.** Labor, Barcelona.