

LA CATENARIA EN ARQUITECTURA



$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right)$$

Aunque el término catenaria se emplea la mayoría de las veces para referirse a los cables del tendido eléctrico de los ferrocarriles, en matemáticas y arquitectura se emplea la palabra catenaria para designar la curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena o cuerda de densidad uniforme y perfectamente flexible sujeta por sus dos extremos y que se encuentra sometida únicamente a las fuerzas de la gravedad. En sentido estricto no se trata de una curva sino una familia de curvas, en la que cada una de ellas viene determinada por las coordenadas de sus extremos y por su longitud (figura 1).



Figura 1: Catenaria

Historia de la catenaria

A lo largo de la historia, los matemáticos se mostraron fascinados por la forma que adoptaba una cuerda o cadena que se combaba bajo su propio peso e intentaron descubrir cuál era la curva que la describía. Así, por ejemplo, ya en los libros de notas de Leonardo da Vinci podemos encontrar esquemas de cadenas colgando.

La prueba de que la resolución del problema no era nada fácil la tenemos en que un hombre de la talla intelectual de Galileo erró en su solución puesto que en 1638 publicó, en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias*, que la cadena asumiría la forma de una parábola. Ciertamente que

cuando realizó los experimentos que le llevaron a tal conclusión, el sabio de Pisa tenía ya 74 años y se encontraba casi ciego.

Sin embargo hoy sabemos que aunque el trazado de la parábola se asemeja mucho al trazado de la catenaria, ambas curvas son diferentes pues mientras la parábola está descrita por una ecuación cuadrática, en la expresión de la catenaria se involucran funciones hiperbólicas

En 1669 el matemático alemán Joachin Jungius fue capaz de demostrar que una cadena colgante no adoptaba una forma de parábola pero fue necesario que pasara casi medio siglo tras la muerte de Galileo, en 1642, para encontrar la solución verdadera.

En 1690 el suizo Jakob Bernoulli propone un desafío en la prestigiosa *Acta Eruditorum*, descubrir la fórmula matemática que definiera la verdadera forma de la curva de la cadena colgante. La respuesta no tardo en llegar y en 1691 la ecuación fue obtenida, de forma independiente, por su hermano menor Johann Bernoulli, con el que tenía gran rivalidad, y por Gottfried Leibniz y Chistiaan Huygens en 1691.

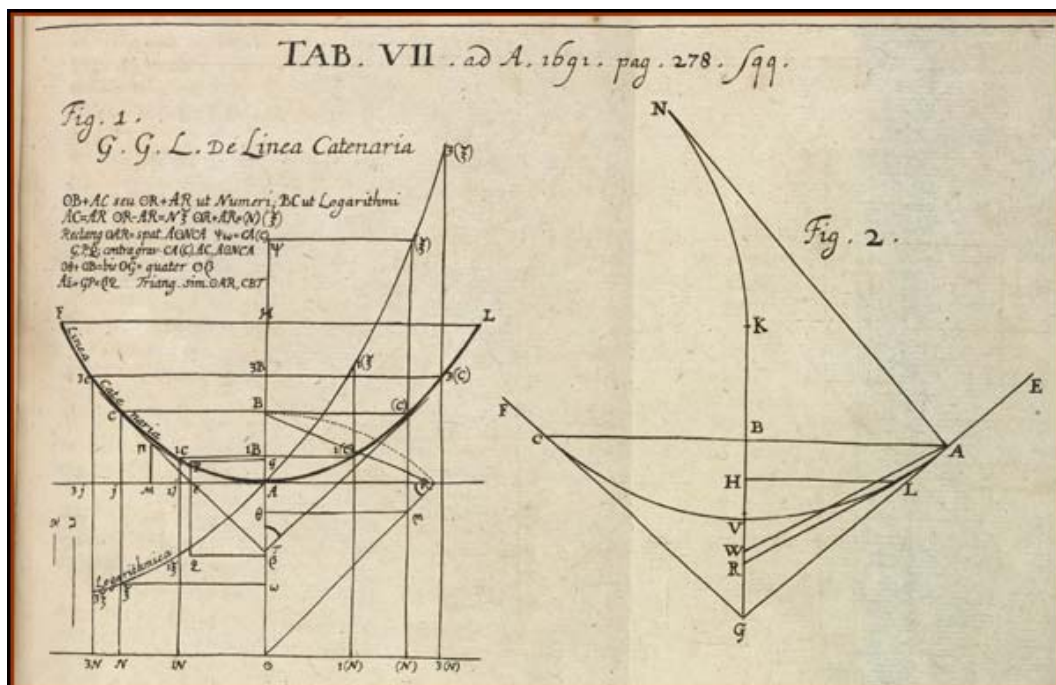


Figura 2: Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en *Acta Eruditorum* (1691)

Fue también durante el transcurso de estas investigaciones cuando Huygens emplea por primera vez el término *catenaria* para designar a esta familia de curvas en una carta dirigida a Leibnitz. Este término que deriva del latín *catena*, cuyo significado es *cadena*, se ha impuesto a otros sinónimos como *curva funicular* o *chainette*.

Es curioso reseñar que, como se puede deducir del examen de su correspondencia con Mersenne, un jovencísimo Huygens, ya había mostrado interés en el problema de la forma que adoptaba la cadena colgante pero, en ese momento, con sólo 17 años, fue incapaz de resolverlo aunque si pudo solucionar un problema relacionado, ¿cómo se deben colgar pesos en la cuerda para que adquiriera una forma parabólica?

En el mismo año en que el problema fue resuelto, 1691, David Gregory escribió, uno de los primeros tratados sobre esta familia de curvas y más tarde, en 1744, Leonhard Euler demostró que la catenaria es la curva que, rotada sobre el eje x produce una forma tridimensional que fue tras el plano, la primera superficie mínima descubierta, el catenoide.

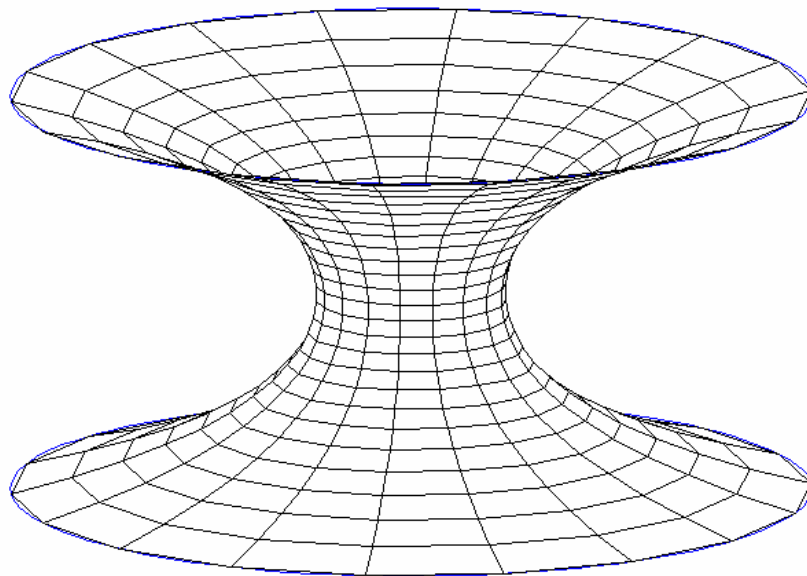


Figura 3: Catenoide

Descripción matemática

La ecuación de la catenaria tomando su mínimo en el punto (0,h) es:

$$y = h \cdot \cosh\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{h}{2} \cdot (e^{x/h} + e^{-x/h})$$

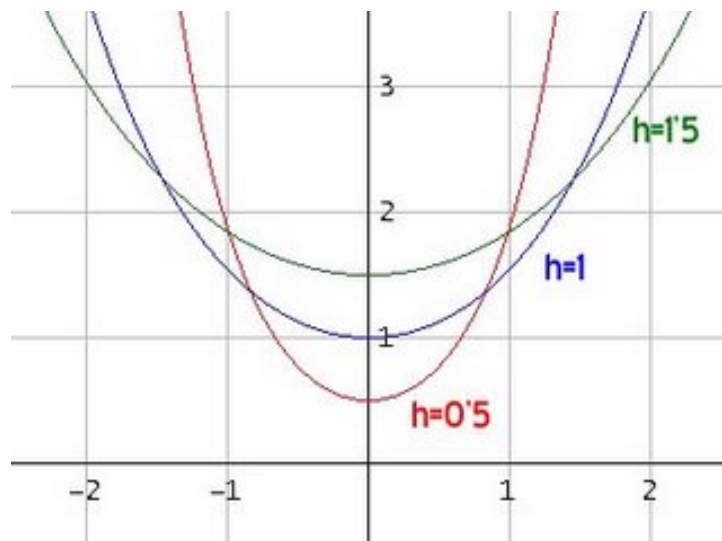
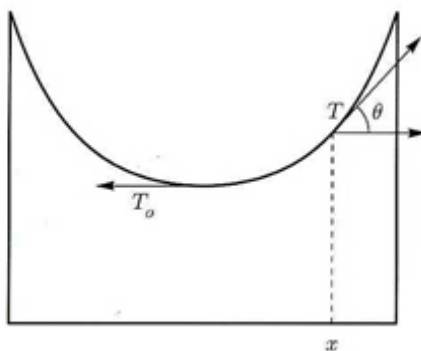


Figura 4: Representación gráfica de curvas catenarias (h es un parámetro que regula la apertura de la curva)

Se puede deducir la ecuación de la catenaria según el siguiente dibujo:



$$T \cdot \cos\theta = T_0, \quad T \cdot \sin\theta = w \cdot s(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{w \cdot s}{T_0}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{w}{T_0} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

El valor que alcanza la y en el punto mínimo de su gráfica responde a la siguiente relación

$$a = \left(\frac{T_0}{P} \right)$$

T_0 es la componente horizontal de la tensión, que es constante, y P es el peso por unidad de longitud del hilo.

Si se desarrolla en series de Taylor la función coseno hiperbólico, $\cosh(x)$, se obtiene que:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O^4(x)$$

Esto corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo que las gráficas son tan parecidas en el entorno de cero.

Diferencias con respecto a la parábola

Si observamos superpuestas las gráficas de una catenaria y una parábola podemos entender porqué los antiguos matemáticos en un principio suponían que era la parábola la curva que se combaba bajo su propio peso.

El desarrollo de las fórmulas matemáticas de una catenaria y una parábola coincide en sus tres primeros términos ($y = a + bx + cx^2$) y solo a partir del cuarto ambas expresiones se diferencian (pudiendo existir en los últimos términos de la expresión de la catenaria x elevadas a potencias mayores). Esto hace que las gráficas de ambas curvas se parezcan para valores pequeños de la x , acusando más su diferenciación según aumentan los valores de ésta.

La mayor diferencia entre las curvas corresponde a sus respectivas tangentes, en la catenaria el valor de la tangente tiende a la verticalidad mientras que en la parábola este valor tiene a una constante. Esto condiciona que en la catenaria, para valores infinitos de la y , la x tiende a valores limitados, mientras que en la parábola para los valores infinitos de la y se obtienen valores infinitos de la x . Ésta debería ser la característica que

hiciese prevalecer a los arcos catenarios frente a los parabólicos en arquitectura pero la facilidad de dibujar las parábolas frente a las catenarias hizo que el uso de éstas últimas fuera relativamente reducido en Europa hasta el siglo XIX. De cualquier manera, a pesar de la óptima calidad del arco catenario, así como de otras formas estáticamente estables, como la parábola invertida u otros arcos antifuniculares, durante mucho tiempo se consideró que tenían formas poco elegantes y no se utilizaron en la arquitectura clásica.

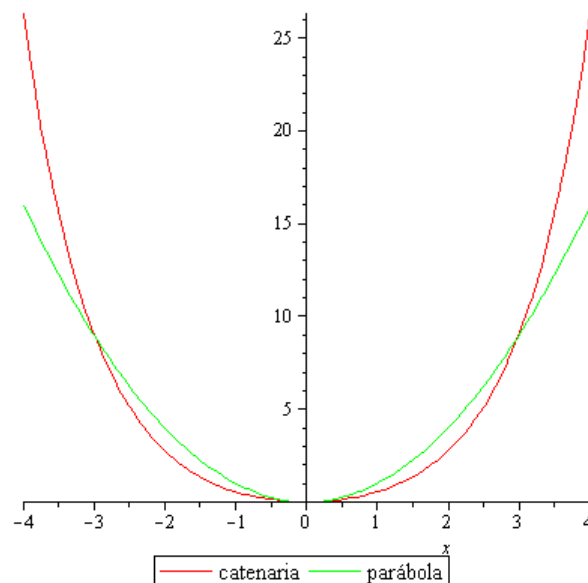


Figura 5: Representación gráfica de parábola y catenaria

Ambas curvas tienen además una curiosa relación. Si hiciéramos rotar una parábola apoyada sobre el eje de abscisas su foco dibujaría una curva catenaria.

Arco catenario

Se conoce como arco catenario a el arco que reproduce exactamente la morfología de una curva catenaria invertida. Todas las características matemáticas de la catenaria se conservan cuando su gráfica se invierte.

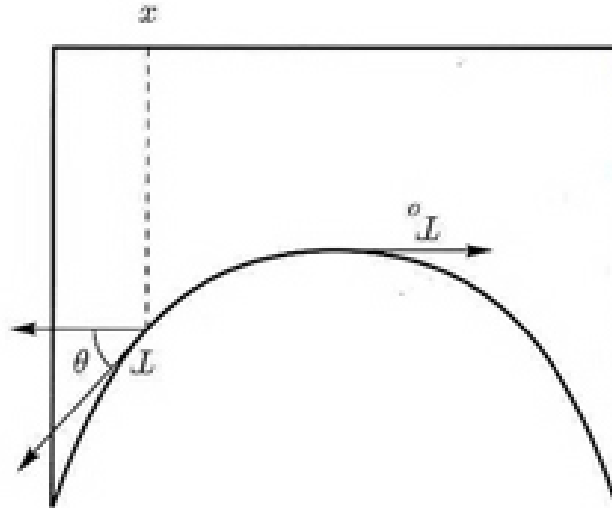


Figura 6: Catenaria invertida y arco catenario

El arco catenario es la forma ideal para el arco que se soporta a sí mismo. Cuando está construido de elementos individuales cuyas superficies son perpendiculares a la curva del arco, no existen fuerzas de cizalla significativas en las uniones y el empuje al apoyo se transmite a lo largo de la línea del arco.

Además para arcos catenarios de igual longitud, cuando mayor es la altura, más pequeño es el empuje horizontal en los puntos de arranque, con lo que se pueden obtener grandes alturas con mínimos empujes laterales.

Del arco catenario se derivan los arcos funiculares que tienen también óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad reproduciendo (invertidos) los efectos de cargas puntuales sobre una curva catenaria.

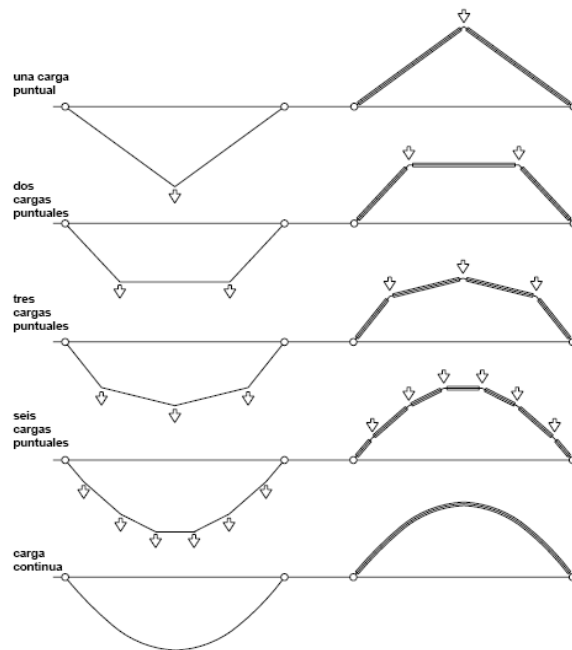


Figura 7: Cable suspendido y arco funicular. Efectos de cargas puntuales

Historia

Como veremos mas adelante, en la antigüedad, sobre todo en Oriente, se construyeron intuitivamente arcos estables con la curvatura de catenarias invertidas. Sin embargo, la cultura occidental, desde Grecia y Roma, diseñó sus arcos y bóvedas a partir curvaturas menos eficientes derivadas del círculo, más fáciles de construir pero menos estables. De hecho durante toda la edad media y el renacimiento la catenaria invertida no fue empleada en Europa aunque podríamos considerar al arco gótico como una afortunada aproximación fortuita.

El abordaje científico del problema no se produjo hasta bien entrado el siglo XVII, cuando sobre 1670 el polifacético Robert Hooke planteó en la Royal Society de Londres el problema de ¿cuál sería la forma ideal de un arco? Él mismo dijo haberlo resuelto en 1671 pero no dio detalles al

respecto hasta el año 1675, cuando ofrece la solución encriptada mediante un anagrama en un apéndice de su *Description of Helioscopes*. Sin embargo nunca llegó a revelar en vida la solución del mismo y sólo después de su muerte fue desvelado por su albacea en 1705: "*Ut pendet continuun flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*", igual que cuelga un hilo flexible pero invertido se sostendrá un arco rígido.

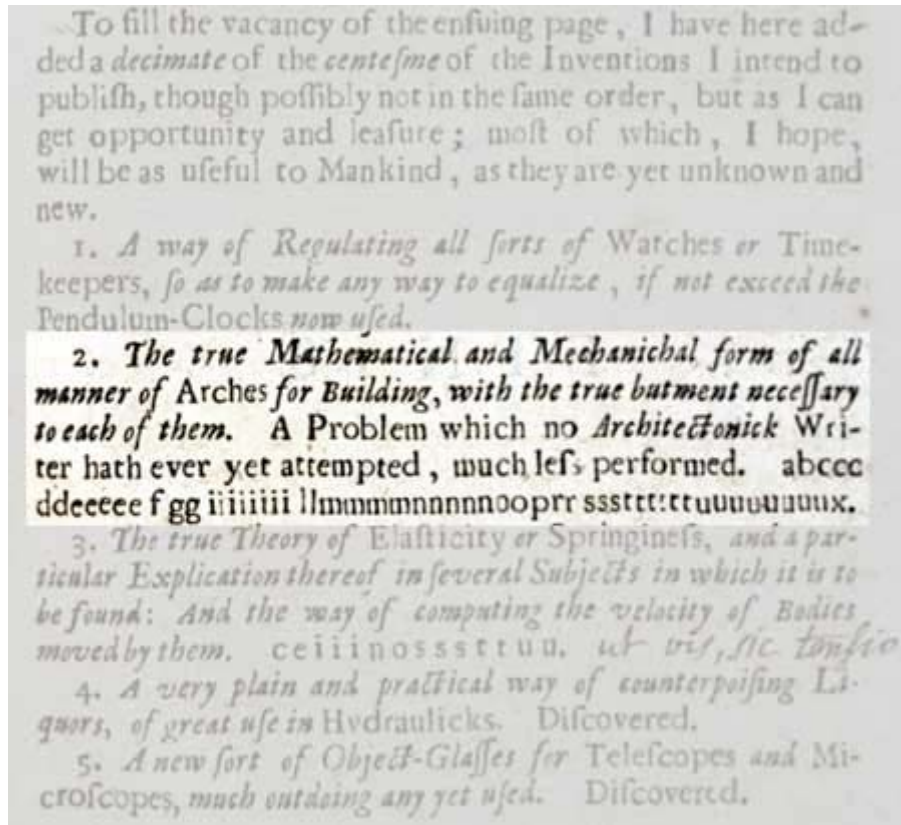


Figura 8: Anagrama de Robert Hooke

La idea de Hooke de entender el comportamiento de los arcos por analogía con el comportamiento de los cables colgantes es una de las más geniales de la historia de la arquitectura. Años después, en 1697, Gregory añadió un interesante matiz. La forma ideal de un arco sería en efecto la de una catenaria invertida y si el resto de arcos se sostiene es porque hay una catenaria en su interior.

Este concepto permite calcular arcos utilizando modelos colgantes sencillos y fue aplicado por los ingenieros ingleses del siglo XVIII en la construcción de puentes y recogido por Thomas Young en 1845 en su *Course of lectures on natural philosophy and mechanical arts*. En Europa continental tuvo menos difusión aunque se cita en tratados de varios autores franceses y alemanes.

Es obvio que Antonio Gaudí tuvo conocimiento, cuando estudiaba arquitectura, de estas fuentes pero su mérito está en su desarrollo y aplicación sistemática de estos modelos en algunas de sus obras más conocidas.

Propiedades

Al ser la curva que se comba bajo su propio peso, la catenaria tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales del cable se compensan y por ello carece de tensiones laterales por lo que la cadena permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las fuerzas que actúan son una fuerza vertical, la de la gravedad, y una tensión tangente a la cadena en cada punto que es la que la mantiene estirada.

Como ya hemos dicho, la estructura que en la arquitectura aprovecha las ventajas mecánicas de la catenaria recibe el nombre de arco catenario y se trata de un arco que adquiere la forma de una catenaria invertida. Al igual que en las catenarias la tensión que padece cada punto del arco se reparte entre una componente vertical y una componente de presión que se transmite a través del propio arco hacia los cimientos, sin que se creen esfuerzos horizontales, salvo en el extremo llegando ya a los cimientos.

Es esta propiedad la que hace que los arcos catenarios no necesiten apoyos laterales para sustentarse. Sin embargo la cultura occidental, desde Roma, diseñó sus arcos y bóvedas a partir de curvaturas menos eficientes

derivadas del círculo, más fáciles de construir pero menos estables, y durante toda la edad media y el renacimiento la catenaria invertida fue olvidada en Europa pese a que los arcos de medio punto del Románico tendían a abrirse por lo que eran necesarios grandes muros de contención que los sostuvieran para evitar que se agrietaran. Ni siquiera los arquitectos del Gótico consiguieron dar con la forma adecuada de transmitir los esfuerzos laterales y pese a que los arcos ojivales fueron una afortunada aproximación a la forma de la catenaria, aún era necesario el empleo de robustos arbotantes para que absorbieran las fuerzas horizontales y las trasladasen hacia los cimientos. No será hasta finales del siglo XIX con la llegada del Modernismo cuando los arquitectos, entre los que destaca Gaudí comiencen a utilizar los arcos catenarios.

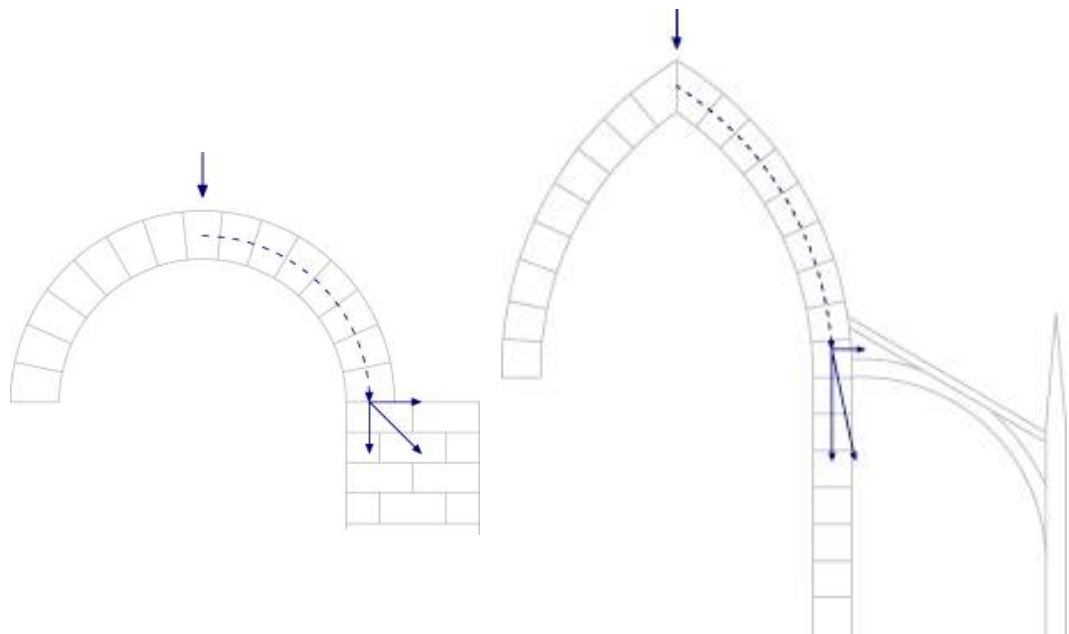


Figura 9: Transmisión de fuerzas en arcos románicos y góticos

La Catenaria e n la antigüedad

Mientras que en Occidente no fue hasta el siglo XIX cuando se empiezan a utilizar las catenarias en arquitectura, en Oriente el empleo de estas estructuras era más común en la arquitectura relacionada con el Islam, un ejemplo de ello es el asombroso parecido que encontramos entre la cúpula de la Mezquita de la Roca de Jerusalén y una cúpula catenaria perfecta.

Sin embargo, estos conocimientos procedían de más antiguo aún, ya que en la arquitectura tradicional de Noreste de África, por ejemplo en Sudán se encontró la forma de construir amplias habitaciones circulares cubiertas con una cúpula catenaria utilizando únicamente adobe y sin necesidad de entibar, pues mientras dura la construcción los empujes horizontales son tan pequeños que los adobes se mantienen en su posición simplemente con el rozamiento de los ya instalados y una vez cerrada la cúpula, ésta adquiere una resistencia extraordinaria. El desarrollo de ésta técnica surgió como respuesta a la escasez de madera. En esa zona la madera es tan escasa y valiosa, que es inaccesible para la construcción de viviendas pobres, ni por supuesto para realizar los andamiajes.

Una situación análoga se da en las latitudes más septentrionales y existen estudios geométricos que parecen demostrar que los iglús de los esquimales canadienses no son semiesferas, tal como los solemos representar, sino que su morfología se aproxima más a catenoides de revolución con una relación altura/diámetro óptima.

Paradójicamente hay ejemplos de catenarias en las sociedades más pobres y en las más ricas. Por ejemplo la enorme resistencia y estabilidad de las bóvedas catenarias hace que se usen en la actualidad para cubrir los reactores en las centrales nucleares

Independientemente de esto, existen pruebas irrefutables de que en la antigüedad se construyeron intuitivamente arcos estables con la curvatura

de catenarias invertidas en grandes edificios. Probablemente el mejor ejemplo sea el Gran Arco de Ctesifonte o Taq-i Kisra que es el único resto visible de la antigua ciudad de Ctesifonte en la antigua Persia, actual Irak. Este arco, construido sin cimbras, era parte del palacio imperial de la ciudad que durante siete siglos fue la capital de seléucidas, partos y sasánidas que constituyó un bastión en esta parte del mundo contra el imperio romano.

Es de destacar que las inundaciones que se produjeron en la zona durante el siglo pasado derribaron una de las alas de la construcción existente pero no el gran arco que sigue en pie en la actualidad.



Figura 10: Arco de Ctesifonte. Grabado del siglo XVIII y situación actual

Antonio Gaudí

Uno de los grandes arquitectos de todos los tiempos, el catalán Antonio Gaudí i Cornet que vivió entre 1852 y 1926, en una época de grandes transformaciones sociales en la que se produjo el tránsito a la arquitectura moderna, es probablemente el primero en investigar y hacer uso en su obra de la catenaria y otros arcos antifuniculares.

No cabe duda de que Gaudí es un maestro de la arquitectura con una visión global de la obra, que cuida todos los detalles e integra, desde los primeros momentos de la concepción del proyecto, aspectos tan diferentes como la estructura, la distribución o la ornamentación.

Si nos centramos en el aspecto del cálculo de estructuras, la característica más relevante y la que lo diferencia del resto de arquitectos de su época, es que, desde el inicio, hay una preocupación por el diseño de una estructura estable y no una mera comprobación de estabilidad *a posteriori*.

Este interés en construir estructuras estables, apoyado en una buena formación técnica, es él que le lleva a buscar soluciones originales centradas en la raíz de los problemas y por ello, desde sus primeras obras, al empleo de arcos catenarios y parabólicos que eran muy poco habituales en la arquitectura occidental.



Figura 11: Colegio de las Teresianas. Fachada principal y detalle de la entrada

Aunque por otro lado es evidente que su interés por este tipo de arcos no es meramente estructural, sino que los encontraba estéticamente satisfactorios, ya que los emplea con profusión en lugares donde otras soluciones estructurales hubieran sido posibles. Gaudí llega a manifestar que “... *la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera*”, “*evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguenta sin raros accesorios ortopédicos*”.

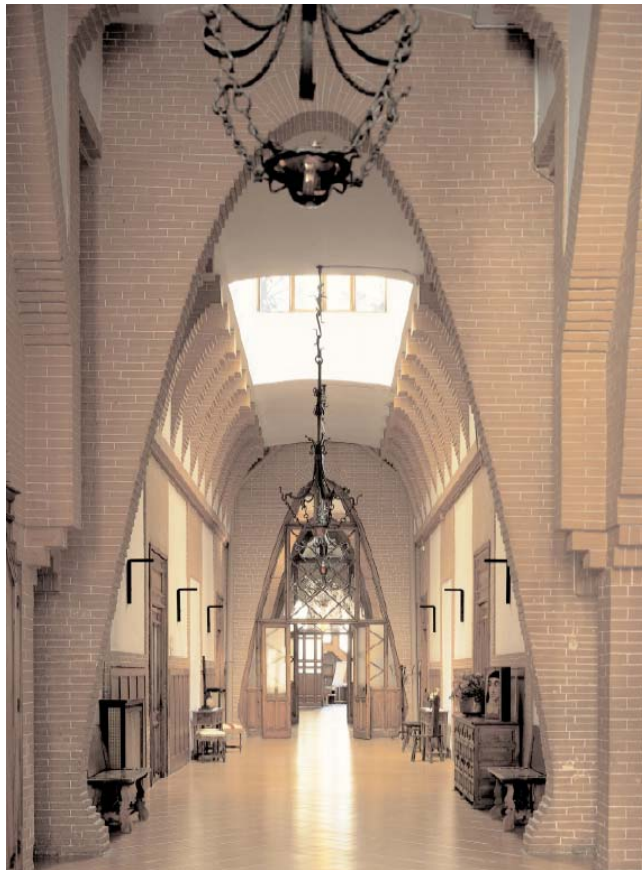


Figura 12: Colegio de las Teresianas. Arcos catenarios de mampostería

Además la catenaria es una forma natural y la naturaleza es un referente continuo para Gaudí que imita sus formas y crea formas inspirándose en la misma. Para el arquitecto “... *el gran libro siempre abierto y que hay que hacer el esfuerzo de leer es él de la naturaleza, los otros*

libros han sido extraídos de este y además contienen las equivocaciones y las interpretaciones de los hombres”.

Por otro lado, esta curva es sencilla de realizar para los trabajadores. Tenemos referencias de que el proceso de construcción era simple, se fijaba la luz del arco, se clavaban dos clavos en la parte alta, se suspendía una cadena hasta que el punto más bajo coincidía con la flecha deseada del arco, se dibujaba la forma resultante utilizando la cadena como guía y el carpintero construía la cercha correspondiente que luego se invertía y se situaba en su sitio.

Siguiendo el mismo principio de la inversión de la cadena colgante para obtener el arco catenario, Gaudí utilizó en algunos casos para el diseño de estructuras la estrategia de la maqueta colgante. Por ejemplo en el proyecto de la iglesia de la colonia Güell creo una reproducción a escala 1:10 para las medidas de longitud (1:10.000 para el peso) en la que mediante hilos que simulaban columnas y arcos y pesos suspendidos para reproducir las cargas conseguía determinar las formas adecuadas. Bastaba luego fotografiar la maqueta e invertir la fotografía para conocer la forma ideal de los arcos.

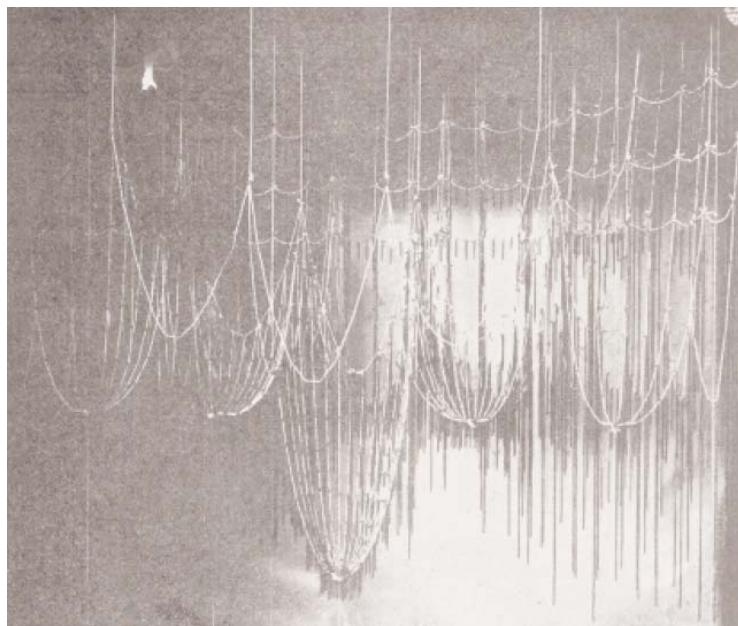


Figura 13: Estereofunicular de Gaudí publicado por Rafols en 1928

En la obra de Gaudí hay muchos ejemplos del uso de arcos catenarios, destacando los del Colegio de las Teresianas (1889-90), la casa Batlló (1904-06), la casa Milá (1906-10) o la cripta de la colonia Güell (1908-15).



Figura 14: Arcos catenarios en los desvanes de la casa Batlló

En su trabajo con los arcos parabólicos y catenarios, Gaudí utiliza frecuentemente algunos recursos como la simetrización y sobre todo la traslación de los arcos para conseguir efectos especiales. La traslación consiste en una repetición de arcos idénticos con la que se consigue un efecto de cenefa que nos dirige hacia un determinado lugar. Lo podemos ver por ejemplo en los largos pasillos del colegio de las Teresianas cubiertos por arcos catenarios.



Figura 15: Traslación de arcos catenarios en el colegio de las Teresianas

En la casa Milá la estructura del ático la constituye una sucesión de 270 arcos de ladrillo de diferentes alturas que adoptan forma de catenaria y sirven para distribuir el peso de la ondulante azotea. Los arcos crean recorridos serpenteantes alrededor de los volúmenes cilíndricos de las escaleras.

La buhardilla fue dividida durante algunos años en apartamentos que modificaron sustancialmente su aspecto pero, tras la compra en 1986 por la Caixa de Cataluña para rehabilitar el edificio y convertirlo en un centro cultural, se ha conseguido que estos arcos se puedan observar en la actualidad con su aspecto original, pudiéndose apreciar que están contruidos con la técnica catalana, que tienen un grosor de un solo ladrillo y que se unen entre sí por hileras de también un único ladrillo.

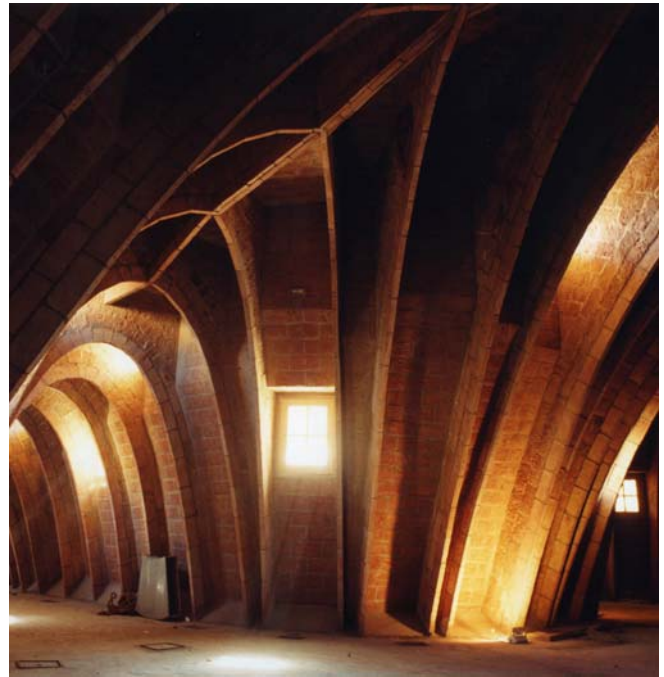


Figura 16: Arcos catenarios en buhardilla la casa Milá

The Gateway Arch

Probablemente la obra arquitectónica con forma de arco catenario más famosa del siglo XX es el Gateway Arch de San Luis (Missouri), obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen que constituye una maravilla de la construcción, sobre todo si tenemos en cuenta que fue proyectado en una época anterior a las computadoras.



Figura 17: Gateway Arch. Fase final de la construcción

El diseño de Saarinen fue el ganador de un concurso nacional desarrollado en 1947 para la creación de un monumento en recuerdo de los pioneros de la conquista del Oeste americano y está incluido junto con el Museo de la conquista del Oeste y el antiguo edificio de los Juzgados de San Luis en el *Thomas Jefferson Nacional Memorial*.

Saarinen quiso crear un monumento *perfecto* en memoria del espíritu de aquellos hombres y por ello eligió una forma perfecta, la curva catenaria,

aunque quizás también quisiera recordar a Jefferson, tercer presidente de los Estados Unidos, que fue el gran impulsor de la expansión hacia el Oeste y que además fue quien empleó por primera vez la palabra *catenary* (catenaria en inglés) en una carta a Paine en diciembre de 1788 en la que expresa su opinión favorable al empleo de una curva de este tipo en la construcción de puentes, basándose en las conclusiones de Lorenzo Mascheroni en su *Nuove ricerche sull' equilibrio delle volte*.



Figura 18: Gateway Arch. Aspecto general

El arco es el monumento nacional más alto de los Estados Unidos de América con una altura de 192 metros, distancia que es exactamente igual, pese a que la ilusión óptica sugiera lo contrario, a la separación existente entre los dos puntos de arranque a nivel del suelo.

Con un coste de 15 millones de dólares, fue construido entre 1963 y 1965 y se emplearon en él más de 34.000 toneladas métricas de hormigón, de las que dos tercios están en los cimientos que se hunden unos 20 metros, y más de 4.600 de acero, de las que casi 800 están en las placas que recubren la estructura.

La sección del arco es un triángulo equilátero cuya superficie disminuye a medida que se asciende y en su interior existe un sistema de ascensores que permite acceder a la zona de observación situada en la cúspide que constituye una atracción turística de primer orden.



Figura 19: Gateway Arch y skyline de San Luis



$$y = 693.8507 - 68.7672 \left(\frac{e^{0.0100333x} + e^{-0.0100333x}}{2} \right)$$

Figura 20: Gateway Arch y ecuación matemática que se aproxima a su curva

Otras obras modernas

Aunque el Gateway Arch es la obra con forma de catenaria más reconocible, existen otros ejemplos famosos en la arquitectura moderna. Examinaremos la Reserva Federal en Minneapolis y el recientemente construido Kingdom Centre en la capital de Arabia Saudita.

Antigua Reserva Federal de Minneapolis

Un edificio destacable con una característica forma de catenaria es la antigua Reserva Federal de Minneapolis. El diseño es del arquitecto de origen letón Gunnar Birkerts e imita un puente colgante. Consiste básicamente en dos grandes estructuras laterales de hormigón separadas 100 metros una de la otra que sirven de soporte en las que se anclan dos inmensos cables de los que cuelga un edificio de 11 pisos. Los cables adoptan una forma de curva catenaria que se reproduce en la fachada para resaltar el sistema constructivo empleado.



Figura 21: Aspecto original de la Reserva Federal de Minneapolis

Este edificio, cuyo proyecto que fue muy galardonado en el año 1974 y muy citado posteriormente en los libros de arquitectura, sufrió sin embargo algunos problemas estructurales y fue necesario remover el asbesto que contenía lo que obligó al traslado de la Reserva Federal a una nueva localización y a una reforma muy importante del edificio y de todo su entorno que terminó en el año 2003 y permitió, durante la misma, observar los cables con forma de catenaria que sustentan la estructura (Figura 25).

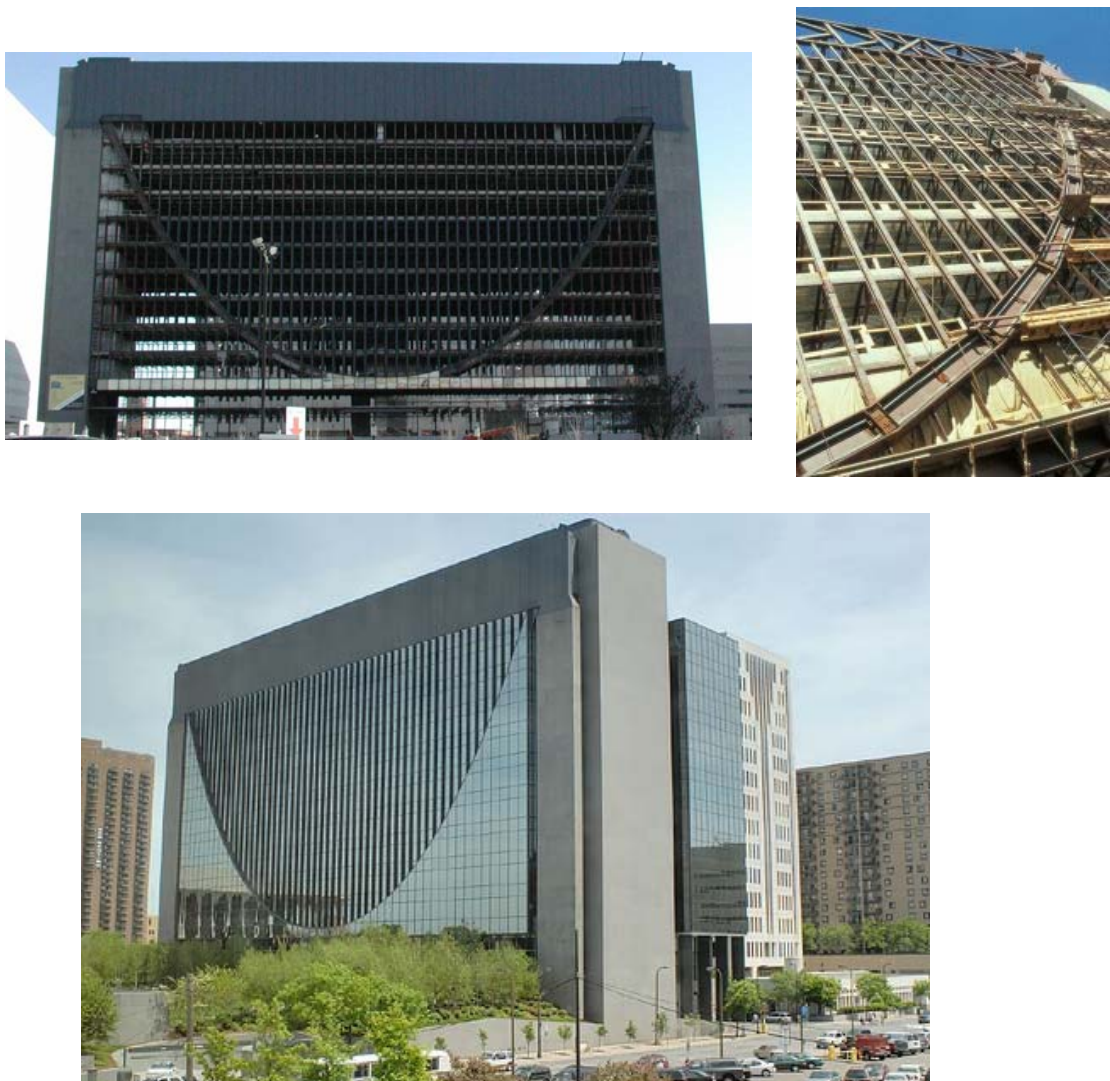


Figura 22: Reserva Federal de Minneapolis durante las obras del año 2003 y tras la finalización de las mismas

Kingdom Centre

Otro espectacular ejemplo de catenaria, aunque en este caso el uso es más estético que estructural, lo podemos encontrar en Oriente medio, en concreto en Riad, la capital de Arabia Saudita donde se encuentra el *Kingdom Centre*, un rascacielos que cuando se acabó de construir en el año 2002, era con sus más de 302 metros de altura, uno de los 25 edificios más altos del mundo.

El arquitecto fue Scott Berry de la firma Ellerbe Beckett, que ganó un concurso al que se presentaron más de 100 de las más importantes firmas de arquitectura del mundo y que tardó tres años en resolverse.

El edificio fue planteado como un símbolo de Arabia Saudí y a su curva catenaria se han referido como “un collar para la ciudad de Riad”. Propiedad de la familia real Saudita, alberga entre otros a un hotel, un banco, un centro comercial, un centro deportivo y viviendas de lujo.



Figura 27: Kingdom Centre. Ryad

Bibliografía

IBAÑEZ TORRES R. El vientre de un Arquitecto (La búsqueda de la forma). En Ibáñez R, Macho M. Ciclo de Conferencias de la Universidad de País Vasco: "Un paseo por la geometría". Curso 2003-04. Disponible en: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ribanez.pdf>

CRIPPA MA. Gaudí. De la Naturaleza a la arquitectura. Ed Taschen. Colonia 2007.

SERRAINO P. Eero Saarinen: Un expresionista estructural. Ed Taschen. Colonia 2006.

HUERTA S. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí. Ingeniería civil 2003; 129: 121-33.

DIRECCIÓN GENERAL DEL PATRIMONIO DEL ESTADO, Sociedad estatal para la acción cultural exterior. Gaudí la búsqueda de la forma. Barcelona, 2002. http://www.seacex.es/documentos/gaudi_arcos.pdf

HANDY RL. The igloo and natural bridge as ultimate structures. Disponible en: <http://pubs.aina.ucalgary.ca/arctic/Arctic26-4-276.pdf>

PÉREZ SANZ A. Curvas en la Naturaleza. En Ibáñez R, Macho M. Ciclo de Conferencias de la Universidad de País Vasco: "Un paseo por la geometría". Curso 2004-05. Disponible en: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-perez.pdf>

<http://www.gatewayarch.com/Arch/info/arch.fact.aspx>

<http://www.nps.gov/jeff/index.htm>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Catenary.html>

http://www.mcrit.com/comsoc/treballsrecerca/treballs_03_04/treb_publicats/gaudi/documents/estructures.pdf

<http://moleskinearquitectonico.blogspot.com/2008/02/casa-mil-antonio-gaud.html>

<http://www.absoluteastronomy.com/topics/Catenary>