CAPÍTULO 4

Integración en el plano complejo

El desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja sigue un camino muy diferente al de la teoría de funciones de variable real, pues en esta última, después de considerar las funciones derivables, se procede a estudiar aquellas que admiten derivadas de segundo orden, y seguidamente aquellas que son indefinidamente derivables, mientras que en el caso de las funciones de variable compleja, una vez que se requiere que sean funciones holomorfas, es decir, derivables en un abierto, esto lleva consigo el que estas funciones sean indefinidamente derivables y verifiquen, además de un gran número de propiedades, resultados aparentemente sorprendentes como el hecho de que toda función holomorfa sea analítica.

La integración en el campo complejo es notable por su distinción matemática ya que los teoremas son, en general, poderosos mientras que sus demostraciones son casi siempre muy sencillas. En este capítulo se estudian las integrales de funciones complejas de una variable compleja.

Mientras en la recta real el significado del símbolo "integral entre *a* y *b*" es claro pues en $\Re$ sólo hay un camino, cuando se quiere extender esta idea al campo complejo se debe previamente conocer cómo ir desde *a* hasta *b*, pues *a* y *b* son puntos de un plano y no del intervalo [*a*, *b*], por lo que se debe especificar el "camino" a lo largo del cual se hace la integral, y es natural suponer que la integral dependa del camino. Las principales conclusiones responden al descubrimiento de condiciones que hacen que el valor de la integral no dependa del camino elegido, y éstas están íntimamente relacionadas con el hecho de que la función sea holomorfa.

Así como en el caso de la integración real se tenía el objetivo geométrico de “encontrar un área”, en el caso de la integral compleja el proceso es inverso, primero se generalizan las integrales reales, y después se investiga sobre su significado. El valor de la integral va a ser un número complejo que, al considerar separadamente su parte real y su parte imaginaria, será posible interpretar geométricamente y físicamente.

4.1. CURVAS EN EL CAMPO COMPLEJO

Para calcular la integral entre dos puntos se puede hacer a través de distintas curvas que unan dichos puntos, por lo que se debe comenzar estudiando la representación paramétrica de una curva. En este apartado se introduce el concepto de camino, o aquellos tipos de curvas que resultan apropiados para definir sobre ellas la integral de una función compleja.

Definición 4.1.1:

Una ***curva*** o ***arco de curva*** es una aplicación continua γ: $[a, b] \subseteq \Re \to \mathbf{C}$, tal que a un número real t le corresponde el número complejo $\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$.

Definición 4.1.2:

Se denomina ***traza*** o **trayectoria** de la curva a su imagen:

$$(\gamma) = \{\gamma(t): a \leq t \leq b\}.$$

Por ser γ una función continua, la traza es un subconjunto compacto del plano complejo.

No se debe confundir la curva γ, que es una aplicación, con su traza, (γ), que es un subconjunto de puntos del plano complejo, ya que la curva no es sólo su traza sino una cierta forma de recorrerla, como puede comprobarse en el ejemplo 4.1.3.

Definición 4.1.3:

Los ***extremos*** de la curva son los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, siendo $\gamma(a)$ el *punto origen* y $\gamma(b)$ el *punto final*. Una curva es ***cerrada*** si coinciden sus extremos, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 4.1.4:

Una curva es un ***arco simple*** o ***arco simple de Jordan*** si la aplicación γ es inyectiva (es decir, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica que $t_1 = t_2$). Es decir, la curva no pasa por un mismo punto dos veces.

Una curva es ***cerrada simple*** *o* ***curva de Jordan*** si es cerrada, es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$, y la restricción a $[a, b)$ es inyectiva.

Una curva de Jordan divide al plano complejo en dos subconjuntos abiertos y conexos, uno acotado, el interior de la traza, *int* γ o $\overset{\circ}{(\gamma)}$, y el otro no acotado, el $ext(\gamma)$. Este resultado que es intuitivamente evidente tiene una difícil demostración.

Definición 4.1.5:

Dado un número natural $n \geq 1$ se dice que una curva γ: $[a, b] \subseteq \Re \to \mathbf{C}$ es de clase C^n en $[a, b]$, y se denota $\gamma \in C^n([a, b], \mathbf{C})$ cuando $\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ verifica que $x(t) \in C^n([a, b], \Re)$, $y(t) \in C^n([a, b], \Re)$.

La expresión $C^n([a, b], \mathbf{A})$ representa el conjunto de funciones definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ sobre $\mathbf{A}$, continuas y con sus derivadas continuas hasta el orden n.

Definición 4.1.6:

Una curva es ***diferenciable con continuidad en* [*a, b*]**, o bien ***continuamente diferenciable en* [*a, b*]**, si la aplicación γ es continua y con derivada primera continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, (incluidos los extremos, donde las derivadas son las derivadas laterales), es decir, $\gamma \in C^1[a, b]$.

Por lo tanto existen las derivadas $x'(t)$ $y'(t)$ en $[a, b]$ y dichas derivadas son continuas. A una curva diferenciable con continuidad se la denomina ***arco suave*** si las derivadas no se anulan en el intervalo $[a, b]$.

Definición 4.1.7:

Una curva es ***diferenciable con continuidad a trozos***, o un ***arco suave a trozos***, si el intervalo $[a, b]$ se puede descomponer en una cantidad finita de intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ con $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de modo que γ sea una curva diferenciable con continuidad en cada intervalo, es decir, si $\gamma \in C^1([t_k, t_{k+1}], \mathbf{C})$ y existen los límites laterales de las derivadas en los extremos de cada intervalo.

Definición 4.1.8:

Se denomina ***camino*** a una curva diferenciable con continuidad a trozos.

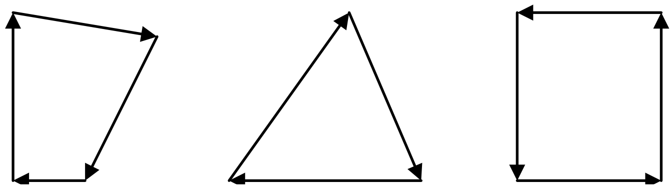


Figura 4.1: Ejemplos de trazas de caminos cerrados simples o curvas cerradas simples diferenciables con continuidad a trozos.

Se dice que los caminos son ***rectificables*** cuando es posible calcular su longitud.

Definición 4.1.9:

La ***longitud del camino*** γ es el valor de la integral real $long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|$ $\cdot dt$, donde $|\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Definición 4.1.10:

Un ***cambio de parámetro*** es una aplicación biyectiva α: [*a*, *b*] $\to$ [*c*, *d*] de clase uno, y tal que $\alpha'(t) > 0$, $\forall t \in$ (a, *b*).

La composición de dos cambios de parámetro es también un cambio de parámetro.

Definición 4.1.11:

Dos caminos γ: [*a*, *b*] $\to$ ***C***, σ: [*c*, *d*] $\to$ ***C***, son ***equivalentes***, y se denota $\sigma \sim \gamma$, si existe una biyección o cambio de parámetro α: [*a*, *b*] $\to$ [*c*, *d*], $\alpha(a) = c$, $\alpha(b) = d$, tal que: $\sigma \circ \alpha = \gamma$.

También se dice que σ es una *reparametrización* de γ.

Si dos caminos son equivalentes, $\sigma \sim \gamma$, entonces tienen la misma traza,

$(\sigma) = (\gamma)$, que recorren el mismo número de veces y en el mismo sentido cada vez, pero se modifica la velocidad a la que se recorre la traza, pues:

$$\gamma'(t) = (\sigma \circ \alpha)'(t) = \sigma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

La relación $\sigma \sim \gamma$ es una relación de equivalencia entre los caminos.

Definición 4.1.12:

Dado el camino γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$ se define su ***camino inverso*** o ***camino opuesto***, y se denota $-\gamma$, al camino: $-\gamma$: $[-b, -a] \to \mathbf{C}$ como $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ con $-b \le t \le -a$.

El camino $-\gamma$ recorre la misma traza que γ pero en sentido inverso.

Definición 4.1.13:

Si dos caminos γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$, y σ: $[c, d] \to \mathbf{C}$, son tales que $\gamma(b) = \sigma(c)$, se define la ***suma de caminos*** como $\gamma + \sigma$: $[a, b + d - c] \to \mathbf{C}$, siendo:

$$(\gamma + \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & si\ a \le t \le b \\ \sigma(t + c - b) & si\ b \le t \le b + d - c \end{cases}.$$

Así definido, $\gamma + \sigma$ es un camino o curva diferenciable con continuidad a trozos, por ser $\gamma(b) = \sigma(c)$ y serlo γ y σ. En general si existe $\gamma + \sigma$, $\sigma + \gamma$ no estará definido, por lo que la suma de caminos no es conmutativa. Se verifica la propiedad asociativa: $\gamma + [\sigma + \tau] = [\gamma + \sigma] + \tau$, así como que la traza de la suma es igual a la unión de las trazas: $(\gamma + \sigma) = (\gamma) \cup (\sigma)$.

Unas propiedades inmediatas son:

1. Si $\sigma \sim \gamma$ entonces *long*(σ) = *long*(γ)
2. *long*$(-\gamma)$ = *long*(γ)

3. $long(\gamma + \sigma) = long(\gamma) + long(\sigma)$

Demostración:

1) Si $\sigma \sim \gamma$ entonces $long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt = \int_a^b |(\sigma \circ \alpha)'(t)| \cdot dt = \int_a^b |\sigma'(\alpha(t))| \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_c^d |\sigma'(s)| \cdot ds = long(\sigma)$, haciendo el cambio $s = \alpha(t)$.

2) $long(-\gamma) = \int_{-b}^{-a} |(-\gamma)'(t)| dt = \int_{-b}^{-a} |\gamma'(-t)| dt = \int_a^b |\gamma'(s)| ds = long(\gamma)$, haciendo el cambio $s = -t$.

3) $long(\gamma + \sigma) = \int_a^{b+d-c} |(\gamma + \sigma)'(t)|\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt + \int_b^{b+d-c} |\sigma'(t)|\, dt = long(\gamma) + long(\sigma)$. □

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.1.1: El camino que recorre el segmento de extremos $[z_0, z_1]$, desde z_0 hasta z_1, recorrido a velocidad constante, $\gamma'(t) = z_1 - z_0$, viene dado por:

$$\gamma(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0), \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

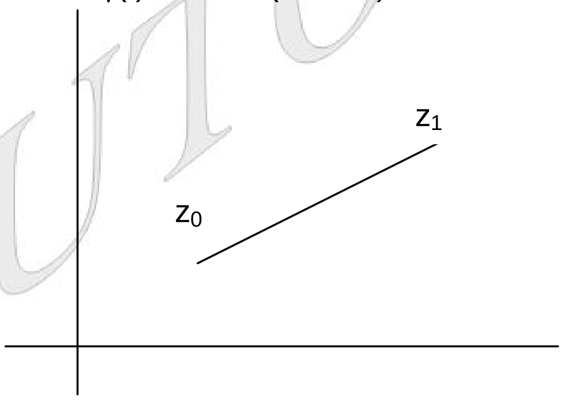


Figura 4.2: Traza de un segmento

Ejemplo 4.1.2: $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, es el camino cerrado cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R, recorrida una vez, en sentido positivo (el sentido contrario al de las agujas del reloj), comenzando en $z_0 + R$.

Se llama orientación positiva de una curva cerrada si ésta es recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y orientación negativa si es recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

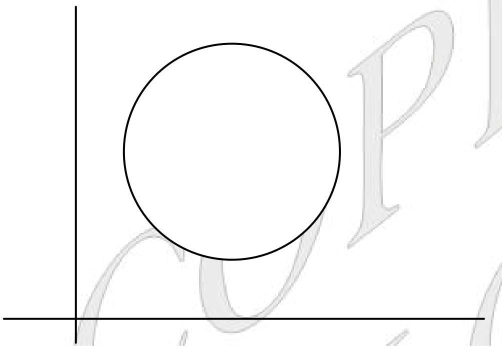


Figura 4.3: Traza de la circunferencia

Ejemplo 4.1.3: $\gamma(t) = z_0 + R\cdot e^{-it}$, con $-\pi \le t \le \pi$, es el camino cerrado cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R, la misma traza del ejemplo anterior, pero su punto origen y su punto final son otros, y está recorrida en sentido contrario al anterior, es decir, está orientada negativamente.

Ejemplo 4.1.4: $\gamma(t) = z_0 + R\cdot e^{it}$, con $-\pi \le t \le 2\pi$, es el camino cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R, la misma traza de los dos ejemplos anteriores, pero ahora no es un camino cerrado, su punto origen $z = -R$ y su punto final $z = R$ son diferentes, está recorrida en sentido positivo y no es una curva simple.

Ejemplo 4.1.5: $\gamma(t) = z_0 + R\cdot e^{i2t}$, con $0 \le t \le \pi$, es el camino cerrado cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R. Es un camino equivalente al del *ejemplo* 4.1.2, pero se modifica la velocidad de recorrido.

Ejemplo 4.1.6: Los caminos: $\gamma(t) = e^{-it}$, con $0 \le t \le 2\pi$, y $\gamma(t) = e^{it}$, con $0 \le t \le 4\pi$, tienen ambos la misma traza, la circunferencia de centro el origen y radio uno, pero el primero la recorre en el sentido de las agujas del reloj, y el segundo la recorre dos veces en sentido positivo, contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 4.1.7: La curva $\gamma(t) = \begin{cases} (2+3i)t & 0 \le t \le 1 \\ (5-3i)t-(3-6i) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$ es un camino, pues es continua y diferenciable a trozos. Está formada por dos segmentos, el primero de origen en $z = 0$ y extremo en $z = 2 + 3i$, y el segundo de origen en $z = 2 + 3i$, y extremo en $z = 7$.

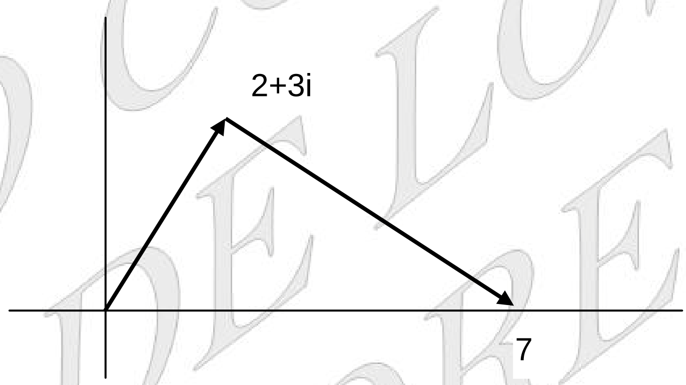


Figura 4.4: Traza del ejemplo 4.1.7.

Ejemplo 4.1.7: Calcular la longitud del camino determinado por la curva del ejemplo anterior: $\gamma(t) = \begin{cases} (2+3i)t & 0 \le t \le 1 \\ (5-3i)t-(3-6i) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$.

Por la definición de longitud de un camino:

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt, \text{ siendo } |\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

luego en este caso se puede considerar que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, siendo:

$$|\gamma_1'(t)| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + (y_1'(t))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ y}$$

$$|\gamma_2'(t)| = \sqrt{(x_2'(t))^2 + (y_2'(t))^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} ,$$

por lo que:

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_0^1 |\gamma_1'(t)| + \int_1^2 |\gamma_2'(t)| = \sqrt{13} + \sqrt{34} .$$

Ejercicios

4.1. Probar que la relación $\sigma \sim \gamma$ definida en el apartado anterior es una relación de equivalencia pues verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

4.2. Demostrar que un camino siempre tiene longitud, es decir, siempre es rectificable.

4.3. Sea $\Gamma(t) = R \cdot e^{it}$ con $0 \le t \le \pi$; $\sigma(t) = -R + (R - r) \cdot t$ con $0 \le t \le 1$; $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ con $0 \le t \le \pi$; y $\tau(t) = r + (R - r) \cdot t$ con $0 \le t \le 1$, siendo $0 < r < R$: Representar gráficamente la traza del camino $\Gamma + \sigma - \gamma + \tau$. ¿Está bien definido? ¿Es un camino? Indicar su origen y su final.

4.4. Calcular la longitud de los caminos:

a) $\gamma(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0)$ con $0 \le t \le 1$,

b) $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$ con $0 \le t \le 2\pi$,

c) $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{i2\pi t}$ con $0 \le t \le 1$,

d) $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$ con $0 \le t \le 6\pi$.

4.5. Razonar por qué se exige que $\alpha'(t) > 0$ en la equivalencia de caminos. ¿Qué sucedería si $\alpha'(t) < 0$?

4.6. Indicar cuales de los ejemplos resueltos, del 2 al 5, son parametrizaciones equivalentes.

4.7. Representar la traza de la curva $z(x) = \sqrt{1-x^2} + ix$, $-1 \leq x \leq 1$. ¿Es otra parametrización del arco de la circunferencia de radio uno y centro el origen: $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$? Buscar la ecuación de cambio de parámetro α. Comprobar si $\alpha'(t) > 0$.

4.2. INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS

Se define y estudia lo que se va a entender como la integral de una función compleja sobre un camino. Para ello, previamente se estudia el concepto de integral sobre una función real con valores complejos.

Definición 4.2.1:

Sea f una función real con valores complejos, $f : [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \to \mathbf{C}$ siendo $f(t) = x(t) + i \cdot y(t)$. Se define la ***integral de f*** a través de dos integrales reales, siempre que estas integrales existan:

$$\int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b x(t) \cdot dt + i \cdot \int_a^b y(t) \cdot dt$$

La función f es integrable en $[a, b]$ si las funciones x e y son integrables en $[a, b]$ siendo $Re(\int_a^b f(t) \cdot dt) = \int_a^b x(t) \cdot dt$ y $Im(\int_a^b f(t) \cdot dt) = \int_a^b y(t) \cdot dt$, por lo que sus propiedades se deducen de forma inmediata de las propiedades de las integrales de las funciones reales.

4.2.1. Integral de una función sobre un camino

Definición 4.2.2:

La integral entre [*a*, *b*] del camino γ: [*a*, *b*] $\subseteq \Re \to$ ***C***, $\gamma(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, se define a través de dos integrales reales bien definidas:

$$\int_a^b \gamma(t)\cdot dt = \int_a^b x(t)\cdot dt + i\cdot \int_a^b y(t)\cdot dt$$

En general, si *f* es una función real con valores en ***C*** siendo $f(t) = u(t) + i\cdot v(t)$, $t \in [a, b]$, entonces si *u* y *v* son integrables en [*a*, *b*] se define:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\cdot \int_a^b v(t)dt .$$

Verifica las siguientes propiedades:

1. Si *f* y *g* son integrables en [*a*, *b*] entonces *f* + *g* y $k\cdot f$ son integrables en [*a*, *b*], donde $k \in$ ***C***.

2. Si $a \le b$ entonces $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

Demostración de 2:

Si $\int_a^b f = 0$, entonces se verifica la propiedad.

Si $\int_a^b f \neq 0$, entonces $\int_a^b f = r\cdot e^{i\theta}$ por lo que:

$$\left|\int_a^b f\right| = r = e^{-i\theta}\cdot \int_a^b f = Re\left(\int_a^b e^{-i\theta}\cdot f\right) = \int_a^b Re(e^{-i\theta}\cdot f) \le \int_a^b |f| . \square$$

Definición 4.2.3:

Sea *f* una función de variable compleja definida en un abierto *G*, $f : G \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, continua a trozos, y sea γ un camino γ: [*a*, *b*] $\to$ *G*. Se define la ***integral de f sobre el camino*** γ (o integral de *f* a lo largo del camino γ) como:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

Como γ es un camino, γ es diferenciable con continuidad a trozos, por lo que $f(\gamma(t))$ es una función continua a trozos y γ' es continua a trozos, y en consecuencia la función subintegral tiene a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad, por lo que existe su integral.

4.2.2. Relación de la integral compleja con la integral curvilínea real

Si $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, la integral $\int_\gamma f$ se expresa mediante dos integrales curvilíneas reales, siendo:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (udx - vdy) + i \cdot \int_\gamma (vdx + udy) \qquad (4.1)$$

Demostración:

En efecto, si $\gamma(t) = \alpha(t) + i \cdot \beta(t)$ entonces:

$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (u(\alpha(t), \beta(t)) + i \cdot v(\alpha(t), \beta(t))) \cdot (\alpha'(t) + i \cdot \beta'(t)) = u(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t) + i \cdot (u(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t))$.

Por otra parte:

$$\int_{\gamma} (udx - vdy) = \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t) - v(\gamma(t)) \cdot \beta'(t))dt$$

$$\int_{\gamma} (vdx + udy) = \int_a^b (v(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t) + u(\gamma(t)) \cdot \beta'(t))dt$$

de donde se deduce la igualdad. □

4.2.3. Propiedades elementales

1. La integral sobre un camino es invariante bajo una parametrización. Es decir, si $\gamma \sim \sigma$ entonces $\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$.

2. La integral a lo largo del camino opuesto vale: $\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f$.

3. La integral a lo largo de una suma de caminos vale: $\int_{\gamma+\sigma} f = \int_{\gamma} f + \int_{\sigma} f$.

4. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g$.

5. $\int_{\gamma} kf = k \cdot \int_{\gamma} f$, con $k \in \mathbf{C}$.

6. Si $M \in \mathfrak{R}$ y $|f(z)| \le M$, $\forall z \in (\gamma)$, entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \le M \cdot long(\gamma). \qquad (4.2)$$

Se observa que si f es una función continua, entonces $|f(\gamma(t))|$ es una función real y continua definida sobre un intervalo cerrado [a, b], por lo que si el intervalo [a, b] es acotado entonces siempre alcanza un valor máximo en dicho intervalo, y por tanto $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in (\gamma)$. Lo mismo se puede asegurar si *f* es una función continua a trozos. Por tanto la *propiedad 6* se puede escribir:

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \max_{z\in(\gamma)}|f(z)| \cdot long(\gamma).$$

7. Si *F* es una primitiva de *f* sobre (γ), es decir, $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in (\gamma)$, siendo γ un camino γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$, entonces $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

8. Si *F* es una primitiva de *f* sobre (γ) y γ es un camino cerrado, $\int_\gamma f = 0$.

Demostraciones:

1. Si γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$ y σ: $[c, d] \to \mathbf{C}$ siendo $\gamma \sim \sigma$ entonces existe una aplicación α: $[a, b] \to [c, d]$, tal que $\gamma = \sigma \circ \alpha$, por lo que:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\sigma\circ\alpha(t))\cdot\sigma'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\cdot dt =$$

y haciendo el cambio $s = \alpha(t)$ se obtiene:

$$\int_c^d f(\sigma(s))\cdot\sigma'(s)ds = \int_\sigma f. \ \square$$

2. $$\int_{-\gamma} f = \int_{-b}^{-a} f((-\gamma)(t))\cdot(-\gamma)'(t))dt = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\cdot(-\gamma'(-t))dt =$$

y haciendo el cambio $s = -t$ se obtiene

$$-\int_a^b f(\gamma(s))\cdot\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f. \ \square$$

Las demostraciones de las propiedades 3, 4 y 5 se dejan como ejercicios.

6. Si $M \in \mathfrak{R}$ y $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in (\gamma)$ entonces:

$$\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)| dt = M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot long(\gamma).$$

7. Si F es una primitiva de f sobre (γ) y γ es un camino, entonces:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt$$

Si $F(\gamma(t)) = u(t) + i \cdot v(t)$ entonces:

$$= \int_a^b (u' + iv')(t) dt = \int_a^b (u')(t) dt + i \cdot \int_a^b (v')(t) dt =$$

aplicando la Regla de Barrow:

$u(b) - u(a) + i \cdot (v(b) - v(a)) = u(b) + i \cdot v(b) - u(a) - i \cdot v(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. □

8. $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ por ser el camino γ cerrado y por tanto $\gamma(b) = \gamma(a)$.

□

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.2.1: Calcular $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

El camino γ tiene como traza la mitad del círculo de radio uno que va desde –i hasta i. La función $f(\gamma(t)) = e^{-it}$ pues, para calcular el conjugado, el ángulo es el opuesto, y $\gamma'(t) = ie^{it}$.

Por tanto $\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it} ie^{it}\, dt = i \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi \cdot i.$

Ejemplo 4.2.2: Calcular la integral $\int_{\gamma} z^2\, dz$ sobre los tres caminos γ_1, γ_2, y γ_3, y también sobre el camino: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, siendo $\gamma_1(t) = t\cdot(2 + \mathrm{i})$, $0 \le t \le 1$; $\gamma_2(t) = (2 + \mathrm{i}) + t(-\mathrm{i})$, $0 \le t \le 1$; y $\gamma_3(t) = 2 - 2t$, $0 \le t \le 1$.

$$\int_{\gamma_1} z^2\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 ((2+\mathrm{i})t)^2\cdot(2+\mathrm{i})dt = (2 + \mathrm{i})^3\int_0^1 t^2\cdot dt =$$

$$\frac{(2+\mathrm{i})^3}{3} = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}\mathrm{i}.$$

$$\int_{\gamma_2} z^2\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 (2+\mathrm{i}-t\mathrm{i})^2\cdot(-\mathrm{i})dt = 2+\frac{-11}{3}\mathrm{i},$$

$$\int_{\gamma_3} z^2\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 (2-2t)^2\cdot(-2)dt = \frac{-8}{3},$$

$$\int_{\gamma} z^2\, dz = \int_{\gamma_1} z^2\, dz + \int_{\gamma_2} z^2\, dz + \int_{\gamma_3} z^2\, dz = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}\mathrm{i} + 2+\frac{-11}{3}\mathrm{i} + \frac{-8}{3} = 0.$$

Este último resultado, cero, era de esperar por la *propiedad 8*, pues $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ es un camino cerrado y z^2 tiene función primitiva.

Ejemplo 4.2.3: Calcular la integral $\int_{\gamma} z^2\, dz$ sobre el camino γ, siendo:

$$\gamma(t) = e^{-\mathrm{i}t},\ -\pi \le t \le 0.$$

Utilizando la definición de integral sobre un camino se obtiene:

$$\int_{\gamma} z^2\, dz = \int_{-\pi}^0 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_{-\pi}^0 (e^{-it})^2(-\mathrm{i})(e^{-it})dt = \int_{-\pi}^0 (-\mathrm{i})(e^{-3it})dt = \frac{1}{3}$$

$$(1 - e^{3\pi\mathrm{i}}) = \frac{1}{3}(1 - (cos(3\pi) + \mathrm{i}\ sen(3\pi))) = \frac{2}{3}.$$

Otra forma de hacerlo es utilizando la *propiedad 7*, pues como z^2 tiene la función primitiva $\frac{z^3}{3}$, la integral es independiente del camino, para ir desde a = –1 hasta b = 1, luego:

$$\int_\gamma z^2\, dz = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 4.2.4: Calcular la integral $\int_\gamma Re(z)dz$ siendo $\gamma(t) = r\cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Utilizando la definición de integral sobre un camino se obtiene:

$$\int_\gamma Re(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} r\,cos\,t\cdot r\,\mathrm{i}(e^{it})dt = \mathrm{i}\cdot r^2\int_0^{2\pi} cos\,t\cdot(e^{it})dt =$$

$$\mathrm{i}\cdot r^2\int_0^{2\pi}(cos^2 t + \mathrm{i}\,cos\,t\cdot sen\,t)dt = \mathrm{i}\cdot r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+cos\,2t}{2} + \mathrm{i}\frac{sen2t}{2}\right)dt = \mathrm{i}\cdot r^2\cdot\pi$$

que es distinto de cero, a pesar de ser el camino cerrado, lo que muestra que la función parte real de z, $Re(z)$, no tiene función primitiva sobre la circunferencia de centro el origen y radio r.

Ejemplo 4.2.5: Calcular la integral $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Para calcular $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $f(\gamma(t)) = e^{-it}$ y $\gamma'(t) = \mathrm{i}\cdot e^{it}$,

luego $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-it}\cdot\mathrm{i}\cdot e^{it}\,dt = \mathrm{i}\cdot\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}$, distinto de cero, a pesar de ser el camino cerrado pues es la circunferencia de centro el origen y radio uno, luego la función $f(z) = \bar{z}$ no tiene primitiva sobre dicho círculo.

Ejemplo 4.2.6: Calcular la integral $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Para calcular $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $f(\gamma(t)) = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$ y $\gamma'(t) = i \cdot e^{it}$, por lo que $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i \cdot e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$, distinto de cero, a pesar de ser el camino cerrado pues es la circunferencia de centro el origen y radio uno, luego la función $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva sobre dicha circunferencia. Como $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1$, entonces $f(z) = \bar{z} = \frac{1}{z}$, por tanto el resultado coincide con el del ejemplo anterior.

La función primitiva de $f(z) = \frac{1}{z}$ es la función logaritmo, $w = \log z$, que no es holomorfa sobre la circunferencia de centro el origen, pues no es holomorfa en el eje real negativo. Es imposible encontrar ninguna rama holomorfa del logaritmo sobre toda la circunferencia unidad, pues siempre corta a una semirrecta (por ejemplo, la semirrecta real negativa) donde se produce una discontinuidad. El que la integral no se anule no entra en contradicción con la propiedad 8 pues la función $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva en todo (γ).

Ejemplo 4.2.7: Acotar la integral: $\left|\int_\gamma \frac{z-3}{z^2+2}dz\right|$ siendo $\gamma(t) = 3 \cdot e^{-it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Para acotar la integral se utiliza la *propiedad 6*, que dice: Si $|f(z)| \le M \in$

$\mathfrak{R}$, $\forall z \in (\gamma)$ entonces $\left|\int_\gamma f\right| \leq M \cdot long(\gamma)$. Como la longitud del arco de circunferencia es $\frac{3\pi}{2}$, $|z - 3| \leq |z| + |-3| \leq 3 + 3 = 6$, y $|z^2 + 2| \geq ||z|^2 - |2|| \geq |9 - 2| = 7$, entonces $\left|\frac{z-3}{z^2+2}\right| \leq \frac{6}{7}$, y $\left|\int_\gamma \frac{z-3}{z^2+2} dz\right| \leq \frac{9\pi}{7}$.

Ejemplo 4.2.8: Acotar la integral: $\left|\int_\gamma \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2-3)} dz\right|$ con $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $R > 3$, y comparar con el límite: $\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f$.

Para acotar la integral se utiliza las propiedad 6, que dice: Si $|f(z)| \leq M \in \mathfrak{R}$, $\forall z \in (\gamma)$ entonces $\left|\int_\gamma f\right| \leq M\ long(\gamma)$. Como la longitud del arco de circunferencia es $R \cdot \pi$, $|z| = R$, $|z^2 + 2|^2 \geq (||z|^2 - |2||)^2 \geq |R^2 - 2|^2$, $|z^2 - 3| \geq |R^2 - 3|$.

Entonces:

$\left|\int_\gamma \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2-3)} dz\right| \leq \frac{1}{(R^2-2)^2(R^2-3)}$, y al calcular el límite cuando R tiende a infinito, ese valor tiende a cero: $\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f = 0$.

Ejercicios

4.8. Calcular: $\int_\gamma (z - z_0)^n dz$, con n entero, siendo $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.9. Comprobar que: $\int_{\gamma} \sqrt{z}dz = -\frac{2}{3}(1 + i)$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

4.10. Calcular: $\int_{\gamma} f$, siendo $f(z) = f(x + yi) = x + 2y - i\, y^2$, y $\gamma(t) = (1 + 3i)t$, $0 \le t \le 1$.

4.11. Comprobar que $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^4} dz \right| \le 4\sqrt{2}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento [i, 1].

4.12. Calcular: $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} f(z) dz \right|$ siendo $\gamma(t) = r\cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ una función holomorfa y acotada en el interior de γ y sobre su traza (γ).

4.13. Demostrar que $\int_{\gamma} Im(z) dz = -\frac{\pi}{2}$, siendo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & -1 \le t \le 1 \\ e^{i(t-1)} & 1 \le t \le 1 + \pi \end{cases}$$

4.14. Sea $\gamma(t) = R\cdot e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, $R > 2$, y sea $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3 + 3}$. Acotar $\left| \int_{\gamma} f \right|$ y comprobar que $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} f = 0$.

4.3. ÍNDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CURVA

En este apartado se introduce el concepto de "índice de un punto *z* respecto de un camino cerrado γ", que es un concepto importante.

4.3.1. Definición de índice

Definición 4.3.1: Sea γ: [*a*, *b*] $\rightarrow$ ***C*** un camino cerrado y *z* un punto del plano complejo que no pertenece a la traza de γ, $z \in$ ***C***/(γ). Se define el ***índice de un punto z respecto de un camino*** γ, $I_\gamma(z)$, como:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi.i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

La integral anterior está bien definida pues al no pertenecer el punto *z* a la traza de γ, se tiene que la función subintegral es continua en (γ).

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$$

- El índice representa geométricamente "el número de vueltas que da el camino alrededor del punto".

Este hecho puede interpretarse, de forma intuitiva y matemáticamente imprecisa, si se considera que:

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{d}{dt}(log(\gamma(t)-z))$$

Por lo que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{d}{dt}(log(\gamma(t)-z)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[log(\gamma(b)-z)-(log(\gamma(a)-z)\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[(ln|\gamma(b)-z|+i\,arg(\gamma(b)-z)-(ln|\gamma(a)-z|+i\,arg(\gamma(a)-z))\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[arg(\gamma(b)-z)-arg(\gamma(a)-z))\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}2\pi\cdot \textit{número de vueltas alrededor de } z = \textit{Número de vueltas alrededor de } z.$$

Ya que como el camino γ es una curva cerrada se tiene que $\gamma(a) = \gamma(b)$, por lo que $ln\,|\gamma(b) - z| = ln\,|\gamma(a) - z|$ y la variación del argumento es igual a 2π por el número de vueltas del vector $\gamma(b) - z$ alrededor de z.

- El camino γ hace una partición de ***C***/(γ) en un conjunto de componentes conexas, donde todas las componentes son acotadas, excepto una, la componente “no acotada”.
- El índice es una función continua en ***C***/(γ) y es siempre un número entero.
- En consecuencia, el índice es constante para todos los puntos de una misma componente conexa.
- El índice se anula sobre la componente no acotada.
- El índice de un punto z respecto al camino opuesto a γ es igual a:

$$I_{-\gamma}(z) = -I_{\gamma}(z)$$

4.3.2. Índice y homotopía

Una propiedad muy importante del índice es el ser invariante por homotopía. De manera intuitiva, se dice que dos caminos cerrados contenidos en un abierto *G* son homótopos, si pueden deformarse continuamente entre sí, sin que las deformaciones salgan de *G*.

Definición 4.3.2: Sea *G* un abierto y sean γ_0 y γ_1 dos caminos cerrados definidos en $[a, b]$ con su traza contenida en *G*. Una aplicación continua α es una ***homotopía admisible*** entre γ_0 y γ_1 si la función α: $[a, b] \times [0, 1] \to G$ verifica que $\alpha(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\alpha(t, 1) = \gamma_1(t)$ para todo *t* del intervalo $[a, b]$ y $\alpha(a, s) = \alpha(b, s)$ para todo *s* de $[0, 1]$.

En ese caso se dice que γ_0 y γ_1 son ***homótopos*** en *G*.

Se dice que γ_1 es un camino **homótopo a *0*** si γ_1 es homótopo a una curva constante, (o punto): $\gamma_1(t) = z_0$, para todo $t \in [a, b]$.

Si γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrados, *z* no pertenece a sus trazas y son homótopos en **C**/{*z*}, se tiene que $I_{\gamma 0}(z)$ es igual a $I_{\gamma 1}(z)$. En particular si γ_0 es homótopo a ***0***, $I_{\gamma 0}(z)$ es igual a cero. Aún más interesante es el hecho de que también se verifica el recíproco, esto es, el índice determina completamente qué caminos son homótopos en **C**/{*z*}.

Si *G* es un abierto y γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrados se dice que son "homólogos" respecto de *G* si $I_{\gamma_0}(z)$ es igual a $I_{\gamma_1}(z)$ para todo punto *z* que pertenezca al complementario de *G*.

4.3.3. Índice y conexión

Definición 4.3.3: Sea G un abierto y conexo de **C**. G es ***simplemente conexo*** si cualquier camino cerrado $\gamma \in C([0, 1]; G)$ es homótopo a ***0***.

De manera intuitiva se considera que un conjunto es simplemente conexo si es un abierto sin agujeros. Por este motivo, un dominio G es simplemente conexo si todo camino cerrado y simple contenido en él, encierra únicamente puntos de G. Por ejemplo, si γ es un camino cerrado y simple entonces el interior de su traza, $(\overset{\circ}{\gamma})$, es un dominio simplemente conexo. Si un dominio conexo no es simplemente conexo se dice que es ***múltiplemente conexo***.

Un caso particular de conjunto simplemente conexo es un conjunto ***convexo***. En efecto, si G es convexo, $\gamma \in C([0, 1]; G)$ y $z \in G$, entonces existe una homotopía admisible entre el camino γ y la curva constante z, dada por:

$\alpha(t, s) = (1 - s)\cdot\gamma(t) + s\cdot z$, para todo $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.3.1: Sea $\gamma(t) = z + R\cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ la circunferencia de centro z y radio R definida en el plano complejo, recorrida una vez en sentido positivo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi.i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}}dt = 1.$$

En efecto, el camino da una vuelta en sentido positivo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.2: Sea $\gamma(t) = z + R\cdot e^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida una vez en sentido negativo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi.i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2\pi} \frac{-Rie^{-it}}{Re^{-it}}dt = -1.$$

El camino da una vuelta en sentido negativo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.3: Sea $\gamma(t) = z + R\cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2k\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida k veces en sentido positivo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi.i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2k\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2k\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}}dt = k.$$

El camino da k vueltas en sentido positivo alrededor del punto.

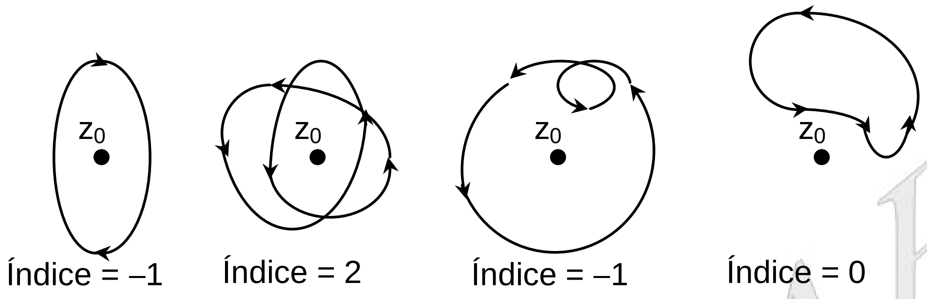
Ejemplo 4.3.4: Sea $\gamma(t) = z + R\cdot e^{-it}$, $0 \le t \le 2k\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida k veces en sentido negativo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi.i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2k\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi.i}\int_0^{2k\pi} \frac{-Rie^{-it}}{Re^{-it}}dt = -k.$$

El camino da k vueltas en sentido negativo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.5: Si G es simplemente conexo y se perfora en un punto, $A = G - \{z_0\}$, el índice de cada punto de A puede valer 1, –1 o 0, para cada camino cerrado y simple según que el camino rodee al punto en una orientación, en la otra o pertenezca a la componente exterior.

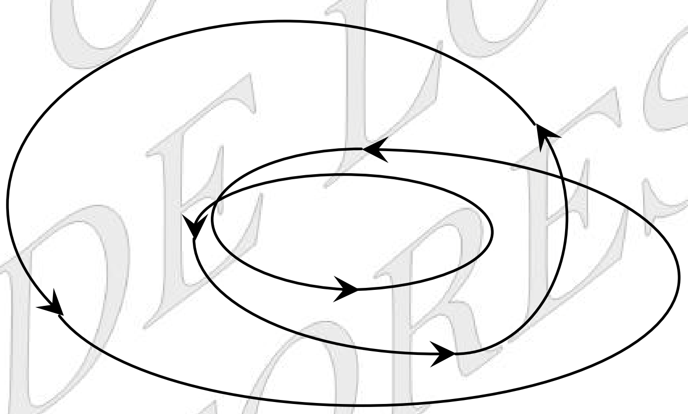
Ejemplo 4.3.6: Determinar el índice del punto z_0 respecto a la curva indicada:



4.5. Determinación de índices. Ejemplo 4.3.6

Ejercicios

4.15. Determinar el índice de los puntos de cada una de sus componentes conexas en que las siguientes curvas dividen al plano complejo:



4.6. Determinación de índices. Ejercicio 4.15

4.16. Calcular el índice del origen respecto de la curva $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.4. TEOREMA DE *CAUCHY*

4.4.1. Primitivas

Aunque el valor de una integral compleja depende, en general, del camino recorrido, existen ciertas funciones cuyas integrales son independientes del camino. En esos casos también se anula la integral sobre un camino cerrado. Este resultado está relacionado con la existencia de una función primitiva $F(z)$, tal $F'(z) = f(z)$, para todo z. Esto es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 4.4.1:

Sea f: $G \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ una función continua en el dominio G. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) La función f tiene una función primitiva F en G.
b) Las integrales de f a lo largo de caminos contenidos en G que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor.
c) La integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado contenido en G vale cero.

Demostración:

Se va a probar que a) implica b), b) implica c), c) implica b) y b) implica a).

Probar que a) implica b) es consecuencia de la *propiedad* 7 del apartado 4.2.2, pues se parte de la hipótesis de que la función f tiene una función primitiva F, es decir, para todo z de G, $F'(z) = f(z)$. Sea γ un camino contenido en G que une los puntos z_1 y z_2 con $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, $\gamma(a) = z_1$ y $\gamma(b) = z_2$.

Como $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$ $= F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, entonces:

$$\int_\gamma f(z).dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1),$$

con lo que queda probado que la integral no depende del camino elegido.

Para probar que b) implica c) se considera un camino cerrado cualquiera, γ, contenido en G, y sean z_1 y z_2 dos puntos que pertenecen a γ. Se toman dos caminos, σ y τ, ambos con punto inicial z_1 y final z_2, tales que $\gamma = \sigma - \tau$. Como por la hipótesis b) la integral no depende del camino, se puede escribir:

$\int_\sigma f(z)\cdot dz = \int_\tau f(z)\cdot dz$, por lo que:

$$0 = \int_\sigma f(z)\cdot dz - \int_\tau f(z)\cdot dz = \int_\sigma f(z)\cdot dz + \int_{-\tau} f(z)\cdot dz = \int_{\sigma-\tau} f(z)\cdot dz$$

$$= \int_\gamma f(z)\cdot dz .$$

Recíprocamente si se quiere demostrar que c) implica b) se consideran dos caminos cualesquiera, σ y τ, contenidos en G, ambos con punto origen z_1 y extremo final z_2. Se construye el camino $\gamma = \sigma - \tau$ que es cerrado, luego, por la hipótesis c) la integral vale cero, $\int_\gamma f(z)\cdot dz = 0$, con lo que $\int_\gamma f(z)\cdot dz = 0 = \int_{\sigma-\tau} f(z)\cdot dz = \int_\sigma f(z)\cdot dz - \int_\tau f(z)\cdot dz$, y por tanto: $\int_\sigma f(z)\cdot dz = \int_\tau f(z)\cdot dz$.

Para probar que b) implica a) se considera un camino cualquiera, γ, contenido en G, que parte de un punto z_0 y termina en un punto genérico z. Se define:

$$F(z) = \int_\gamma f = \int_{z_0}^{z} f(w)\cdot dw .$$

Se analiza bajo qué condiciones la función F está bien definida. Para poder definir $F(z)$, para todo z de G, tiene que ser G un conjunto conexo, y así existir ese camino, γ, que parte de un punto z_0 y termina en z. Sea $z + \Delta z$ un punto, distinto de z, en un entorno de z de radio δ, suficientemente pequeño, contenido en G.

Se calcula la derivada de la función F:

$$F(z + \Delta z) = \int_{\sigma} f = \int_{\gamma+[z,z+\Delta z]} f = \int_{\gamma} f + \int_{[z,z+\Delta z]} f = F(z) + \int_{[z,z+\Delta z]} f.$$

El camino $[z, z + \Delta z]$ es un segmento y la integral $\int_{[z,z+\Delta z]} f$, por hipótesis, no depende del camino, por lo que $\int_{[z,z+\Delta z]} f = \int_{z}^{z+\Delta z} f$

Restando:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{[z,z+\Delta z]} f = \int_{z}^{z+\Delta z} f \text{ , y:}$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(w)\cdot dw - f(z)$$

Como la variable de integración, w, no es z, $f(z)$ no depende de w y se obtiene que:

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\cdot dw = f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} dw = f(z)\cdot \Delta z, \text{ en consecuencia:}$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z} (f(w) - f(z))\cdot dw\right].$$

Calculando el módulo y acotando, utilizando la propiedad (4.2):

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left[\left|\int_{z}^{z+\Delta z} (f(w) - f(z))\cdot dw\right|\right] \le$$

$\frac{1}{|\Delta z|}\cdot$(Longitud del camino $[z + \Delta z, z]$)$\cdot$(Máximo valor de $|f(w) - f(z)|$, si w

$\in [z, z + \Delta z]) = \dfrac{1}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| \cdot \underset{w\in[z,z+\Delta z]}{máx} |f(w)-f(z)| = \underset{w\in[z,z+\Delta z]}{máx} |f(w)-f(z)|$.

Por hipótesis *f* es una función continua en el punto *z*, luego si $|w - z| < \delta$, entonces de $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$, por lo que se puede considerar que:

$\underset{w\in[z,z+\Delta z]}{máx} |f(w)-f(z)| < \varepsilon$, de donde se obtiene que:

Si $|\Delta z| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$, y al calcular el límite cuando $|\Delta z|$ tiende a cero se tiene que:

$\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$, por lo que *F* es la función primitiva de *f*, pues $F'(z) = f(z)$, como se quería demostrar. □

4.4.2. Distintos enunciados del teorema de Cauchy

Existen muchos enunciados diferentes del teorema de Cauchy, con condiciones distintas sobre el camino, sobre la función y sobre el dominio. El teorema anterior demuestra que si una función *f*(*z*) tiene primitiva en un dominio, su integral a lo largo de una curva cerrada contenida en él vale cero. El problema queda ahora reducido a conocer las condiciones que permiten asegurar la existencia de una función primitiva de una función sobre el dominio.

El hecho de que una función sea holomorfa en un dominio no garantiza la existencia de función primitiva, como se ha visto en el caso de la función *f*(*z*) = 1/*z*, que es holomorfa en ***C***/{0} y sin embargo no tiene primitiva.

El teorema de Cauchy expresa las condiciones en las que se puede garantizar la existencia de primitiva de una función, o lo que es equivalente, que la integral sobre cualquier curva cerrada contenida en un dominio sea cero.

Si se analiza un poco el **desarrollo histórico** de este importante teorema, el teorema de Cauchy, se comprueba que en algunas ocasiones se buscan condiciones sobre el camino, γ, otras veces sobre la función f, y por último, se imponen condiciones sobre el dominio G para asegurar que f tenga primitiva en G, o que la integral sobre un camino cerrado sea nula. Por esto, se tienen distintos enunciados que imponen condiciones suficientes, no necesarias, para ello.

El primer enunciado que se estudia, se debe a su interés histórico y a la sencillez de su demostración. Cauchy enunció y demostró el teorema imponiendo a f ser holomorfa y con derivada f' continua en G:

Versión primera del Teorema de *Cauchy*

Si γ es un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo en un dominio G y f es holomorfa y con derivada primera f' continua tanto sobre la traza (γ) como en la zona encerrada por la curva γ entonces $\int_\gamma f = 0$.

Demostración:

La demostración de *Cauchy* se basa en el teorema de *Green* y relaciona la integral compleja con las integrales curvilíneas reales (4.1). El teorema de Green dice que si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en la región Ω formada por la traza de un camino cerrado y simple γ y por el interior de dicho camino, $\Omega = (\gamma) \cup \overset{\circ}{(\gamma)}$, entonces:

$$\int_\gamma (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \iint_\Omega (Q_x - P_y) \cdot dx \cdot dy$$

Por lo tanto:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (udx - vdy) + i \cdot \int_\gamma (vdx + udy) =$$

$$\iint_\Omega (-v_x - u_y) dx\, dy + \iint_\Omega (u_x - v_y) dx\, dy ,$$

pues al ser *f'* continua en $\Omega = (\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$, las funciones *u* y *v* son continuas en Ω así como sus derivadas de primer orden. Imponiendo las condiciones de *Cauchy-Riemann*, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, se obtiene que la integral vale cero, $\int_\gamma f = 0$. □

Pero para poder usar la fórmula de *Green* deben ser las derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y continuas en Ω, siendo $\Omega = (\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$, y estas condiciones no son necesarias. El resultado se puede ampliar a cualquier camino cerrado, aunque no sea simple, y su orientación no sea positiva.

Lema de *Goursat*

E. Goursat (1 858 – 1 936) fue el primero en demostrar que la condición de continuidad sobre *f'* se podía omitir. Probó que:

Si *f* es holomorfa en un abierto y conexo *G* y *T* es un camino cerrado rectangular simple y orientado positivamente, tal que él y su interior estén contenidos en *G*, $((T) \cup (\overset{\circ}{T}) \subset G)$, entonces $\int_T f = 0$.

La idea de la demostración se basa en construir una sucesión de rectángulos cada vez más pequeños T_1, T_2, ..., T_n, ..., e ir acotando la integral de partida con esos rectángulos que convergen a un punto z_0 de G. La integral queda acotada debido a la derivabilidad de f.

A *Pringsheim* se debe una nueva demostración que sustituye el rectángulo por un triángulo, (que en ocasiones se conoce también con el nombre de *“Lema de Goursat”*).

Demostración:

La idea de la demostración se basa en dividir el triángulo T en cuatro triángulos semejantes obtenidos a partir de los puntos medios de los lados: T_0^1, T_0^2, T_0^3, T_0^4, que se orientan igual que T.

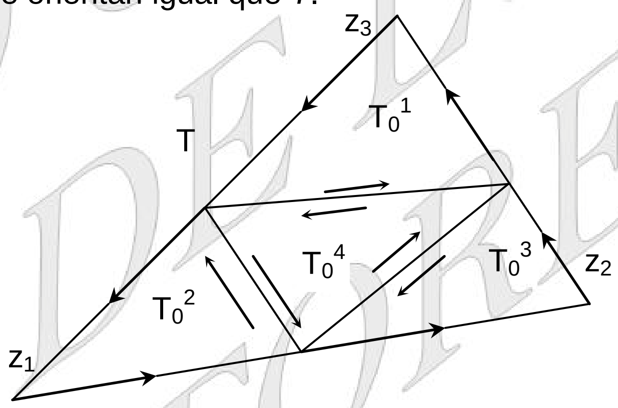


Figura 4.7: *Lema de Goursat*

De esta forma se tiene que la longitud de cada triángulo es la mitad del triángulo T de partida: $Long(T_0^k) = \frac{1}{2} Long\ T$, y que:

$\int_T f = \sum_{k=1}^{4} \int_{T_0^k} f$. Se elige al triángulo T_1 como el triángulo T_0^k que hace máximo el valor de la integral: $\left| \int_{T_0^k} f \right|$, pues entonces: $\left| \int_T f \right| \le \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{T_0^k} f \right| \le 4 \left| \int_{T_1} f \right|$

Se divide ahora de nuevo el triángulo T_1 en cuatro triángulos T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4 de la misma forma que antes, y se llama T_2 al triángulo T_1^k que hace máximo el valor de la integral $\left|\int_{T_1^k} f\right|$, siendo $long(T_2) = \frac{1}{2}\ long(T_1) = \frac{1}{4}\ long(T)$.

Se repite indefinidamente el proceso construyendo una sucesión de triángulos cada vez menores, tales que T, T_1, T_2 ... T_i ... donde cada triángulo T_i se divide en cuatro triángulos T_i^1, T_i^2, T_i^3, T_i^4 de forma que $\int_{T_i} f = \sum_{k=1}^{4} \int_{T_i^k} f$ y se elige T_{i+1} tal que:

$$\left|\int_{T_{i+1}} f\right| = \underset{1\le k\le 4}{máx} \left|\int_{T_i^k} f\right| \text{ y por tanto } \left|\int_{T_i} f\right| \le 4 \left|\int_{T_{i+1}} f\right|,$$

$$long(T_{i+1}) = \frac{1}{2} long(T_i) = \frac{1}{2^{i+1}} long(T).$$

Por tanto:

$$\left|\int_{T} f\right| \le 4\cdot\left|\int_{T_1} f\right| \le \ ... \le 4^n \cdot \left|\int_{T_n} f\right|$$

De este modo se obtiene una sucesión de conjuntos compactos triangulares K_n, cuyas fronteras son los triángulos T_n, tales que: $K_0 \supset K_1 \supset$ ... $\supset K_n \supset$ ... con diámetros cada vez menores: $diámetro(Kn) = \frac{1}{2^n} diámetro(K_0)$.

Se recuerda que se define el diámetro de un conjunto K como el supremo de las distancias entre dos puntos de K:

$$Diámetro(K) = \sup_{z_1, z_2 \in K} \left| z_1 - z_2 \right|.$$

Por tanto el diámetro de K_n tiende a cero cuando n tiende a infinito y la intersección de dichos compactos es un punto z_0 que pertenece a G:

$$\lim_{n \to \infty} (Diámetro(K_n)) = 0\, ; \cap K_n = \{z_0\} \in G.$$

Utilizando la derivabilidad de f se acota la integral. Como f es holomorfa en G, existe su derivada en el punto z_0, siendo: $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$ entonces:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

por lo que para todo z distinto de z_0 tal que $|z - z_0| < \delta$, entonces:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \qquad (4.3)$$

Sea n suficientemente grande para que K_n esté contenido en $B_\delta(z_0)$, se verifica entonces que:

$$\left| \int_{T_n} f \right| = \left| \int_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz \right| \leq$$

$$\left| \int_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz \right| + \left| \int_{T_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz \right| \leq$$

La primera integral vale cero pues es la integral de un polinomio, por lo que existe su función primitiva y T_n es una curva cerrada. La segunda integral se puede acotar usando la acotación (4.3)

$$\left|\int_{T_n} \varepsilon|z - z_0|dz\right| \le \varepsilon \cdot diámetro(K_n) \cdot long(T_n) \le \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} diámetro(K_0) . \frac{1}{2^n} long(T) =$$

$$\frac{1}{4^n} \varepsilon \cdot diámetro(K_0) \cdot long(T).$$

Por tanto:

$$\left|\int_T f\right| \le 4^n \cdot \left|\int_{T_n} f\right| \le 4^n \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \varepsilon \cdot diámetro(K_0) \cdot long(T) = \varepsilon \cdot diámetro(K_0) \cdot long(T)$$

que se puede hacer tan pequeña como se quiera, por lo que $\int_T f = 0$. □

Otro camino fue probar el teorema cuando el dominio *G* es un disco. Esto conduce a la tercera versión del teorema de *Cauchy*.

Teorema de *Cauchy* para un disco

Si *f* es una función holomorfa en un disco $B_r(z_0)$ entonces la integral $\int_\gamma f(z) \cdot dz = 0$ cualquiera que sea el camino cerrado γ contenido en $B_r(z_0)$.

La demostración se basa en el enunciado anterior y en probar que, en esas condiciones, *f* tiene función primitiva sobre $B_r(z_0)$, es decir, existe $F(z)$ tal que $f'(z) = f(z)$ para todo z de $B_r(z_0)$.

Demostración:

Se define $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(s) \cdot ds = 0$ para todo z de $B_r(z_0)$. Entonces:

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_{[z_0, z+h]} f(s) \cdot ds - \int_{[z_0, z]} f(s) \cdot ds - f(z) \cdot h\right)\right| =$$

Utilizando el teorema de Cauchy para el triángulo se tiene que:

$\int_{[z_0,z]+[z,z+h]+[z+h,z_0]} f(s)\cdot ds = 0$ por lo que:

$$\int_{[z,z+h]} f(s)\cdot ds - f(z)\cdot h = \int_{[z_0,z+h]} f(s)\cdot ds - \int_{[z_0,z]} f(s)\cdot ds$$

y sustituyendo:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(s)\cdot ds - f(z)\cdot h\right| = \frac{1}{|h|}$$

$$\left|\int_{[z,z+h]} (f(s)-f(z))ds\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot |h| \cdot \max_{s\in[z,z+h]} |f(s) - f(z)| = \max_{s\in[z,z+h]} |f(s) - f(z)|$$

Al ser la función continua cuando h tiende a cero, $f(s)$ tiende a $f(z)$ por lo que $\max_{s\in[z,z+h]} |f(s) - f(z)|$ tiende a cero, y entonces $F'(z) = f(z)$ para todo z de $B_r(z_0)$. □

Se observa que la demostración se basa en poder acotar la derivada para poder asegurar que existe función primitiva, para lo que se ha utilizado el hecho de que para todo z de B los segmentos $[z_0, z]$, $[z_0, z+h]$ y $[z, z+h]$ deben estar contenidos en B, por lo que es posible extender el teorema, en lugar de para un disco, o para un triángulo, cuando la región B es un conjunto convexo, (es decir, contiene a todos los puntos de cualquier segmento, con origen y extremo en el conjunto).

Teorema de *Cauchy* para caminos homótopos

Sea G una región y γ un camino cerrado con traza contenida en G y *homótopo* a ***0***, entonces la integral $\int_\gamma f(z)\cdot dz$ se anula para toda función f holomorfa definida en G.

Sean γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados con trazas contenidas en *G* y que son *homótopos* en *G*. Entonces sus integrales $\int_{\gamma_1} f(z)\cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z)\cdot dz$ son iguales para toda función holomorfa *f* definida en *G*.

Teorema de *Cauchy* en dominios simplemente conexos

Sea *G* un conjunto *abierto simplemente conexo*. Entonces la integral $\int_{\gamma} f(z)\cdot dz$ se anula para todo camino cerrado y toda función *f* holomorfa en *G*.

Probarlo para todo dominio simplemente conexo es sencillo si el camino es cerrado y simple, o si se intersecta a sí mismo un número finito de veces, y se basa en versiones ya demostradas. Las sutilezas aparecen cuando el camino tiene infinitas autointersecciones[1].

Combinando esta versión con la caracterización de la existencia de funciones primitivas se tiene que si *G* es un conjunto abierto y simplemente conexo toda función holomorfa definida en *G* admite primitiva.

Una consecuencia quizá menos esperada de la conexión simple es el hecho de que si *f* es holomorfa y no se anula, puede definirse, en un conjunto simplemente conexo, una rama holomorfa del *log*(*f*(*z*)). De forma más precisa, si *G* es simplemente conexo y *f* es una función holomorfa definida sobre *G* tal que *f*(*z*) sea distinto de cero para todo *z* de *G*, existe una función holomorfa *g* definida también sobre *G* tal que *f*(*z*) = *exp*(*g*(*z*)).

Estos resultados, incluyendo la última versión del *teorema de Cauchy*, son verdaderas caracterizaciones de los conjuntos simplemente conexos, es decir,

[1] Esta demostración se encuentra en Markushevich, A. I. (1977): *Theory of functions of a complex variables.* Chelsea Publ.

se verifican también los recíprocos.

Se tienen las dos siguientes consecuencias inmediatas:

- Una función holomorfa en un dominio simplemente conexo tiene función primitiva en ese dominio
- Las funciones enteras admiten función primitiva

La versión más sencilla de utilizar, y que resume algunas de las anteriores es la conocida como teorema de Cauchy-Goursat:

Teorema de *Cauchy-Goursat*

Si γ es un camino cerrado y simple, y f es una función holomorfa en $(\gamma)\cup(\mathring{\gamma})$ entonces la integral $\int_{\gamma} f(z)\cdot dz = 0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.4.1: Calcular la integral $\int_{\gamma} f$ siendo $f(z) = z^2$, y γ el camino de origen $z_0 = 0$ y extremo $z_1 = 2 + 3i$.

Para calcular la integral de $f(z) = z^2$ desde el punto $z_0 = 0$ hasta el punto $z_1 = 2 + 3i$, no es preciso conocer el camino, pues $f(z)$ tiene función primitiva; $F(z) = \frac{z^3}{3}$, $\forall z \in \mathbf{C}$, por lo que

$$\int_{\gamma} z^2\, dz = F(2 + 3i) - F(0) = \frac{(2+3i)^3}{3} = \frac{-46}{3} + 3i.$$

Ejemplo 4.4.2: Calcular la integral $\int_\gamma f$ siendo $f(z) = e^{z^2+3}$, y γ un camino cerrado.

Sea γ un camino cerrado y con cualquier orientación. La $\int_\gamma e^{z^2+3}dz = 0$, pues la función e^{z^2+3} es una función entera (holomorfa en todo el campo complejo).

Por la misma razón: $\int_\gamma (5z^4 - 7z^2)e^{z^2+3}dz = 0$; $\int_\gamma sen(z^3 - 1)dz = 0$, $\int_\gamma ch(e^{z^2+3})dz = 0$.

Ejemplo 4.4.3: Sea $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Verificar que se anulan las siguientes integrales: $\int_\gamma f(z).dz$, siendo a) $f(z) = \frac{z^2+3}{z+4}$, b) $f(z) = (z^2+1)e^{-z^3}$, c) $f(z) = \frac{z-3}{z^2-4}$, d) $f(z) = \frac{senz}{\cos z}$.

En efecto, todas se anulan, pues la función a) no es holomorfa en $z = -4$, que queda fuera del círculo de centro el origen y radio 1. La función b) es entera. La función c) no es holomorfa en $z = 2$ y en $z = -2$, que no pertenecen a $(\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$. La función d) no es holomorfa en todos los puntos en que se anula la función coseno, pero ninguno queda dentro de $(\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$.

Ejercicios

4.17. Comprobar que la integral $\int_\gamma \frac{1}{z^3} dz = 0$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.18. a) Calcular la integral $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

b) Calcular la integral $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma_2(t) = e^{it}$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

c) Comprobar que la integral $\int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, siendo $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$.

4.19. Comprobar que la integral $\int_\gamma f = 0$ siendo $f(z) = (z + 4)\, e^{z-7}$ y $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, para todo r. Razonar la respuesta.

4.20. Comprobar que la integral $\int_\gamma f = 0$ siendo

$f(z) = (3z^2 + 4z) \cdot sen(5z^3 - 3)$ y $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, para todo r. Razonar la respuesta.

4.21. Comprobar que la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$ siendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, y $\gamma_1(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi$. (*Ayuda*: Calcular previamente las integrales sobre el camino formado por los semicírculos superiores y los segmentos del eje de abscisas necesarios para que sea un camino cerrado. Lo mismo con los semicírculos inferiores).

4.22. Comprobar las siguientes integrales:

a) $\int_0^{2+3i} z^2 dz = \frac{(2+3i)^3}{3}$

b) $\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$

c) $\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z} dz = i\pi$, siempre que el camino esté dentro del dominio

$\{z;\ |z| > 0,\ arg(z) \in (-\pi, \pi)\}$.

4.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL COMPLEJA

4.5.1. Trabajo y flujo

El valor de la integral va a ser un número complejo, al que se puede dar un significado geométrico o físico. Se puede considerar a *w* como un vector que asocia a cada punto (*x*, *y*) un vector ***w*** = (*u*, –*v*). Una función *w* = *f*(*z*) se puede interpretar entonces físicamente de distintas formas. Se considera al camino γ como una curva cerrada y simple, recorrida en sentido positivo.

Se puede interpretar a ***w*** como una **fuerza**, y la curva γ como una trayectoria a lo largo de la cual se mueve una partícula material por la acción de dicha fuerza. La dirección del movimiento es la del vector unitario tangente a la curva, por lo que si se denomina α el ángulo que forma la tangente con el eje de abscisas *x*, entonces dicho vector es $e^{i\alpha}$.

Si se interpreta ***w*** como la **densidad de corriente**, entonces es natural pensar en la curva γ como una frontera por la cual se puede mover un punto material. Ahora cobra importancia el vector unitario normal a la curva por lo que si se denomina β el ángulo que forman la curva y el eje de abscisas *x*, entonces dicho vector es $e^{i\beta}$. Como un vector se obtiene girando 90º el otro, se tiene que $e^{i\alpha} = i \cdot e^{i\beta}$ y por tanto $\cos \alpha = -\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$.

La proyección de la fuerza sobre la dirección del movimiento multiplicada por la distancia recorrida es el trabajo, mientras que el flujo de materia a través de la curva es la componente normal al campo vectorial por la longitud de línea que lo cruza.

$$\int_\gamma f \cdot dz = \int_\gamma f_T \cdot ds + i \cdot \int_\gamma f_N \cdot ds .$$

De una forma poco ortodoxa se puede decir que:

$$\int_\gamma f \cdot dz = trabajo + i \cdot flujo.$$

El teorema de Cauchy: "Si γ es un camino cerrado y simple, y *f* es una función holomorfa en $(\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$ entonces la integral $\int_\gamma f(z) \cdot dz = 0$", se puede interpretar entonces como que, al anularse la integral, es nula su parte real y su parte imaginaria. Por tanto, al considerar nula la parte real, si $w = f(z)$ se interpreta como una fuerza, entonces el trabajo realizado por el campo de fuerzas cuando una partícula recorre una trayectoria cerrada y simple es nulo. Esto se expresa diciendo que el campo es irrotacional. Al considerar nula la parte imaginaria resulta que no hay flujo a través de la frontera , el gasto total a través de la frontera es nulo, lo que se expresa diciendo que el campo vectorial no tiene fuentes.

4.5.2. Teorema de la divergencia

Desde la óptica anterior se puede recordar el teorema de la divergencia (de *Gauss, Green, Riemann* o *Ostrogradsky*) que dice que

$$\oint_{\gamma} u \cdot dx + v \cdot dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

$$\oint_{\gamma} u \cdot dy - v \cdot dx = \iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

donde γ es un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo, D es la región encerrada por γ y las funciones u y v son funciones continuas y con derivadas parciales continuas. Considerando a $w = f(z) = f(x + iy) = u - iv$. entonces

$$\int_{\gamma} f_T \cdot ds = \iint_{D} rot(w) \cdot dx \cdot dy$$

$$\int_{\gamma} f_N \cdot ds = \iint_{D} div(w) \cdot dx \cdot dy$$

El rotacional de un campo de fuerzas *w* se define como el cociente entre el trabajo realizado a lo largo de una pequeña curva cerrada y el área encerrada por esa curva.

$rot(w) \cdot dx \cdot dy$ = *trabajo infinitesimal*.

De manera similar se define divergencia:

div(*w*)·*dx*·*dy* = *flujo infinitesimal*.

El trabajo total a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a la suma de los trabajos realizados alrededor de todos los elementos de área encerrados en dicha trayectoria. El flujo total a través de una frontera es igual a los flujos infinitesimales de todas las fuentes que se encuentren dentro de área limitada por la frontera.

Ejercicios

4.23. La integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, siendo γ la circunferencia de centro el origen y radio uno, recorrida una vez en sentido positivo. Interpretar este resultado en términos de trabajo y flujo.

4.6. FÓRMULA INTEGRAL DE *CAUCHY*

A partir del teorema de Cauchy se obtienen importantes consecuencias sobre el comportamiento de las funciones holomorfas.

En primer lugar se obtiene una representación integral de la función y de sus derivadas mediante la "fórmula integral de Cauchy", y como consecuencia de ella se tienen propiedades locales y globales muy útiles de las funciones holomorfas, como que una función holomorfa puede desarrollarse en serie de potencias convergente alrededor de cada punto de holomorfía, lo que demuestra que es infinitamente derivable en dicho punto.

Corolario 4.6.1:

Sea γ un camino cerrado y simple recorrido una vez en sentido positivo con traza contenida en un dominio simplemente conexo D, $D \supset (\gamma) \cup \overset{\circ}{(\gamma)}$. Sea f una función holomorfa en D salvo a lo sumo en un conjunto finito de puntos z_1, z_2, ..., z_n, contenidos también en el interior de la traza de γ, $z_1, z_2, ..., z_n \in \overset{\circ}{(\gamma)}$. Sean C_i n círculos de radio r_i recorridos una vez en sentido positivo alrededor de cada uno de esos puntos, y cuyos dominios interiores no tienen puntos en común, de tal forma que la función es holomorfa en el interior de su traza salvo en el punto z_i. Entonces:

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f$$

Demostración:

Se construyen dos caminos como los de la figura, añadiendo segmentos que conectan cada círculo, formados por parte del camino γ, (recorrido en sentido positivo), unos segmentos que unen los círculos y parte de cada uno de los círculos, (recorridos en sentido negativo), de forma que σ_1 y σ_2 son caminos cerrados simples que no contienen en el interior de su traza ningún punto donde la función f no sea holomorfa:

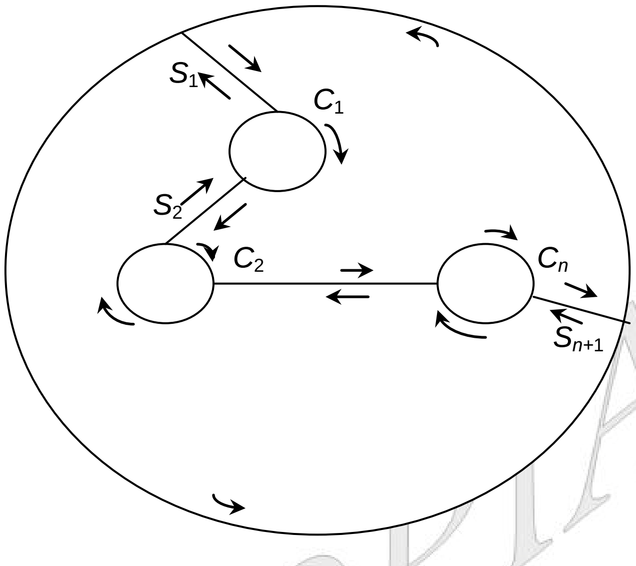


Figura 4.8: Fórmula integral de *Cauchy*

$\sigma_1 = 1/2\gamma + s_1 + 1/2C_1 + s_2 + \ldots + 1/2C_n + s_{n+1}$

$\sigma_2 = 1/2\gamma - s_1 + 1/2C_1 - s_2 + \ldots + 1/2C_n - s_{n+1}$

Aplicando a los caminos σ_1 y σ_2 el teorema de Cauchy-Goursat: *Si σ es un camino cerrado y simple, y f es una función holomorfa en $(\sigma)\cup(\mathring{\sigma})$ entonces la integral* $\int_\sigma f(z).dz = 0$, se tiene que $\int_{\sigma_1} f = 0$ y que $\int_{\sigma_2} f$, luego:

$$\int_{\sigma_1+\sigma_2} f = \int_{\sigma_1} f + \int_{\sigma_2} f = 0 = \int_\gamma f + \sum_{i=1}^{n} \int_{-C_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{s_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{-s_i} f$$

Los segmentos se recorren una vez en un sentido y otra en sentido opuesto, luego $\sum_{i=1}^{n+1} \int_{s_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{-s_i} f = 0$.

Los círculos se recorren una vez en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa), luego:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-C_i} f = -\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f$$

donde el camino γ y los círculos se recorren una vez con orientación positiva. □

Principio de Deformación de Caminos:

La demostración de este principio es una consecuencia inmediata del corolario anterior, y se denomina usualmente ***Principio de Deformación de Caminos*** ya que indica que si el camino γ_1 se deforma hasta convertirse en γ_2, pasando siempre por puntos donde f es holomorfa, entonces el valor de la integral no varía. Dice así:

Corolario 4.6.2: ***Principio de Deformación de Caminos***

Si f una función holomorfa en un dominio abierto y conexo D salvo en un punto z_0, y γ_1 es un camino cerrado y simple con traza contenida en D, $D \supset (\gamma_1) \cup \overset{\circ}{(\gamma_1)}$, que rodea a z_0, y γ_2 es un círculo de radio r y centro en z_0 contenido en D. Entonces:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f .$$

4.6.1. Fórmula integral de *Cauchy*

Sea D una región del campo complejo y sea f una función holomorfa en D. Sea γ un camino cerrado con la traza y su interior, $(\gamma) \cup \overset{\circ}{(\gamma)}$, contenido en D.

Sea *z* un punto cualquiera que pertenece al interior de la región rodeada por la traza de γ. Para cada punto *z* de *D* que no pertenezca al traza de γ se tiene:

$$I_\gamma(z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\cdot dw \tag{4.4}$$

La expresión (4.4) se denomina ***Fórmula Integral de Cauchy***.

Demostración:

Se define una nueva función:

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in D - \{z\} \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

La función *g* es continua en *D* y holomorfa en *D* – {*z*}. Se calcula su integral sobre γ.

$\int_\gamma g = 0$, pues $\lim\limits_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z)$, por lo que $\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z)\right| < \varepsilon$, por tanto:

$\int_\gamma g = \int_\gamma \left(\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) + f'(z)\right)dw =$

$\int_\gamma \left(\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z)\right)dw + \int_\gamma f'(z)dw$

Esta segunda integral es nula, $\int_\gamma f'(z)dw = 0$, y

$\left|\int_\gamma g\right| = \left|\int_\gamma \left(\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z)\right) dw\right| \le \varepsilon \cdot Long(\gamma)$.

Al ser *f* holomorfa en *D* por hipótesis al hacer $\varepsilon \to 0$, se tiene que $\int_\gamma g =$ 0.

Por otro lado:

$$\int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw =$$

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Por definición de índice, se tiene que: $I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$.

Por tanto:

$0 = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\cdot I_\gamma(z)\cdot 2\pi i$, y como consecuencia:

$$I_\gamma(z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi . i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\cdot dw . \square$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.6.1: Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, siendo γ un cuadrado cerrado recorrido una vez en sentido positivo de vértices (5, 5), (–5, 5), (–5, –5) (5, –5).

La integral $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, donde γ_1 es la circunferencia de centro el origen y radio uno, recorrida una vez en sentido positivo. Por el principio de deformación continua su valor no varía al deformarse el círculo en el cuadrado y entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Ejemplo 4.6.2: Calcular $\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)(z+3)}dz$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

La función no es holomorfa en z = 1, –1 y –3, pero en el interior del círculo sólo están los puntos 1 y –1. La integral puede descomponerse como suma de integrales:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)(z+3)}dz = \frac{-1}{4}\int_\gamma \frac{1}{(z+1)}dz + \frac{1}{8}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)}dz + \frac{1}{8}\int_\gamma \frac{1}{(z+3)}dz$$

Como el círculo es una curva cerrada recorrida una vez en sentido positivo, tomando en la fórmula integral de Cauchy $f(z) = 1$, las dos primeras integrales valen 2πi, y la tercera vale cero. Por tanto:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-1)(z+3)}dz = \left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{8}\right)2\pi i$$

Ejemplo 4.6.3: Calcular $\int_\gamma \frac{z}{z-1}dz$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Aplicando la fórmula de Cauchy: $2\pi i \cdot I_\gamma(a) \cdot f(a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \cdot dz$, con a = 1 y $f(z) = z$, se tiene que $\int_\gamma \frac{z}{z-1}dz = 2\pi i \cdot I_\gamma(1) \cdot f(1) = 2\pi i$.

Ejemplo 4.6.5: Calcular $\int_\gamma \frac{z^2-1}{(z^2-16)(z-2)}dz$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 6\pi$.

Se aplica la fórmula de Cauchy, con a = 2, $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2-16}$, $I_\gamma(2) = 3$ pues la curva da tres vueltas en sentido positivo alrededor del punto, con lo que se obtiene que:

$$\int_\gamma \frac{z^2-1}{(z^2-16)(z-2)}dz = 2\pi i\ 3\ f(2) = \frac{-3\pi i}{2}.$$

Ejercicios

4.24. Calcular las siguientes integrales $\int_\gamma f$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ igual a:

a) $\dfrac{z^2 - z + 6}{z + 1}$

b) $\dfrac{z^3}{(z^2 - \pi^2)(z - 1)}$

c) $\dfrac{senz}{z - \pi}$

d) $\dfrac{senz}{(z - \pi)(z + 1)}$

e) $\dfrac{e^{z^2 + 3}}{z - 1}$

4.25. Calcular las siguientes integrales $\int_\gamma f$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ igual a:

a) $\dfrac{z^2 + 3z - 5}{z}$

b) $\dfrac{z^3 + 4}{(z^2 - 2)z}$

c) $\dfrac{senz}{z}$

d) $\dfrac{\cos z}{(z - \pi)}$

e) $\dfrac{e^{z^2+1}}{z}$.

4.7. CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE *CAUCHY*

Varias son las consecuencias y aplicaciones que se pueden obtener de esta fórmula:

- Si γ es un camino de Jordan orientado positivamente, y si *z* es un punto cualquiera que pertenece al interior de la región rodeada por la traza de γ, entonces: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{f(w)}{w-z}\cdot dw$, mientras que si z pertenece a la componente no acotada: $\int_\gamma \dfrac{f(w)}{w-z}\cdot dw = 0$.

- Una función holomorfa se puede representar por medio de una integral:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i\cdot I_\gamma(z)}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

- Observando que el valor de la función en un punto interior al camino viene determinado completamente por los valores que la función toma sobre su traza, se puede asegurar que si dos funciones holomorfas coinciden sobre una circunferencia, (o sobre un camino cerrado), deben coincidir también en todos los puntos interiores.

➢ Si se considera el camino determinado por la circunferencia de centro *a* y radio *r* recorrida una vez en sentido positivo, se obtiene que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$$

que puede interpretarse como que el valor de una función holomorfa *f* en un punto interior *a* es la media de los valores que toma *f* sobre la circunferencia $|z - a| = r$. De esta observación se obtienen otras importantes consecuencias como el teorema del módulo máximo o el principio del máximo.

4.7.1. Aplicación al cálculo de integrales reales

Se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy para calcular integrales reales. Basta para ello calcular integrales complejas, por ejemplo a lo largo del contorno cerrado que se descompone en el segmento real [–*R, R*] y la semicircunferencia de radio *R*. Este procedimiento permite conocer el valor de ciertas integrales reales trigonométricas complicadas.

Por ejemplo, se vio en el *ejemplo 3* del apartado anterior que:

$$\int_\gamma \frac{z}{z-1}dz = 2\pi i.$$

Si ahora se calcula esa misma integral separando parte real y parte imaginaria, se obtiene:

$$\int_\gamma \frac{z}{z-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{2e^{it}-1}2ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{4ie^{2it}}{2e^{it}-1}dt = \int_0^{2\pi} \frac{4i(\cos 2t + i\,sen 2t)}{2\cos t + i2 sent - 1}dt$$

$= \int_0^{2\pi} \frac{4sen2t - 8sent}{5 - 4\cos t} dt + i \int_0^{2\pi} \frac{8\cos t - 4\cos 2t}{5 - 4\cos t} dt$, por lo que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{4sen2t - 8sent}{5 - 4\cos t} dt = 0, \text{ y } \int_0^{2\pi} \frac{8\cos t - 4\cos 2t}{5 - 4\cos t} dt = 2\pi.$$

4.7.2. Desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa

Una consecuencia fundamental de la fórmula integral de Cauchy es:

Proposición 4.7.1:

Si f es holomorfa en z_0 entonces f es analítica en z_0.

Demostración:

Sea $B_R(z_0)$ un disco en el cual f es holomorfa, y sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con r menor que R, entonces $\forall z \in B_R(z_0)$ se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\cdot dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\cdot dw}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(w)}{w - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw$$

Como $z \in B_R(z_0)$ y w pertenece a la traza de γ, se tiene que $|z - z_0| < |w - z_0| = r$, por lo que $\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right| < 1$ y se puede aplicar la fórmula de la suma de los infinitos términos de una serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n$$

que converge uniformemente sobre los conjuntos compactos contenidos en

$B_r(z_0)$, se puede entonces integrar término a término:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,$$

y por lo tanto f es desarrollable en serie de potencias en z_0 y el desarrollo es válido en $B_r(z_0)$, por lo que f es analítica en z_0. □

Esta proposición justifica que en ocasiones se llame “analítica” a una función holomorfa.

Como consecuencia de lo anterior se tiene que:

Proposición 4.7.2:

Si f es holomorfa en $G/\{a\}$, y si $\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) = 0$ entonces también existe el límite de f cuando z tiende a a, y si se define $f(a) = \lim_{z\to a} f(z)$ entonces f es holomorfa en G.

Este punto a se denomina singularidad evitable.

Otra consecuencia de la fórmula integral de Cauchy es que toda función holomorfa es indefinidamente derivable, y se puede encontrar una expresión similar para las derivadas de la función f a la obtenida para la función $f(z)$ mediante la fórmula integral de Cauchy, ya que por ser f holomorfa en un abierto *G* entonces van a existir las derivadas de todos los órdenes de *f* en cada punto de dicho abierto *G*, y todas ellas son holomorfas en *G*, es decir, $f^{m)}$ es también una función holomorfa en cada punto de *G* para cualquier número natural, *m*.

De forma precisa:

4.7.3. Derivadas de orden superior

Proposición 4.7.3:

Si *f* es holomorfa en z_0 entonces *f* es infinitamente derivable en z_0 y

$$f^{n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw$$

siendo $B_R(z_0)$ un disco en el cual *f* es holomorfa, y siendo $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con *r* menor que *R*.

Demostración:

Si *f* es una función holomorfa sobre un abierto *G* y z_0 es un punto de *G*, entonces *f* admite una representación en serie de potencias en un entorno de z_0, representación que es de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}$.

Al estudiar el desarrollo en serie de potencias de la función, y por ser único dicho desarrollo de Taylor, la expresión de la derivada queda probada. □

Otra forma de hacer la demostración[2] es buscando la expresión de la derivada, y probar la expresión de la derivada *n*-ésima mediante el principio de inducción como un mero ejercicio.

[2] Página 138 de *Churchill & Brown.*

La demostración, utilizando la definición de derivada, es:

Demostración:

Como $f(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw$ entonces:

$$f(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-(z+\Delta z)} \cdot dw \text{ luego}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \cdot \Delta z \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma \left(\frac{f(w)}{w-(z+\Delta z)} - \frac{f(w)}{w-z} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot \Delta z \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma f(w) \left(\frac{\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z-\Delta z)(w-z)} \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma \frac{f(w)(w-z-\Delta z+\Delta z)}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2} \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z+\Delta z)} \int_\gamma f(w) \left(\frac{1}{(w-z)^2} + \frac{\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} .dw + \frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2} \cdot dw = I_1 + I_2.$$

Si en la segunda integral I_2 se sustituye la curva γ por una circunferencia de centro *z* y radio *r*, $r > 2|\Delta z|$, que se recorre una vez en sentido positivo, entonces su valor no se modifica y se tiene la siguiente acotación, aplicando la propiedad 6 (4.2): "Si $M \in \mathfrak{R}$, $|f(z)| \le M \ \forall z \in (\gamma)$ entonces $\left|\int_\gamma f\right| \le M \cdot long(\gamma)$"

La longitud de la curva es $2\pi r$. Como $f(w)$ es continua en el conjunto compacto $|w - z| \le r$, se puede acotar y $|f(w)| < M_r$. Se toma:

$|\Delta z| < r/2$, $|w - z| = r$, $|w - z - \Delta z| \geq \big|\,|w - z| - |\Delta z|\,\big| \geq r - r/2 = r/2$. Por lo que se acota:

$$|\mathrm{I}_2| = \left| \frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_C \frac{f(w)\Delta z}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2} \cdot dw \right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi |I_\gamma(z)|} \cdot \frac{M_r}{\frac{r}{2} \cdot r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2M}{r^2} \cdot |\Delta z|$$

y al calcular el límite cuando Δz tiende a cero se comprueba que vale cero. Por tanto:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} . dw$$

Por inducción, derivando sucesivamente se prueba que una función holomorfa en un punto z, tiene infinitas derivadas de la forma:

$$f^{m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i \cdot I_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{m+1}} \cdot dw \;. \; \square$$

Como consecuencia se obtiene que si una función es holomorfa en un punto z, su función derivada, f', es también una función holomorfa en ese punto, z, sus funciones derivadas son también funciones holomorfas en ese punto, z, y por tanto, basta que una función sea holomorfa en un punto z para que f tenga infinitas derivadas en dicho punto ($f \in C^\infty(z)$).

Si una función es holomorfa en un abierto G entonces es de clase infinito en ese abierto G.

Como consecuencia, se tiene que si $f = u + iv$ es holomorfa en un punto entonces, necesariamente, existen las derivadas parciales de u y v de cualquier orden y son continuas en dicho punto.

4.7.4. Desigualdad de Cauchy

En el caso de que γ sea una circunferencia, aplicando la acotación anterior, se obtienen las llamadas **desigualdades de *Cauchy***:

Proposición 4.7.4: ***Desigualdad de*** **Cauchy**

Si f es holomorfa en el círculo de centro a y radio r, $\{z \in \mathbf{C}: |z - a| \leq r\}$, entonces $\left|f^{n)}(a)\right| \leq n!.\frac{M(r)}{r^n}$ donde *M®* es el máximo valor $|f(z)|$ del módulo de la función f sobre la circunferencia $|z - a| = r$.

Demostración:

Si $|f(z)| \leq M(r)$ sobre la circunferencia, acotando la integral por (4.2)

$$f^{m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i \cdot I_\gamma(a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \cdot dz$$

se obtiene que

$$\left|f^{m)}(a)\right| \leq \frac{m! \cdot M(r)}{|2\pi i| r^{m+1}} \cdot 2\pi r = \frac{m! \cdot M(r)}{r^m}. \square$$

Y en particular, una consecuencia inmediata de la desigualdad correspondiente a la primera derivada es el siguiente resultado:

$$|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r}$$

4.7.5. Teorema de *Liouville*

El teorema de Liouville es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy.

Proposición 4.7.5: ***Teorema de Liouville***

Si *f* es entera y acotada en todo el plano complejo, entonces *f*(*z*) es una función constante en ***C***.

Si *f* está acotada *M(r) = M* y se tiene $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ para todo *a*, por lo que su módulo se puede hacer tan pequeño como se quiera al hacer crecer *r*. Al ser *f* entera es posible aplicar esta acotación en todo punto *z*, es decir, *f '(z)* se anula para todo *z*, y en consecuencia, *f* es constante.

4.7.6. Teorema fundamental del Álgebra

Como consecuencia inmediata del Teorema de Liouville se obtiene el siguiente resultado conocido como **"Teorema Fundamental del Álgebra"**:

Proposición 4.7.6: ***Teorema Fundamental del Álgebra***

Todo polinomio con coeficientes complejos, no constante, tiene siempre un cero.

Demostración:

Se demuestra utilizando el principio de contradicción.

Se construye *f*(*z*) = 1/*P*(*z*) y se observa que si *P*(*z*) es distinto de cero para todo *z*, entonces *f*(*z*) está acotada. En efecto, como $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$, existe un *R* tal que si $|z| > R$ entonces $|1/P(z)| < 1$. Y como por hipótesis *P*(*z*) no se anula, la función 1/*P*(*z*) es continua en el disco de centro el origen y radio *R*: $B_R(0)$, luego está acotada para $|z| \leq R$, por lo que 1/*P*(*z*) está acotada en todo el plano complejo, ***C***.

Entonces si fuese entera, sería constante. Pero, por hipótesis, no es constante, por lo que no puede ser una función entera. Al ser una función racional no es holomorfa en los puntos en que se anula el denominador, con lo cual debe existir algún punto en el que $P(z)$ se anule, es decir, $P(z)$ debe tener algún cero. □

Como consecuencia se obtiene que un polinomio complejo de grado n, $n \geq 1$, tiene n raíces (contadas cada una de ellas con su orden de multiplicidad).

4.7.7. Teorema de *Morera*

El **teorema de *Morera***, debido a *E. Morera* (1 856 – 1 909), es también una consecuencia inmediata de lo anterior y se puede considerar recíproco del teorema de *Cauchy*. Dice:

Proposición 4.7.7: ***Teorema de Morera***

Si f es continua en un dominio simplemente conexo $G \subseteq \mathbf{C}$, y para todo camino cerrado contenido en G las integrales de f a lo largo de esos caminos son siempre nulas, entonces la función es holomorfa en G.

Demostración:

En efecto, la hipótesis del teorema implica que f admite una función primitiva F cuya derivada coincide con f en G, $F' = f$, por lo que F es derivable en G, y por tanto es holomorfa en G, con lo que las derivadas de orden n de F son funciones holomorfas, y en particular su derivada primera, *f,* es una función holomorfa en G. □

El teorema de *Morera* es útil en numerosas ocasiones para demostrar la holomorfía de funciones.

Una aplicación sencilla es el principio de reflexión de *Schwartz* que dice así:

Proposición 4.7.8: ***Principio de reflexión de Schwartz***

Sea G_+ un abierto del semiplano superior del plano complejo, cuya frontera contiene al segmento L del eje real. Sea G_- el abierto simétrico de G_+ respecto del eje real. Sea f una función holomorfa en G_+ que toma valores reales en L. Entonces la función definida mediante:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in G_+ \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in G_- \end{cases}$$

es holomorfa en el abierto $G_+ \cup G_- \cup L$.

4.7.8. Principio del módulo máximo

También se tienen resultados importantes relacionados con los **valores máximos (y mínimos) de los módulos** de funciones holomorfas. El resultado siguiente se denomina a veces **teorema del valor medio de *Gauss***.

Lema 4.7.9: ***Teorema del valor medio de*** **Gauss**

Sea f una función holomorfa en un entorno $|z-a| < \varepsilon$. Si $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo z del entorno, entonces $f(z)$ tiene valor constante $f(a)$ en ese entorno.

Es una consecuencia casi directa del hecho de que el valor de la función en un punto interior a sea el promedio de los valores de f en la circunferencia de radio r y centro a. Este lema se utiliza para probar el teorema que se conoce como **principio del módulo máximo**:

Proposición 4.7.10: ***Principio del Módulo máximo***

Si una función f es holomorfa y no constante en un dominio G, $f(z)$ no alcanza un valor máximo en G.

Es decir, no existe ningún punto a de G tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo z de G.

La demostración de este resultado se basa en suponer que existe un punto de *G* en el que la función alcanza su valor máximo, llegando a la conclusión de que en ese caso la función sería constante, lo que se ha impuesto, por hipótesis, que no lo es.

Otra consecuencia inmediata se obtiene si la misma idea se aplica ahora a una región cerrada y acotada:

Si una función *f* es holomorfa en una región cerrada y acotada *G*, es, naturalmente, una función continua en *G*, luego por el teorema de *Weierstrass* el módulo de la función debe alcanzar un valor máximo en *G*. Si *f* no es constante ese valor máximo no puede alcanzarlo en el interior de la región *G*, con lo que se obtiene la siguiente consecuencia:

Proposición 4.7.11:

Si *f* es una función continua en una región cerrada y acotada *G* y es holomorfa y no constante en el interior de *G*, entonces el máximo valor de $|f(z)|$, se alcanza en algún punto de la frontera de *G*.

En efecto, $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo en el interior del recinto *G*, por lo que deberá alcanzarlo en la frontera.

Como consecuencia, si *f* es una función entera, (holomorfa en todo el campo complejo), y no es constante, no puede ser acotada en ***C***.

Por ejemplo, ya se vio que las funciones *sen*(*z)* y *cos*(*z*) no eran acotadas en el campo complejo, y se acaba de comprobar que al ser funciones enteras y no ser funciones constantes, necesariamente no podrían estar acotadas en ***C***.

De forma similar puede probarse que el mínimo valor de $|f(z)|$ debe alcanzarse en la frontera, nunca en el interior del recinto.

4.7.9. Otras consecuencias

Estos resultados permiten extraer algunas importantes consecuencias:

1. Si f es holomorfa en una región G y existe un punto $a \in G$ tal que $f^{n)}(a) = 0$ para todo n mayor o igual a uno, entonces f es constante en G.
2. Si f es holomorfa en una región G y existe una sucesión (a_n) contenida en G con todos los a_n distintos, y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in G$, y $f(a_n)=0$ para todo n mayor o igual a uno, entonces $f(z) = 0$ para todo z de G. Es decir, los ceros de una función holomorfa no nula tienen que ser puntos aislados en el dominio de holomorfía.

Principio de prolongación analítica

Proposición 4.7.12: ***Principio de prolongación analítica***

Sea G una región del campo complejo y (a_n) una sucesión de puntos distintos de G tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in G$. Si f y g son funciones holomorfas en G tales que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo n mayor o igual a uno, entonces $f(z)$ es igual a $g(z)$ para todo z de G.

Como consecuencia, si dos funciones holomorfas coinciden en la intersección de una recta con G deben coincidir en todo G, con lo que queda probado, por ejemplo, que sólo existe una forma de extender la función real $f(z) = e^x$ a una función holomorfa en todo el campo complejo.

Ceros de funciones holomorfas

Proposición 4.7.13: ***Ceros de funciones holomorfas***

Si f es holomorfa y no constante en G y $a \in G$ es un cero de f ($f(a) = 0$) entonces existe un mínimo entero $k > 0$ tal que $f(z) = (z - a)^k g(z)$ donde g es holomorfa en G y $g(a)$ es distinto de cero. Se dice entonces que f tiene en a un cero de orden k.

Regla de *L'Hôpital*

Proposición 4.7.14: **Regla de L'Hôpital**

Sean f y g dos funciones holomorfas en a tales que $f(a)=g(a)=0$. Entonces se verifica que:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Se formulan a continuación tres resultados sobre el comportamiento en puntos de la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias.

Proposición 4.7.15: **Teorema del límite de *Abel***

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^n$ con círculo de convergencia $|z| < 1$, que se supone que converge en $z = 1$. Sea G_θ el interior de un ángulo de amplitud 2θ, ($\theta < \pi/2$) con vértice en $z = 1$, tal que se abre hacia la izquierda y que es simétrico respecto al eje x. Entonces $\lim_{z \to 1, z \in G_0} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ siendo $f(z)$ la suma de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ en el interior del círculo.

Proposición 4.7.16: ***Teorema de Tauber***

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia 1 y sea *f(z)* su suma en el interior del círculo de convergencia. Si se satisface la relación $\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$ y existe el límite $\lim_{x\to 1^-} f(x) = A$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge y tiene por suma *A*.

Proposición 4.7.17: ***Teorema de Fatou***

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia 1, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie converge uniformemente en cada arco $z = e^{i\theta}$, $(\alpha \le \theta \le \beta)$ tal que todos sus puntos son regulares (no son singulares) para *f(z)*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.7.1: Calcular $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$ y $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, si *C* es una curva cerrada simple, orientada positivamente, que rodea a z_0.

Si *C* es una curva cerrada que rodea a z_0, entonces a) $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, lo que se obtiene como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, siendo $f(z) = 1$. b) $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$, para todo *n* desde 2 en adelante, lo que se obtiene como consecuencia de la fórmula de la derivada de la fórmula integral de Cauchy.

Ejemplo 4.7.2: Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)^2}$ siendo γ la circunferencia de centro i y radio 2, recorrida una vez en sentido positivo.

La función subintegral tiene singularidades aisladas en 2i y –2i, pero sólo 2i está en el interior del recorrido. Se escribe:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2} \cdot dz$$

Se toma como $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$, que es holomorfa en el interior del recorrido, z_0 = 2i y n = 1. Se aplica la expresión de la derivada:

$$f^{n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Se obtiene que $\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2} \cdot dz = \frac{2\pi \mathrm{i} \cdot f'(2\mathrm{i})}{1!} = \frac{2\pi \mathrm{i} \cdot (-2)}{(4\mathrm{i})^3} = \frac{\pi}{16}$.

Ejercicios

4.26. Aplicar el principio de inducción completa para demostrar la fórmula de la derivada de orden *n*.

4.27. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y siendo $f(z)$ igual a $\frac{7z^6 - 4z^2}{(z-2)^5}$.

4.28. Aplicando la expresión de las derivadas de la fórmula integral de Cauchy, calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} \cdot dz$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y n un número natural. Utilizar el resultado obtenido para demostrar que: $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \cdot dx = \frac{2\pi \cdot (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

4.29. Utilizar el Teorema de Liouville para demostrar que si f es una función entera y $Re\ f \geq 0$, entonces f es constante.

4.30. Utilizar el teorema del valor medio de Gauss para calcular la integral: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{sen^2((\pi/6)+e^{it})} \cdot dt$.

4.8. EJERCICIOS

4.31. Calcular la longitud del camino:

$$z(x) = \begin{cases} x+ix & 0 \leq x \leq 1 \\ x+i & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

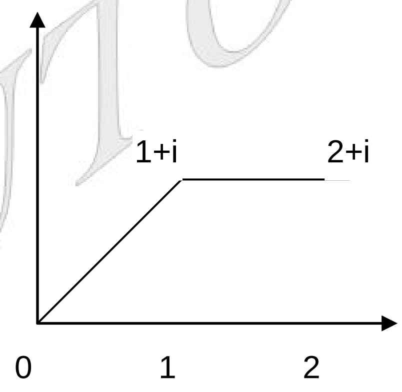


Figura 4.9: Ejercicio 4.32

4.32. Comprobar si $\int_{\gamma} f$ es igual a:

a) 2, si $f(z) = \bar{z}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento que une el origen con el punto 2i.

b) 8(1 – i), si $f(z) = \bar{z}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento que une el punto 2i con 4 + 2i.

c) ¿Puede existir una función holomorfa cuya derivada sea $\bar{z}$?

4.33. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular $\int_\gamma f$, si $f(z) = \bar{z}$, y siendo $\gamma(t) = 2\,e^{it}$, $\frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, y comprobar que se obtiene $4\pi i$.

4.34. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular $\int_\gamma f$, con $f(z) = |z - 1|$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y comprobar que se obtiene 8.

4.35. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular $\int_\gamma f$, para $f(z) = |z|^2$, siendo $\gamma(t)$ el cuadrado de vértices 0, 1, 1 + i, i, y comprobar que se obtiene i – 1.

4.36. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular $\int_\gamma f$, siendo $f(z) = f(x + iy) = y - x - i\cdot 3x^2$ y $\gamma(t)$ el triángulo de vértices 0, i, 1 + i, y comprobar que se obtiene $\frac{i-1}{2}$.

4.37. Calcular: $\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2 sen z} dz\right|$ siendo $\gamma(t) = r\cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.38. Comprobar que $\left|\int_{\gamma}\frac{1}{z+2}dz\right| \le 4\pi$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y que $\int_{\gamma}\frac{1}{z+2}dz = 0$.

4.39. Comprobar que $\left|\int_{\gamma}\frac{1}{z^2+1}dz\right| \le \frac{4\pi}{3}$, siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.40. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = z^2 + 3$ y si: a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$; b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$; c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \le t \le 2\pi$; d) $\gamma(t) = -1 + 2t$, $0 \le t \le 1$.

4.41. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = \frac{3+z}{z}$ para:

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$;

c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \le t \le 2\pi$.

4.42. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = sen(z - 1)$, siendo:

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$;

c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \le t \le 2\pi$;

d) $\gamma(t) = -1 + 2t$, $0 \le t \le 1$.

4.43. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = e^{z+3}$, y

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$;

c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \le t \le 2\pi$;

d) $\gamma(t) = -1 + 2t$, $0 \le t \le 1$.

4.44. Sea $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Verificar si se anulan, o no, las siguientes integrales, $\int_\gamma f(z) \cdot dz$, siendo:

a) $f(z) = \dfrac{z^2 - 7}{z - 3}$,

b) $f(z) = (z^2 - 5)e^{-z^3 + 6}$,

c) $f(z) = \dfrac{z + 5}{z^2 - 9}$,

d) $f(z) = \dfrac{senz}{\cos z}$.

4.45. Aplicar la fórmula integral de Cauchy para calcular las siguientes integrales $\int_\gamma f$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ igual a:

a) $\dfrac{z^2 + 3z - 5}{z(z - 2)}$,

b) $\dfrac{z^3 + 4}{(z^2 - 16)(z + 1)}$,

c) $\dfrac{senz}{(z - 2)}$,

d) $\dfrac{\cos z}{(z - \pi)}$,

e) $\frac{e^{z^2+1}}{(z+1)}$.

4.46. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ igual a $\frac{z^4 - 3z^2}{(z-1)^3}$.

4.47. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, siendo $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y $f(z)$ igual a $\frac{(z^3 - 5z)\cdot e^{z-1}}{(z-1)^3}$.

4.48. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$, y $f(z)$ $\frac{senz \cdot e^{z-1}}{z^2}$.

4.49. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, siendo $\gamma(t) = 4e^{-it}$, $0 \le t \le 4\pi$, y $f(z) =$ $\frac{senz}{z^2 + 2z - 3}$.

4.50. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, si $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$, y si $f(z)$ es igual a $\frac{\cos z \cdot e^{z-1}}{z^2 - 4}$.

4.51. Utilizar el teorema del valor medio de Gauss para calcular la integral: $\int_0^{2\pi} sen^2(\pi/3 + 3e^{it})\cdot dt$

4.52. Utilizar el teorema de Liouville para demostrar que si $|f| \ge c > 0$ entonces la función *f* es constante.

4.53. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, con $\gamma(t) = a + r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, y

$$f(z) = \frac{3(z-a)\mathrm{sen}z \cdot e^{z-a}}{(z-a)^3}.$$

4.54. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, si $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, para $r = 1/2$ y para $r = 3/2$, siendo $f(z)$ igual a $\frac{\cosh z}{(z^2+1)z}$.

4.55. Calcular la integral de $\int_\gamma f$, siendo $f(z)$ igual a $\frac{e^{2z}}{(z^2+1)z}$ y γ un camino cerrado de índices:

a) $I_\gamma(0) = 0$; $I_\gamma(i) = 0$; $I_\gamma(-i) = 0$.

b) $I_\gamma(0) = 0$; $I_\gamma(i) = 1$; $I_\gamma(-i) = 1$.

c) $I_\gamma(0) = 1$; $I_\gamma(i) = -1$; $I_\gamma(-i) = -1$.

d) $I_\gamma(0) = 1$; $I_\gamma(i) = -1$; $I_\gamma(-i) = 1$.

4.56. Calcular la integral de $\int_\gamma f$ si $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, según los distintos valores de r, distintos de 1 y de 2, con $f(z)$ igual a $\frac{e^z}{(z^2+1)(z+2)}$.

4.57. Calcular las siguientes integrales, $\int_\gamma f$:

a) con $f(z) = z^2 + 3\bar{z}$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

b) con $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

c) con $f(z) = Log\ z$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

d) con $f(z) = Re\ z$ y $\gamma(t) \equiv [1, i]$.

(*Solución*: a) $-2/3 + 3\pi i$; b) $2i - 2$; c) $-2i$; d) $(i - 1)/2$)