CAPÍTULO 2

Funciones complejas

Como se ha comprobado en el capítulo anterior, el plano complejo ***C*** se puede considerar isomorfo al plano real, $\mathfrak{R}^2$. Esto puede llevar a pensar, a la hora de definir una función sobre ***C***, que la situación es análoga a la de una función de dos variables reales, ya que si $z = x + i\cdot y$, la función $f(z)$ se puede considerar como una función que depende de las variables reales x e y. Pero esto no es totalmente cierto en general, y la razón es que $f(z)$ es también una función de una única variable, la variable compleja z. Es por ello que una función compleja se puede considerar que está a medio camino entre las funciones de una variable real y las de dos variables reales, y esto hace posible que para una función compleja se puedan definir conceptos que no es posible definir para funciones de dos variables reales, como es el caso de la derivada de una función .

Dentro de las funciones definidas en ***C*** se estudian en la *Sección 2* aquéllas que tienen una dependencia directa de la variable $z = x + i\cdot y$, y no son simplemente funciones de las variables separadas x e y. Se introducen en primer lugar las funciones complejas, se definen las funciones elementales como extensiones de las correspondientes reales y se estudian los límites y la continuidad de las funciones complejas, que tienen un comportamiento análogo al caso de las funciones definidas en $\mathfrak{R}^2$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

La derivada compleja, que se introduce en la *Sección 3*, es un concepto fundamental dentro de la teoría de funciones de una variable compleja porque, aunque la definición es análoga a la de derivada de una función de una variable real, el hecho de que el límite se tome en el plano complejo hace que las condiciones en las que existe la derivada sean más fuertes que en el caso real. Esta es la razón por la que una función compleja que sea derivable en un subconjunto adecuado del plano complejo tenga un comportamiento mejor que en el caso real.

Las funciones derivables en todos los puntos de un conjunto abierto *G* del plano complejo se denominan funciones holomorfas en *G* y se estudian en la *Sección 4*. Tienen un interés especial porque a partir de ellas se pueden deducir resultados realmente sorprendentes, como se verá mas adelante en los *Capítulos 4 y 5*.

El capítulo termina con la introducción, en la *Sección 5,* de las funciones armónicas, funciones de dos variables reales, que son las soluciones de la ecuación de Laplace en $\Re^2$, y se estudia la relación que existe entre ellas y las funciones holomorfas de una variable compleja.

NO COPIAR; © DE LOS AUTORES

2.1. DEFINICIÓN. FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.1. Definición de función compleja

Definición 2.1.1:

Dado un subconjunto S del plano complejo ***C***, se denomina ***función compleja de una variable compleja*** $f(z)$ a una aplicación $f : S \to \mathbf{C}$ tal que a cada valor $z \in S \subseteq \mathbf{C}$ le corresponde un único número complejo $f(z)$.

Si $z = x + i \cdot y$, la función $f(z)$ se puede expresar de la forma

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

donde u y v son funciones de dos variables reales que representan respectivamente la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$.

Así, por ejemplo, la función $f(z) = z^2 + 1$ se puede expresar como:

$$f(z) = (x + i \cdot y)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 2x \cdot y \cdot i + 1 = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

con $u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ y $v(x, y) = 2x \cdot y$.

Definición 2.1.2:

Se llama ***dominio*** de la función al conjunto S de puntos en los que la función está definida, y se llama ***imagen*** de f al conjunto formado por todos los valores complejos que toma la función. Si no se especifica, el dominio es el máximo subconjunto del plano complejo ***C*** en el que la función está definida.

De la expresión $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ se deduce que una función compleja por una parte se puede suponer similar a una función de una variable real, puesto que a cada número complejo z le corresponde un valor complejo

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

$f(z)$. Pero por otra parte se puede tomar como el resultado de aplicar las funciones u y v que están definidas en un subconjunto de $\Re^2$, y desde este punto de vista f podría considerarse próxima a las funciones definidas en $\Re^2$. Es precisamente esta situación la que hace que las funciones complejas tengan propiedades diferentes a las de las funciones reales.

2.1.2. Funciones elementales

2.1.2.1. Polinomios

Definición 2.1.3:

Los ***polinomios complejos*** son funciones de la forma

$$f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0,\ a_j \in \mathbf{C} \text{ para } j = 0, \ldots, n.$$

Las partes real e imaginaria de una función polinómica compleja son funciones polinómicas de dos variables reales. Así, por ejemplo:

$$f(z) = 2z^2 + 3 = 2(x + i \cdot y)^2 + 3 = (2(x^2 - y^2) + 3) + i \cdot (4\, x \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Es importante resaltar que una función polinómica compleja es aquélla que se puede expresar como una combinación lineal de potencias de exponente natural de z, ya que puede ocurrir que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean funciones polinómicas en $\Re^2$ y sin embargo $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ no sea un polinomio complejo. Un ejemplo es la función $f(z) = (x^2 + y^2) + i \cdot (x^2 - y^2)$, que no se puede expresar de la forma $a\, z^2 + b \cdot z + c$, y por tanto no es un polinomio complejo.

Las funciones polinómicas complejas están definidas en todo el plano complejo.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.1.2.2. Funciones racionales

Definición 2.1.4:

De forma análoga al caso real, se denomina ***función racional*** a una función definida como cociente de dos polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Como en el caso real, las funciones racionales se pueden definir en todo el plano complejo, salvo en el conjunto de los números complejos que anulen el denominador, que son las raíces del polinomio $Q(z)$.

Así, por ejemplo, la función:

$$f(z) = \frac{2z^2+1}{z^2+1}$$

está definida para todo valor complejo del plano salvo para $z = \text{i}$ y $z = -\text{i}$.

2.1.2.3. Función exponencial

Definición 2.1.5:

Dado el número complejo $z = x + \text{i}y$, la ***función exponencial compleja*** se define a través de la fórmula de Euler introducida en el capítulo anterior

$$f(z) = exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\,(cos\ y + \text{i}\cdot sen\ y\,).$$

La función así definida es una extensión de la función exponencial real, puesto que si z es un número real se tiene que $y = 0$ y entonces $f(x) = e^x$.

Propiedades

La función exponencial compleja tiene las siguientes propiedades:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

1. Dados z, $w \in \boldsymbol{C}$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

2. Si $z = x + i\cdot y$, $|e^z| = e^x$, $|e^{iy}| = 1$.

3. $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\cdot\pi\cdot i$, siendo $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $e^{-z} = \left(e^z\right)^{-1}$.

5. $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$.

Observaciones. Las propiedades anteriores indican que la función exponencial compleja mantiene en general las propiedades de la función exponencial real. Existen sin embargo dos diferencias importantes entre ellas que se presentan a continuación.

La primera diferencia es que la función exponencial real es una función inyectiva, que está definida en todos los puntos de la recta real y toma todos los valores comprendidos en el intervalo $(0, \infty)$. La función exponencial compleja está definida para todo punto del plano complejo ***C*** pero no es una función inyectiva, puesto que para todo z se tiene que $e^{z+2\pi i} = e^z$. Es por tanto una ***función periódica, de periodo 2πi***, que se repite en bandas horizontales del plano complejo, de amplitud 2π. Esto es algo que es necesario tener en cuenta si se quiere estudiar la existencia de la función inversa.

La segunda diferencia entre las funciones exponencial real y compleja es que la función exponencial compleja puede tomar valores reales negativos, en contra de lo que sucede en el caso real. De hecho se puede demostrar a través de la definición de logaritmo complejo que **puede tomar cualquier valor complejo salvo el 0**. Esto es razonable si se tiene en cuenta que el módulo de

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

e^z es e^x, $|e^z| = e^x$, que toma todos los posibles valores reales positivos, salvo el valor cero, y el argumento de e^z es la parte imaginaria de *z*. Se comprobará este hecho de manera formal cuando se haya definido el logaritmo complejo.

2.1.2.4. Funciones trigonométricas

Las fórmulas de Euler permiten asegurar que, para todo $x \in \mathfrak{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \cdot \operatorname{sen} x.$$

Se tiene entonces que si $x \in \mathfrak{R}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Es razonable extender las funciones seno y coseno al plano complejo definiéndolas para todo $z \in \boldsymbol{C}$ como:

Definición 2.1.6:

Las funciones trigonométricas complejas seno y coseno se definen:

$$\boldsymbol{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}.$$

Propiedades

Estas funciones así definidas conservan, para todo z, $w \in \boldsymbol{C}$, las siguientes propiedades:

1. $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(z)$
2. $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$
3. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(w) + \operatorname{sen}(w) \cdot \cos(z)$

   $\cos(z + w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \operatorname{sen}(z) \cdot \operatorname{sen}(w)$.

Las funciones *sen* z y *cos z* se diferencian de las correspondientes funciones reales en que pueden tomar valores complejos cuyo módulo no esté acotado, al contrario del seno y el coseno reales, cuyos valores están acotados entre –1 y 1. En efecto, basta tener en cuenta que para todo $x \in \mathfrak{R}$**:**

$$\cos(\mathrm{i}\cdot x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} \quad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\mathrm{i}\cdot x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i},$$

de manera que para valores de *x* suficientemente grandes los módulos de los complejos asociados son mayores o iguales que cualquier valor real que fijemos.

Ceros de las funciones *sen z* y *cos z*.

Las funciones *sen z* y *cos z* sólo toman el valor cero en puntos de la recta real; es decir, los ceros de las funciones complejas *sen z* y *cos z* coinciden con los ceros de sus correspondientes reales. Esto se puede comprobar fácilmente expresando *sen z* y *cos z* en forma binómica: si $z = x + \mathrm{i}\cdot y$,

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \cosh y + \mathrm{i}\cdot\cos x \cdot \operatorname{senh} y$$

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y.$$

Así,

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ y } \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow z = 2\cdot k\cdot\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ y } \cos x = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\cdot\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Las restantes funciones trigonométricas se definen de la misma forma que en el caso real. Así, por ejemplo, la ***tangente*** es

$$tg\ z = \operatorname{sen} z / \cos z,$$

y esta definida en todos aquellos valores complejos en los que no se anula el

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

denominador, es decir, para $z \neq (2k + 1)\cdot\pi/2$, $k \in$ **Z**..

2.1.2.5. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen de forma similar a las funciones hiperbólicas de una variable real.

Definición 2.1.7:

Las funciones ***seno*** y ***coseno hiperbólicos*** se definen para cada $z \in$ ***C*** como:

$$\textbf{cosh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \textbf{senh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

De la propia definición se deduce de manera inmediata la relación del seno y el coseno hiperbólicos con el seno y el coseno. Se tiene:

$$senh\ z = -\, i\cdot sen\ (i\cdot z) \qquad cosh\ z = cos\ (i\cdot z)$$

$$sen\ z = -\, i\cdot senh\ (i\cdot z) \qquad cos\ z = cosh\ (i\cdot z).$$

Propiedades

Las funciones hiperbólicas se comportan también de forma análoga a las correspondientes reales. Se tienen, para todo z, $w \in$ ***C***, las siguientes propiedades:

1. $cosh\ (-z) = cosh\ (z)$, $senh\ (-z) = -senh\ (z)$.
2. $cosh^2\ (z) - senh^2\ (z) = 1$.
3. $senh\ (z + w) = senh\ (z) \cdot cosh\ (w) + senh\ (w) \cdot cosh\ (z)$.

   $cosh\ (z + w) = cosh\ (z) \cdot cosh\ (w) + senh\ (z) \cdot senh\ (w)$.
4. $senh\ z = senh\ x \cdot cos\ y + i\cdot cosh\ x \cdot sen\ y$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

$$\cosh z = \cosh x \cdot \cos y + \mathrm{i}\cdot \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y.$$

De la relación entre las funciones *senh z* y *cosh z* se deduce de manera inmediata que la función *senh z* toma el valor cero en los puntos $z_n = n\cdot\pi\cdot\mathrm{i}$, mientras que los ceros de *cosh z* están en los puntos $z_n = (n + 1/2)\cdot\pi\cdot\mathrm{i}$

Las restantes funciones hiperbólicas se definen de la misma forma que en el caso real. Así, por ejemplo, la tangente hiperbólica es:

$$\operatorname{tgh} z = \operatorname{senh} z / \cosh z,$$

y esta definida en todos aquellos valores complejos en los que no se anula el denominador.

2.1.2.6. Función logaritmo

El logaritmo complejo se introduce como la función inversa de la función exponencial. La primera dificultad está en el hecho de que la función exponencial no es una función inyectiva, y por tanto la función inversa asociada no va a ser una correspondencia unívoca, como sucede en la definición usual de función, sino que va a ser una función multívoca, tal que a cada número complejo distinto de cero le va a asociar infinitos valores complejos.

Definición 2.1.8:

Dado $z = x + \mathrm{i}\cdot y \in \boldsymbol{C}$, $z \neq 0$, se define:

$$\boldsymbol{\log z = \ln |z| + \mathrm{i}\cdot(\arg z + 2k\cdot\pi),\ k \in Z}$$

Así, por ejemplo:

a) $\log \mathrm{i} = \ln |\mathrm{i}| + \mathrm{i}\cdot(\pi/2 + 2k\cdot\pi) = \mathrm{i}\cdot(\pi/2 + 2k\cdot\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$

b) $\log(-1) = \mathrm{i}\,(\pi + 2k\cdot\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

c) *log* (1+ i) = *ln* $\sqrt{2}$ + i·(π /4 + 2*k*·π), *k* ∈ ***Z***

El logaritmo asocia entonces a cada número complejo infinitos valores complejos, que tienen la misma parte real pero su parte imaginaria difiere entre ellos un múltiplo entero de 2π.

Si se restringen los valores del argumento de *z* a un determinado intervalo de amplitud 2π, como puede ser el intervalo [–π, π), el logaritmo complejo se convierte en una función unívoca que se denomina ***logaritmo principal***, o ***determinación principal del logaritmo***, y se denota con mayúscula

$$\mathbf{Log\ z = ln\ |z| + i \cdot Arg\ (z),\ Arg\ (z) \in [-\pi, \pi).}$$

Propiedades

1. *log* (*z*·*w*) = *log z* + *log w*.

2. $log\ (\frac{z}{w}) = log\ z - log\ w.$

3. *Log* (*z*·*w*) = *log z* + *log w* ± 2*k*·π·i.

Observación: Es importante tener en cuenta que mientras *exp* (*Log z*) = *z,* cualquiera que sea el valor de *z, Log* (*exp z*) puede tomar un valor distinto de *z*. En efecto, si *z* = *x* + i·*y* es tal que *y* > π, se tiene que

$$Log\ (e^z) = ln\ (e^x) + i \cdot Arg\ (e^z) = x + i \cdot (y - 2k \cdot \pi) = z - 2k \cdot \pi \cdot i \neq z.$$

Se puede comprobar ahora de manera formal que la función exponencial puede tomar cualquier valor complejo distinto de 0. En efecto, si se fija un número complejo $w \neq 0$, existe otro número complejo, *z**, tal que $e^{z^*} = w$. Basta tomar *z** = *ln* |*w*| + i·*arg w*. Se tiene entonces:

$$e^{z^*} = e^{ln|w|} \cdot (cos(arg\ w) + i \cdot sen(arg\ w)) = |w| \cdot (cos(arg\ w) + i \cdot sen(arg\ w)) = w.$$

2.1.2.7. Funciones definidas como potencias

Potencias complejas

El logaritmo complejo permite extender las potencias al campo complejo. Se puede así tomar un número complejo distinto de 0 y elevarlo a un determinado exponente complejo a través de la siguiente definición

Definición 2.1.9:

Dados los números complejos c y d, con $c \neq 0$, se define:

$$\mathbf{c^d = exp\ (d \cdot log\ c\ ).}$$

La expresión anterior representa a infinitos números complejos.

Así, por ejemplo:

a) $i^{-2i} = exp\ (-2i \cdot log\ i) = exp\ (-2i \cdot (i \cdot (\pi/2 + 2k \cdot \pi))) = e^{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $(1 + i)^{-i} = exp\ (-i \cdot log\ (1 + i)) = exp\ (-i \cdot ln\sqrt{2} + \pi/4 + 2k \cdot \pi) =$

$= e^{\pi/4+2k\pi}\ (cos\ (ln\sqrt{2}) - i \cdot sen\ (ln\sqrt{2}))$, $k \in \mathbf{Z}$

Se pueden también definir funciones en las que se utilicen potencias complejas, y en ellas la variable z puede aparecer en la base o en el exponente.

Definición 2.1.10:

La función $\mathbf{f(z) = z^c}$**,** siendo el exponente c una constante compleja, $c \in \mathbf{C}$, se define como

$$\mathbf{f(z) = exp\ (c \cdot log\ z\ ),\ z \neq 0.}$$

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Estas funciones son en general funciones multivaluadas, es decir, con infinitas ramas. De forma análoga al logaritmo, si se fija un intervalo de tamaño 2π para el argumento de *z* se tiene una función univaluada.

Se tienen distintas situaciones en función del valor del exponente *c*.

- Si $c = n \in \mathbf{Z}$, es decir, si *c* es el número entero *n*, entonces *f* es una función univaluada, pues

  $z^n = exp\ (n \cdot log\ z\ ) = exp\ (n \cdot (ln\ |z| + i \cdot (arg\ z + 2k \cdot \pi))) =$

  $= |z|^n \cdot exp\ (i \cdot n \cdot (Arg\ z + 2k \cdot \pi)) = |z|^n \cdot exp\ (i \cdot n \cdot Arg\ z)$.

- Si *c* es un número racional que tiene como forma irreducible $c = p/q$, con *p* y *q* enteros, la función $f(z) = z^c$ tiene *q* ramas, correspondientes a las *q* raíces *q*-simas de z^p.

- Finalmente, si *c* es un número real irracional, o un número complejo con parte imaginaria distinta de cero, la función $f(z) = z^c$ tiene infinitas ramas. Cada una de ellas se obtiene al fijar un valor de $\alpha > 0$, y expresar *z* en forma polar.

Definición 2.1.11:

La función $\boldsymbol{f(z) = c^z}$, siendo la base una constante compleja, $c \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$, se define como

$$\boldsymbol{f(z) = exp\ (z \cdot log\ c\ ).}$$

Para cada valor de *log c* prefijado, la función *f* así definida asocia a cada número complejo *z* un único valor complejo, y por tanto *f* es una función univaluada.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.1.1: Estudiar si la función

$$f(z) = 2x^3 + 2x \cdot y - 6x \cdot y^2 - 1 + i \cdot (6x^2 \cdot y + x^2 - y^2 - 2y^3)$$

es un polinomio complejo.

La función $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = 2(x^3 + i \cdot 3x^2 \cdot y - 3x \cdot y^2 - i \cdot y^3) + i \cdot (x^2 - y^2 + 2x \cdot y) - 1 = 2z^3 + i \cdot z^2 - 1.$$

Se tiene entonces que $f(z)$ es un polinomio complejo de grado tres.

Ejemplo 2.1.2.: Estudiar el dominio de definición de las siguientes funciones

a) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^3 - iz^2 - z + i}$

b) $g(z) = \dfrac{\tan z}{\sqrt{z^2 + 1}}$

c) $h(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 3}{\cosh z}$

La función $f(z)$ es un cociente de polinomios. Se puede definir por tanto en todo el plano complejo salvo en los ceros del polinomio que está en el denominador. Como $z^3 - iz^2 - z + i = (z - i) \cdot (z^2 - 1)$, $f(z)$ está definida en todo ***C*** menos en los puntos i, 1 y –1.

La función $g(z)$ se puede definir en todo el plano complejo salvo en los puntos en los que no está definida la tangente y en los ceros del denominador. Está entonces definida en todo ***C*** menos los puntos i, – i y $z_n = (n + 1/2) \cdot \pi$, con $n \in$ ***Z***.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Finalmente, la función $h(z)$ se puede definir en todo el plano complejo salvo los puntos en los que se anula el denominador; está definida por tanto en todo ***C*** menos los puntos $z_n = (n + 1/2)\cdot\pi\cdot i$, con $n \in \mathbf{Z}$.

En los dos ejemplos que siguen se presentan dos procedimientos alternativos: el primero es directo, mientras que en el segundo se utiliza la definición de logaritmo complejo. Comparándolos, se puede apreciar que la utilización del logaritmo permite en algunos casos simplificar las operaciones.

Ejemplo 2.1.3: Resolver la ecuación $e^z = -2$.

Procedimiento 1: Se expresan en primer lugar los dos miembros de la igualdad de la misma forma:

$e^x\cdot(\cos y + i\cdot \text{sen } y) = 2 \cdot (-1)$.

Se tiene entonces que $e^x = 2$, con lo cual $x = \ln 2$, y que $\text{sen } y = 0$ y $\cos y = -1$. Por tanto $y = (2k + 1)\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Las soluciones de la ecuación inicial son entonces:

$$z = \ln 2 + (2k + 1)\cdot\pi\cdot i,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Procedimiento 2: Tomando logaritmos en la ecuación $e^z = -2$, se tiene:

$z = \log(-2) = \ln|2| + i\cdot(\arg(-2) + 2k\cdot\pi) = \ln 2 + (2k + 1)\cdot\pi\cdot i$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ejemplo 2.1.4: Resolver la ecuación $\text{sen } z = 2$.

Procedimiento 1:

$$\text{sen } z = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i\ .$$

Llamando $m = e^{iz}$, se tiene

$$m^2 - 4\mathrm{i}\cdot m - 1 = 0,$$

que tiene como solución

$$m = (2 \pm \sqrt{3})\cdot\mathrm{i}.$$

Deshaciendo el cambio

$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})\cdot\mathrm{i} \Leftrightarrow e^{-y}\cdot(\cos x + \mathrm{i}\cdot\operatorname{sen} x) = (2 \pm \sqrt{3})\cdot\mathrm{i}.$

Se tiene entonces que $e^{-y} = (2 \pm \sqrt{3})$, con lo que $e^{y} = (2 \mp \sqrt{3})$ y entonces $y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi$. Se puede asegurar pues que los números complejos z tales que $\operatorname{sen} z = 2$ son de la forma:

$z = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi + \mathrm{i}\cdot\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbf{Z}$

Procedimiento 2:

Se procede de la misma forma que en el procedimiento 1 hasta obtener la relación

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})\cdot\mathrm{i}$$

Tomando logaritmos en la ecuación

$\mathrm{i}\cdot z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + \mathrm{i}\cdot(\frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi)$, con lo que se tiene

$$z = \pi/2 + 2k\cdot\pi + \mathrm{i}\cdot\ln(2 \pm \sqrt{3}),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ejemplo 2.1.5: Demostrar que, si $z = x + \mathrm{i}\cdot y$, entonces:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{y} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

Teniendo en cuenta que

$sen\ z = sen\ x \cdot cosh\ y + i \cdot cos\ x \cdot senh\ y$

$cos\ z = cos\ x \cdot cosh\ y - i \cdot sen\ x \cdot senhy$

se tiene

$|sen\ z|^2 = sen^2\ x \cdot cosh^2\ y + cos^2\ x \cdot senh^2\ y =$

$sen^2\ x \cdot cosh^2\ y + (-sen^2\ x \cdot senh^2\ y + sen^2\ x \cdot senh^2\ y) + cos^2\ x \cdot senh^2\ y =$

$sen^2\ x \cdot (cosh^2\ y - senh^2\ y) + (sen^2\ x + cos^2\ x) \cdot senh^2\ y = sen^2\ x + senh^2\ y.$

De forma análoga

$|cos\ z|^2 = cos^2 x \cdot cosh^2 y + sen^2 x \cdot senh^2 y =$

$cos^2 x \cdot cosh^2\ y + (-cos^2 x \cdot senh^2 y + cos^2 x \cdot senh^2 y) + sen^2 x \cdot senh^2 y =$

$cos^2 x \cdot (cosh^2\ y - senh^2\ y) + (sen^2 x + cos^2 x) \cdot senh^2 y = cos^2\ x + senh^2\ y.$

Este ejemplo muestra de manera directa que el crecimiento del módulo del seno y del modulo del coseno complejos depende de la parte imaginaria de *z.* Esta es la razón por la que el seno y el coseno complejos no son funciones acotadas en ***C***.

Ejemplo 2.1.6: Estudiar los valores que toman las siguientes funciones

a) $f(z) = z^{1/3}$, *b*) $f(z) = (1 + i)^z$, *c*) $f(z) = z^{1+i}$.

a) Para cada número complejo *z*, $f(z) = z^{1/3}$ toma los valores:

i) $|z|^{1/3} \cdot exp\ (i \cdot Arg\ z/3)$,

ii) $|z|^{1/3} \cdot exp\ (i \cdot Arg\ z/3 + 2\pi/3)$ y

iii) $|z|^{1/3} \cdot exp\ (i \cdot Arg\ z/3 + 4\pi/3)$.

b) $f(z) = (1 + i)^z = exp\ (z \cdot log\ (1 + i))$.

Si se toma *log* (1 + i) = $ln\sqrt{2}$ + i·π/4, la función *f*(*z*) asocia a cada *z* el valor

$$f(z) = exp\,(z\cdot(ln\sqrt{2} + i\cdot\pi/4)) = exp\,(x\cdot ln\sqrt{2} - (\pi/4)\cdot y + i\cdot(x\cdot\pi/4 + y\cdot ln\,\sqrt{2})).$$

c) La función $f(z) = z^{1+i}$ toma para cada *z* los infinitos valores:

$$f(z) = exp\,((1 + i)\cdot log\,z) = exp\,((1 + i)\,(ln\,|z| + i\cdot(Arg\,z + 2k\cdot\pi))) =$$

$$|z|\cdot exp\,(-Arg\,z - 2k\cdot\pi + i\cdot(ln\,|z| + Arg\,z)),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ejercicios

2.1. Calcular:

a. *sen* 2i.

b. *cos* 2i.

c. *sh* 2i.

d. *ch* 2i.

e. *tg* (1 + 2i).

2.2. Resolver las ecuaciones:

a. *cos z* = 0.

b. *sen z* = i.

c. *sh z* = 1.

d. *ch z* = 0.

2.3. Calcular *f*(3 + 6i), *f*(2i) y *f*(–5 + 3i), siendo *f*(*z*) igual a:

a. $z^2 - 2z$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

b. $1/(1 - z)$.

c. $1/z^3$.

d. $z/(3z + 2)$.

2.4. Demostrar que:

a. $cos\ (i \cdot z) = senh\ z$.

b. $cosh\ (i \cdot z) = cos\ z$.

c. $sen\ (i \cdot z) = i \cdot senh\ z$.

d. $senh\ (i \cdot z) = -i \cdot sen\ z$.

2.5. Comprobar que al calcular la parte real y la parte imaginaria de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, se obtiene, si $z = x + i \cdot y$:

a. $sen\ z = sen\ x \cdot cosh\ y + i \cdot cos\ x \cdot senh\ y$.

b. $cos\ z = cos\ x \cdot cosh\ y - i \cdot sen\ x \cdot senh\ y$.

c. $senh\ z = senh\ x \cdot cos\ y + i \cdot cosh\ x \cdot sen\ y$.

d. $cosh\ z = cosh\ x \cdot cos\ y + i \cdot senh\ x \cdot sen\ y$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.2. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

2.2.1. Límites de funciones

Las funciones complejas se comportan frente a los límites de forma análoga a las funciones definidas en $\mathfrak{R}^2$. Sean $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ y $w_0 = u_0 + i \cdot v_0$ dos números complejos, y sea $f(z)$ una función definida en un entorno punteado de

z_0. Se dice que la función $f(z)$ tiene como ***límite*** w_0, cuando z tiende a z_0, si la función toma valores cada vez más próximos a w_0 cuando z se aproxima a z_0. Expresado de manera formal

Definición 2.2.1:

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, se verifica que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Se puede comprobar fácilmente que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i \cdot v_0$ si y sólo si se verifica que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Re\,(f(z)) = u_0$ y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Im\,(f(z)) = v_0$.

Se tiene entonces que los límites de funciones complejas tienen el mismo comportamiento, el mismo tipo de dificultades y las mismas propiedades que los límites de funciones de dos variables reales.

2.2.2. Límites en el infinito. Límites infinitos

Se puede extender la definición de límite al plano complejo ampliado con el punto del infinito. En este caso se tienen las siguientes definiciones

Definición 2.2.2:

$\lim\limits_{z \to \infty} \mathbf{f(z) = w}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $M > 0$ tal que siempre que $|z| > M$, se verifica que $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Definición 2.2.3:

$\lim\limits_{z \to z_0} \mathbf{f(z) = \infty}$ si para todo número real M, $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, se verifica que $|f(z)| > M$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.2.3. Continuidad

Una función compleja $f(z)$ es continua en un punto z_0 si está definida en z_0 y en puntos próximos a z_0 toma valores próximos a $f(z_0)$.

La definición formal es la siguiente:

Definición 2.2.4:

La función $f(z)$ es ***continua*** en un punto z_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|z - z_0| < \delta$ se verifica que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

La función $f(z)$ es continua en un conjunto G del plano complejo si $f(z)$ es continua en todos los puntos de G.

Es importante subrayar que, como sucede en el caso de funciones definidas en $\Re^2$, para que una función $f(z)$ sea continua en un punto z_0 hace falta que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

1) La función debe estar definida en z_0, es decir, debe existir $f(z_0)$.

2) Debe existir el $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

3) Debe coincidir dicho límite con el valor de la función en el punto z_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si alguna de estas tres condiciones no se verifica, la función no es continua en z_0.

Los polinomios complejos $p(z)$, así como la función exponencial, e^z, las funciones trigonométricas *cos z* y *sen z* y las funciones hiperbólicas *senh z* y *cosh z*, son funciones continuas en todo el plano complejo.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

La función *tg z* no será continua en los valores en que se anule el denominador, *cos z*.

La función $Log\ z = ln\ |z| + i\cdot Arg\ (z)$, $Arg\ (z) \in [-\pi, \pi)$, no es continua en 0 porque no está definida en 0. Tampoco es continua en los puntos del semieje real negativo, pues en efecto, si z_0 es un número real negativo,

$$Log\ z_0 = ln\ |z_0| + i\cdot Arg\ (z_0) = ln\ |z_0| - i\cdot\pi.$$

Los puntos z_1 que están próximos a z_0 por debajo del eje real son tales que $Log\ z_1 = ln\ |z_1| + i\cdot Arg\ (z_1)$, donde $Arg\ (z_1)$ se aproxima a $-\pi$. Se tiene entonces que $Log\ z_1 \to Log\ z_0$.

Sin embargo, los puntos z_2 que están próximos a z_0 por encima del eje real son tales que $Log\ z_2 = ln\ |z_2| + i\cdot Arg\ (z_2)$, donde $Arg\ (z_2)$ se aproxima a π. Por tanto, $Log\ z_2$ no se aproxima a $Log\ z_0$ por lo que la función *Log z* no es continua en los puntos del semieje real negativo.

En los restantes puntos de ***C*** , la función *Log z* es continua.

Si se toma otra rama del logaritmo, por ejemplo, $Log\ z = ln\ |z| + i\cdot Arg\ (z)$, $Arg(z) \in [0, 2\pi)$, la función *Log z* es continua en todo ***C*** menos los números complejos $z = x$, $x \geq 0$, es decir, en todos los números complejos menos los que están situados en el semieje real positivo, incluido 0. Cualquier rama de la función *Log z* es continua en ***C*** salvo en una semirrecta de origen el punto 0.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.2.1: Calcular los siguientes límites: a) $\lim\limits_{z\to i} \frac{z+1}{2}$; b) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$;

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

c) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|^2}{z}$.

a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{i+1}{2}$

b) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Si se toman los límites direccionales, es decir, a través del eje real y del eje imaginario, se obtienen respectivamente los valores 1 y – i. Se tiene entonces que los límites direccionales son diferentes y por tanto no existe límite.

c) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|^2}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|^2 \bar{z}}{z\bar{z}} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|^2 \bar{z}}{|z|^2} = \lim\limits_{z \to 0} \bar{z} = 0.$

Ejemplo 2.2.2: Estudiar el límite en el infinito y los límites infinitos de la función: $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

El estudio de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ puede servir como muestra para aplicar las definiciones de límites infinitos o en el infinito. Se tiene que $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{1}{z^2} = 0$ porque fijado cualquier ε > 0 existe un número real $M = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ tal que si el módulo de z es mayor que M se tiene que $|f(z)| = \left|\dfrac{1}{z^2}\right| < \dfrac{1}{M^2} < \varepsilon$.

$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z^2} = \infty$ porque para cualquier número real $M > 0$ existe $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ tal que si $0 < |z| < \delta$, se verifica que $|f(z)| = |\frac{1}{z^2}| > M$.

Ejemplo 2.2.3: Estudiar la continuidad de las funciones del ejemplo 2.2.1.

a) $f(z) = \frac{z+1}{2}$ es continua en z = i porque:

i) Está definida en i, $f(\mathrm{i}) = \frac{i+1}{2}$.

ii) Existe $\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z+1}{2}$, ya que $\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z+1}{2} = \frac{i+1}{2}$.

iii) El límite coincide con el valor de la función en z = i, $f(\mathrm{i}) = \frac{i+1}{2} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z+1}{2}$.

b) $f(z) = \frac{|z|}{z}$ no es continua en $z = 0$ porque f no está definida en 0, y tampoco existe $\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$.

c) $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$ no es continua en $z = 0$ porque f no está definida en 0, aunque existe $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = 0$.

d) La función $f^*(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{z} & si\ z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0 \end{cases}$, es continua en 0 porque ahora si se verifican las tres condiciones, i) existe $f^*(0) = 0$, ii) existe el límite y iii) el límite coincide con el valor de la función en $z = 0$, $f^*(0) = 0 = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Ejercicios

2.6. Demostrar que: $\underset{z\to z_0}{lím}\ f(z) = w_0 = u_0 + i\cdot v_0$ si y sólo si se verifica que

$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\ Re\ (f\ (z)) = u_0$ y $lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\ Im\ (f\ (z)) = v_0$.

2.7. Calcular:

a. $\underset{z\to 2i}{lim} \dfrac{iz}{3}$.

b. $\underset{z\to 2i}{lím} (3x - i\cdot 5y^2)$.

c. $\underset{z\to 2i}{lím} \dfrac{3z+2i}{2z+3}$.

d. $\underset{z\to 2i}{lím} \dfrac{iz+2}{2z+3}$.

2.8. Calcular:

a. $\underset{z\to 1}{lím} \dfrac{3z+2i}{z-1}$.

b. $\underset{z\to -1}{lím} \dfrac{2z+2i}{z+1}$.

2.9. Calcular:

a. $\underset{z\to \infty}{lím} \dfrac{3z+2i}{z-1}$.

b. $\underset{z\to \infty}{lím} \dfrac{3z^2+2i}{z-1}$.

c. $\underset{z\to \infty}{lím} \dfrac{3z+2i}{z^2-1}$.

2.10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

a. $f(z) = \dfrac{3z+2i}{z-1}$.

b. $f(z) = e^{\frac{3z+2i}{z-1}}$.

c. $f(z) = sen\left(\dfrac{3z+2i}{z-1}\right)$.

d. $f(z) = x^2 \cdot y + i \cdot (5x - 2y)$.

e. $f(z) = sen\ x \cdot y + i \cdot e^{(x-2xy)}$.

2.3. DERIVADA COMPLEJA

2.3.1. Definición de derivada

En el apartado anterior se ha comprobado que el comportamiento de una función compleja frente a la continuidad se puede considerar análogo al de las funciones definidas en $\Re^2$. Esto no es así si se quiere introducir la derivación, y la razón de ello es que, como ya se ha indicado antes, una función compleja se puede considerar como una función de una única variable, la variable compleja z, para la que existen unas operaciones análogas a las operaciones entre números reales. Esto permite introducir el concepto de derivada de una función compleja en un punto z_0 de forma análoga a la derivada de una función de una variable real, es decir, como el límite de un cociente de incrementos al aproximarse z al punto z_0.

Definición 2.3.1:

Sea f definida en un conjunto S, y sea z_0 un punto interior de S. La función

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

f es ***derivable en z***$_0$ si existe:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0), \ z, h \in \mathbf{C}.$$

Se llama ***derivada*** de *f* en el punto z_0 al valor de este límite, es decir a:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Definición 2.3.2:

La función *f* es ***derivable en un conjunto S*** del plano ***C*** si *f* es derivable en todos los puntos de *S*.

Ejemplos de funciones derivables

a) Las funciones constantes son derivables en todo punto del plano complejo. Así, la función $f(z) = 2 + i$ es derivable en ***C*** y su derivada es 0.

b) La función $f(z) = z$ es también derivable en ***C*** y su derivada es 1.

c) Lo mismo sucede con la función $f(z) = z^n$, que, como en el caso real, tiene como derivada $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

Ejemplos de funciones que no son derivables

a) La función $f(z) = \overline{z} = x - i \cdot y$ no es derivable en ningún punto, ya que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$, que no existe pues es diferente según la dirección ya que si *h* fuese real el límite valdría 1, y si $h = k \cdot i$, valdría –1.

b) La función $f(z) = |z|$ tampoco es derivable en ningún punto, pues:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

$$\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|-|z|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h(|z+h|+|z|)} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)\overline{(z+h)}-z\bar{z}}{h(|z+h|+|z|)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\bar{z}+z\bar{h}+h\bar{h}}{h(|z+h|+|z|)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{|z+h|+|z|}+\frac{\bar{h}}{|z+h|+|z|}+\frac{\bar{h}z}{h(|z+h|+|z|)}\right)$$

El límite de los dos primeros sumandos existe pero el tercer sumando no tiene límite cuando h tiende a cero. Por tanto, la función no es derivable en ningún punto.

c) La función $f(z) = |z|^2$ sólo es derivable en el punto $z = 0$. En efecto

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2\,\bar{h}}{|h|^2} = \lim_{h\to 0}\bar{h} = 0.$$

Sin embargo, si $z \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)\overline{(z+h)}-z\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\bar{z}+z\bar{h}+h\bar{h}}{h} =$$

$\lim_{h\to 0}\left(\bar{z}+z\frac{\bar{h}}{h}+\bar{h}\right)$, que no existe.

Es importante observar que la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0\cdot i$ no es derivable en ningún número complejo $z \neq 0$ a pesar de que sus partes real e imaginaria son funciones de $\mathfrak{R}^2$ con muy buenas propiedades de regularidad.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.3.2. Propiedades

La derivada compleja conserva las propiedades de la derivada en $\mathfrak{R}$. Dadas dos funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ derivables en un punto z_0, y dado un número complejo c cualquiera, se verifican las siguientes propiedades:

1) Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en z_0.

2) Las funciones $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ y $c \cdot f(z)$ son derivables en el punto z_0 y sus derivadas son respectivamente:

$$(f(z) + g(z))' = f'(z_0) + g'(z_0),$$

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0),$$

$$(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z_0).$$

3) Si $g(z_0) \neq 0$ en un entorno de z_0, f / g es derivable en z_0 y su derivada es $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

4) Si $f(z)$ es derivable en z_0 y $g(z)$ es derivable en $f(z_0)$, la composición de funciones $h(z) = g(f(z))$ es derivable en z_0 y $h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

2.3.3. Condiciones de Cauchy - Riemann

La derivada compleja de una función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ puede fallar aunque sus partes real e imaginaria, consideradas como funciones de $\mathfrak{R}^2$, sean funciones muy regulares, como se ha podido comprobar que sucede en el caso de la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Por ello es importante analizar el comportamiento de las funciones u y v frente a la derivada con el fin de determinar las condiciones precisas que deben verificar para que f sea

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

derivable.

Sea f derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$. Entonces existe $f'(z_0)$, es decir, existe

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

El hecho de que exista el límite anterior significa que los límites iterados deben también existir y su valor debe ser $f'(z_0)$. Esto significa que, si h es un numero real

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right) =$$

$$= u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0).$$

Por otra parte si el incremento de la variable z es un número imaginario puro, $i \cdot h$, entonces:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} \right) =$$

$$= v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0).$$

Se tiene entonces que

$$u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0),$$

y por tanto, si existe la derivada de f en z_0 se deben verificar entre u y v las siguientes condiciones, que se conocen como condiciones de Cauchy – Riemann:

Definición 2.3.2:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

La función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ verifica las ***condiciones de Cauchy – Riemann*** en el punto $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ si se verifican las ecuaciones

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Las condiciones de Cauchy - Riemann son entonces condiciones necesarias para la existencia de derivada.

Así, en el caso de la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i \cdot 0$, se tiene:

$u_x(x, y) = 2x$; $u_y(x, y) = 2y$; $v_x(x, y) = 0$; $v_y(x, y) = 0$.

Por tanto sólo se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann si $z = 0$, el único punto en el que la función es derivable.

Se puede entonces asegurar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1:

Si $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$, se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann en z_0.

Corolario 2.3.2:

Si $f(z)$ es derivable en z_0,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0).$$

Observación. Las condiciones de Cauchy - Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad de la función, como se puede ver con el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Sea $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función no es derivable en 0 ya que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^2,$$ no existe.

Sin embargo, $f(z)$ verifica las condiciones de Cauchy - Riemann en $z = 0$. En efecto, separando su parte real y su parte imaginaria

$$f(z) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + \text{i} \cdot \frac{y^3 - 3yx^2}{x^2 + y^2}.$$

Las derivadas parciales de u y v en 0 valen

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 = u_x(0, 0)$$

$$u_y(0, 0) = 0 = v_x(0, 0),$$

y por tanto se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann en $z = 0$.

Es entonces natural preguntarse si existen condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de derivada de una función compleja. La respuesta la da la siguiente proposición que se presenta sin demostración:

Proposición 2.3.3:

Sea $f(z) = u(x, y) + \text{i}\cdot v(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbf{C}$. La función $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + \text{i}\cdot y_0$ si y sólo si u y v como funciones de $\mathfrak{R}^2$ son diferenciables en (x_0, y_0) y verifican las condiciones de Cauchy - Riemann.

El estudio de la condición de diferenciabilidad de las funciones u y v, que se exige en la *Proposición 2.3.3*, puede ser complicado, por lo que se puede

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

sustituir por una condición suficiente, la existencia de derivadas parciales continuas, más fácil de comprobar:

Proposición 2.3.4:

Sea $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbb{C}$. Si existen las derivadas parciales $u_x(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, $v_y(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0)$ y son continuas, y se verifican las condiciones de Cauchy – Riemann en (x_0, y_0), entonces $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i\cdot y_0$.

2.3.4. Estudio de la derivada de distintas funciones

Se puede ahora estudiar fácilmente la derivabilidad de funciones como la función exponencial, las funciones trigonométricas o el logaritmo.

Función exponencial. $f(z) = e^z = e^x \cdot \cos y + i\cdot e^x \cdot \operatorname{sen} y$.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de la función exponencial son funciones continuas con derivadas parciales continuas en todo $\mathfrak{R}^2$. Además,

$$u_x = e^x \cdot \cos y \qquad u_y = -e^x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$v_x = e^x \cdot \operatorname{sen} y \qquad v_y = e^x \cdot \cos y.$$

Se tiene entonces que la función exponencial verifica las condiciones de Cauchy - Riemann en todo punto del plano complejo, con lo que se puede asegurar que la función exponencial es derivable en todo el plano complejo.

Al ser derivable en cada punto del plano, se puede aplicar el *Corolario 2.3.2* para calcular la derivada:

$$f'(z) = u_x + i\cdot v_x = e^x\cdot \cos y + i\cdot e^x \cdot \operatorname{sen} y = e^z$$

Se tiene entonces que la derivada de la función exponencial es la misma función exponencial, $(e^z)' = e^z$, como ocurre en el caso real.

Se puede comprobar fácilmente que la función $f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbf{C}$, también es derivable en todo el plano complejo y su derivada es $f'(z) = a \cdot e^{az}$.

Funciones trigonométricas. Las funciones seno y coseno, al estar definidas como suma o diferencia de funciones exponenciales, son también derivables en todo el plano complejo. Así, como $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$**,** se tiene

$$(\cos z)' = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

Sucede lo mismo en el caso del seno. Como $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$**,** se tiene:

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

El seno y el coseno hiperbólicos son también funciones derivables en todo el plano complejo, y se comportan de forma análoga al seno y coseno hiperbólicos reales. Se puede comprobar fácilmente que

$$(\cosh z)' = \operatorname{senh} z \quad \text{y} \quad (\operatorname{senh} z)' = \cosh z$$

Las restantes funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas se rigen por las reglas de derivación. Así, por ejemplo, $f(z) = \operatorname{tg} z$ es derivable en todos los puntos en los que no se anule el coseno y $(\operatorname{tg} z)' = 1 + (\operatorname{tg} z)^2$.

Logaritmo complejo.

La función $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \cdot \operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$, está definida en todo el plano complejo salvo $z = 0$ y no es continua en el semieje real negativo. Su expresión en función de las variables x e y es:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

$$Log\ z = ln\ \sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para todo $z \in \mathbf{C} \setminus \{z: z \in \Re, z \le 0\}$ las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria existen y son continuas:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Además verifican las condiciones de Cauchy - Riemann

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x.$$

Por tanto, *Log z* es derivable en todo $\mathbf{C} \setminus \{z: z \in \Re, z \le 0\}$. Su derivada es

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.3.1: Estudiar la derivabilidad de la función: $f(z) = Re(z)$.

Sea $h = \Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$; aplicando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

que es igual a 1 si Δy es igual a cero, y a 0 si Δx es igual a cero, por lo que el límite no existe, y la función $Re(z)$ no es derivable en ningún punto.

Ejemplo 2.3.2: Estudiar la derivabilidad de la función: $f(z) = Im(z)$.

Sea $h = \Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\cdot\Delta y$; aplicando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y+\Delta y-y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

que es igual a 1/i si Δx es igual a cero, y a 0 si Δy es igual a cero, por lo que el límite no existe, y la función $Im(z)$ no es derivable en ningún punto.

Los ejemplos anteriores demuestran que existen funciones que no son derivables en ***C*** y sin embargo sus partes real e imaginaria son funciones diferenciables en $\mathfrak{R}^2$.

Ejemplo 2.3.3: Estudiar las condiciones de Cauchy – Riemann de las funciones siguientes: a) $f(z) = z^3$; b) $f(z) = Re(z)$; c) $f(z) = Im(z)$.

a) $f(z) = z^3 = (x + \mathrm{i}\cdot y)^3 = (x^3 - 3x\cdot y^2) + \mathrm{i}\cdot(3x^2\cdot y - y^3)$,

$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$, $-u_y = 6x\cdot y = v_x$, por lo que verifica las condiciones de Cauchy – Riemann para todo punto z de ***C***.

b) $f(z) = Re\,(z) = x$, $u_x = 1$ distinto de $v_y = 0$; $u_y = 0$; $v_x = 0$. No las verifica en ningún punto.

c) $f(z) = Im\,(z) = y$, $u_x = 0$; $v_y = 0$; $u_y = 1$ distinto de $v_x = 0$. No las verifica en ningún punto.

Ejemplo 2.3.4: Estudiar los puntos en los que la función $f(z) = Log\,(z - \mathrm{i})$ es derivable, y calcular su derivada en los puntos en los que exista.

La función es derivable en ***C*** \ {z: $z = x + \mathrm{i}$, $x \le 0$}. Su derivada en estos puntos es $f'(z) = \dfrac{1}{z-i}$.

Ejemplo 2.3.5: Estudiar los puntos en los que la función $f(z) = \dfrac{Log(z+4)}{z^2+i}$

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

es derivable, y calcular su derivada en los puntos en los que exista.

La función es derivable en **C** \ $\left\{\left\{z = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\} \cup \{z : z \in \Re, z \le -4\}\right\}$ y su derivada es

$$f'(z) = \frac{z^2 + i - 2z(z+4)Log(z+4)}{(z^2+i)^2(z+4)}.$$

Ejercicios

2.11. Comprobar los valores de la derivada de $f(z)$ en los puntos indicados:

a. $f(z) = (z^2 - i)^2$ en 3 – 2i vale – 44 – 196i.

b. $f(z) = 1/(z^3)$ en 3i vale –1/27.

c. $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ en –i vale i/2.

2.12. Derivar las siguientes funciones:

a. $f(z) = (z^2 - i)^6$.

b. $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

c. $f(z) = \dfrac{z+3}{z-5}$.

d. $f(z) = \dfrac{4}{(4-z)^2 + i}$.

2.13. Demostrar que la función $f(z) = e^{az}$, $a \in$ **C**, es derivable en todo el plano complejo y su derivada es $f'(z) = a \cdot e^{az}$.

2.14. Demostrar que: $(cosh\ z)' = senh\ z$ y $(senh\ z)' = cosh\ z$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.15. Determinar la condición o condiciones que deben verificar las constantes reales a y b para que la función:

$$f(z) = a(x^3 - i\cdot y^3) - 2b\cdot(i\cdot x^2\cdot y - x\cdot y^2) + i\cdot(y^2 - x^2) + 2x\cdot y - 7$$

satisfaga las condiciones de Cauchy – Riemann.

2.16. Demostrar que la función $f(z) = \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, no es derivable en 0 y sin embargo verifica las condiciones de Cauchy – Riemann en $z = 0$.

2.4. FUNCIONES HOLOMORFAS

La derivada compleja definida en la sección anterior permite introducir el concepto de holomorfía. Las funciones holomorfas juegan un papel fundamental dentro de la teoría de funciones complejas debido a que tienen muy buenas propiedades, como se podrá comprobar a lo largo de esta sección. Esta es la razón por la que algunos autores las denominan funciones regulares.

El buen comportamiento de las funciones holomorfas permite deducir para ellas resultados realmente sorprendentes, que aparecerán en capítulos posteriores.

2.4.1. Funciones holomorfas. Definiciones

Definición 2.4.1:

$f(z)$ es ***holomorfa en un conjunto abierto*** G si es derivable en todos los puntos de G.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Definición 2.4.2:

$f(z)$ es ***holomorfa en un conjunto*** A si es holomorfa en un abierto G que contiene a A.

Definición 2.4.3:

Una función $f(z)$ es ***holomorfa en un punto*** z_0 si es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0, es decir, si existe un disco de centro z_0 y radio r, $B_r(z_0)$, $r > 0$, tal que $f(z)$ es derivable en todos sus puntos.

Definición 2.4.4:

$f(z)$ es una función **entera** si es holomorfa en todo el plano complejo ***C***.

2.4.2. Estudio de la holomorfía de las distintas funciones

Los polinomios complejos $p(z)$ son funciones derivables en todo el plano complejo; son entonces funciones holomorfas en ***C*** y por tanto se puede decir que los polinomios son funciones enteras.

La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es derivable en todo el plano complejo salvo $z = 0$. Por tanto es holomorfa en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Las funciones racionales $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, al estar formadas por cocientes de polinomios, son funciones derivables en todo el plano complejo, salvo en los puntos que anulan el denominador, es decir, los puntos z_i tales que $Q(z_i) = 0$. Por tanto, son holomorfas en todo $\mathbf{C} \setminus \{z_i : Q(z_i) = 0\}$.

La función $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa en ningún punto del plano complejo, puesto que sólo es derivable en $z = 0$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Las funciones e^z, *sen z* y *cos z* son holomorfas en todo ***C*** y por tanto son funciones enteras.

La función $\log z = \ln|z| + i\cdot(\mathrm{Arg}\, z + 2k\cdot\pi)$, $\mathrm{Arg}\, z \in [-\pi, \pi)$, es holomorfa en ***C*** \ $\{z: z \in \Re, z \leq 0\}$.

2.4.3. Propiedades de las funciones holomorfas

Si una función es constante en un conjunto abierto, existe su derivada y vale cero. La siguiente proposición demuestra la implicación en sentido contrario.

Proposición 2.4.1:

Sea $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto *G* y sea $f'(z) = 0$ en todos los puntos de *G*, entonces $f(z)$ es constante en *G.*

Demostración:

Si $f'(z) = 0$ se tiene que las derivadas parciales de *u* y *v* son 0. Basta demostrar que dados dos puntos distintos cualesquiera $z_1 = (x_1 + i\cdot y_1)$ y $z_2 = (x_2 + i\cdot y_2)$ de *G,* se verifica que $f(z_1) = f(z_2)$. Para ello se toma en primer lugar el punto intermedio $z^* = (x_2 + i\cdot y_1)$. Se tiene:

$$u(x_1, y_1) - u(x_2, y_1) = u_x(\theta_1, y_1)\,(x_1 - x_2) = 0,\ \theta_1 \in (x_1, x_2) \Rightarrow u(x_1, y_1) = u(x_2, y_1)$$

$$v(x_1, y_1) - v(x_2, y_1) = v_x(\theta_2, y_1)\,(x_1 - x_2) = 0,\ \theta_2 \in (x_1, x_2) \Rightarrow v(x_1, y_1) = v(x_2, y_1)$$

Se tiene entonces que $f(z_1) = f(z^*)$.

Con un razonamiento análogo se comprueba que $f(z_2) = f(z^*)$, con lo que está demostrado que $f(z)$ debe ser constante. □

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

La proposición anterior permite obtener de manera inmediata los siguientes resultados:

Corolario 2.4.2:

Sea $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto G. Las siguientes implicaciones son ciertas:

a) $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

b) $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

c) $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

Estos resultados se obtienen sin mas que comprobar que las condiciones que se dan en las hipótesis de a), b) y c) implican que la derivada debe de ser cero en todo punto de G, y por tanto $f(z)$ es constante en G.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.4.1: Estudiar la holomorfía de $f(z) = e^{|z|^2}$ y calcular el valor de la derivada en $z = x + i\cdot y$, si existe.

$f(z) = e^{|z|^2} = e^{x^2+y^2}$, por lo que $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$ y $v(x, y) = 0 \Rightarrow$

$u_x = 2x\cdot e^{x^2+y^2}$ distinto de $v_x = 0$, salvo si $x = 0$; $u_y = 2y\cdot e^{x^2+y^2}$ distinto de $v_y = 0$, salvo si $y = 0$. Por tanto, sólo se verifican las condiciones de Cauchy – Riemann en el punto $z = 0$; como las derivadas parciales existen y son continuas en $z = 0$, la función es derivable en $z = 0$, pero no existe ningún disco que contenga al origen en el que sea derivable, por lo que la función no es holomorfa en ningún punto.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Ejercicios

2.17. Demostrar que si $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\cdot v(x, y)$ es una función holomorfa en un conjunto abierto G, las siguientes implicaciones son ciertas:

a. $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

b. $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

c. $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

2.18. Estudiar la holomorfía de las siguientes funciones complejas, y calcular en valor de la derivada en $z = x + \mathrm{i}\cdot y$, si existe:

a. $f(z) = (z + \mathrm{i})\cdot(\bar{z} - 2)^2$.

b. $f(z) = 1/(1 - z)$.

c. $f(z) = (z + \bar{z})^2/(z - \bar{z})$.

2.19. Sea $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto G. Estudiar si son válidas las siguientes expresiones:

a. $f'(z) = u_z + \mathrm{i}\cdot v_z$.

b. $f'(z) = u_x + \mathrm{i}\cdot v_x$.

c. $f'(z) = u_y + \mathrm{i}\cdot v_y$.

d. $f'(z) = u_z + \mathrm{i}\cdot v_z$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.5. FUNCIONES ARMÓNICAS

Las funciones armónicas reales, aunque son funciones definidas sobre subconjuntos del plano real, $G \subseteq \mathfrak{R}^2$, están estrechamente relacionadas con las funciones holomorfas.

Las funciones armónicas, como soluciones de la ecuación de Laplace, aparecen en múltiples aplicaciones dentro de diversos campos, como son el potencial electrostático, el flujo de fluidos o problemas relacionados con la transmisión del calor. La relación existente entre las funciones armónicas y las funciones holomorfas hace que la teoría de funciones complejas sea de gran utilidad en la resolución de estos problemas.

2.5.1. Funciones armónicas. Definición

Definición 2.5.1:

Una función $h(x, y)$, h: $G \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, es una ***función armónica*** en el abierto G si tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y verifica la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = h_{xx} + h_{yy} = 0$.

La relación entre las funciones holomorfas y las funciones armónicas se puede apreciar en el siguiente resultado:

Proposición 2.5.1:

Si $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\cdot v(x, y)$ es una función holomorfa en un conjunto abierto $G \subseteq \mathbf{C}$, entonces las funciones u y v son armónicas en $G \subseteq \mathfrak{R}^2$.

Demostración.

Si *f*(*z*) es holomorfa en el conjunto abierto *G*, entonces *u* y *v* tienen derivadas parciales de primer y segundo orden continuas. Este es un resultado que se demostrará mas adelante en el capítulo 4.

Además, las funciones *u* y *v* verifican las condiciones de Cauchy – Riemann: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, de donde se deduce que:

$$u_x = v_y \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ v_{yy} = u_{xy} \end{cases}$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow \begin{cases} u_{yy} = -v_{xy} \\ v_{xx} = -u_{yx} \end{cases}$$

Se tiene entonces $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ y $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$; por tanto *u* y *v* son armónicas en $G \subseteq \Re^2$. □

De la definición de función holomorfa se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

Proposición 2.5.2:

Si *u* y *v* son funciones armónicas en un conjunto abierto $G \subseteq \Re^2$ y verifican $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, la función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es holomorfa en *G.*

Observación. En la proposición anterior la función *u* debe ser la parte real de *f*(*z*) y *v* la parte imaginaria. Si se modifica el orden, la función resultante $f(z) = v(x, y) + i \cdot u(x, y)$ puede no ser holomorfa.

Definición 2.5.2:

Sean *u* y *v* funciones armónicas en un conjunto abierto $G \subseteq \Re^2$. Se dice que ***v* es la armónica conjugada de *u*** en *G* si la función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es holomorfa en *G* considerado como un subconjunto de puntos del plano

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

complejo.

Así, por ejemplo, la función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2x \cdot y \cdot \mathrm{i}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, la función $v = 2x \cdot y$ es la armónica conjugada de $u = x^2 - y^2$.

2.5.2. Propiedades de las funciones armónicas

Se presentan a continuación algunas de las propiedades de las funciones armónicas.

1. Si v es la armónica conjugada de u en G, $-u$ es la armónica conjugada de v en G.

En efecto, al ser la función $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i} \cdot v(x, y)$ holomorfa en G entonces la función $g(z) = v(x, y) - \mathrm{i} \cdot u(x, y)$ es también holomorfa en G.

2. Si u es armónica en G, u_x es la parte real de una función holomorfa.

Basta comprobar que la función

$f^*(z) = u^*(x, y) + \mathrm{i} \cdot v^*(x, y) = u_x(x, y) - \mathrm{i} \cdot u_y(x, y)$ es holomorfa en G.

3. Si u es armónica en G, y G es un conjunto suficientemente bueno (simplemente conexo), u es la parte real de una función holomorfa.
4. Dada una función armónica u, se puede calcular su armónica conjugada. El procedimiento para ello se puede ver en el *ejemplo 2.5.1.*

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.5.1: Dada la función $u(x, y) = y^3 - 3x^2 \cdot y$, comprobar que es armónica en $\mathbb{C}$ y obtener su armónica conjugada $v(x, y)$.

$$u_x = –6x·y;\ u_y = 3y^2 – 3x^2;\ u_{xx} = –6y;\ u_{yy} = 6y\ .$$

Por tanto, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y la función u es armónica en ***C***.

Para obtener su armónica conjugada, *v,* se utilizan las condiciones de Cauchy – Riemann:

$$u_x = v_y \Rightarrow v = \int u_x·dy + \varphi(x) = \int –6x·y·dy + \varphi(x) = –3x·y^2 + \varphi(x) \Rightarrow$$

$v_x = –3y^2 + \varphi'(x)$ y al imponer que $v_x = –u_y \Rightarrow –3y^2 + \varphi'(x) = –(3y^2 – 3x^2) \Rightarrow$ $\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3$.

Se tiene entonces que $v(x, y) = – 3x·y^2 + x^3$, y la función

$$f^*(z) = y^3 – 3x^2·y + i·(x^3 – 3x·y^2) = i·z^3$$

es holomorfa en ***C***.

Ejemplo 2.5.2: Dada la función $f(z) = y^2·x – \frac{2}{3}y^3 + i·(x^2·y – \frac{2}{3}x^3)$, calcular la derivada en los puntos en los que exista. ¿Se puede construir una función $f^*(z)$ holomorfa en ***C*** tal que $Im\ (f^*(z)) = x^2·y – \frac{2}{3}x^3$? Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular $f^*(z)$.

Las derivadas parciales de u y v existen y son continuas

$$u_x = y^2;\ u_y = 2x·y – 2y^2;\ v_x = 2x·y – 2x^2;\ v_y = x^2$$

Se impone a continuación que verifiquen las condiciones de Cauchy – Riemann y se tiene entonces que:

$$u_x = v_y \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x.$$

$$v_x = – u_y \Rightarrow 2x·y – 2y^2 = – 2x·y + 2x^2 \Rightarrow 2(x – y)^2 = 0 \Rightarrow y = x$$

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

Las condiciones de Cauchy – Riemann se verifican sólo en los puntos de la recta $z = x + i\cdot x$. Por tanto, $f(z)$ es derivable sólo en los puntos de esta recta y su derivada en cada punto $z_0 = x_0 + i\cdot x_0$ es

$$f'(z_0) = u_x(x_0 , x_0) + i\cdot v_x(x_0 , x_0) = x_0^2 + i\cdot(2x_0^2 - 2x_0^2) = x_0^2.$$

Se tiene entonces que $f(z)$ no es derivable en ningún conjunto abierto del plano complejo y entonces no es holomorfa en ningún punto.

Para que la función $v(x, y) = x^2\cdot y - \frac{2}{3}x^3$ pueda ser la parte imaginaria de una función holomorfa hay que ver en primer lugar si $v(x, y)$ es armónica.

Sus derivadas parciales segundas son $v_{xx} = 2y - 4x$ y $v_{yy} = 0$; por tanto, $v_{xx} + v_{yy} = 2y - 4x \neq 0$ si $y \neq 2x$ por lo que $v(x, y)$ no es armónica en ningún conjunto abierto y no puede ser entonces la parte imaginaria de ninguna función holomorfa.

Ejercicios

2.20. Comprobar que las funciones $u(x, y) = e^x\cdot \cos y$, $v(x, y) = e^x\cdot \operatorname{sen} y$ son armónicas y que v es la armónica conjugada de u.

2.21. Demostrar que si $v(x, y)$ es armónica conjugada de $u(x, y)$, y si $u(x, y)$ es armónica conjugada de $v(x, y)$, entonces $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$ es una función constante.

2.22. Demostrar que si u es armónica en G, y G es un conjunto suficientemente bueno (simplemente conexo), u es la parte real de una función holomorfa.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

2.6. EJERCICIOS

2.23. Calcular la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$ siendo $f(z)$ igual a:

a. $z^2 - 3z + 5$.

b. $z + 1/z$, con z distinto de cero.

c. $z^3 + 2$.

d. $1/(1 - z)$.

2.24. Expresar en forma binómica:

a. e^{1+i}.

b. $e^{\frac{-\pi i}{4}}$.

c. $e^{\frac{-\pi i}{3}}$.

d. $e^{1+\pi i}$.

2.25. Expresar en forma binómica:

a. *cos* (2 – i).

b. *sen* i.

c. *cos* i.

d. *tg* (1 + i).

e. *senh* i.

f. *cosh* i.

2.26. Expresar en forma binómica:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

a. *log* (1 + i).

b. *Log* (–e·i).

c. *Log* (1 – i).

d. *log* (–e·i).

e. *log* (1 – i).

2.27. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $e^z = 3$.

b. $e^z = -2$.

c. $e^z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

d. $e^{3zi-1} = 1$.

e. $\log z = e + \pi\cdot i$.

2.28. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\cosh z = 2$.

b. $\cos z = -2$.

c. $\operatorname{senh} z = 0$.

d. $\cos z = -i$.

e. $\operatorname{sen} z = i$.

2.29. Comprobar que al resolver la ecuación $\cos z = \operatorname{sen} z$ se obtiene $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

2.30. La función real *cosh x* no se anula nunca; estudiar dónde se anula

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

cosh z y comprobar que se anula para $z = \pi \cdot i \cdot (\frac{1}{2} + k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2.31. Calcular el dominio de definición de las funciones:

a. $f(z) = \dfrac{Log(z+1)}{z^2 + 4i}$.

b. $g(z) = \dfrac{z-1}{z^2 + iz - 4 - 4i}$.

c. $h(z) = tgh\,(2z - 1)$.

2.32. Expresar en forma binómica los números complejos:

a. $(1 - i)^{i-1}$.

b. $(2 \cdot i)^{2i+1}$

c. $(-1 + \sqrt{3} \cdot i)^{3/2}$.

d. i^i.

e. 1^i.

f. i^1.

g. $(2i)^i$.

2.33. Demostrar que, para $z = x + i \cdot y$,

a. $|\cosh z|^2 = senh^2\, x + \cos^2 y$.

b. $|senh\, z|^2 = senh^2\, x + sen^2\, y$.

2.34. Demostrar que $Log\,(1 + i)^2 = 2\,Log\,(1 + i)$ pero que $Log\,(-1 + i)^2$ es distinto de $2Log\,(-1 + i)$.

2.35. Demostrar que se satisfacen las siguientes igualdades:

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

a. $sen^2 z + cos^2 z = 1$.

b. $sen(\frac{\pi}{2} - z) = cos\ z$.

c. $cosh^2 z - senh^2 z = 1$.

2.36. Estudiar si existen los siguientes límites:

a. $\lim_{z\to 0} \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$.

b. $\lim_{z\to 0} \frac{(z-\bar{z})^3}{z+\bar{z}}$.

c. $\lim_{z\to\infty} \frac{2z^2+2z+5}{3z^2+5z-3}$.

2.37. Estudiar la continuidad de las funciones:

a. $f_1(z) = |z|$.

b. $f_2(z) = \bar{z}$.

c. $f_3(z) = \frac{z^4-1}{z^3+z}$.

d. $f_4(z) = \frac{z^4-1}{z^3+z}$ si $z \neq \pm$ i, $f(\pm$ i) = 2i.

2.38. Estudiar la derivabilidad de las funciones que se indican y calcular en cada caso la derivada en los puntos donde exista.

a. $f(z) = \frac{2z+1}{cos\, z - 2}$.

b. $f(z) = e^{2z/(z-1)}$.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

c. $f(z) = h(x)$, siendo h una función tal que $h'(x) \neq 0$.

d. $f(z) = 2x - y + i\cdot 3y^2$.

2.39. Estudiar la derivabilidad de $f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$.

2.40. Deducir las condiciones de Cauchy - Riemann cuando la función está expresada en coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

y comprobar que $f'(z) = e^{i\theta}\cdot(u_r + i\cdot v_r)$.

2.41. Estudiar donde son holomorfas las funciones que se indican:

a. $f(z) = Re\,(z^2)$.

b. $f(z) = 1/(1 + z)$.

c. $f(z) = z + \bar{z}$.

d. $f(z) = \dfrac{2z+1}{e^z + e^{-z}}$.

2.42. Sea $f(z)$ una función holomorfa en una región A. Estudiar la holomorfía de las siguientes funciones:

a. $f_1(z) = f(\bar{z})$.

b. $f_2(z) = \bar{f}(z)$.

c. $f_3(z) = \bar{f}(\bar{z})$.

d. $f_4(z) = \cos(\bar{z})$.

2.43. Sea $u(x, y) = 2x\cdot(1 - y)$ una función de dos variables reales.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

a) Demostrar que es armónica.

b) Encontrar una función $f(z)$ holomorfa tal que su parte real sea $u(x, y)$.

c) Expresar $f(z)$ en términos de z.

2.44. Estudiar si las siguientes funciones son armónicas y en caso afirmativo calcular sus armónicas conjugadas.

a. $u(x, y) = x^2 – y^2 – 2x·y – 2x + 3y$.

b. $u(x, y) = 3x^2·y + 2x^2 – y^3 – 2y^2$.

c. $u(x, y) = 2x·y + 3x·y^2 – 2y^3$.

2.45. Dada la función $u(x, y)$ comprobar que es armónica y obtener su armónica conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + i·v(x, y)$ sea una función holomorfa, siendo:

a. $u(x, y) = x·y$, $f(0) = i$.

b. $u(x, y) = e^x·cosy$, $f(0) = 1 + 2i$.

c. $u(x, y) = x^2 – y^2$, $f(0) = i$.

d. $u(x, y) = x^3 – 3x·y^2$, $f(0) = i$.

2.46. Obtener una función holomorfa $f(z) = u(x, y) + i·v(x, y)$, siendo:

a. $u(x, y) = x^2 – y^2 – 2x + 1$, $f(1) = 0$.

b. $v(x, y) = x·y$, $f(0) = 1$.

c. $v(x, y) = e^x·cosy$, $f(0) = i$.

d. $u(x, y) = y^3 – 3x^2·y$, $f(0) = i$.

2.47. Sea $f(z) = u(x, y) + i·v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES

abierto G. Demostrar que las siguientes implicaciones son ciertas:

a. $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

b. $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

c. $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G.

NO COPIAR, © DE LOS AUTORES