Generalizaciones de los números de oro y Padovan

Rodrigo, Javier (jrodrigo@upcomillas.es)
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas de Madrid
López, Mª Dolores (marilo.lopez@upm.es), Salvador, Adela (ma09@upm.es)
Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ing Civil
Universidad Politécnica de Madrid

RESUMEN

El número de oro (ϕ), y la sucesión de Fibonacci que lo genera, han sido estudiados ampliamente en la literatura por las importantes propiedades geométricas que poseen, lo que conlleva su aplicación práctica en diferentes áreas del diseño y de la arquitectura, y su aparición en la naturaleza.

Una extensión 3-dimensional del número de oro y la sucesión de Fibonacci es el número de plástico y la sucesión de Padovan, que heredan "espacialmente" parte de las propiedades que en el plano tiene el número de oro.

En este artículo se generaliza la definición de estos números a dimensiones más altas, y se estudian algunas de sus propiedades aritméticas.

***Palabras claves*:**

Números de oro y *k*-plástico; números de Fibonacci y *k*-Padovan; teoría de números

1. INTRODUCCIÓN

La sucesión de Padovan, generalización “3-dimensional” de la sucesión de Fibonacci, y que da lugar al conocido como número de plástico, se define en [1].

En [2] esta sucesión es analizada, y se plantean dos conjeturas sobre ella:

1) a) Sólo hay un número finito de números que pertenezcan a la vez a la sucesión de Padovan y a la de Fibonacci, y b) estos son 1, 2, 3, 5 y 21.

2) a) No hay cuadrados en la sucesión de Padovan mayores que 49, y b) en todos los cuadrados de la sucesión de Padovan se cumple que su raíz también es un término de la sucesión de Padovan.

En [3] se responde de forma afirmativa a la primera conjetura, quedando abiertas todavía las dos partes de la segunda conjetura.

En este artículo se generalizan las sucesiones de Fibonacci y Padovan a más dimensiones, y se estudian las adaptaciones de las 2 conjeturas con esta nueva definición.

2. DESARROLLO

Extendemos las sucesiones de Fibonacci y Padovan con la siguiente:

DEFINICIÓN

Sea $k \in N = \{1, 2, 3, ...\}$, la sucesión de *k*-Padovan es aquella dada en forma recurrente como: $x_n^k = x_{n-k}^k + x_{n-k-1}^k$ si $n > k+1$, con $x_1^k = ... = x_{k+1}^k = 1$. A los términos de esta sucesión se les llama números de *k*-Padovan (P_n^k).

Observaciones

1) La sucesión anterior para $k = 1$ da la sucesión de Fibonacci, y para $k = 2$ la de Padovan, luego los números de 1-Padovan son los de Fibonacci (F_n), y los de 2-Padovan son los de Padovan.

2) La ecuación característica de la sucesión de *k*-Padovan será $\lambda^{k+1} = \lambda + 1$, siendo su polinomio característico $\lambda^{k+1} - \lambda - 1$

Se puede plantear un análogo a las conjeturas de la introducción para las sucesiones de *k*-Padovan. Sería:

1’) a’) Hay sólo un número finito de números de *k*-Padovan y a la vez de *k*’-Padovan para $k \neq k'$; b’) Hallar cotas superiores para estos números (ó para sus índices) en función de k, k'

2’) Dado cualquier k, a’) hay sólo un número finito de números de *k*-Padovan que sean cuadrados perfectos, y b’) todos los números de *k*-Padovan que son cuadrados perfectos cumplen que su raíz positiva también es número de *k*-Padovan.

Tenemos las siguientes observaciones a estas dos conjeturas:

- La conjetura 2’) a’) fue contestada de forma positiva para $k=1$ en [4], demostrando que los únicos números de Fibonacci que son cuadrados perfectos son 1 y 144.

- La conjetura 2’) b’) puede ser contestada de forma negativa: para $k=1$, tenemos que 144 es número de 1-Padovan (de Fibonacci. Es el término 12 de la sucesión), pero 12 no lo es. También para $k=5,6$, tenemos que 121 es número de 5-Padovan y de 6-Padovan, pero 11 no es número de 5-Padovan ni de 6-Padovan.

- Con respecto a 2’) a’), se ha comprobado que no hay un cuadrado mayor que 49 en los 21000 primeros términos de la sucesión de 2-Padovan, no hay un cuadrado mayor que 9 en los 9000 primeros términos de la sucesión de 3-Padovan, no hay un cuadrado mayor que 64 en los 3000 primeros términos de la sucesión de 4-Padovan, no hay un cuadrado mayor que 121 en los 1000 primeros términos de la sucesión de 5-Padovan, y no hay un cuadrado mayor que 256 en los 1000 primeros términos de la sucesión de 6-Padovan. Parece por tanto que la conjetura puede ser cierta.

Extendemos también los conceptos de número áureo y número de plástico con la siguiente:

DEFINICIÓN

A la solución de mayor módulo de la ecuación característica de la sucesión de *k*-Padovan se le llama número de *k*-plástico (p_k).

Vamos a ver que la definición es correcta, es decir, que existe una única solución en la que se alcanza el máximo módulo. Necesitamos 4 lemas previos:

LEMA 1

La ecuación $\lambda^{k+1}-\lambda-1=0$ no puede tener una solución múltiple

Demostración

Si la tuviera, llamando $f(\lambda)=\lambda^{k+1}-\lambda-1$, tendríamos que también sería raíz de $f'(\lambda)=(k+1)\lambda^k-1$, por lo que $\lambda^k=\dfrac{1}{k+1}$.

Pero entonces, $f(\lambda)=\lambda^k\,\lambda-\lambda-1=\dfrac{1}{k+1}\lambda-\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{k+1}{k}$. Esto no puede ser, ya que $\lambda^{k+1}-\lambda-1=0$ no puede tener soluciones racionales (las únicas posibles son 1 y -1, divisores del primer término y del término independiente, y no lo son) #

LEMA 2

Si existen dos soluciones λ_1, λ_2 de $\lambda^{k+1}-\lambda-1=0$ en las que se alcanza el máximo módulo, entonces $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$

Demostración

Como $\lambda_1^{k+1}=\lambda_1+1$, $\lambda_2^{k+1}=\lambda_2+1$, tomando módulos tenemos que $|\lambda_1|^{k+1}=|\lambda_1+1|$, $|\lambda_2|^{k+1}=|\lambda_2+1|$, por lo que, al ser $|\lambda_1|=|\lambda_2|$, llegamos a que $|\lambda_1+1|=|\lambda_2+1|$. Pero entonces, si $\lambda_1=a+b\,i$, $\lambda_2=c+d\,i$, estas 2 últimas ecuaciones se transforman en $\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2+d^2 \\ (a+1)^2+b^2=(c+1)^2+d^2 \end{array}\right\}$, lo que implica $a=c$ (restando las 2), y entonces, sustituyendo en la primera, tenemos que $b^2=d^2$, luego $b=\pm d$. Si $b=d$ tenemos que $\lambda_2=\lambda_1$, lo que no puede ser por el lema 1, y si $b=-d$ tenemos que $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$, como queríamos #

LEMA 3

No existe $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\,\alpha)$ si $\alpha\neq 2\,k\,\pi$

Demostración

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\,\alpha)=l$ con $0<\alpha\leq\pi$, tomando la subsucesión:

$n_k=\left[\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\,k\,\pi}{\alpha}\right]$, donde $[]$ es la parte entera, tenemos que:

$n_k\ \alpha \geq \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi - \alpha \geq -\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$,

$n_k\ \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, por lo que $\cos(n_k\ \alpha) \geq 0$ y $l \geq 0$.

Tomando ahora $n'_k = \left\lceil \dfrac{\frac{3\pi}{2} + 2\,k\,\pi}{\alpha} \right\rceil$, tenemos que:

$n'_k\ \alpha \geq \dfrac{3\pi}{2} + 2\,k\,\pi - \alpha \geq \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, $n'_k\ \alpha \leq \dfrac{3\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, por lo que $\cos(n'_k\ \alpha) \leq 0$ y $l \leq 0$. Tenemos entonces que $l = 0$.

Si existe $\lim_{n\to\infty} \cos(n\,\alpha) = l$ con $\pi < \alpha < 2\,\pi$, entonces, como $\cos(n\,\alpha) = \cos(n\,(2\,\pi - \alpha))$, con $0 < 2\,\pi - \alpha < \pi$, se cumple por lo anterior que $l = 0$.

En general, si $2\,k\,\pi < \alpha < 2\,(k+1)\pi$ y existe $\lim_{n\to\infty} \cos(n\,\alpha) = l$, como $\cos(n\,\alpha) = \cos(n\,(\alpha - 2\,k\,\pi))$, con $0 < \alpha - 2\,k\pi < 2\,\pi$, se cumple que $l = 0$.

Pero $\cos(2\,n\,\alpha) = 2\cos^2(n\,\alpha) - 1$, por lo que tomando límites tenemos que, si $\alpha \neq k\,\pi$ con k impar, $l = 2\,l^2 - 1$, por lo que $0 = -1$, contradicción, y entonces no existe $\lim_{n\to\infty} \cos(n\,\alpha)$ si $\alpha \neq k\,\pi$ con k impar.

Si $\alpha = k\,\pi$ con k impar, entonces $\cos(n\,\alpha) = (-1)^n$, por lo que tampoco existe $\lim_{n\to\infty} \cos(n\,\alpha)$, y entonces no existe $\lim_{n\to\infty} \cos(n\,\alpha)$ si $\alpha \neq 2\,k\,\pi$.

LEMA 4

Sea una sucesión:

$x_n = a_1\,\lambda_1^n + a_2\,\overline{\lambda}_1^n + a_3\,\lambda_3^n + \ldots + a_s\,\lambda_s^n$, tal que $\lambda_1 \in C - R$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ si $i \geq 3$, y $x_n \in R$ para todo n, entonces se cumple que $a_2 = \overline{a}_1$

Demostración

Como $x_n \in R$ para todo n, tenemos que, si $\lambda_1 = R_1\cos(\alpha) + R_1\,sen(\alpha)$, $\lambda_3 = R_3\cos(\alpha_3) + R_3\,sen(\alpha_3), \ldots$ se cumple que:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}(x_n)=\\&=R_1^n\operatorname{Re}(a_1)sen(n\,\alpha)+R_1^n\operatorname{Im}(a_1)\cos(n\,\alpha)-R_1^n\operatorname{Re}(a_2)sen(n\,\alpha)+R_1^n\operatorname{Im}(a_2)\cos(n\,\alpha)+\\&+R_3^n\operatorname{Re}(a_3)sen(n\,\alpha_3)+R_1^n\operatorname{Im}(a_1)\cos(n\,\alpha_3)+...=0\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}&\frac{\operatorname{Im}(x_n)}{R_1^n}=\operatorname{Re}(a_1)sen(n\,\alpha)+\operatorname{Im}(a_1)\cos(n\,\alpha)-\operatorname{Re}(a_2)sen(n\,\alpha)+\operatorname{Im}(a_2)\cos(n\,\alpha)+\\&+\frac{R_3^n}{R_1^n}\operatorname{Re}(a_3)sen(n\,\alpha_3)+\frac{R_1^n}{R_1^n}\operatorname{Im}(a_1)\cos(n\,\alpha_3)+...=0\end{aligned}$$

Tomando $\lim\limits_{n\to\infty}$, teniendo en cuenta que $|\lambda_i|<|\lambda_1|$ si $i\geq 3$, llegamos a:

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{Im}(a_1)+\operatorname{Im}(a_2))\cos(n\,\alpha)+(\operatorname{Re}(a_1)-\operatorname{Re}(a_2))sen(n\,\alpha)=0\,.$$

Llamando $a=\operatorname{Im}(a_1)+\operatorname{Im}(a_2)$, $b=\operatorname{Re}(a_1)-\operatorname{Re}(a_2)$, tenemos entonces que:

$\lim\limits_{n\to\infty}(a\cos(n\,\alpha)+b\,sen(n\,\alpha))=0$. Si $b\neq 0$, se cumplirá que $\cos(n\,\alpha)\geq K>0$: Si existe una subsucesión n_k tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\cos(n_k\;\alpha)=0$, entonces habrá una subsucesión $n_{k'}$ de n_k tal que $\lim\limits_{k'\to\infty}sen(n_{k'}\;\alpha)=1$ (por ejemplo), por lo que $\lim\limits_{k'\to\infty}(a\cos(n_{k'}\;\alpha)+b\,sen(n_{k'}\;\alpha))=b=0$, contradicción.

Entonces, dividiendo por $\cos(n\,\alpha)$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}(a+b\operatorname{tg}(n\,\alpha))=0$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}tg(n\,\alpha)=-\frac{a}{b}\in R$, con $\alpha\neq k\,\pi$, $k\in Z$, al ser $\lambda_1\in C-R$. Pero entonces, al ser $\cos(2\,n\,\alpha)=\dfrac{2}{1+tg^2(n\,\alpha)}-1$, se cumplirá que $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2\,n\,\alpha)\in R$ con $2\,\alpha\neq 2\,k\,\pi$, contradicción con el lema 3.

Entonces $b=0$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}a\cos(n\,\alpha)=0$, luego, si $a\neq 0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\,\alpha)=0$, contradicción nuevamente con el lema 3.

Por tanto, $a=b=0$, y entonces $\operatorname{Im}(a_1)=-\operatorname{Im}(a_2)$, $\operatorname{Re}(a_1)=\operatorname{Re}(a_2)$, por lo que $a_2=\overline{a}_1$.

PROPOSICIÓN 1

El máximo módulo de las soluciones de la ecuación $\lambda^{k+1}-\lambda-1=0$ se alcanza para una sola solución, para todo k

Demostración

Si se alcanzara el máximo en dos soluciones λ_1, λ_2, por el lema 2 sería $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Por otro lado, la ecuación de la proposición es la característica de la ecuación de recurrencia $x_n = x_{n-k} + x_{n-k-1}$, que por los lemas 1 y 2 tiene como solución general

$x_n = a_1 \lambda_1^n + a_2 \overline{\lambda}_1^n + a_3 \lambda_3^n + ... + a_{k+1}\lambda_{k+1}^n$, con $|\lambda_3|, ..., |\lambda_{k+1}| < |\lambda_1|$. Si ponemos como condiciones iniciales $x_1 = \beta_1, \ldots, x_{k+1} = \beta_{k+1}$ para adecuados $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$, la recurrencia definirá una sucesión $x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \overline{\lambda}_1^n + \alpha_3 \lambda_3^n + ... + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^n$ para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$, con $x_n > 0$ para todo n, $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$:

Como $\alpha_2 = \overline{\alpha}_1$ por el lema 4, basta con ver que $\alpha_1 \neq 0$:

Los $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ han de satisfacer

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \overline{\alpha}_1 \overline{\lambda}_1 + \alpha_3 \lambda_3 + ... + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1} = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+1} = \alpha_1 \lambda_1^{k+1} + \overline{\alpha}_1 \overline{\lambda}_1^{k+1} + \alpha_3 \lambda_3^{k+1} + ... + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{k+1} = \beta_{k+1} \end{array}\right\}, \text{ por lo que}$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \overline{\lambda}_1 \ldots & \lambda_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{k+1} & \overline{\lambda}_1^{k+1} \ldots & \lambda_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \overline{\lambda}_1 \ldots & \lambda_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k+1} & \overline{\lambda}_1^{k+1} \ldots & \lambda_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}} = \frac{\beta_1 A_{11} + ... + \beta_{k+1} A_{k+11}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \overline{\lambda}_1 \ldots & \lambda_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k+1} & \overline{\lambda}_1^{k+1} \ldots & \lambda_{k+1}^{k+1} \end{vmatrix}},$$ donde A_{i1} es el adjunto del elemento $i,1$ (el denominador no se anula porque es un determinante tipo Vandermonde para $k+1$ raíces no nulas y distintas). Por tanto, tomando $\beta_1 = ... = \beta_k = 1$, $\beta_{k+1} > 0$, $\beta_{k+1} \neq \dfrac{-A_{11} - ... - A_{k1}}{A_{k+11}}$, ($A_{k+11}$ es no nulo porque es también un determinante tipo Vandermonde, en este caso para k raíces), se verificará que $x_n > 0$ para todo n, $\alpha_1 \neq 0$ como queríamos.

Pero entonces tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\alpha_1\,\lambda_1^{n+1}+\overline{\alpha}_1\,\overline{\lambda}_1^{n+1}+\alpha_3\,\lambda_3^{n+1}+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{n+1}}{\alpha_1\,\lambda_1^{n}+\overline{\alpha}_1\,\overline{\lambda}_1^{n}+\alpha_3\,\lambda_3^{n}+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{n}}=$$

$$=\frac{\alpha_1+\overline{\alpha}_1\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n+1}+\alpha_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n+1}+\ldots+\alpha_{k+1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{\frac{\alpha_1}{\lambda_1}+\frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_1}\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}+\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n}+\ldots+\frac{\alpha_{k+1}}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}\right)^{n}}$$

Si $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to l\in R$, tendríamos que $\frac{x_{n+1}}{x_n}-l\to 0$, por lo que:

al ser $\frac{\alpha_1}{\lambda_1}+\frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_1}\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}+\ldots+\frac{\alpha_{k+1}}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}\right)^{n}$ una sucesión acotada en módulo, ya que

$\left|\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right|=1$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|<1$ si $i\geq 3$.

Pero entonces $\alpha_1+\overline{\alpha}_1\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n+1}-l\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1}+\frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_1}\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}\right)\to 0$, ya que

$\alpha_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n+1}+\ldots+\alpha_{k+1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}\right)^{n+1}-l\left(\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n}+\ldots+\frac{\alpha_{k+1}}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}\right)^{n}\right)\to 0$, al ser $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|<1$ si $i\geq 3$. Tenemos entonces que $\frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_1}\left(\overline{\lambda}_1-l\right)\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}$ tiene límite finito, por lo que $\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}$ tendría límite finito (no puede ser que $\frac{\overline{\alpha}_1}{\lambda_1}\left(\overline{\lambda}_1-l\right)=0$, $\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\left(\lambda_1-l\right)=0$, ya que entonces, al ser $\alpha_1\neq 0$, sería $l=\lambda_1=\overline{\lambda}_1$, contradicción).

Pero al ser $\left|\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right|=1$, tenemos que, si $\mathrm{Re}(\lambda_1)\neq 0$, $\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}=\cos(n\,\alpha)+sen(n\,\alpha)\,i$, con $\alpha\neq 2\,k\,\pi$ ya que $\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\notin R$, y entonces existiría $\lim_{n\to\infty}\cos(n\,\alpha)$ con $\alpha\neq 2\,k\,\pi$, contradicción con el lema 3.

Si $\mathrm{Re}(\lambda_1)=0$, entonces $\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}=-1$, por lo que $\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^{n}=(-1)^n$ tampoco tendría límite, contradicción. No puede ser entonces que $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to l\in R$.

Pero por otro lado, vemos que $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ es monótona cuando n es grande:

$\frac{x_{n+1}}{x_n}-\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{x_{n+1}\,x_{n-1}-x_n^2}{x_n\,x_{n-1}}$. Como el denominador es positivo, la monotonía la da el signo del numerador cuando n es grande.

Pero el numerador es:

$$\left(\alpha_1\,\lambda_1^{n+1}+\overline{\alpha}_1\,\overline{\lambda}_1^{n+1}+\alpha_3\,\lambda_3^{n+1}+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{n+1}\right)\left(\alpha_1\,\lambda_1^{n-1}+\overline{\alpha}_1\,\overline{\lambda}_1^{n-1}+\alpha_3\,\lambda_3^{n-1}+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{n-1}\right)-\left(\alpha_1\,\lambda_1^{n}+\overline{\alpha}_1\,\overline{\lambda}_1^{n}+\alpha_3\,\lambda_3^{n}+\ldots+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}^{n}\right)^2$$

Lo que es igual a

$$\begin{aligned}&d_n=\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\,|\lambda_1|^{2(n-1)}\lambda_1^2+\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\,|\lambda_1|^{n-1}\overline{\lambda}_1^2-2\,\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\,|\lambda_1|^{2n}+\alpha_1\,\alpha_3\left(\lambda_1^{n+1}\,\lambda_3^{n-1}+\lambda_1^{n-1}\,\lambda_3^{n+1}\right)+\ldots+\\&+\alpha_k\alpha_{k+1}\left(\lambda_k^{n+1}\lambda_{k+1}^{n-1}+\lambda_k^{n-1}\lambda_{k+1}^{n+1}\right)-2\,\alpha_1\,\alpha_3\,\lambda_1^n\,\lambda_3^n-\ldots\\&-2\,\alpha_k\,\alpha_{k+1}\,\lambda_k^n\,\lambda_{k+1}^n\end{aligned}$$

Tenemos que, si i ó $j=3,\ldots,k+1$, $\left|\lambda_i\,\lambda_j\right|=|\lambda_i|\left|\lambda_j\right|<|\lambda_1|^2$, por lo que los términos $\alpha_i\,\alpha_j\,\lambda_i^k\,\lambda_j^l$ con i ó $j\geq 3$ cumplen que $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_i\,\alpha_j\,\lambda_i^k\,\lambda_j^l}{\left|\lambda_1^{2n}\right|}=0$, al ser $k+l=2\,n$, por lo que $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{\left|\lambda_1^{2n}\right|}=\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\left(\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^2+\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{|\lambda_1|}\right)^2-2\right)=-\frac{\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\,\mathrm{Im}(\lambda_1)^2}{|\lambda_1|^2}\neq 0$, por lo que el signo de d_n para n grande lo da $-\frac{\alpha_1\,\overline{\alpha}_1\,\mathrm{Im}(\lambda_1)^2}{|\lambda_1|^2}=-\frac{|\alpha_1|^1\,\mathrm{Im}(\lambda_1)^2}{|\lambda_1|^2}<0$, y entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ es monótona decreciente cuando n es grande y positiva, por lo que tendrá límite finito, contradicción con lo anterior, luego no se puede alcanzar el máximo módulo en dos soluciones.

Observaciones.

1) El máximo del módulo entonces se alcanzará en una solución real, ya que si no, se alcanzaría también en otra solución que sería su conjugado, y mayor que 1 al ser $\lim_{n\to\infty}x_n^k=\infty$, por lo que el número de k-plástico es mayor que 1 para todo k, cumpliéndose que $p_k=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^k}{x_n^k}$

2) Para $k\leq 3$ la ecuación característica es de grado menor ó igual que 4, luego se pueden obtener sus soluciones de forma exacta, luego se puede obtener el número de k-plástico para $k\leq 3$ en función de radicales. Las expresiones serían: $p_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$ (número de oro), para p_2 (número de plástico):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}-\frac{3\sqrt{69}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{69}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}$$

Que sería aproximadamente 1.32472, y para p_3:

$$\frac{\left(\sqrt{-8\left(\frac{3}{9+\sqrt{849}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2\left(9+\sqrt{849}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{8\left(\frac{3}{9+\sqrt{849}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(2\left(9+\sqrt{849}\right)\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{12}{\sqrt{-8\left(\frac{3}{9+\sqrt{849}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2\left(9+\sqrt{849}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}}}\right)}{2\,6^{\frac{1}{3}}}$$

Que sería aproximadamente 1.22074.

3) Se cumple que p_k es una sucesión decreciente en k, ya que la sucesión de *k*-Padovan tiene el crecimiento más lento según aumenta k, al sumar términos anteriores de la sucesión, y el crecimiento de la sucesión de *k*-Padovan viene dominado por la solución más grande de su ecuación característica, p_k. Por tanto existirá $\lim_{k\to\infty} p_k$. Este límite será 1, ya que en otro caso $\lim_{k\to\infty}\left(p_k^{k+1}-p_k-1\right)=\infty$, contradicción con que $p_k^{k+1}-p_k-1=0$ para todo k.

Vamos a utilizar la proposición anterior para contestar de manera afirmativa a la conjetura 1’) a’):

PROPOSICIÓN 2

Hay sólo un número finito de números que sean a la vez de *k*-Padovan y de *k’*-Padovan si $k \neq k'$

Demostración

Los números que cumplan la condición de la proposición serán de la forma P_n^k, $P_m^{k'}$ para ciertos subíndices n, m, luego serán soluciones de la ecuación $P_n^k = P_m^{k'}$. Pero este tipo de ecuaciones tienen sólo un número finito de soluciones si las sucesiones son soluciones de ecuaciones de recurrencia lineales cuyas ecuaciones características tienen una solución dominante [5]. Como las sucesiones de *k*-Padovan cumplen esta propiedad (proposición 1), habrá sólo un número finito de números que sean a la vez de k-Padovan y de *k'*- Padovan #.

Utilizamos también la proposición 1 para demostrar un resultado más débil que la conjetura 1') a`):

PROPOSICIÓN 3

Hay sólo un número finito de números de *k*-Padovan que sean cuadrados de un número de *k*-Padovan, para cualquier k.

Demostración

La afirmación es equivalente a decir que la ecuación $P_n^k = \left(P_m^k\right)^2$ tiene un número finito de soluciones, para cualquier k. Pero la ecuación de recurrencia que tiene como solución P_n^k es una recurrencia lineal cuyo polinomio característico tiene una raíz dominante (proposición 1), y la ecuación de recurrencia que tiene como solución $\left(P_n^k\right)^2$ es otra recurrencia lineal cuyo polinomio característico tiene una raíz dominante:

Se cumple que $P_n^k = \alpha_1\ \lambda_1^n + ... + \alpha_{k+1}\ \lambda_{k+1}^n$, para ciertos $\alpha_1, ..., \alpha_{k+1}$, con $\left|\lambda_i\right| < \left|\lambda_1\right|$ si $i \geq 2$, por lo que $\left(P_n^k\right)^2 = \alpha_1^2\ \left(\lambda_1^2\right)^n + ... + \alpha_{k+1}^2\ \left(\lambda_{k+1}^2\right)^n + 2\sum_{1\leq i<j\leq k+1}\alpha_i\ \alpha_j\ \left(\lambda_i\ \lambda_j\right)^n$, solución de la recurrencia lineal con polinomio característico:

$\left(\lambda - \lambda_1^2\right)...\left(\lambda - \lambda_{k+1}^2\right)\left(\lambda - \lambda_1\ \lambda_2\right)...\left(\lambda - \lambda_k\ \lambda_{k+1}\right)$, que tiene a λ_1^2 como raíz dominante, ya que $\left|\lambda_i\ \lambda_j\right| = \left|\lambda_i\right|\left|\lambda_j\right| < \left|\lambda_1\right|^2$ si i ó $j > 1$.

Por tanto, aplicando de nuevo el resultado de [5], llegamos a que la ecuación $P_n^k = \left(P_m^k\right)^2$ tiene un número finito de soluciones.

Observación.

La proposición anterior nos indica que la conjetura 2') b') implica la 2') a'): para los k tales que los números de *k*-Padovan cuadrados perfectos son todos de la forma

$\left(P_m^k\right)^2$, se cumplirá que hay un número finito de números de *k*-Padovan que sean cuadrados, por la proposición 3.

3. PRIMOS DE K-PADOVAN

Destaca en la literatura referente a los temas tratados en este artículo el estudio de los primos de Fibonacci, es decir, los números de Fibonacci que son primos. Tenemos los siguientes resultados al respecto:

1) Sólo se conocen 33 primos de Fibonacci, el último con subíndice 81839, habiéndose comprobado los 435000 primeros números de Fibonacci. Se conjetura si existen infinitos primos de Fibonacci.

2) El subíndice de un primo de Fibonacci es primo, excepto para $F_4 = 3$

3) Los primos de Fibonacci son congruentes con 1 módulo 4, excepto $F_3 = 2$ y $F_4 = 3$

(Esto es porque los números de Fibonacci con índice impar cumplen la siguiente ecuación: $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$, por lo que, tomando congruencias módulo 4, tenemos que F_{2n-1} no puede ser congruente con 3 módulo 4, y entonces, como los primos de Fibonacci mayores que 3 tienen índice impar, tenemos que todos son congruentes con 1 mod. 4, luego todos los primos de Fibonacci son congruentes con 1 módulo 4, excepto $F_3 = 2$ y $F_4 = 3$)

Podemos plantear análogos a estos resultados y conjeturas para los primos de *k*-Padovan, es decir, los números de *k*-Padovan que son primos.

Como sucedía en alguna de las conjeturas de la sección anterior, algunas de estas propiedades se pierden para $k > 1$. Por ejemplo, respecto a 2):

- En los 23 primeros primos de 2- Padovan (primos de Padovan), que están entre los primeros 26000 subíndices, hay sólo 2 con subíndice primo: 2, 3329 (en la literatura sólo están comprobados los 1000 primeros subíndices, y listados los 12 primeros primos).

- En los 37 primeros primos de 3- Padovan, que están entre los primeros 10000 subíndices, hay 9 con subíndice primo.

- En los 48 primeros primos de 4- Padovan, que están entre los primeros 10000 subíndices, hay 8 con subíndice primo.

- En los 48 primeros primos de 5- Padovan, que están entre los primeros 10000 subíndices, hay 4 con subíndice primo.

- En los 72 primeros primos de 6- Padovan, que están entre los primeros 10000 subíndices, hay 6 con subíndice primo.

Se observa que, al menos en los primeros términos, la densidad de primos de *k*-Padovan aumenta con k (hasta $k = 6$. De $k = 6$ a $k = 7$ cambia la tendencia. De todas formas, excepto para $k = 2$, hemos obtenido más primos de *k*-Padovan que los que se conocen de Fibonacci, para los primeros valores de k). En cambio, parece que el número de ellos que tiene subíndice primo se mantiene estable para $k > 1$.

Vamos que el resultado de 3) también se pierde para $k > 1$. Tenemos las siguientes comprobaciones al respecto:

- Entre los 23 primeros primos de 2-Padovan (primos de Padovan), hay 8 que no son congruentes con 1 mod. 4.

- Entre los 37 primeros primos de 3-Padovan, hay 11 que no son congruentes con 1 mod. 4.

- Entre los 48 primeros primos de 4-Padovan, hay 15 que no son congruentes con 1 mod. 4.

- Entre los 48 primeros primos de 5-Padovan, hay 24 que no son congruentes con 1 mod. 4.

- Entre los 72 primeros primos de 6-Padovan, hay 35 que no son congruentes con 1 mod. 4.

Se observa que la densidad de primos de *k*-Padovan, no congruentes con 1 mod. 4 aumenta con k, como pasaba con la densidad de primos, llegándose a prácticamente la mitad del total para $k = 5, 6$. (Para $k = 9$ tenemos el primer valor en el que en los 10000 primeros subíndices hay más primos congruentes con 3 mod. 4: 31, que congruentes con 1 mod. 4: 24).

4. OTRAS EXTENSIONES

Se pueden obtener otras extensiones de los números de oro y plástico utilizando otras propiedades de estos números. Una nueva extensión se consigue utilizando la siguiente propiedad de ϕ: $\{\phi^2\}=\left\{\frac{1}{\phi}\right\}$, donde $\{\ \}$ es la parte fraccionaria. Nos planteamos qué números reales cumplen esa propiedad:

PROPOSICIÓN 4

Los números x que cumplen que $\{x^2\}=\left\{\frac{1}{x}\right\}$ son sólo las raíces de polinomios del tipo:

$x^3+n\,x-1$, para algún $n\in Z$

Demostración

$\{x^2\}=\left\{\frac{1}{x}\right\}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=x^2+n$, para algún $n\in Z$, y esta última ecuación es equivalente a:

$x^3+n\,x-1=0$ #

Observaciones

1) Como la ecuación anterior es cúbica siempre tendrá alguna solución real, luego habrá infinitos números reales que cumplan la propiedad (al menos uno por cada valor de $n\in Z$)

2) Para $n=-1$ la raíz real del polinomio es el número de plástico, para $n=-2$ la raíz real mayor del polinomio es el número de oro (las otras raíces son -1 y $-\frac{1}{\phi}$)

Por tanto, si renombramos n como $-k$, con $k>0$, se puede definir:

DEFINICIÓN

Sea $k\in N$, el número de *k*-Adela (A_k) es la solución real mayor a la ecuación:

$x^3=k\,x+1$

(Se cumplirá entonces que A_1 es el número de plástico y A_2 el de oro. Por la ecuación que satisface, se puede ver A_k, $k\in N$, como una generalización tridimensional de una subfamilia de los números metálicos [6])

Para definir una sucesión con esa ecuación característica, necesitaremos dar los 3 primeros términos. Para $k=1$ será entonces $x_3=1$, como la de Padovan, y para $k=2$ será $x_3=2$, como la de Fibonacci. Extendemos entonces a:

DEFINICIÓN

Sea $k\in N$, la sucesión de *k*- Mariló viene dada por la ecuación de recurrencia:

$x_n = k\, x_{n-2} + x_{n-3}$ si $n>3$, con las condiciones iniciales $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = k$. A los términos de esta sucesión se les llama números de *k*- Mariló (M_n^k)

Utilizamos esta última definición para ver que los números de *k*-Adela están bien definidos, es decir, para ver que la ecuación $x^3 = k\,x+1$ tiene una solución dominante para todo $k\in N$:

PROPOSICIÓN 5

El máximo módulo de las soluciones de la ecuación $x^3 - k\,x - 1 = 0$ se alcanza para una sola solución, para todo k.

Demostración

Se puede demostrar los análogos a los lemas 1 y 2 para la ecuación $x^3 - k\,x - 1 = 0$.

Entonces, como la sucesión de *k*- Mariló tiene como ecuación característica $x^3 - k\,x - 1 = 0$ y todos los términos positivos, se puede mimetizar la prueba de la proposición 1 para demostrar que esta ecuación siempre tiene una solución dominante.

Se puede efectuar entonces para A_k el mismo desarrollo que se hizo para p_k en la sección 2. Vemos en la siguiente observación que A_k constituye una extensión de los números de Fibonacci y plástico en cierto modo complementaria a la definida por p_k

Observación

Por la proposición 5, y teniendo en cuenta que M_n^k son naturales y crecientes en n para cualquier k, se verifica que A_k es un número real mayor que 1 para todo k. Además serán crecientes en k, al serlo también los números de *k*- Mariló. Por la ecuación que verifican, se cumple también que $\lim_{k\to\infty} A_k = \infty$.

Por tanto, p_k con $k\geq 1$ es una sucesión decreciente contenida en $(1,\phi]$, y A_k con $k\geq 2$ es una sucesión creciente contenida en $[\phi,\infty)$.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se han estudiado formas de generalizar los números de oro y plástico que son distintas a algunas de las existentes en la literatura, como los números metálicos definidos en [6].

El número de oro tiene una amplia gama de propiedades geométricas y aritméticas, que han sido estudiadas exhaustivamente con anterioridad. Algunas de estas propiedades se pierden al aumentar la dimensión en que se trabaja, como se ha demostrado en este artículo, aunque los números de *k*-plástico y de *k*-Adela conservan algunas de las propiedades que tienen el número de oro y el de plástico, derivadas del hecho de que las sucesiones que los generan tienen un polinomio característico con una raíz dominante.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] VAN DER LAAN H. (1960). Le nombre plastique. Quinze leçons sur l'ordonnance architectonique

[2] STEWART, I. (1996). Mathematical recreations: Tales of a neglected number, Scientific American, 274, pp. 92-93

[3] DE WEGER, B. M. M. (1997). Padua and Pisa are exponentially far apart. Publicacions Matemàtiques, 41, pp. 631-651

[4] COHN, J. H. E. (1964). On Square Fibonacci Numbers. *Proc. Lond. Maths. Soc.*, 39, pp. 537-540.

[5] MIGNOTTE, M. (1979). Une extensión du théorème de Skolem-Mahler. C. R. hebd. Séank. Acad. Sci. Paris Sér., 288, pp. 233-235

[6] DE SPINADEL, V. W. (1998). The metallic means and design. NEXUS II: Arquitecture&Mathematics, pp. 143-157