Preparación para competiciones matemáticas universitarias

Peña, Maite (maitepalcaraz@hotmail.com),
Rodrigo Javier (jrodrigo@upcomillas.es)
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas de Madrid

RESUMEN

Las competiciones universitarias de tipo matemático, como la OIMU a nivel iberoamericano, ó la IMC a nivel mundial, requieren una preparación específica, al plantearse problemas matemáticos de un nivel superior al usual en los exámenes de primeros cursos de las titulaciones universitarias científicas.

Es por esto que se hace necesario el establecimiento de estrategias teóricas para abordar este tipo de problemas, siendo también importante el contar con una colección de problemas de una dificultad parecida a los que se proponen en este tipo de competiciones.

En este artículo se expone parte de la base teórica matemática imprescindible para afrontar una olimpiada matemática, y se da una colección de problemas resueltos, gran parte de ellos extraídos de exámenes de olimpiadas matemáticas ya celebradas, útiles para la parte práctica de la preparación.

***Palabras claves*:**
Olimpiadas matemáticas; ecuaciones funcionales; didáctica de las matemáticas

1. INTRODUCCIÓN

El "entrenamiento" necesario para presentar a alumnos con ciertas garantías de éxito a pruebas matemáticas universitarias, puede ser considerado como un área aparte dentro de la didáctica de las matemáticas, por la gran aptitud de los alumnos que se presentan a estos exámenes, y por la especialización de los problemas que deben resolver, que implica un alto conocimiento teórico de especialidades matemáticas como el Algebra, el Análisis y la Teoría de Números.

Se hace por ello necesario disponer de un manual de preparación en el que se esboce la teoría imprescindible que hay que manejar para poder atacar los problemas de los exámenes [1], y en el que se dé un amplio espectro de ejemplos para que el estudiante pueda practicar [2], [3].

En este artículo se intentan cubrir estos dos aspectos, proponiéndose problemas extraídos de las siguientes olimpiadas matemáticas:

IMC (www.imc-math.org): International Mathematics Competition for University Students

OIMU (http://www.obm.org.br/oimu/): Olimpiada Iberoamericana Universitaria de Matemáticas

CPA: Concurso Puig Adam de Matemáticas

OME (http://www.rsme.es/): Olimpiada Matemática Española

IMO (http://imo.math.ca/): International Mathematical Olympiad

OIM: Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

OCMU (http://olimpia.uan.edu.co/default.asp): Olimpiada Colombiana de Matemáticas Universitaria

ICW: Instituto Científico Weizmann

PC (http://math.scu.edu/putnam/): Putnam Competition

Nos centraremos principalmente en los problemas propuestos en la OIMU, OCMU y, especialmente, en la IMC, al ser una competición universitaria a la que se han presentado en los últimos años estudiantes de la Universidad Pontificia Comillas.

La IMC es una competición matemática que se celebra desde 1994, organizada por la University College London, con patrocinadores internacionales como Wolfram research ó DEShaw&Co. Suele tener lugar en los últimos días de Julio y en algún país del Este de Europa, siendo Bulgaria el país que más ediciones ha acogido.

Es una competición abierta a estudiantes universitarios de los cuatro primeros cursos de cualquier carrera científica, y se puede ver como una continuación natural de la IMO, la competición matemática por excelencia de los estudiantes de Instituto.

Consta de dos días de exámenes de cinco horas cada uno, con seis problemas ordenados por su dificultad (uno y dos los más sencillos, tres y cuatro los intermedios, cinco y seis los más difíciles). Están puntuados sobre veinte puntos, sin tener en cuenta la dificultad que tengan.

A pesar de presentarse los alumnos por Universidades y tutelados por un profesor, es una competición individual, en la que se clasifica a los alumnos por el total de la puntuación obtenida en los dos exámenes. En los exámenes no se permite ningún tipo de ayuda a los estudiantes de libros, calculadoras, ó indicaciones de los profesores.

Estos sólo pueden atender al principio del examen dudas respecto de los enunciados, que están redactados en inglés. Los exámenes deben redactarse también en inglés.

Aunque los exámenes se realizan en sólo dos días, la competición suele prolongarse a una semana, llevándose a cabo el resto de los días la preparación del examen, su corrección, su revisión y la entrega final de premios.

Desarrollamos a continuación las estrategias teóricas necesarias para resolver problemas en competiciones como la citada IMC.

2. ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

En este capítulo no se pretende dar un conjunto de reglas fijas para resolver problemas tipo olimpiada, sino exponer unas estrategias sencillas, ilustradas con ejemplos, que se aplican en diferentes casos. Seguiremos el convenio de poner el enunciado de los ejemplos ó problemas en negrita.

2. 1. Estrategias Básicas

Pensemos en el siguiente problema:

Tenemos un aro, alrededor del cual hemos escrito nueve números, que son 1 ó 0. No todos ellos son 1 ni 0. Entonces, en cada paso escribimos, entre cada dos números un 1 si los dos números son iguales o un 0 si los dos números son distintos, y luego borramos los números que teníamos al principio. ¿Es posible, en un número finito de pasos, conseguir que los nueve números sean 1?

(Propuesto en [2])

En un principio el problema puede parecer muy complicado, pero supondremos que tenemos el problema resuelto, y veremos qué pasa antes. Si hemos llegado a tener todo 1, es porque en el paso anterior todos los números eran iguales, es decir, teníamos nueve ceros. Sin embargo, para tener nueve ceros, en el paso anterior teníamos que tener todos los números alternos, ya que tenían que ser distintos cada dos. Esto es, teníamos que tener 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, y vemos que por ser nueve un número impar, el noveno número y el primero son 1, entre ellos se pondría un 1, por lo que es imposible obtener 9 ceros , así que es imposible también llegar a tener nueve unos.

A esta estrategia se la conoce como trabajar hacia atrás, y como hemos visto consiste en suponer que hemos llegado a la situación que nos piden, y a partir de ahí vamos viendo qué ocurría en situaciones anteriores, lo que nos puede llevar a que la situación pedida es imposible, darnos condiciones para que se cumpla, etc.

Otra estrategia muy conocida es buscar cosas que no cambien, sobre todo en procesos iterativos. La explicaremos también con un ejemplo:

Sea n un número impar. Escribimos en una pizarra los números del 1 al 2 *n*. A cada paso podemos escoger dos números cualesquiera de la pizarra, a **y** b**, borrarlos y escribir en su lugar** $|a-b|$**. Demostrar que al final del proceso siempre quedará en la pizarra un número impar.**

Buscaremos alguna propiedad que no cambie al repetir el proceso. Por ejemplo, es fácil ver que la paridad de la suma no cambia al borrar dos números y sustituirlos por su diferencia, ya que

$S = 1 + 2 + ... + a + ... + b + ... + 2\,n = 1 + 2 + ... + a + ... - b + ... + 2\,n + 2\,b$ y puesto que la diferencia será $2a$ (si $b > a$) ó $2b$ (si $b < a$), $S' = 1 + 2 + ... + a + ... - b + ... + 2n$ ó $S' = 1 + 2 + ... - a + ... + b + ... + 2n$ tendrá la misma paridad que S.

Veamos cuánto vale S: $S = 1 + 2 + ... + 2n = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = n \cdot (2n+1)$ que es impar por ser *n* impar. Por tanto, cuando quede un solo elemento v, $S = v$ y S es impar, por tanto, *v* ha de ser impar.

Vemos por último en este apartado otras formas de demostrar muy conocidas como son la reducción al absurdo y el principio de inducción. La reducción al absurdo consiste en suponer que lo que nos piden demostrar no se cumple (es falso) y llegar a una contradicción. El principio de inducción, sin embargo, nos permite probar que una propiedad es cierta para un conjunto numerable si ésta es cierta para un cierto elemento x_0 que sea el mínimo del conjunto. Consiste en demostrar que es cierta para x_0 y luego en probar que si es cierta para un número *n*, también es cierta para el siguiente *n*+1. Hay alguna variante de la inducción, por ejemplo probar que una propiedad es cierta para *r* números $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, ..., x_0 + r - 1$ y luego probar que si la propiedad es cierta para *n*, también se cumple para $n + r$, ó demostrar que si se cumple para un número *n* y todos los anteriores también se cumple para *n*+1.

Como ejemplo podemos pensar en los siguientes problemas:

Reducción al absurdo:

Un grupo de diez amigos va a un restaurante a comer. Al final de la comida, el camarero les trae la cuenta, de un total de 225 euros. Prueba que podemos escoger dos de ellos de modo que entre los dos pagarán al menos 45 euros.

Supongamos que no, esto es, que es imposible escoger a dos de ellos con esta propiedad. Entonces, hagamos cinco parejas al azar, de modo que todos estén en una pareja. Como entre todos pagaron 225 euros, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 225$ donde S_i es el dinero que pusieron en total los dos amigos de la pareja *i*. Hemos supuesto que cada pareja paga menos de 45 euros, y por tanto $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 < 45 \cdot 5 = 225$, lo que contradice a que en total pagaron 225 euros. Por tanto siempre podemos escoger una pareja con la propiedad pedida.

Inducción:

Demostrar que $1+2+...+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

Vemos que la propiedad es cierta para $n=1$, ya que $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}=1$. Supongamos que es cierta para $n=i$. Entonces para $n=i+1$ tenemos que $1+2+...+i+(i+1)=\dfrac{i\cdot(i+1)}{2}+(i+1)=\dfrac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}$ y queda demostrado.

2.2. Desigualdades

La desigualdad básica que se puede usar en un problema es $a^2 \geq 0$ ó también $\sum_i a_i^2 \geq 0$. Sin embargo, convertir una desigualdad dada en una suma de números cuadrados puede ser una tarea muy complicada. Por eso algunas estrategias pueden ser bastante útiles.

Por ejemplo, con $a,b>0$ sabemos que

$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$, que es una desigualdad muy interesante, que por ejemplo en el caso particular en que $a=x,\ b=1$ lleva a $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$.

En muchos problemas, conocer alguna de estas desigualdades nos puede ahorrar mucho trabajo para llegar a la solución.

Otras desigualdades sencillas que podemos obtener siguiendo un procedimiento similar son:

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, y la última desigualdad se conoce como la desigualdad entre las medias aritméticas y geométricas.

Claramente la igualdad se alcanza en las desigualdades anteriores sólo cuando $a = b$.

Esta desigualdad se puede generalizar a más números y a otros tipos distintos de medias:

2. 2. 1. Desigualdad de las Medias:

Sean *n* números $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Entonces se tiene que:

$$\min(a_1, a_2, ..., a_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} \leq$$

$$\leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \leq \max(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Esta desigualdad se llama también la desigualdad Mh, Mg, Ma, Mc ya que relaciona las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadráticas respectivamente.

En general se cumple la desigualdad $M_\alpha \geq M_\beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$ siendo $M_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$. La desigualdad anterior es un caso particular entonces para $\alpha = -1,\ 0,\ 1,\ y\ 2$.

La igualdad entre todas las medias se alcanza solamente cuando todos los números son iguales.

Ejemplo:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***n*** **números reales positivos. Demuestra que si** $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$ **entonces** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n^2$

Usaremos la desigualdad de las medias. Sabemos que:

$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{1} = n \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, y esto es equivalente a $n^2 \leq a_1 + \ldots + a_n$

2. 2. 2. Desigualdad de Reagrupamiento (Rearrangement principle)

Otra desigualdad muy interesante y bastante sencilla es la siguiente. Imaginemos que tenemos tres sacos con billetes, uno de 500 euros, otro de 200 euros y otro de 100 euros y nos dejan coger de un saco cinco billetes, de otro tres y de otro uno.

Evidentemente, para sacar el máximo dinero posible, cogeremos 5 billetes de 500 euros, 3 billetes de 200 euros y 1 billete de 100 euros.

Este ejemplo se puede generalizar. En general si tenemos dos sucesiones ordenadas en el mismo orden (las dos crecientes o las dos decrecientes) la suma del producto de los términos es máxima si tomamos el mayor por el mayor, el siguiente mayor por el siguiente mayor y así hasta el menor por el menor, y la suma de los productos será mínima si multiplicamos el mayor por el menor, el siguiente mayor por el siguiente menor y así hasta el menor de la primera sucesión por el mayor de la última. Esto se puede formalizar como:

Si las secuencias A y B están ordenadas en el mismo orden:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, entonces $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{j(i)}$

Donde $j(i)$ es una cierta permutación, esto es $j:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots n\}$, siendo $j(i)$ una función biyectiva.

La igualdad se alcanza cuando todos los términos de cada sucesión son iguales.

Por ejemplo:

Si tenemos la secuencia *a, b, c* y la secuencia *a, b, c* de nuevo,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Ya que en el primer caso hemos ordenado las dos secuencias en el mismo orden.

Esto se puede escribir de forma compacta como: (ver [1])

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

También es fácil ver que

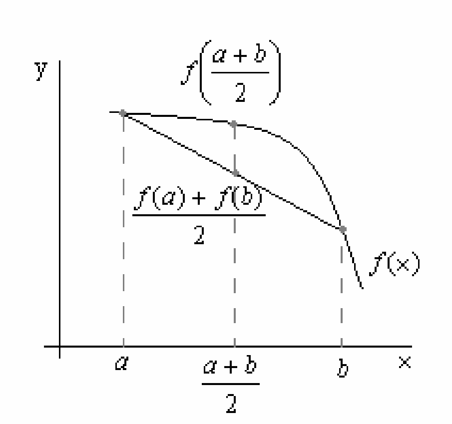
$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$, ó, expresado con matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

2. 2. 3. Desigualdad de Jensen:

Esta desigualdad nos da una relación entre la media de las imágenes de una función y la función de la media.

$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$, si la función f es convexa, esto es, si la segunda derivada de f es negativa. Esto se puede observar muy bien en un gráfico:



Ejemplo:

Sean *a, b, c* números reales positivos que satisfacen la relación $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1$**.**

Probar la desigualdad $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Haciendo el cambio de variable $a = tgA,\ b = tgB,\ c = tgC$ con A+B+C=180º (esta última igualdad implica que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1$) , la parte izquierda de la desigualdad queda como:

$$\frac{tgA}{\sqrt{1+tg^2 A}} + \frac{tgB}{\sqrt{1+tg^2 B}} + \frac{tgC}{\sqrt{1+tg^2 C}} = \frac{tgA}{\sqrt{\sec^2 A}} + \frac{tgB}{\sqrt{\sec^2 B}} + \frac{tgC}{\sqrt{\sec^2 C}} =$$
$$= senA + senB + senC$$

Y utilizando la desigualdad de Jensen, como el seno es una función convexa en el intervalo $[0,\pi]$, $\frac{senA+senB+senC}{3} \le sen\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nota:

Es muy común usar cambios de variable como hemos hecho en este problema.

Tenemos una condición, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$ con la que es difícil de trabajar. Si multiplicamos a los dos lados por abc la condición queda como: $a+b+c=abc$, y sabemos que $tgA+tgB+tgC=tgA{\cdot}tgB{\cdot}tgC \Leftrightarrow A+B+C=\pi$, por tanto, el cambio de variable $a=tgA,\ b=tgB,\ c=tgC$, nos facilita el problema porque la condición deja de ser $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$ para ser $A+B+C=\pi$, con la que es mucho más fácil trabajar.

2. 3. Ecuaciones Funcionales

Las ecuaciones funcionales son ecuaciones en las que tenemos una relación entre una función en un punto ó en varios, y sus derivadas ó sucesivas evaluaciones.

Pondremos varios ejemplos para que se puedan ver distintas formas de abordar un problema de este tipo:

Encontrar todas las funciones $f: N \to N$ **tales que** $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(Ecuación Funcional de Cauchy)

Para empezar, como tenemos *x* e *y* podemos probar a hacer algunas sustituciones con números.

Lo primero de todo, llamemos $f(1)=a$. Entonces es fácil ver que con $x=y=1$, obtenemos:

$$f(1+1)=f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)=2a$$

Ahora que sabemos los valores de $f(1)=a,\ f(2)=2a$, podemos probar con $x=2, y=1$:

$f(2+1)=f(3)=f(2)+f(1)=3a$

Parece evidente que si $f(1)=a,\ f(2)=2a,\ f(3)=3a$, se cumplirá que $f(n)=n\,a$ para todo n, así que intentemos probarlo por inducción.

Para el caso $n=1$: $f(1)=a,$
Supongamos que para $n=i,\ f(i)=i\,a$
Entonces para $n=i+1$, con $x=i,\ y=1$, tenemos que :
$f(i+1)=f(i)+f(1)=i\,a+a=(i+1)\,a$
como queríamos probar.

Así que todas las funciones posibles son $f(x)=ax$, con $a\in N$

Hallar todas las funciones $f:\Re\to\Re$ tales que

$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$ **.**

Haciendo algunas sustituciones con *x* e *y* obtenemos que:

$x=y$
$-2xf(0)=0\leftrightarrow f(0)=0$
Dividamos todo por $(x+y)(x-y)$:
$$\frac{f(x+y)}{(x+y)}-\frac{f(x-y)}{(x-y)}=4xy.$$
Sea $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.
El problema se podría enunciar como hallar todas las funciones
$h:\Re\to\Re$ tales que $h(x+y)-h(x-y)=4xy.$
Sean $x+y=a$ y $x-y=b.$
Entonces $4xy=a^2-b^2$, luego $h(a)-h(b)=a^2-b^2,\ \forall a,b\neq 0.$
Entonces es evidente que $h(x)=x^2+C$, luego $f(x)=x^3+Cx\ \ \forall x\in\Re$

Encontrar todas las funciones $f:N\to N$ tales que $f(f(n))=n+1$

(OME-fase nacional 2001)

Supongamos que existe una función $f:N\to N$ tal que $f(f(n))=n+1$.

Entonces, si $f(1)=a$, se cumple que

$f(f(1))=f(a)=2\to f(f(a))=f(2)=a+1\to f(f(2))=f(a+1)=3\to\ldots$

Por lo que tenemos que $f(n)=a+n-1$, y además $f(a+n-1)=n+1$

Pero entonces, haciendo $n = a$ en la primera igualdad y $n = 1$ en la segunda, tenemos que $f(a) = 2a - 1 = 2$, por lo que $a = \frac{3}{2}$, contradicción con que $a \in N$.

Por tanto, no existe ninguna función que cumpla las condiciones del enunciado.

2. 4.- Interpretaciones Geométricas

Una de las estrategias más importantes para afrontar un problema matemático es la capacidad de visualizarlo, de interpretarlo físicamente, geométricamente o desde otra perspectiva distinta de aquella con la que está propuesto. Muchas veces, la interpretación del problema desde otro campo hace que convirtamos un problema difícil en uno que ya sabemos resolver, o que podemos resolver con más facilidad.

Usaremos como ejemplo la siguiente desigualdad:

Tomemos un vector con componentes positivas (x, y). Probar que el módulo del vector es menor que $x + y$.

Supongamos que k es el módulo del vector. Entonces tenemos que $k^2 = x^2 + y^2$ y por tanto los números *k*, *x*, *y* son, por el teorema de Pitágoras, los lados de un triángulo rectángulo. Por tanto es evidente por la desigualdad triangular que cada uno de los lados tiene que ser menor que la suma de los otros dos y en particular, $k < x + y$.

Vemos otro ejemplo de interpretación geométrica:

Sean a, b, c, tres números naturales arbitrarios

a) Demostrar que la expresión

$H = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$, **es un entero.**

b) Supongamos que $a > b > c$. En estas condiciones, ¿es necesario que $a < b + c$ para que $H > 0$? ¿Es suficiente dicha condición para que $H > 0$?

(Propuesto en el Concurso Puig-Adam)

a) Si desarrollamos la expresión vemos que:

$$H=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=$$
$$\left(a+\mathrm{b}+2\sqrt{a}\sqrt{b}-\mathrm{c}\right)\left(c-a-b+2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)=4ab-\left(c-a-b\right)^2$$

Que evidentemente es un entero.

b) Vemos que es suficiente: Si $a<b+c$, $\sqrt{a}<\sqrt{b+c}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$, por lo que $2\sqrt{a}<2\sqrt{b}+2\sqrt{c}$. También sabemos que $a>b,c\Rightarrow 2\sqrt{a}>2\sqrt{b},2\sqrt{c}$. Siempre que tenemos un número positivo mayor que otros 2, pero menor que la suma de esos 2, podemos construir un triángulo de lados esos 3 números: Basta con tomar un segmento de longitud el mayor de los 3, y hacer las circunferencias de centros los extremos del segmento y radios los otros 2 números. Las circunferencias se intersecan en un punto que, con los 2 extremos del segmento, hacen un triángulo de lados los 3 números (ver figura). Entonces existe un triángulo de lados $2\sqrt{a},2\sqrt{b},2\sqrt{c}$. Por la fórmula de Heron, el área de este triángulo será

$$S=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}.$$ Para que exista, lo de dentro de la raíz (H) ha de ser >0.

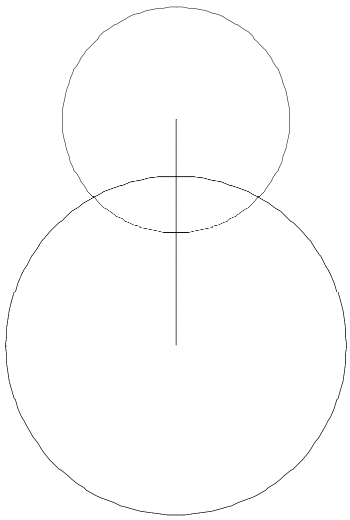


Figura: El triángulo con vértices los 2 del segmento y una de las intersecciones entre las 2 circunferencias tiene lados 2, 3, 4**,** si la longitud del segmento es 4 y los radios de las circunferencias 2 y 3.

Tomando $a=4$, $b=2$, $c=1$, se cumple que:

$H=4\,a\,b-\left(a+b-c\right)^2=32-25>0$, pero $a>b+c$, luego la condición no es necesaria.

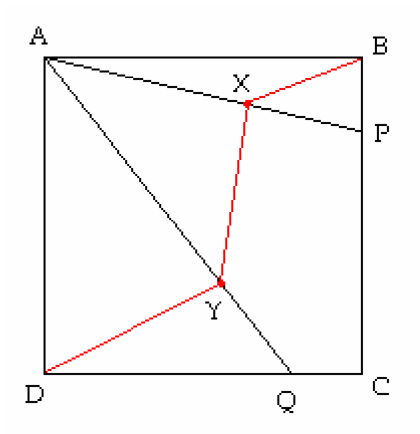
Como se puede ver, lo que se ha hecho ha sido interpretar el enunciado como que $2\sqrt{a}, 2\sqrt{b}, 2\sqrt{c}$ eran los lados de un triángulo, y entonces con una fórmula conocida (la fórmula de Heron) el problema era inmediato.

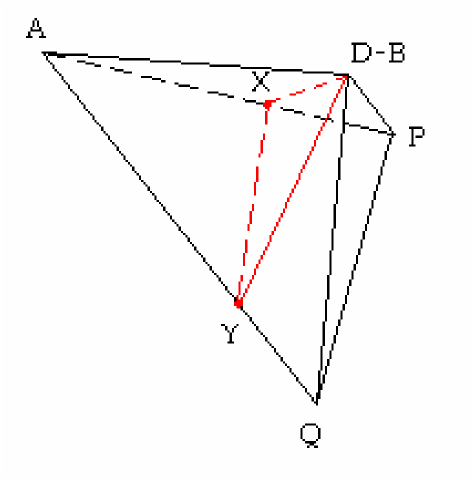
Otro problema de mayor dificultad que los anteriores es el siguiente:

Tenemos un cuadrado de vértices A, B, C, D. Se trazan las líneas AP y AQ sabiendo que BP=CQ. Se escogen dos puntos cualesquiera X, Y en dichas rectas. Demostrar que siempre se puede construir un triángulo de lados BX, XY, YD

(Propuesto en la OIM-2003)

Para solucionarlo, usaremos la siguiente idea:





Si doblamos el cuadrado tal y como muestra el dibujo, el triángulo queda formado en el espacio ya que AD=AB y por tanto coinciden. Sólo queda demostrar que el tetraedro dibujado siempre se podrá formar, para lo cual basta con demostrar que el ángulo PAQ es menor o igual que 45º, que es cierto por ser BP=CQ, ya que el ángulo QAC<PAB.

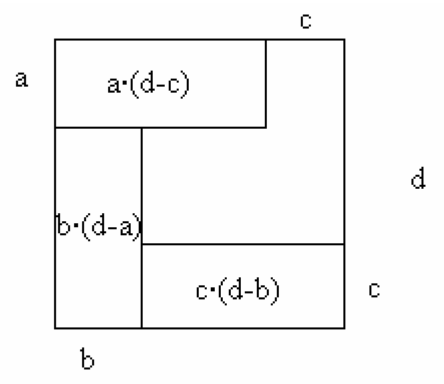
Este último problema apareció en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas de 2003 y una solución analítica del problema era muy tediosa. Sin embargo una idea tan sencilla como la que hemos explicado arriba permitía dar una solución muy elegante.

Aunque estas estrategias normalmente no suelen tener aplicación directa en los problemas, sí queremos insistir en que pueden facilitar un problema más difícil, ó darnos ideas para enfocarlo.

Por último, pensemos el siguiente problema:

Sean a, b, c, d **números reales y sea** $d = \max\{a, b, c, d\}$**. Demostrar que** $a \cdot (d-c) + b \cdot (d-a) + c \cdot (d-b) \leq d^2$**.**

Si consideramos la siguiente figura:



Entonces el área del cuadrado es justamente d^2 y los tres rectángulos tienen área $a \cdot (d-c) + b \cdot (d-a) + c \cdot (d-b)$ que siempre será menor que el área del cuadrado con igualdad si y solamente si $a = 0 \ y \ b = d \ o \ c = d$, ó cualquier otra permutación.

Este problema se propuso en una preparación para la olimpiada internacional a varios alumnos de 4º de E. S. O. Sorprendentemente, todos ellos lo solucionaron de esta forma. Cuando se les preguntó en qué razonamientos se habían basado para llegar a esa solución, dijeron que el segundo miembro de la desigualdad, el d^2 les había hecho pensar en el área de un cuadrado, mientras que los otros términos eran productos de dos números distintos y positivos y por tanto podían ser interpretados como áreas de rectángulos. Bastaba entonces con pintar el cuadrado de lado *d* y tratar de encajar en él los rectángulos.

2. 5.- Principios de conteo

Muchos problemas propuestos en olimpiadas matemáticas se pueden resolver contando las formas posibles de realizar una determinada acción, o, utilizando el camino inverso, interpretar una fórmula que nos dé el enunciado como el cardinal de un conjunto. Por ejemplo, si los dos miembros de una identidad que nos piden verificar son distintas formas de contar una misma cosa, es evidente que la identidad se cumple.

Hay muchas herramientas para contar. La combinatoria nos ofrece numerosas fórmulas para contar las distintas posibilidades para ordenar objetos, y la mayoría están recogidas en casi todos los libros de cálculo ó de matemática discreta ([4], [5]).

También es útil conocer los números combinatorios, y algunas de las relaciones que satisfacen. Enumeraremos algunas de ellas, por ejemplo:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{\prod_{n-m+1}^{m} i}{n!}, \ m, n \in N$$

$$\binom{m}{n} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \cdot \binom{m-j}{n-i}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Que se pueden probar fácilmente por inducción. Demostraremos la última fórmula ya que se puede dar una prueba bastante curiosa:

Sabemos que por el binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. Sustituyendo ahora por $a = b = 1$ obtenemos precisamente $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Otra herramienta muy conocida para contar es el Principio de las Casillas o Principio de Dirichlet, también conocido como el Principio del Palomar y The Box Principle. El enunciado de este principio es muy sencillo, una primera versión podría ser: “Tenemos cinco flores y cuatro jarrones. Si colocamos las flores en cuatro jarrones, entonces en al menos un jarrón habrá al menos dos flores”. Como se puede ver por el enunciado, es un principio bastante intuitivo.

Una versión más general sería: “Si tenemos n objetos, y m cajas en las que distribuirlos, al menos en una de ellas habrá $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ objetos”, donde $\lceil x \rceil$ denota el menor número entero $n / n \geq x$.

Un ejemplo de utilización de este principio en un problema nada trivial sería:

Se consideran cuatro números reales y distintos del intervalo (0,1).

Demostrar que siempre se pueden elegir dos de ellos, *a* y *b*, tales que:

$$\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > \frac{a}{2\,b} + \frac{b}{2\,a} - a\,b - \frac{1}{8\,a\,b}$$

Todos los números del intervalo (0,1) son de la forma $\cos\alpha$, con $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dividiendo en tres partes dicho intervalo: $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, por el principio del palomar tenemos que al menos dos de los cuatro números considerados, $a = \cos\alpha$ y $b = \cos\beta$ verifican: $0 < |\alpha - \beta| < \frac{\pi}{6}$.

Entonces, como la función coseno es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a < b$, tenemos que $\cos(\alpha - \beta) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que

$\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta > \frac{\sqrt{3}}{2}$, desigualdad que con a y b queda:

$a\,b + \sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, que es a su vez equivalente a

$$2\,a\,b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} > a^2 + b^2 - 2\,a^2\,b^2 - \frac{1}{4}$$

Finalmente, para obtener la desigualdad del enunciado, dividimos por $2\,a\,b$ esta última expresión.

Terminamos esta subsección refiriéndonos a las ecuaciones de recurrencias, que son relaciones que nos permiten expresar una propiedad en un instante determinado en función del valor de la propiedad en una serie de instantes anteriores, y que son herramientas útiles para hallar cardinales de conjuntos en casos en que no se pueden utilizar las técnicas anteriores.

Como ejemplo puede servir el siguiente problema:

Considera los conjuntos:

$$S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall i = 1, ..., n,\ x_i \in \{0,1,2\}\}$$
$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : \forall i = 1, ..., n-2,\ |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \neq 1\}$$
$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} \neq 0\}$$

Prueba que $|A_{n+1}| = 3|B_n|$

(IMC 2005-Problema 2, primer día)

Para n=2 es cierto, ya que

$$|A_3| = VR_{3,3} - 3 = 24$$
$$|B_2| = VR_{3,2} - 1 = 8$$

También se cumple para n=3.

Supongamos que es cierto para todo $n \leq i$, $i \geq 3$. Entonces, demostremos que también es cierto para $n = i+1$. Contemos los elementos que hay en cada conjunto por medio de relaciones de recurrencia de segundo orden:

$$|A_{i+2}| = 2|A_{i+1}| + 2|A_i|$$
$$|B_{i+1}| = 2|B_i| + 2|B_{i-1}|$$

Comprobamos que se cumplen estas dos igualdades:

$2|A_i|$ = nº de vectores de A_{i+1} con las dos últimas cifras distintas y que por tanto les puedo añadir como última cifra la última que tengan.

$2|A_{i+1}|$ = nº de vectores de A_{i+1} a los que le añado de última cifra una de las dos cifras en las que no acaban

(Otra forma de verlo sería que por cada vector en A_i puedo conseguir 2 vectores en A_{i+2} metiendo 2 veces una cifra distinta a la última del vector en A_i, y por cada vector en A_{i+1} puedo conseguir 2 vectores en A_{i+2} metiendo al final una cifra distinta a la última del vector en A_{i+1}. Son distintos a los vectores en A_{i+2} conseguidos antes, porque estos tienen las 2 últimas cifras distintas, y los anteriores tenían las 2 últimas cifras iguales, y todo vector de A_{i+2} se puede conseguir así, luego $|A_{i+2}| = 2|A_{i+1}| + 2|A_i|$).

$2|B_{i-1}|$ = nº de vectores de B_i con la última cifra distinta de 0 y que por tanto les puedo añadir un 0.

$2|B_i|$ = nº de vectores de B_i a los que le añade un 1 o un 2.

Por lo que se cumple también la segunda igualdad

Y por tanto se cumple la igualdad del enunciado (inducción).

2. 6.- Algunos resultados de teoría de números y números complejos

En esta subsección no haremos un desarrollo teórico, sino que daremos sólo tres ejemplos, de los que se extraen la utilidad de algunos conceptos de la teoría de números como la divisibilidad, ó de las propiedades de los números complejos:

Estamos en una isla desierta en la que sabemos que un antiguo pirata enterró un tesoro. No sabemos en qué lugar de la isla lo enterró, pero tenemos un mapa en el que nos indican la ruta que debemos seguir para encontrarlo. En la isla del tesoro hay un pino *P* y un abeto *A*. Si trasladamos todo el terreno, con el tesoro incluido, de manera que *P* ocupe la posición de *A*, a continuación giramos 90º con centro en *P* y sentido contrario al de las agujas del reloj y finalmente giramos otros 90º con centro en *A* en el mismo sentido, el tesoro permanece en el mismo lugar del principio. Encuentra el tesoro.

(Propuesto en [3])

Claramente hemos de encontrar un punto que permanezca invariante después de todas las transformaciones.

Coloquemos el origen en el punto *P*, y el eje x en la dirección *PA*, y normalicemos el problema de modo que *A*=(2,0). Sea z un complejo cualquiera. Transformemos z según los movimientos descritos en el enunciado:

La traslación de vector $\overrightarrow{PA}$ transforma z en z+2. Girar con centro *P* y ángulo 90º transforma z+2 en (z+2)·i, y si ahora trasladamos el origen a *A*, giramos 90º y deshacemos el cambio de origen queda (z+2)·i transformado en ((z+2)·i-2)·i+2 y si z permanece invariante eso tiene que ser igual a z, y la única solución de la ecuación es z=-i, luego el tesoro se encuentra en el punto (0,-1) del sistema de referencia.

Sabiendo que $13 = 2^2 + 3^2$ **y** $74 = 5^2 + 7^2$**, expresar el número** $13 \cdot 74 = 962$ **como suma de dos cuadrados.**

(Propuesto en [2])

Sea z=2+3i y w=5+7i. Entonces:

$$|z|^2 |w|^2 = 962 = |z\, w|^2 = |(2+3\,i)(5+7\,i)|^2 = |(10-21+(15+14)\,i)|^2 = 11^2 + 29^2$$

Probar que 2003 no puede ser expresado como suma de dos cuadrados perfectos.

Supongamos que sí. Entonces, 2003=$a^2 + b^2$.

Sabemos que 2003 da de resto 3 al dividirlo entre 4 (es congruente con 3 módulo 4). Entonces $a^2 + b^2$ tiene que dar el mismo resto al dividirlo entre cuatro.

Veamos qué resto dan al dividir entre cuatro los cuadrados perfectos:

Si a da de resto 0 al dividir entre cuatro, a^2 también dará resto cero al dividir entre cuatro.

Si a da de resto 1, a=4a'+1, y a^2=16a'^2+8a'+1 que también da de resto 1 al dividirlo por 4.

Igualmente se puede deducir que si a da de resto 2 ó 3 al dividirlo por 4, a^2 da de resto 0 ó 1 respectivamente al dividirlo entre cuatro. Por tanto a^2 y b^2 dan de resto 0 ó 1 al dividirlos entre cuatro y es imposible que su suma dé resto 3 al dividirlo entre cuatro, contradicción.

Observación

Un resultado de Euler, respondiendo a una conjetura de Fermat, es que un número natural se puede expresar como suma de dos cuadrados si y sólo si no tiene ningún factor primo congruente con 3 módulo 4, con exponente impar.

Esto se puede aplicar a los dos problemas anteriores: 2003 es un primo congruente con 3 módulo 4, luego no se puede expresar como suma de dos cuadrados; $962 = 2\times 13\times 37$, con 2, 13, 37 no congruentes con 3 módulo 4, luego se puede expresar como suma de dos cuadrados, y el problema 2 de esta subsección da una forma de hacerlo.

3. PROBLEMAS RESUELTOS

En esta sección daremos una colección de problemas planteados en algunas de las olimpiadas matemáticas antes citadas, incluyendo soluciones a los mismos:

3. 1.- Problemas de la International Mathematical Competition (IMC)

1.- Sea $f \in C^1[a,b]$, $f(a)=0$ **y supongamos que existe un** $\lambda \in \Re, \lambda > 0$**,tal que** $|f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$
para todo $x \in [a,b]$**. ¿Es cierto entonces que** $f(x)=0$ **para todo** $x \in [a,b]$**?**
(30/7/1994-Problema 1)

Solución:

Supongamos que no fuera cierto, esto es, que existiera un cierto $x \in [a,b]$ para el cual $f(x) \neq 0$.

Subdividimos el intervalo $[a,b]$ en intervalos de la forma $\left[a+\frac{k}{\lambda}, a+\frac{k+1}{\lambda}\right]$, con $k = 0,\dots,[\lambda(b-a)]-1$, siendo $[\ ]$ la parte entera. Entonces habrá un mínimo k con $k = 0,\dots,[\lambda(b-a)]-1$ tal que $f\left(a+\frac{k}{\lambda}\right)=0$ y en el intervalo $\left[a+\frac{k}{\lambda}, a+\frac{k+1}{\lambda}\right]$ existe un x tal que $f(x) \neq 0$. Por simetría en el razonamiento supongamos que $f(x) > 0$. Puesto que estamos trabajando con una función continua en un intervalo cerrado y acotado, $\left[a+\frac{k}{\lambda}, a+\frac{k+1}{\lambda}\right]$, ó $\left[a+\frac{k+1}{\lambda}, b\right]$ si el mínimo k es $[\lambda(b-a)]-1$, alcanzará el máximo absoluto, y además, sabemos que este máximo es estrictamente mayor que 0. Sea $a' = a + \frac{k}{\lambda}$ y c el mínimo punto del intervalo $\left[a + \frac{k}{\lambda}, a + \frac{k+1}{\lambda}\right]$ en el que f alcanza su máximo, que existirá porque f es continua.

Entonces por el teorema de Lagrange tendremos que existe un $x_0 \in (a', c)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(c) - f(a')}{c - a'} \geq \frac{f(c) - f(a')}{1/\lambda} = \lambda\, f(c) > \lambda\, f(x_0)$, contradicción, por lo que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

2.- Sea $f : \Re^2 \to \Re$ una función dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$

a) Prueba que f alcanza su mínimo y su máximo absoluto.

b) Determina todos los puntos (x, y) tales que $\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = 0$ y determina para cuáles de ellos f alcanza un extremo relativo o absoluto.

(30/7/1994-Problema 2)

Solución:

a) La función f es una función diferenciable, y por tanto continua, en el plano.

Puesto que f es una función continua, en una esfera centrada en el origen y de radio 1 (y su interior) alcanzará su máximo y su mínimo absoluto. Demostremos que en el complementario de la esfera la función está acotada entre [-1/e, 1/e]:

Es evidente, ya que $\left| f(x, y) \right| = \left| (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2} \right| = \left| \frac{x^2 - y^2}{e^{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{x^2 - y^2}{e^{x^2 + y^2 - 1}} \cdot \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{e}$, al ser $\left| \frac{x^2 - y^2}{e^{x^2 + y^2 - 1}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2 + y^2 - 1}} \leq 1 \quad \forall x, y \in \Re,\ x^2 + y^2 > 1$. Por tanto, como en la esfera de radio 1 se alcanzan los valores f(1,0)=1/e, f(0,-1)=-1/e, la función alcanza su máximo y mínimo absoluto.

b) Calculemos ahora sus derivadas parciales:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = 2xe^{-x^2 - y^2}(1 - x^2 + y^2);\ \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = 2ye^{-x^2 - y^2}(-1 - x^2 + y^2).$$

Es fácil ver que éstas son iguales a 0 si y sólo si:

$x = y = 0$ ó $x = 0, y = \pm 1$ ó $x = \pm 1, y = 0$.

Basta con sustituir y encontrar el valor de *f* en cada punto para ver que:

f(1,0)=*f*(-1,0)=1/e son máximos absolutos y que *f*(0,1)=*f*(0,-1)=-1/e son mínimos absolutos, ya que *f*(0,0)=0. El punto (0,0) se comprueba con la matriz Hessiana que es un punto de silla, esto es no es máximo ni mínimo local ni absoluto.

3. 2.- Problemas de la OIMU

1.- Encontrar todas las funciones $f:\Re\rightarrow\Re$ que sean integrables en cualquier intervalo $[0,x]\, si\ x>0\ y\ [x,0]\, si\ x<0$, que satisfacen la condición $xf(x)=\int_0^x f(t)dt$ para cualquier número real *x* distinto de 0.

(7/10/2000-Problema 1)

Solución:

Si $f(x)$ es integrable en $\Re$, $G(x)=\int_0^x f(t)dt$ es continua. Como $f(x)=\frac{G(x)}{x}$, con $G(x)\ y\ x$ funciones continuas, $f(x)$ es continua en $\Re-\{0\}$ y si f es continua en un cierto intervalo I, $G(x)$ es diferenciable en dicho intervalo por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, y por tanto f será diferenciable en $\Re-\{0\}$.

Derivemos entonces a ambos lados de la igualdad:

$$f(x)+xf'(x)=f(x)\leftrightarrow xf'(x)=0\ \forall x\neq 0\rightarrow f'(x)=0\,\forall x\neq 0$$

Por tanto, las funciones que cumplen las condiciones del enunciado son:

$$f(x)=\begin{cases} c\ si\ x\neq 0 \\ f(0)\ si\ x=0 \end{cases}$$

2.- Una función derivable $f:\Re\rightarrow\Re$ satisface la desigualdad $|f(x)|\geq|f'(x)|\ \forall x\in\Re$ y al menos para un real x_0 esta desigualdad es estricta, es decir, $|f(x_0)|>|f'(x_0)|$. Demostrar que f no tiene raíces.

(6/10/2001-Problema 2)

Solución:

Imaginemos que f sí tiene raíces en los reales. Entonces podemos encontrar un intervalo $[a,b]\subset\Re$ de modo que *x* sea el supremo de las raíces de f en dicho intervalo y además $f(b) \neq 0$, a no ser que $f(x) = 0$ para todo x, caso que no se puede dar porque no se cumpliría $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$. Puesto que f es derivable, también será continua, así que podemos asegurar que existirá un entorno alrededor de *x* donde la función sea creciente o decreciente (no estrictamente, porque puede tomar valor 0 en más de un punto, pero sí creciente ya que si nunca toma un valor mayor o menor que 0 la desigualdad del enunciado nunca será estricta). Cojamos un punto de ese intervalo, $c \in [a,b], |x-c| < 1$ *y* $f(c) \neq 0$.

Entonces aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, existirá un $x_0 \in [x,c]$ tal que:

$$|f'(x_0)| = \left|\frac{f(c)-f(x)}{x-c}\right| = \left|\frac{f(c)}{x-c}\right| > |f(c)| \geq |f(x_0)|,$$ contradicción, luego f no tiene raíces.

3. 3.- Problemas de las Olimpiadas Colombianas Universitarias - Instituto Científico Weizmann

1.- Sean x_1 , ... , x_n vectores no nulos de un espacio vectorial y ϕ una transformación lineal que satisface:

ϕ $(x_i) = x_1 + x_2 + ... + x_i$, $i = 1, ... , n$.

Demostrar que los vectores x_1 , ... , x_n son linealmente independientes.

(I OCMU, 10/12/1997-Problema 2)

Solución:

Lo demostramos por inducción sobre *n* = número de vectores:

Si *n*=1, entonces, como el vector x_1 es no nulo, es linealmente independiente (l. i.). Lo suponemos cierto para $n-1$ vectores que cumplan las condiciones.

Sean *n* vectores $x_1,...,\ x_n$ no nulos que cumplen las condiciones, entonces existe una aplicación lineal ϕ que cumple que $\phi(x_1) = x_1, ..., \ \phi(x_{n-1}) = x_1 + ... + x_{n-1}$, por lo que $x_1,...,\ x_{n-1}$ son l. i. (hipótesis de inducción). Por tanto, si $x_1,...,\ x_n$ son linealmente dependientes, será x_n el que dependa de los demás, es decir, $x_n = \lambda_1\, x_1 + ... + \lambda_{n-1}\, x_{n-1}$, por lo que, al ser ϕ lineal, se cumplirá que

$$\phi(x_n) = \lambda_1\, \phi(x_1) + ... + \lambda_{n-1}\, \phi(x_{n-1}) = \lambda_1\, x_1 + ... + \lambda_{n-1}\,(x_1 + ... + x_{n-1}) =$$
$$= (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1})\, x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

Por otro lado, $\phi(x_n) = x_1 + ... + x_n$, por lo que igualando tenemos que

$$x_1 + ... + x_n = (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1})\, x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow x_n = (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1} - 1)\, x_1 + ... + (\lambda_{n-1} - 1) x_{n-1}.$$

Entonces tenemos x_n expresado como combinación lineal de $x_1 ,...,\ x_{n-1}$ de dos formas distintas, ya que el coeficiente de x_{n-1} en la primera forma es λ_{n-1}, y en la segunda es $\lambda_{n-1} - 1$, contradicción con que $x_1 ,...,\ x_{n-1}$ son l. i. Por tanto, $x_1 ,...,\ x_n$ son l. i.

2.- Una elipse es reflejada en una recta tangente a ella. La imagen de esta reflexión gira sobre la elipse original (que permanece fija) sin deslizarse. Determinar el lugar geométrico de los focos de la elipse que está rotando.

(I OCMU, 10/12/1997- Problema 3)

Solución:

Si la elipse inicial la consideramos centrada en el origen y de semiejes a, b, $a > b$, entonces su ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (si tomamos $y > 0$). La elipse que queda al girar la elipse reflejada sobre ésta es simétrica con ésta respecto a su recta tangente, y sus focos serán simétricos a los de esta elipse respecto a la recta tangente. Los focos de esta elipse son $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, y su recta tangente en un punto genérico de ella (c, d) es $y = d - \dfrac{b}{a}\dfrac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}(x - c)$. Para hallar el simétrico respecto a esta recta de un punto cualquiera (e, f), cogemos la recta perpendicular a esta tangente que pasa por (e, f), $y = f + \dfrac{a\sqrt{a^2 - c^2}}{b\, c}(x - e)$, y hallamos su punto de corte con la tangente:

$$d-\frac{b}{a}\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}(x-c)=f+\frac{a\sqrt{a^2-c^2}}{b\,c}(x-e),\text{ por lo que}$$

$$x=\frac{b^2c^3+a\,b\,c\sqrt{a^2-c^2}\;d+a^4\;e-a^2\;c^2\;e-a\,b\,c\,\sqrt{a^2-c^2}\;f}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2}$$

Y sustituyendo en la ecuación de la tangente queda la y del punto de corte, siendo éste

$$\left(\frac{b^2c^3+a\,b\,c\sqrt{a^2-c^2}\;d+a^4\;e-a^2\;c^2\;e-a\,b\,c\,\sqrt{a^2-c^2}\;f}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2},\frac{b\,\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$$

Entonces el simétrico de (e,f) respecto la tangente es el simétrico de (e,f) respecto a este punto de corte (x,y), que será $2(x,y)-(e,f)$, quedando

$$\left(\frac{b^2c^2\;(2\,c-e)+a^2\;\left(a^2-c^2\right)e+2\,a\,b\,c\sqrt{a^2-c^2}\;(d-f)}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2},\frac{2b\,\sqrt{a^2-x^2}-a\;f}{a}\right)$$

En uno de los focos $e=\sqrt{a^2-b^2}$, $f=0$, luego sustituyendo en el punto anterior nos queda que su simétrico será

$$\left(\frac{b^2c^2\;\left(-\sqrt{a^2-b^2}+2\,c\right)+a^2\;\sqrt{a^2-b^2}\left(a^2-c^2\right)e+2\,a\,b\,c\sqrt{a^2-c^2}\;d}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2},\frac{2b\,\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$$

Con $x=\dfrac{b^2c^3+a\,b\,c\sqrt{a^2-c^2}\;d+\left(a^4-a^2\;c^2\right)\sqrt{a^2-b^2}}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2}$

Como (c,d) es un punto de la elipse, se cumplirá que $d=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$ (suponemos $d>0$), luego sustituyéndolo en el punto anterior, nos queda

$$\left(\frac{a^4\;\sqrt{a^2-b^2}-b^2\sqrt{a^2-b^2}\;c^2+a^2\;c\left(2b^2-\sqrt{a^2-b^2}\;c\right)}{a^4-a^2\;c^2+b^2\;c^2},\frac{2b\,\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$$

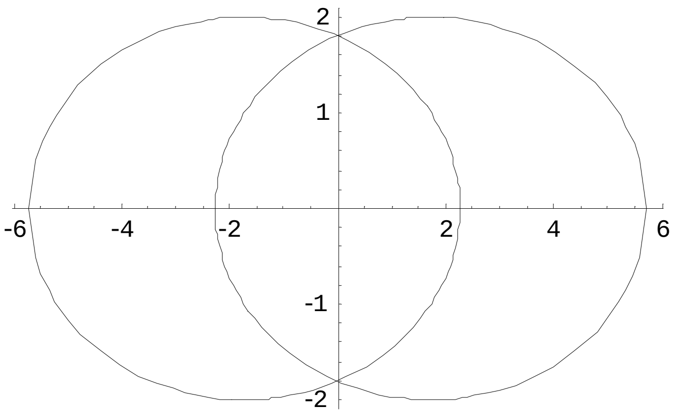
Con $x = \dfrac{b^2 c^3 + b^2\ c\left(a^2 - c^2\right)d + \left(a^4 - a^2\ c^2\right)\sqrt{a^2 - b^2}}{a^4 - a^2\ c^2 + b^2\ c^2}$

Esta es entonces la curva que traza el primer foco, siendo c el parámetro de la curva (a y b son fijos, son los semiejes de la elipse inicial). Para los puntos (c,d) con $d<0$ trazará la simétrica a esta curva respecto al eje OX. El otro foco es igual, sólo que $e = -\sqrt{a^2 - b^2}$. Sustituyéndolo en la ecuación del simétrico y haciendo los demás cálculos igual, nos da la curva

$$\left(\frac{-a^4\ \sqrt{a^2-b^2} + b^2\sqrt{a^2-b^2}\ c^2 + a^2\ c\left(2b^2 + \sqrt{a^2-b^2}\ c\right)}{a^4 - a^2\ c^2 + b^2\ c^2}, \frac{2b\ \sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$$

Y como antes su simétrica respecto al eje OX.

Observación: Estas curvas son también elipses. En concreto, si $a=2$, $b=1$ quedan las siguientes curvas que describen los focos:



Que son elipses de semiejes 4, 2, el doble que los de la elipse inicial

(Cálculos hechos con ayuda del programa Mathematica).

3.- Hallar las soluciones de la ecuación: $3^{2x} + 3^x = 90$

(III OCMU-ICW, 10/05/1999-Problema 1)

Solución:

Se cumple que:

$$3^{2x} + 3^x = 90 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 + 3^x - 90 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{-1+\sqrt{361}}{2} = \frac{-1+19}{2} = 9$$

(Cogemos sólo la solución positiva porque $3^x > 0$). Entonces $x = \log_3(9) = 2$.

4.- La víctima de un accidente morirá a menos que reciba en los próximos 10 minutos una transfusión de sangre tipo A-Rh positivo. Se dispone de gran

número de donantes de los cuales sólo se sabe que el 40% tienen sangre de ese tipo. Se necesitan dos minutos para determinar el tipo de sangre del posible donante y dos minutos para realizar la transfusión. ¿Cuál es la probabilidad de que se salve si el hospital dispone de un sólo equipo de tipificación de sangre?

(III OCMU-ICW, 10/05/1999-Problema 2)

Solución:

Como tienen 2 minutos para analizar la sangre de cada donante y 2 minutos para hacer la transfusión y en total disponen de 10 minutos, se salvará si el cuarto donante ó alguno de los anteriores tienen sangre A-RH+. Entonces si llamamos A_i al suceso "el individuo i que se analiza tiene sangre A-RH+", entonces

$P(\{\text{se salve}\}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4)$, siendo $\overline{A}_i$ el suceso "el individuo i que se analiza no tiene sangre A-RH+". Como los sucesos son independientes, ya que la probabilidad de que uno no tenga sangre A-RH+ no se ve afectada por el hecho de que los otros analizados la tengan ó no, la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades, por lo que:

$$P(\{\text{se salve}\}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$$

(Ya que el $40\% = \dfrac{2}{5}$ tienen sangre A-RH+, por lo que $P(\overline{A}_i) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$).

3. 4.- Otros problemas

1.- Sea n un número natural. Probar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \sec^2 \frac{(n-k)\pi}{4n} < \frac{4n}{\pi} < \sum_{k=1}^{n} \sec^2 \frac{k\pi}{4n}.$$

Propuesto por José Luís Díaz Barrero (http://www-ma3.upc.es/users/diaz/)

Solución:

La primera desigualdad es equivalente a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\frac{(n-k)\pi}{4n}<\frac{4}{\pi}$. Si dividimos entre n en el numerador y denominador de lo de dentro de $\sec^2$, nos queda $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\frac{(n-k)\pi}{4n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\left(\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\pi}{4}\right)$. Si consideramos la partición

$\left\{\frac{k}{n}/k=0,...,n\right\}$ del intervalo $[0,1]$, lo que tenemos es la suma inferior de la función $\sec^2\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)$ en ese intervalo, ya que esa función es decreciente en $[0,1]$ ($\left(\sec^2\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)\right)'=2\sec^2\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)tg\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$, ya que $\frac{(1-x)\pi}{4}$ está entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ cuando x está entre 0 y 1, por lo que la tg es positiva), y la estamos evaluando en los extremos superiores de los subintervalos, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\left(\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\pi}{4}\right)<\int_0^1\sec^2\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)dx=\left[tg\left(\frac{(1-x)\pi}{4}\right)\left(-\frac{4}{\pi}\right)\right]_0^1=\frac{4}{\pi}.$$

La segunda desigualdad es equivalente a $\frac{4}{\pi}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\frac{k\pi}{4n}$. Si dividimos entre n en el numerador y denominador de lo de dentro de $\sec^2$, nos queda:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\frac{k\pi}{4n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\left(\frac{\frac{k}{n}\pi}{4}\right)$. Si consideramos la partición del intervalo $[0,1]$: $\left\{\frac{k}{n}/k=0,...,n\right\}$, lo que tenemos es la suma superior de la función $\sec^2\left(\frac{x\pi}{4}\right)$ en ese intervalo, ya que esa función es creciente en $[0,1]$

$\left(\left(\sec^2\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)\right)' = 2\sec^2\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)tg\left(\dfrac{x\pi}{4}\right)\left(\dfrac{\pi}{4}\right) > 0\right.$, ya que $\dfrac{x\pi}{4}$ está entre 0 y $\dfrac{\pi}{4}$ cuando x está entre 0 y 1, por lo que la tg es positiva), y la estamos evaluando en los extremos superiores de los subintervalos, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sec^2\left(\frac{\frac{k}{n}\pi}{4}\right) > \int_0^1 \sec^2\left(\frac{x\pi}{4}\right)dx = \left[tg\left(\frac{x\pi}{4}\right)\left(\frac{4}{\pi}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}.$$

2.- Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un polígono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen y de radio R. Si P es un punto cualquiera cuya distancia al origen es menor o igual que $2R$, probar que:

$$R \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} PA_k \le 3R$$

(Propuesto en La Gaceta de la R.S.M.E.- Problema 40)

Solución:

Coloquemos los ejes de coordenadas x, y de modo que A_n sea el punto $(R,0)$.

Entonces, si P dista lR del origen (con $0 \le l \le 2$) tenemos que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} PA_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(lR\cos(\alpha) - R\cos\left(2\pi k/n\right)\right)^2 + \left(lR\sin(\alpha) - R\sin\left(2\pi k/n\right)\right)^2} =$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(l^2+1\right)R^2 - 2lR^2\left(\cos\left(\alpha - 2\pi k/n\right)\right)}$$

y por tanto se obtiene fácilmente que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(l^2+1\right)R^2 - 2lR^2\left(\cos\left(\alpha - 2\pi k/n\right)\right)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(l^2+2l+1\right)R^2} \le 3R$$

Para demostrar la otra parte de la desigualdad probaremos primero que si tenemos un triángulo ABC con la base BC fijada y con AB+AC=cte, entonces, el triángulo tendrá área máxima si es isósceles, o dicho de otro modo, si tiene base BC fijada y un área dada, su perímetro será mínimo si es isósceles.

En este caso, como la única forma de que todos los triángulos sean isósceles es que P sea el centro del polígono (para el cual la suma de AB+AC=2R para cada uno de los triángulos PA_kA_{k+1}), si P es distinto del centro como el área de los triángulos es mayor o igual que el área del polígono y el lado A_kA_{k+1} también, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} PA_k \geq R$.

La demostración de que si un triángulo tiene un lado "a" fijado y la suma de los dos opuestos $b+c=k$ también fijada, entonces el área es máxima si $b=c=\frac{k}{2}$ se puede hacer fácilmente usando la fórmula de Heron:

$$S^2(x)=\frac{(a+k)}{2}.\frac{(-a+k)}{2}.\frac{(a+k-x)}{2}.\frac{(a+x)}{2} \quad y \quad S^2{}'(x)=C(-2x+k)=0 \Leftrightarrow x=\frac{k}{2}$$

y el punto es un máximo, lo cual se puede ver fácilmente volviendo a derivar la expresión y teniendo en cuenta que $C \in \Re^+$, $S^2{}''(x)=-2C<0$.

4. CONCLUSIONES

La preparación de alumnos universitarios para su participación en olimpiadas matemáticas internacionales no es una tarea sencilla, por la dificultad que entrañan los problemas que se plantean en este tipo de pruebas.

En este artículo se ha intentado facilitar esta tarea por medio de un manual de preparación resumido, con estrategias y ejemplos resueltos, que es un esquema de un manual más amplio realizado por los autores y todavía en construcción.

5. AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a Alicia Peña, Miguel Such, Elisa Lorenzo, José Luis Díaz Barrero (profesor de la Universitat Politécnica de Catalunya) y a Cristóbal Sánchez Rubio por sus propuestas de enunciados y soluciones para algunos de los problemas contenidos en este artículo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ENGEL, A. (1998). Problems Solving Strategies. Ed. Springer

[2] LARSO, L. C. (1997). Problems Solving through problems. Ed. Springer

[3] GRANE, J. (2001). Sessions de Preparació per a l'Olimpíada Matemàtica. Societat Catalana de Matemàtiques.

[4] GARCÍA MERAYO, F. (2001). Matemática Discreta. Ed. Paraninfo.

[5] ROSEN, K. H. (1999). Discrete Mathematics. Ed. Mc Graw-Hill.