

## **¿Es el coeficiente de Hurst un buen indicador de extinción de especies?**

Garmendia, Alfonso: [algarsal@upvnet.upv.es](mailto:algarsal@upvnet.upv.es) *Instituto Mediterráneo Agroforestal. Universidad Politécnica de Valencia . E.T.S.M.R.E. (U.P.V.), Av. Blasco Ibáñez 21, 46010 Valencia, Spain.*

Luis Garmendia: [lgarmend@fdi.ucm.es](mailto:lgarmend@fdi.ucm.es). *Departamento de Programación y Sistemas de Computación, Universidad Complutense de Madrid, Juan del Rosal 8, 28040, Madrid, Spain*

Adela Salvador: [ma09@caminos.upm.es](mailto:ma09@caminos.upm.es) *Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil. Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I. Caminos. Ciudad Universitaria s/n. 28040 Madrid. Spain*

### **RESUMEN**

La dimensión fractal de las fluctuaciones de los tamaños poblacionales se puede utilizar como un estimador del riesgo de extinción de una especie. El problema en la medición de esta dimensión fractal suele ser la longitud de la serie temporal, normalmente demasiado corta para que los resultados sean concluyentes. En este trabajo se ha analizado esta hipótesis con los datos obtenidos a partir de un modelo iterativo de competencia en diferentes regímenes de perturbación entre dos estrategias de germinación diferentes: germinación de todas las semillas vs. dormición de la mitad de las semillas. Esto permite disponer de series temporales largas, de mil años y de diferentes riesgos de extinción.

#### ***Palabras claves:***

Homocarpia, heterocarpia, dimensión fractal, extinción, series temporales, coeficiente de Hurst.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este artículo es continuación de otros dos anteriores, [17] y [18]. En “*Fractal Dimension of Birds Population Sizes Time Series*” [17] el coeficiente de Hurst se utilizó en series temporales de poblaciones de passeriformes para analizar su utilidad como indicador del peligro de extinción de especies. El principal problema que dicho estudio encontró es que las series temporales utilizadas tenían una longitud de unos veinte años, longitud que podría considerarse larga para series temporales de poblaciones reales, pero demasiado corta para utilizar el coeficiente de Hurst, por lo que se comprobó que para estudiar la capacidad del coeficiente de Hurst como indicador de la extinción de especies era necesario tener series temporales de mayor longitud. El segundo artículo, “*The importance of the intensity and frequency of perturbations on the germination delay*”, [18], estudia un modelo en el que dos poblaciones de plantas, con diferentes estrategias de reproducción, compiten por el territorio. En dicho modelo las plantas son perennes y la única causa de muerte son las perturbaciones. Existe una probabilidad de perturbación  $OP$  y la intensidad de la perturbación  $PI$ . Se trabaja con series temporales largas, de mil años, series temporales suficientemente largas como para obtener una medida fiable del coeficiente de Hurst. En este trabajo se analiza el coeficiente de Hurst de series temporales obtenidas mediante [18] para comprobar si realmente se lo puede utilizar como un estimador del riesgo de extinción de las especies.

El coeficiente de Hurst ha sido utilizado como medida de la dimensión fractal [1 – 5] para el estudio de muy distintos problemas en ecología [13-16] y de biología [6, 8 – 12]. Valores grandes del coeficiente de Hurst pueden interpretarse como peligro de extinción de especies [7, 19]. Hastings y Sugihara [19] sugieren que el incremento del rango al crecer el intervalo de tiempo indican que las fluctuaciones son grandes por lo que aumenta la probabilidad de extinción.

En este trabajo se pretende analizar si el coeficiente de Hurst es un buen indicador de la extinción de especies basándonos en:

1. Series temporales largas (1000 – 100 = 900 años)
2. Diferentes entornos definidos por distintas frecuencias de perturbación e intensidad de la perturbación.

Por lo tanto los objetivos de este trabajo son, por un lado analizar cómo varía el coeficiente de Hurst para las dos estrategias de germinación en diferentes regímenes de

frecuencias de perturbaciones y de intensidad de las mismas. En segundo lugar, comparar las series temporales previas a la extinción con las series sin extinción, para comprobar si las diferencias en el coeficiente de Hurst hubiesen permitido predecir que esa especie se iba a extinguir.

## **2. MATERIAL Y MÉTODOS**

### **2.1. Breve resumen del modelo iterativo utilizado**

El modelo utilizado para obtener las series temporales es el mismo que en [18] donde está la explicación completa del mismo. Es un modelo iterativo que se utilizó para comparar el efecto de la perturbación para dos distintas estrategias reproductivas, plantas homocárpicas y plantas heterocárpicas que compiten por un territorio, y para conocer la adaptabilidad de dichas estrategias a los diferentes regímenes de perturbación.

Todas las semillas de las plantas homocárpicas germinan al primer año, mientras que las plantas heterocárpicas forman un banco de semillas de las cuales sólo la mitad germinan en el año. Las semillas que germinan deben encontrar y ocupar un lugar vacío en su celda y así convertirse en una planta adulta, y en caso contrario, muere.

La única causa de muerte de una planta adulta es la producida por las perturbaciones, utilizando variables aleatorias con una cierta probabilidad,  $OP$  que indica la probabilidad de la frecuencia en que puede ocurrir una perturbación y  $PI$  que es la probabilidad de la intensidad de esa perturbación.

En [18] se concluyó que la heterocarpia es una estrategia competitiva en entornos perturbados, ya que las plantas heterocárpicas dominan para valores altos de intensidad de perturbación ( $PI$ ). En [18] se observó que la extinción de las plantas homocárpicas depende más de la intensidad de la perturbación ( $PI$ ) que de la frecuencia de la perturbación ( $OP$ ), por lo que en este trabajo nos centraremos en analizar el coeficiente de Hurst para diferentes valores de  $PI$ .

### **2.2. Programas**

En este estudio se han utilizado dos programas de ordenador, el primero (H) para obtener los coeficientes de Hurst, que ya se utilizó en [17], y el segundo (TS), el utilizado en [18], para obtener las largas series temporales de mil años. Para cada valor

de  $PI$  y cada valor de  $OP$ , desde 0,1 hasta 0,9, de 0,1 en 0,1, se han obtenido con el programa TS 10 series temporales de mil años de longitud y se han calculado, utilizando el programa H, sus coeficientes de Hurst.

En este trabajo el territorio consta de cien celdas distribuidas en una cuadrícula de (10 x 10) toroidal, es decir, sin bordes, y las otras variables independientes se han fijado para todas las series temporales, tomando como 3 el número de semillas que cada planta adulta produce cada año las cuales se dispersan de forma aleatoria entre la propia celda de la planta y las ocho celdas próximas, como 5 el número máximo de plantas adultas que puede haber en cada celda, y como 8 el valor inicial de semillas que se dispersan.

Se ha hecho correr el programa reiteradamente obteniendo en todos los casos series temporales de mil años para distintos valores de  $OP$  y  $PI$ . Estas series temporales se han introducido en el programa [17] y se han obtenido los coeficientes de Hurst por los distintos métodos. Para añadir claridad al trabajo entre todos los métodos para calcular el coeficiente de Hurst se ha seleccionado uno, el método del incremento del rango aunque el programa (H) utilizado ha calculado estos coeficientes por los otras técnicas, y se ha comprobado que aunque los valores obtenidos son diferentes en las distintas técnicas, sin embargo las tendencias observadas son las mismas.

El programa (H), que calcula los coeficientes de Hurst, está implementado en Pascal y puede descargarse gratuitamente desde:

<http://www.bi.upv.es/~algarsal/hurst/hurst.zip>.

El segundo programa (TS) [18] que simula la competición por el espacio de plantas con dos estrategias reproductivas distintas, homocárpicas and heterocárpicas, está implementado usando el lenguaje C++ y puede verse en:

<http://www.bi.upv.es/~algarsal/plantas/plantas.zip>.

Para medir el coeficiente de Hurst se han utilizado las series temporales del programa (TS) iterativo, con longitud de 1000 años, eliminando los 100 primeros años, para que la serie represente sólo la fase en que las poblaciones han alcanzado una cierta independencia de las condiciones iniciales, por lo que quedan series temporales de 900 años en los casos en que la especie no se ha extinguido y menos (hasta el año de extinción) en los casos en que la especie se extingue.

Para calcular la variabilidad de las mediciones, se ha corrido el programa 10 veces para cada valor de  $OP$  y  $PI$ , obteniendo la media y la desviación estándar de la medida del coeficiente de Hurst de las 10 series temporales resultantes.

### **2.3. Coeficiente de Hurst**

En [17] se define un objeto fractal como aquel cuya dimensión topológica no coincide con su dimensión de Hausdorff, por lo que se comenta que se entiende por dimensión de Hausdorff y por dimensión de similaridad. Se trabaja la dimensión de series temporales, ofreciendo distintos métodos para obtener el coeficiente de Hurst.

A la hora de comparar el coeficiente de Hurst de diferentes poblaciones, es importante que el método de medida sea el mismo en todas ellas, porque diferentes métodos pueden producir resultados diferentes. Aún así, los resultados de los diferentes métodos están relacionados de forma lineal [17, 7] por lo que las conclusiones finales no varían sea cual sea el método utilizado.

Para mostrar los resultados de este trabajo se ha utilizado el método del incremento del rango debido a que es el que más relación tiene con la base teórica por la que se utiliza el coeficiente de Hurst para estimar el riesgo de extinción [7]. El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie temporal en un intervalo de tiempo dado. En el método del incremento del rango se obtiene el coeficiente de Hurst,  $H$ , mediante la expresión:  $R(\Delta t) = c \Delta t^H$ , donde  $\Delta t$  es un intervalo de tiempo dado,  $R(\Delta t)$  denota la media de los valores del rango del proceso  $\{y(t)\}$ , en todos los intervalos de tiempo de duración  $\Delta t$ .

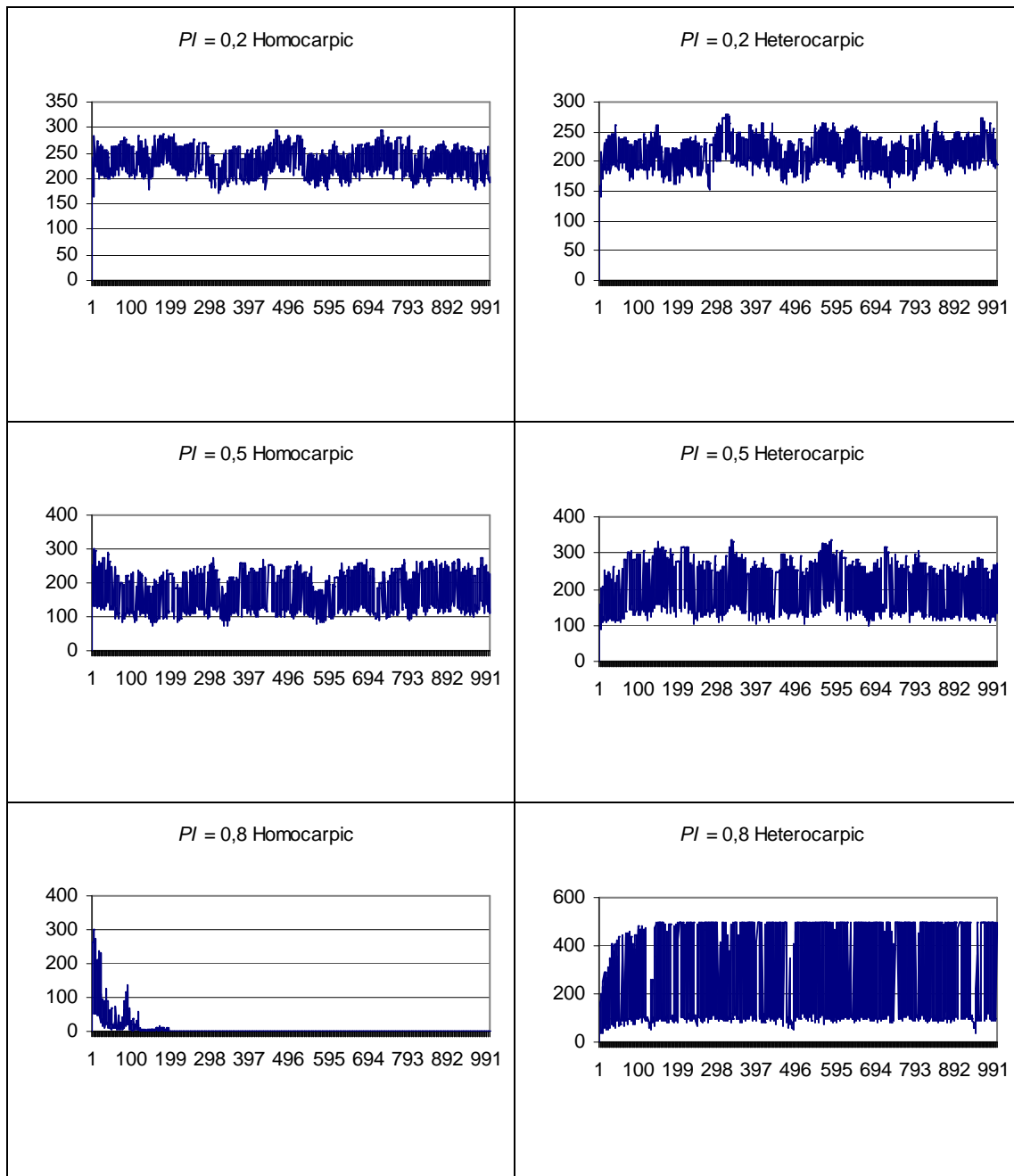
Con este método hay que fijar el incremento de tiempo,  $\Delta t$ , que se va a utilizar para las diferentes medidas. Este incremento de tiempo,  $\Delta t$ , se ha fijado en este trabajo en dos valores 10 y 100.

El coeficiente de Hurst medido por el método del incremento del rango proporciona una medida de las fluctuaciones de la población, lo que significa que una población con un coeficiente de Hurst alto tiene grandes fluctuaciones lo que puede ser un indicador del peligro de extinción [7]. Hastings y Sugihara [19] sugieren que si crece el rango, aumentan las fluctuaciones y se incrementa el peligro de extinción. Observan también que el coeficiente de Hurst calculado por este método en series temporales cortas puede ser mayor que el real.

Como en ocasiones se produce la extinción de una especie en las series temporales utilizadas en un periodo de 200 años, no es posible calcular el coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango usando  $\Delta t = 100$ , y por ello se analizan los resultados obtenidos utilizando el método del incremento del rango con  $\Delta t = 10$ .

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Análisis de las fluctuaciones del rango



**Figura 1:** Series temporales

En [18] se comprobó que los valores del rango estaban afectados por la intensidad de la perturbación, mientras que la frecuencia de la perturbación no influía.

El comportamiento de la amplitud de las oscilaciones de plantas homocárpicas y heterocárpicas en series temporales de mil años con  $OP = 0.5$  y para diferentes valores de  $PI$ , ( $PI = 0.2$ ,  $PI = 0.5$  y  $PI = 0.8$ ), se muestran en la figura 1.

Para  $PI = 0.2$  la amplitud de las oscilaciones es de unas 100 plantas. El número de plantas homocárpicas oscila entre 200 y 300 plantas, mientras que las plantas heterocárpicas oscilan aproximadamente entre 150 y 250 plantas.

Para  $PI = 0.5$  la amplitud de las oscilaciones es aproximadamente de unas 200 plantas. El número de plantas homocárpicas oscila entre 100 y 250 plantas y las heterocárpicas entre 100 y 300 plantas.

Para  $PI = 0.8$  las plantas homocárpicas se extinguen en unos 200 años, por lo que al no tener competencia el número de plantas heterocárpicas aumenta con oscilaciones de gran amplitud, de entre 100 y 500 plantas. El banco de semillas resulta ser una estrategia que favorece a las plantas en entornos de gran probabilidad de perturbación  $PI$ .

### **3.2. Coeficientes de Hurst medidos por el método del incremento del rango para distintos valores de $OP$ y de $PI$ .**

En la tabla 1 se recogen la media y la desviación típica de los coeficientes de Hurst de 10 series temporales, de plantas homocárpicas y heterocárpicas durante 900 (1 000 – 100) años de competición con diferentes intensidades de perturbación  $PI$ , ( $PI = 0.2$ ,  $PI = 0.5$  y  $PI = 0.8$ ) y distintas probabilidades de que ocurra dicha perturbación  $OP$ , ( $OP = 0.2$ ,  $OP = 0.5$  y  $OP = 0.8$ ).

Así por ejemplo, para  $PI = 0.2$  y  $OP = 0.2$  el coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango, para un  $\Delta t = 100$ , se ha obtenido que la media de 10 series temporales de novecientos años es de 0.27 con una desviación típica de 0.01.

Se observa que el coeficiente de Hurst es muy homogéneo en cada una de las diez series temporales usadas en cada caso, ya que las desviaciones típicas son muy pequeñas, todas ellas menores que 0.05. El comportamiento es el mismo para  $\Delta t = 10$  y para  $\Delta t = 100$ .

Para  $PI = 0.8$  y  $OP = 0.5$  las plantas homocárpicas se extinguen en unos 200 años y el coeficiente de Hurst de la serie temporal antes de la extinción, crece ( $H = 0.4$ ), y para  $OP = 0.8$  y  $PI = 0.8$  el coeficiente de Hurst es alto, ( $H = 0.52$ ), es decir, el coeficiente de Hurst crece al crecer  $PI$ .

**Plantas homocárpicas ( $\Delta t = 100$ )**

	<b>OP = 0.2</b>	<b>OP = 0.5</b>	<b>OP = 0.8</b>
$PI = 0.2$	$0.27 \pm 0.01$	$0.20 \pm 0.00$	$0.27 \pm 0.01$
$PI = 0.5$	$0.23 \pm 0.01$	$0.15 \pm 0.01$	$0.20 \pm 0.01$
$PI = 0.8$	$0.25 \pm 0.01$	Extinct	Extinct

**Plantas heterocárpicas ( $\Delta t = 100$ )**

	<b>OP = 0.2</b>	<b>OP = 0.5</b>	<b>OP = 0.8</b>
$PI = 0.2$	$0.29 \pm 0.01$	$0.21 \pm 0.00$	$0.28 \pm 0.01$
$PI = 0.5$	$0.23 \pm 0.01$	$0.15 \pm 0.01$	$0.19 \pm 0.01$
$PI = 0.8$	$0.23 \pm 0.01$	$0.08 \pm 0.01$	$0.22 \pm 0.01$

**Plantas homocárpicas ( $\Delta t = 10$ )**

	<b>OP = 0.2</b>	<b>OP = 0.5</b>	<b>OP = 0.8</b>
$PI = 0.2$	$0.52 \pm 0.016$	$0.366 \pm 0.03$	$0.456 \pm 0.02$
$PI = 0.5$	$0.488 \pm 0.02$	$0.328 \pm 0.04$	$0.448 \pm 0.02$
$PI = 0.8$	$0.506 \pm 0.02$	$0.40 \pm 0.03$ Extinct	$0.52 \pm 0.02$ Extinct

**Plantas heterocárpicas ( $\Delta t = 10$ )**

	<b>OP = 0.2</b>	<b>OP = 0.5</b>	<b>OP = 0.8</b>
$PI = 0.2$	$0.52 \pm 0.014$	$0.366 \pm 0.03$	$0.462 \pm 0.02$
$PI = 0.5$	$0.488 \pm 0.02$	$0.326 \pm 0.04$	$0.456 \pm 0.02$
$PI = 0.8$	$0.482 \pm 0.02$	$0.296 \pm 0.04$	$0.48 \pm 0.02$

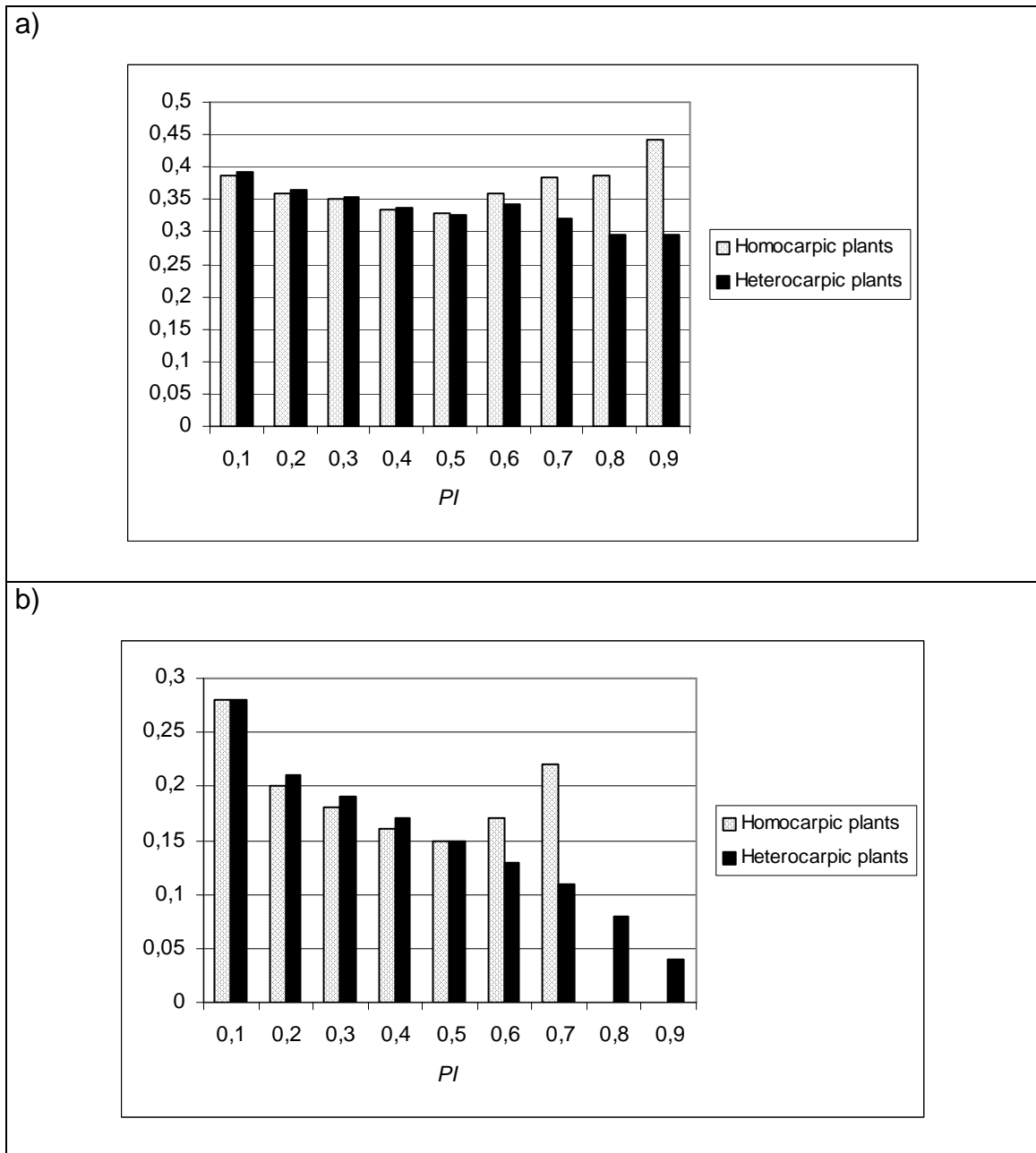
*Tabla 1: Coeficientes de Hurst medidos por el método del incremento del rango.*

Al analizar los valores de  $H$  ( $\Delta t = 10$ ) para las plantas homocárpicas se comprueba que los valores más altos se alcanzan con  $OP = 0.5$  y  $PI = 0.8$  ( $H = 0.40$ ) y para  $OP = 0.8$  y  $PI = 0.8$  ( $H = 0.52$ ), es decir, esto parecería indicar que  $H$  puede ser un buen indicador



del peligro de extinción. Sin embargo, al analizar la tabla se comprueba que esto no puede asegurarse ya que para  $OP = 0.2$  y  $PI = 0.2$  el valor de  $H = 0.52$  y entonces no existe peligro de extinción. Observación similar puede hacerse con un  $\Delta t = 100$ .

### 3.2. Estudio de H para IP variable.



**Figura 2:** Gráfico del comportamiento del coeficiente de Hurst. a) Medido con  $\Delta t = 10$  años. b) Medido con  $\Delta t = 100$  años. H para  $PI = 0.8$  y para  $PI = 0.9$  no puede medirse en las plantas homocárpicas porque se extinguen en unos 200 años.

En vista de los resultados obtenidos en la tabla 1, se presentan en la figura 2 los valores medios de 10 series temporales del coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango para  $\Delta t = 10$  y para  $\Delta t = 100$ , para  $OP = 0.5$  y distintos valores de  $PI$  desde 0.1 hasta 0.9, con intervalos de 0.1, o que permite observar los cambios que produce la intensidad de la perturbación  $PI$  (factor que aumenta el riesgo de extinción) en el coeficiente de Hurst.

Se observa que, en las plantas heterocárpicas, cuando  $PI$  aumenta,  $H$  disminuye ajustándose a una recta, pero tiene una forma muy distinta con las plantas homocárpicas, que primero disminuye, alcanzando un valor mínimo para  $PI = 0.5$ , para luego crecer.

Cuando las plantas homocárpicas presentan un peligro de extinción, el valor de  $H$  crece. Pero no se puede asegurar que sea un buen indicador ya que para una perturbación pequeña,  $PI = 0.1$ , se alcanzan valores muy altos del coeficiente de Hurst tanto para plantas homocárpicas como heterocárpicas, y entonces no existe peligro de extinción.

#### **4. CONCLUSIÓN**

Contrariamente a lo esperado, y a lo que se comenta en la bibliografía consultada, no puede afirmarse que el coeficiente de Hurst sea un buen indicador del peligro de extinción de una especie, y no porque las series temporales sean cortas, pues en este trabajo se han utilizado series temporales largas, de mil años. Se observa una fuerte relación con la intensidad de la perturbación, pues la dimensión fractal de las series temporales, y sus fluctuaciones decrecen ( $H$  disminuye) con la intensidad de la perturbación en las especies más resilientes, más adaptadas, las plantas heterocárpicas, pero en las plantas homocárpicas (más sensible a las perturbaciones) alcanza valores altos del coeficiente y de su dimensión fractal tanto para valores altos de la perturbación (cuando existe peligro de extinción) como para valores bajos en los que no existe riesgo de extinción.

#### **5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1]. B. B. MANDELBROT, *Fractals: Form, chance and dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.

- [2]. B. B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, 2nd. ed. W. H. Freeman & Co. San Francisco, 1982.
- [3]. A. GARMENDIA, A. SALVADOR, *Fractal: Punto fijo de aplicaciones contractivas*, VI JAEM, Badajoz (1993) 37-47.
- [4]. M. F. BARNESLEY, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. Boston, 1988.
- [5]. K. J. FALCONER, *The Geometry of fractal sets*, C.U.P. Cambridge, 1988.
- [6]. J. M. PACHECO, *Fractales y Oceanografía*, Epsilon 28 (1994) 99-108.
- [7]. G. SUGIHARA, R. M. MAY, *Applications of Fractal in Ecology*, Trends Ecol. Evol. 5, 3 (1990) 79-86.
- [8]. T. GISIGER, *Scale invariante in biology: coincidence or footprint of a universal mechanism?*, Biol. Rev. 76 (2001) 161-209.
- [9]. R. E. PLOTNICK, J. J. SEPKOSKI, *A multiplicative multifractal model for originations and extinctions*, Paleobiology 27 (2001) 126-139.
- [10]. J. HUISMAN, F. J. WEISSING, *Fundamental unpredictability in multispecies competition*, Am. Nat. 157 (2001) 488-494.
- [11]. J. J. LENNON, W. E. KUNIN, S. HARTLEY, *Fractal species distributions do not produce power-law species–area relationships*, Oikos 97 (2002) 378-386.
- [12]. L. BORDA-DE-ÁGUA, S. P. HUBBELL, M. MCALLISTER, *Species–area curves, diversity indices and species abundance distributions: a multifractal analysis*, Am. Nat., 159 (2002) 138-155.
- [13]. R. H. BRADBURY, R. E. REITSCHOLT, D. G. GREEN, *Fractals in ecology: methods and interpretation*, Marine Ecol. Prog. Ser. 14 (1984) 295-6.
- [14]. C. D. CUTLER, *A review of the theory and estimation of fractal dimension*, in: H. L. TONG, (Ed.), *Nonlinear Time Series and Chaos, Vol. I, Dimension Estimation and Models*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [15]. J. M. GARCÍA-RUÍZ, F. OTÁLORA, *El uso de la geometría fractal en las ciencias naturales*, Epsilon 28 (1994) 109-126.
- [16]. D. R. MORSE, J. H. LAWTON, M. M. DODSON, M. H. WILLIANSO, *Fractal dimension of vegetation and the distribution on arthropod body lengths*, Nature 314 (1985) 731-733.
- [17]. A. GARMENDIA, A. SALVADOR, *Fractal Dimension of Birds Population Sizes Time Series*, Mathematical Biosciences 206 (2007) 155-171.

- [18]. A. GARMENDIA, A. SALVADOR, The importance of the intensity and frequency of perturbations on the germination delay, *Mathematical Biosciences*. To be published.
- [19]. H. M. HASTINGS, G. SUGIHARA, *Fractals, a user's guide for the natural sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1993.