Los medios tecnológicos y la enseñanza de las Matemáticas

Molero Aparicio, María
E-mail: maria.molero@free.fr
Instituto Juan de la Cierva de Madrid
Salvador Alcaide, Adela
E-mail: ma09@caminos.upm.es
ETSI Caminos. UPM

RESUMEN

Esta ponencia es el resultado de un proyecto de investigación para analizar los diferentes medios tecnológicos que se utilizan en la Enseñanza Secundaria, como recurso didáctico, en el aprendizaje de las Matemáticas. A partir de este análisis y utilizando la metodología y los medios informáticos más adecuados se han elaborado actividades TIC, que se incluyen en esta ponencia.

***Palabras claves*:**
Actividades TIC; Software libre;

1. INTRODUCCIÓN

La revolución informática iniciada hace más de cincuenta años e intensificada en las últimas décadas mediante el progreso de las nuevas tecnologías e Internet en los distintos ámbitos de las actividades humanas, ha determinado profundos cambios estructurales y por lo tanto una modernización de los medios y herramientas con los que se planifican, desarrollan y evalúan las diferentes actividades, orientadas a la utilización de los medios tecnológicos en la Enseñanza Secundaria.

Para optimizar la utilización de **los medios tecnológicos como recurso didáctico**, es necesario realizar un análisis de las características del programa informático para facilitar la adquisición de los contenidos matemáticos y evitar que aprender matemáticas se convierta en saber utilizar una herramienta informática. Este análisis conlleva realizar un estudio general de **las ventajas y de los factores de riesgo** que supone utilizar los medios informáticos como recurso didáctico, lo que nos permite determinar las características del **diseño de las actividades**.

Las diferentes metodologías que permiten utilizar los medios informáticos en la enseñanza de las Matemáticas están condicionadas por, al menos, los siguientes elementos:

- La disponibilidad de los **programas informáticos** utilizados en las actividades TIC, es decir, si es o no software de libre acceso.
- Las **características del alumnado** que determinan la metodología más adecuada a sus intereses y capacidades.
- Los **recursos informáticos** disponibles en los centros educativos: aulas de informática, acceso a Internet, cañones, pizarras digitales, etc.

En este artículo se analiza el interés de los medios tecnológicos como recurso didáctico y se suministran, a modo de ejemplo, algunas actividades, cada una utilizando un programa informático diferente, para los distintos niveles de la Educación Secundaria Obligatoria.

2. LOS MEDIOS TECNOLÓGICOS. UN RECURSO DIDÁCTICO.

La introducción de las nuevas tecnologías en la educación está imponiendo una reforma del currículo tanto en contenidos como en lo que se refiere a los cambios metodológicos y didácticos que hay que realizar para encontrar el lugar apropiado de los medios informáticos en el proceso de aprendizaje.

Hay muchos **factores metodológicos favorables** a utilizar medios tecnológicos en la clase de matemáticas entre los que podemos citar:

- **Facilita la adquisición de conceptos**. Utilizar el ordenador como instrumento para adquirir conceptos o profundiza en ellos, permite detectar esquemas no suficientemente precisos y transformarlos en otros más adecuados.

Además el uso de distintos contextos no sólo constituye un elemento de motivación sino que además proporciona nuevos significados a los contenidos que se están trabajando.

- **Permite el tratamiento de la diversidad.** Ayuda a crear un ambiente de trabajo grato y estimulante que respeta las peculiaridades y el ritmo de aprendizaje del alumnado.
- **Fomenta el trabajo en grupo.** El trabajo en el ordenador se puede realizar en grupo, permitiendo a los alumnos y alumnas explicar a los demás sus ideas, estableciendo la comunicación y el enriquecimiento de pensamientos.
- **Valora positivamente el error**. El error no ha de equipararse a fracaso. Poner de manifiesto los errores de los alumnos y alumnas adquiere una dimensión positiva y es una condición necesaria para superarlos.
- **Realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos**. El carácter imprevisible y aleatorio que tiene el azar está sujeto a leyes que sólo son perceptibles cuando consideramos un número de datos muy elevado, por lo que el procesador es el instrumento adecuado para manipular dicha información. Las aplicaciones informáticas llevan incorporados programas para generar números aleatorios lo que nos permite simular procesos de azar.

- **La capacidad para representar gráficamente la información**. La facilidad que tienen ciertas aplicaciones informáticas para simultanear información gráfica y numérica es un apoyo indiscutible para el estudio de funciones o la estadística.
- **Es un elemento motivador.** Además, en la actualidad, es el medio habitual del alumno en su vida cotidiana.

Sin embargo existen **factores de riesgo** como son:

- El propio atractivo del ordenador.
- Puede provocar deficiencias en la adquisición de destrezas y habilidades.
- Hace perder el sentido de la dificultad.
- Puede fomentar la falta de sentido crítico

Cuando elegimos un **programa informático** para utilizarlo como recurso metodológico es necesario, entre otras, considerar las siguientes variables:

- El tiempo dedicado a su aprendizaje,
- La interactividad del programa,
- La fiabilidad de los cálculos que realiza
- La facilidad para representar gráficamente la información.

Además, cuando utilizamos los medios informáticos como recurso didáctico es importante **diseñar actividades** que nos permitan:

- Mantener sentido crítico ante la actividad que se está realizando
- No crear demasiadas situaciones sin periodos de reflexión sobre los procesos que está realizando la máquina.
- Tener extremo cuidado para evitar que la actividad que queremos realizar se limite a saber utilizar una herramienta informática.
- Un cuidadoso diseño de la actividad que nos permita evaluar la adquisición de los objetivos que pretendemos conseguir.

3. INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Los programas informáticos utilizados para realizar este análisis comparativo y que han sido los instrumentos de este proyecto de investigación son:

- **Programas de geometría dinámica** como *Geogebra*, *Cabri*,…
- **Hojas de cálculo** como la del *OpenOffice*, *Excel*, …
- **Sistemas de cálculo simbólico**: *Wiris, Derive*, …
- **Programas de presentación** como la del *OpenOffice, PowerPoint,* o los **Programas de pizarra digital** como *Notebook* de la pizarra *Smart Board*.
- Uso didáctico de **Internet:** Las *WebQuest*

3.1. Programas de geometría dinámica

Los programas de geometría dinámica nos permiten construir todas las figuras que realizamos con regla y compás de una forma rápida y precisa utilizando el ratón de nuestro ordenador. La construcción se lleva a cabo a partir de objetos iniciales entre los que se establecen relaciones de dependencia de tipo geométrico de manera que al mover los objetos iniciales se desplazan también los que dependen de estos pero permanece la construcción realizada, esta propiedad lo diferencia esencialmente de los clásicos programas de dibujo.

Otra característica importante de estos programas es que son extensibles, es decir, cualquier construcción que realizamos, podemos definirla como una nueva herramienta (macro en *Cabri*) y añadirla a las predefinidas por el sistema, esto nos permite realizar un tratamiento modular de los problemas y elaborar una biblioteca de construcciones básicas adaptada a nuestras necesidades. También permiten el tratamiento dinámico de las figuras lo que nos facilita visualizar lugares geométricos, verificar hipótesis y elaborar demostraciones. Pero quizás lo más importante de estos programas es que acercan las Matemáticas a la realidad transformando un teorema matemático en una realidad observable.

Entre programas de geometría dinámica como *Geogebra* y *Cabri* existen algunas diferencias en el sentido de que depende el tipo de actividad para que sea más adecuado un programa o el otro, por ejemplo para realizar actividades de geometría analítica es mejor *Geogebra*, pero en actividades de geometría sintética es mejor *Cabri*. Sin embargo *Geogebra* tiene una ventaja esencial frente a *Cabri* y es que es software libre.

3.2. Hojas de cálculo.

Una *Hoja de cálculo* es un programa que facilita el tratamiento de datos especialmente numéricos, que podemos modificar con fórmulas, organizados en forma de tabla. Las hojas de cálculo son capaces de procesar una cantidad muy elevada de datos a gran velocidad, además de crear gráficos a partir de ellos.

En el aprendizaje de las matemáticas podemos utilizarlas para simular experimentos, confeccionar modelos, resolver problemas, controlar variables, representar datos mediante gráficos, etc.

Los gráficos de la hoja de cálculo se actualizan automáticamente al modificar los datos que lo generaron, esto nos permite cambiar los datos de partida que sistematizan una situación y comprobar si se verifican las hipótesis que habíamos conjeturado.

Otros comandos de las hojas de cálculo como resolver, recalcular, perseguir objetivos… nos permiten utilizarlas para favorecer el aprendizaje basado en el descubrimiento determinando, por ejemplo, el valor que debe tener un parámetro para que se verifiquen unas determinadas condiciones.

La hoja de cálculo de *Open Office* y *Excel* son muy similares, la única ventaja es que el *Open Office* es software libre, pero en general cualquier actividad realizada con uno de ellos se puede realizar con el otro siguiendo las mismas instrucciones.

3.3. Sistemas de cálculo simbólico.

Una de las ventajas del tratamiento automático de la información es la capacidad que tienen las máquinas para procesar gran cantidad de datos a mucha velocidad y con un alto grado de fiabilidad. Sin embargo existen muchos problemas matemáticos cuya resolución es tediosa, no sólo por la cantidad de datos que manejan sino, debido a la dificultad para manipular expresiones algebraicas.

Desde la aparición del lenguaje LISP, han surgido numerosos sistemas para poder manipular automáticamente algoritmos algebraicos, es decir, trabajar expresiones con símbolos sin que estos tengan ningún valor determinado. Estos primeros Sistemas de Cálculo Simbólico, cuya primera función era resolver problemas concretos, fueron ampliando sus capacidades, poco a poco, a la vez que mejoraban sus interfaces con el usuario, en la misma trayectoria que los sistemas operativos y todos los programas de aplicación.

En la actualidad un Sistema de Cálculo Simbólico como *Wiris* es muy fácil de utilizar y sin ser software libre se puede utilizar a través de Internet, y aunque *Derive* es más potente *Wiris* es el único adecuado en los primeros niveles de la ESO.

3.4. Programas de presentación.

El programa de presentación del *OpenOffice* y el *PowerPoint* son muy similares el primero tiene la ventaja de ser software libre.

Una presentación con estos programas se puede hacer más dinámica introduciendo vínculos con un programa de geometría dinámica o con una hoja de cálculo pero siempre es el profesor o la profesora quien dirige la actividad y es más difícil conseguir hacerla interactiva, sin embargo estas actividades son las que requieren menos recursos, no es necesario utilizar un aula de informática, es suficiente con un cañón, y además, a veces, las características del alumnado las convierten en las más adecuadas para realizar en clase de Matemáticas.

Una mejora de estas presentaciones es utilizar una pizarra digital o con tablets PC, con el programa adecuado, pero hasta ahora no son recursos generalizados en los centros de Enseñanza Secundaria.

3. 5. Las actividades WebQuest.

WebQuest es un modelo de aprendizaje para favorecer el uso educativo de Internet, está basado en el aprendizaje cooperativo y en procesos de investigación para aprender.

Una actividad WebQuest está enfocada a la investigación, la información usada por el alumnado es, en su mayor parte, descargada de Internet. Básicamente es una exploración dirigida, que termina con la producción de una página Web, donde se publica el resultado de una investigación.

Las WebQuests han sido ideadas para que los estudiantes hagan buen uso del tiempo, se enfoquen en utilizar información más que en buscarla, y en apoyar el desarrollo de su pensamiento en los niveles de análisis, síntesis y evaluación.

El problema de estas actividades es que las direcciones de Internet que hay que proporcionar al alumnado pueden variar en un corto periodo de tiempo, además, con los recursos actuales, no son adecuadas para realizarlas en el aula por el tiempo que exige realizarlas y el continuo uso del aula de informática, son más bien un modelo de actividad extraescolar.

4. ACTIVIDADES TICS

4.1 Wiris una calculadora en la red.

WIRIS es un conjunto de productos informáticos de acceso gratuito en diversos portales educativos europeos, a través de una página web. En esta actividad se va a utilizar su herramienta principal el WIRIS CAS, que es un sistema de cálculo simbólico, para realizar operaciones con potencias y estudiar sus propiedades.

Producto de potencias de la misma base.

Activa la pestaña **Operaciones.** Utiliza la herramienta **Potencia**, para escribir el exponente y * para el producto.

- Introduce la expresión: $3^2 * 3^4 * 3^5$ pulsa la tecla, para calcular y factoriza el resultado:

$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \rightarrow 177147$

factorizar(177147) $\rightarrow 3^{11}$

Un producto de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y con exponente la suma de los exponentes de los factores.

Comprueba esta propiedad con otros productos:

a) $5^3 * 5^4 * 5 * 5^2$ b) $2^4 * 2^3 * 2^0 * 2^6$ c) $(-3)^3 * (-3)^2 * (-3)^5$ d) $(-3)^3 * (-3)^2 * (-3)^4$

Investiga de qué depende el signo del resultado de un producto de potencias cuando la base es un número negativo.

Cociente de potencias de la misma base.

Utiliza la herramienta **Fracción** para introducir un cociente.

- Calcula y expresa como una potencia $\dfrac{2^3 * 2^2 * 2^4}{2^5 * 2}$

$\dfrac{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4}{2^5 \cdot 2} \rightarrow 8$

factorizar(8) $\rightarrow 2^3$

Un cociente de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y con exponente la diferencia entre el exponente del numerador y el del denominador.

Comprueba esta propiedad con otros cocientes de potencias:

a) $\dfrac{3^8}{3^2}$ b) $\dfrac{5^4 \cdot 5}{5^3}$ c) $\dfrac{(-2)^5}{(-2)^3}$ d) $\dfrac{(-2)^5}{(-2)^2}$

Investiga de qué depende el signo del resultado de un cociente de potencias cuando la base es un número negativo.

Potencia de una potencia.

Con la herramienta **Potencia** y el uso adecuado de los paréntesis

- Calcula $(2^3)^5$ y expresa el resultado como una potencia de 2.

$(2^3)^5 \rightarrow 32768$

$\text{factorizar}(32768) \rightarrow 2^{15}$

Una potencia elevada a un exponente se puede expresar como una potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

Comprueba esta propiedad realizando las siguientes operaciones:

a) $(3^4)^2$ b) $(5^2)^3$ c) $((-2)^3)^4$ d) $((-2)^3)^5$

Investiga de qué depende el signo del resultado de una potencia elavada a una potencia cuando la base es un número negativo.

Potencias de exponente entero.

- Calcula las siguientes potencias de exponente -1: 2^{-1}; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$

$2^{-1} \rightarrow \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \rightarrow 2$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} \rightarrow \frac{7}{3}$

Una potencia de exponente negativo es igual a otra potencia, cuya base es la inversa de la base dada, y su exponente el opuesto del primero.

Comprueba con Wiris las siguientes identidades:

a) $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4$ c) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{2^3}$ d) $\left(\frac{-7}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{7}\right)^4$

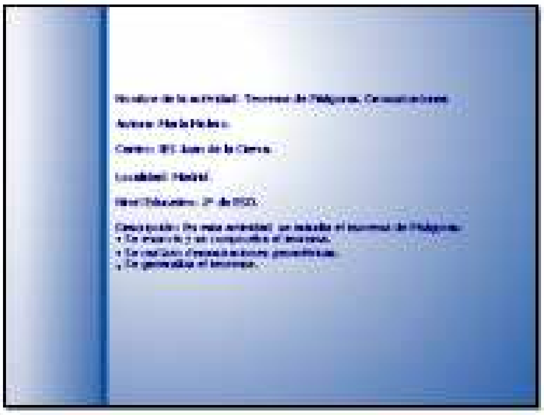
Investiga de qué depende el signo del resultado de una potencia con exponente negativo cuando la base es un número negativo.

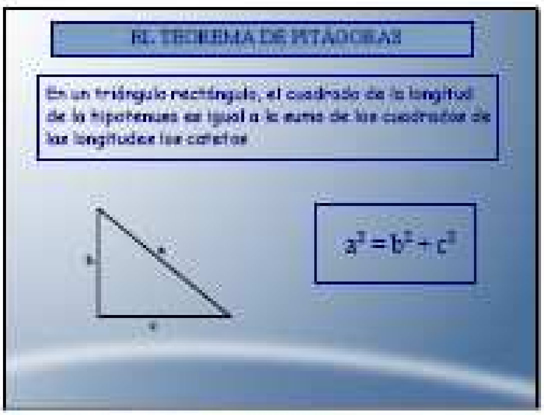
ACTIVIDADES

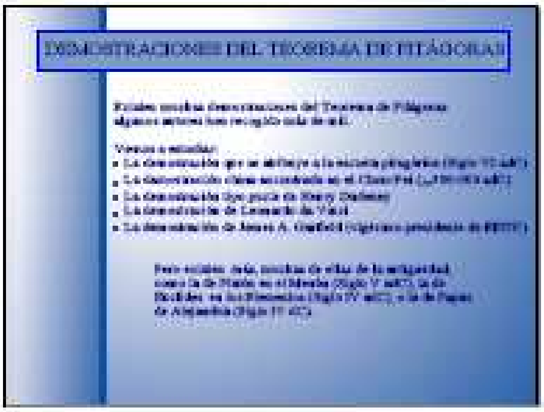
Calcula las siguientes potencias y expresa el resultado, lo más simplificado posible, como producto o cociente de potencias de números primos con exponentes positivos. Comprueba los resultados con Wiris.

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^{-2}}{2^{-5} \cdot 3^{-4}}$ b) $\dfrac{(-2)^3 \cdot 5^2}{5^4 \cdot (-2)}$ c) $\left(\left(\dfrac{-7}{3}\right)^3\right)^{-2}$ d) $\left(\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{-1}\right)^{-3}$

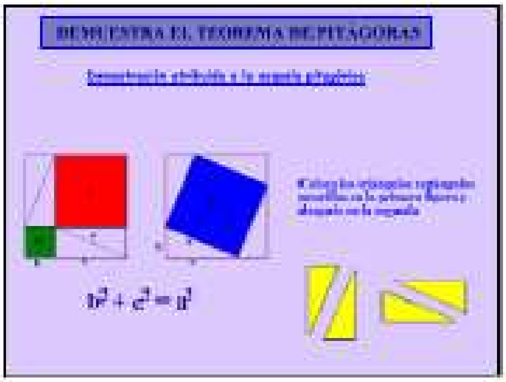
4.2 El Teorema de Pitágoras

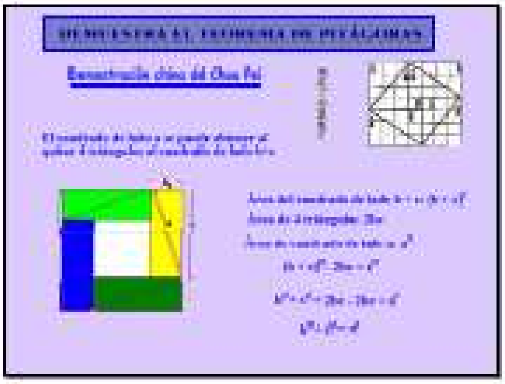







DEMUESTRA EL TEOREMA DE PITÁGORAS


DEMUESTRA EL TEOREMA DE PITÁGORAS


DEMUESTRA EL TEOREMA DE PITÁGORAS


DEMUESTRA EL TEOREMA DE PITÁGORAS


DEMUESTRA EL TEOREMA DE PITÁGORAS


GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

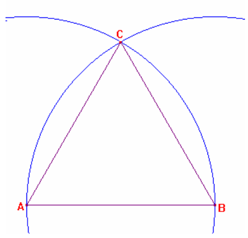
4.3 Sucesiones con Cabri: Triángulo de Sierpinski

En esta actividad se utiliza el programa *Cabri* para dibujar una sucesión de figuras y estudiar las sucesiones numéricas que se pueden estudiar a partir de ellas, como son: el número de triángulos, la longitud del lado de uno de estos triángulos, la longitud de la figura, el área de la figura y el número de vértices.

Para realizar esta práctica primero necesitamos crear una macro que dibuje un triángulo equilátero a partir de dos puntos.

Macro triángulo equilátero.

Dados dos puntos primero hay que dibujar el triángulo equilátero *en* el que estos puntos sean vértices.



- Determina dos puntos que llamarás *A* y *B*, una vez hecha la construcción utilizando la herramienta **Circunferencia** define el tercer punto como **punto de intersección** y denomínalo *C*.
- Con la herramienta **Triángulo** determina el triángulo que pasa por estos tres puntos.
- **Oculta** las líneas accesorias y asegúrate de que la construcción está bien hecha desplazando con el puntero uno de los vértices iniciales.
- **Guarda** la figura realizada como *triequi.fig.*

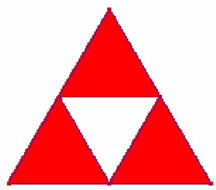
Sobre esta figura en el área de trabajo se construye la macro.

- Activa la herramienta **Macro** y define:
  Objeto inicial: los dos puntos iniciales.
  Objeto final: el polígono triángulo.
  Definir macro: *triequi*. Puedes modificar el icono haciendo clic o doble clic en la cuadrícula que aparece. **Graba** la macro como *triequi.mac*.

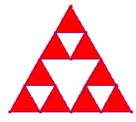
La macro así creada forma parte del cuadro de herramientas macro, actívala y haz varias pruebas para comprobar que funciona correctamente.

Macro Sierpinski

- A partir del triángulo equilátero dibujado con la macro anterior, se determina el **punto medio** de cada lado dibujando, a partir de ellos, con la macro triequi, los tres triángulos equiláteros que comparten un vértice con el triángulo original. Se observa que es importante el orden de definir los puntos para obtener el triángulo deseado y hay que establecer una secuencia fija para dibujarlos.
- Utiliza **rellenar** para colorear los tres triángulos que has dibujado.
- Define una nueva **macro** cuyo **objeto inicial** sea el triángulo grande y los **objetos finales** los tres triángulos coloreados. Como hay triángulos superpuestos, según la parte de la pantalla que se señale, el programa puede preguntar cuál es el polígono que se quiere utilizar por lo que hay que recordar que el orden en que aparecen escritos coincide con el de su construcción de forma que la primera figura que aparece escrita es la que primero ha sido construida. Define la macro como *sierpinski* y guárdala como *sierpinski.mac*.



Triángulo de Sierpinski

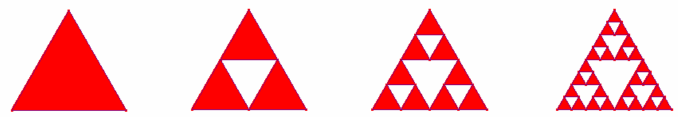


- Dibuja, de nuevo, un triángulo equilátero con la macro triequi. Al activar la macro sierpinski aparecen los tres triángulos coloreados. Si se repite el proceso sobre cada uno de los triángulos coloreados aparece una nueva figura

- Si activas de nuevo la macro sierpinski sobre cada uno de los triángulos coloreados de la figura anterior se obtiene el cuarto término de la sucesión de figuras que estamos construyendo. Guárdala como sierpinski4.fig.

De este modo se puede continuar el proceso, en teoría, indefinidamente.

Observa que el número de triángulos crece. ¿Cómo varía la longitud de un lado?, ¿Y la longitud de la figura, crece o disminuye? ¿Qué ocurre con el área? ¿Y con el número de vértices?



- A partir de las figuras construidas, considerando solamente la parte coloreada, completa el cuadro adjunto:

Etapa	1	2	3	4	5	
Número de triángulos	1	3	9			
Longitud del un lado	L	L/2	L/4			
Longitud de la figura	3L	9L/2				
Área de la figura	A	3A/4				
Número de vértices	3	3+3	3+3+9			

- Considera las cinco sucesiones numéricas del cuadro anterior:

Número de triángulos: 1, 3, 9, …
Longitud de un lado: L, L/2, L/4, …
Longitud de la figura: 3L, 9L/2, …
Área de la figura: A, 3A/4, ….
Número de vértices: 3, 6, 15, …

- Clasifícalas como progresiones geométricas, aritméticas o sucesiones recurrentes y determina, en cada caso, el término general o la ley de formación.

ACTIVIDADES:

En la construcción del triángulo de Sierpinski se parte de un triángulo de área A, en cada etapa el área de la figura es cada vez más pequeña, y se puede hacer tan próxima cero como se quiera. También se observa que toda la figura está acotada por el triángulo inicial mientras que su longitud es cada vez mayor y puede ser tan grande como se desee.

Esto hace suponer que la dimensión del triángulo de Sierpinski no es ni uno ni dos, sino un número d tal que 1< d< 2. Esta figura pertenece a unos objetos matemáticos denominados fractales que han supuesto en matemáticas una revisión del concepto de dimensión.

Hoja de respuestas.

Nombre: ……………………………………………………….. **Curso:** ………

1. Considera la sucesión formada por el número de triángulos: 1, 3, 9, …

¿Qué tipo de sucesión es? ……………………………………………………………….

Calcula el cuarto y el quinto término:………………………………………………….

Calcula el término general: …………………………………………………………….

2. Considera la sucesión formada por la longitud del lado: L, L/2, L/4, …

¿Qué tipo de sucesión es? ……………………………………………………………….

Calcula el cuarto y el quinto término:………………………………………………….

Calcula el término general: …………………………………………………………….

3. Considera la sucesión formada por la longitud de la figura: 3L, 9L/2, ...

¿Qué tipo de sucesión es? ……………………………………………………………….

Calcula el tercero, el cuarto y el quinto término:……………………………………..

Calcula el término general: …………………………………………………………….

4. Considera la sucesión formada por el área de la figura: A, 3A/4, …

¿Qué tipo de sucesión es? ……………………………………………………………….

Calcula el tercero, el cuarto y el quinto término:……………………………………..

Calcula el término general: …………………………………………………………….

5. Considera la sucesión formada por el número de número de vértices: 3, 6, …
¿Qué tipo de sucesión es? ………………………………………………………………

Calcula el cuarto y el quinto término:…………………………………………………

Calcula el término general: ……………………………………………………………

6. Valora de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto al programa informático. (1 muy fácil y 4 muy dificil)

1 2 3 4

7. Puntúa de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto a los contenidos matemáticos. (1 muy fácil y 4 muy dificil)

1 2 3 4

8. Valora de 1 a 4 tu interés al realizar esta actividad (1 nada interesante y 4 muy interesante).

1 2 3 4

9. Puedes hacer cualquier observación o sugerencia:

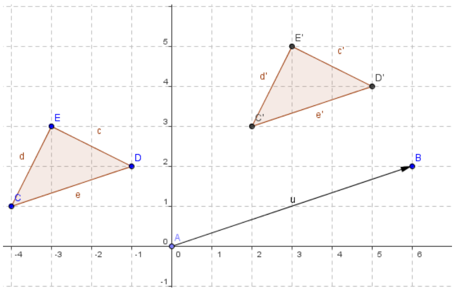
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

4.4 Movimientos en el plano.

En esta actividad se va a utilizar el programa **Geogebra** para estudiar los movimientos en el plano, también llamados isometrías, como son las traslaciones, los giros o las simetrías, que son transformaciones en el plano que mantienen las distancias y los ángulos y por lo tanto las áreas de las figuras

Traslación.

- En un archivo de Geogebra **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B*. y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con **Nuevo Punto** *C* (-4, 1), *D* (-1, 2) y *E* (-3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.



Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.

- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.

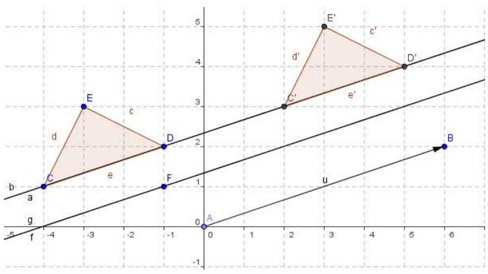
¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?
Comprueba en la ventana algebraica que:

- ➢ Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u*.
- ➢ La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.

¿Qué propiedad tiene la recta *a* para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta *a* es paralela al vector *u*.

- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.

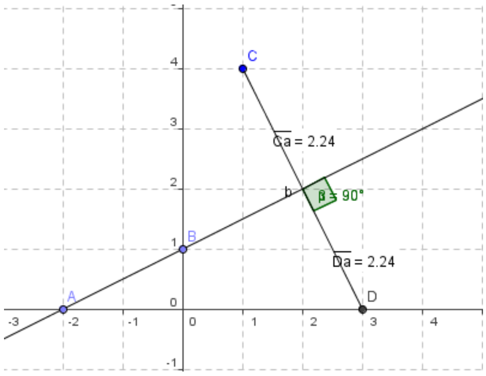


- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.

Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

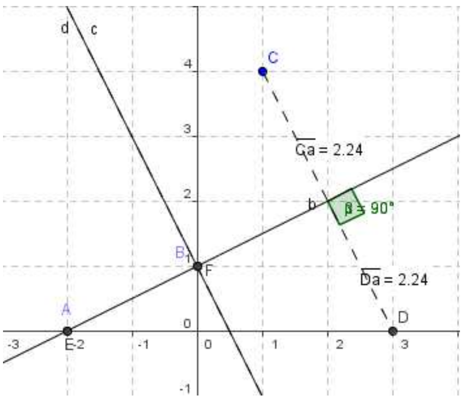
Simetría axial.

- Abre una nueva ventana de Geogebra y visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define *A* (-2, 0) y *B* (0, 1) y con **Recta que pasa por 2 puntos**, dibuja la recta *a* que pasa por *A* y *B*, que será el eje de simetría.
- Determina el punto *C* (1, 4) y con la herramienta **Refleja objeto en recta**, su simétrico con respecto a la recta *a*, que es el punto *D* (3, 0).
- Con la herramienta **Distancia** comprueba que la distancia del punto *C* a la recta *a* coincide con la del punto *D* a dicha recta.
- Dibuja con **Segmento entre dos puntos** el que une los puntos *C* y *D*.
- Con la herramienta **Angulo** calcula la medida del ángulo que forman el segmento *CD* y la recta *a* para verificar que son perpendiculares.



Las siguientes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan la simetría axial:
1ª: Las distancias de un punto y de su simétrico al eje de simetría coinciden.
2ª: El segmento que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.

- Con la herramienta **Refleja objeto en recta** halla el simétrico de los puntos *A* y *B* con respecto al eje *a* y comprueba que *A* y su simétrico de *E* coinciden lo mismo que *B* y *F*. Prueba con otros puntos de la recta *a* para verificar que todos los puntos del eje resultan invariantes mediante una simetría axial con respecto a este eje. Verifica, también, que el eje, la recta *a*, y su simétrica la recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar la recta *c*, perpendicular al eje *a* que pasa por el punto *B*.
- Calcula la recta simétrica de la recta *c* con respecto al eje *a*, se obtiene la recta *d* que coincide con *c*.
- Mejora el aspecto de la construcción dibujando el segmento CD y las rectas *c* y *d* con trazo discontinuo. Haz clic con el botón derecho del ratón sobre el elemento o su ecuación y en **Propiedades**, **Estilo**, elige un trazo discontinuo.



¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

ACTIVIDADES:

1. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45º.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.
   b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.
2. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.
   b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.
   c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Hoja de respuestas.

Nombre: …………………………………………………….. **Curso:** ………

1. La traslación según el vector u (3, -1) transforma el punto P(-2, 1) en el punto P'. ¿Qué coordenadas tiene el punto P'? (elige la respuesta correcta)

a) P' (5, -2) b) P' (1, 0) c) P' (5, 0) d) P' (1, -2)

2. ¿Qué rectas deja invariantes una traslación según un vector u ≠ (0,0)? (elige la respuesta correcta)

a) Las rectas perpendiculares a la dirección del vector que define la traslación.
b).Las rectas paralelas a la dirección del vector que define la traslación

3.¿Cuáles son las coordenadas del punto P' simétrico del punto P(1, 2) respecto al eje de abscisas? (elige la respuesta correcta)

a) P' (-1, 2) b) P' (-1, -2) c) P' (1, -2) d) P' (1, 2).

4.¿Cuáles son las coordenadas del punto P' simétrico del punto P(1, 2) respecto al eje de ordenadas? (elige la respuesta correcta)

a) P' (-1, 2) b) P' (-1, -2) c) P' (1, -2) d) P' (1, 2).

5. ¿Qué puntos deja invariantes una simetría axial?

a) Los puntos de las rectas perpendiculares al eje de simetría.
b) Los puntos del eje de simetría.
c) Los puntos de las rectas paralelas al eje de simetría.

6. ¿Qué rectas deja invariantes una simetría axial?

a) Las rectas perpendiculares al eje de simetría.
b) El eje de simetría y las rectas perpendiculares al eje de simetría
c) El eje de simetría y las rectas paralelas al eje de simetría

7. Valora de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto al programa informático. (1 muy fácil y 4 muy difícil)

1 2 3 4

8. Puntúa de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto a los contenidos matemáticos. (1 muy fácil y 4 muy difícil)

1 2 3 4

9. Valora de 1 a 4 tu interés al realizar esta actividad (1 nada interesante y 4 muy interesante).

1 2 3 4

10. Puedes hacer cualquier observación o sugerencia:

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

4.5 Lanzamiento de un dado.

En una *hoja de cálculo* la función ALEATORIO() permite obtener números aleatorios mayores o iguales que cero y menores que uno Se va a utilizar esta función para simular el lanzamiento de un dado 100, 500, 1000, 2000 veces, y calcular la frecuencia relativa de cada resultado, para comprobar que se verifica la ley de los grandes números, es decir, que al aumentar el número de lanzamientos las frecuencias relativas tienden a estabilizarse.

- Escribe en **A6** el texto *Resultado de la tirada* y en **D6** la fórmula **=TRUNCAR(ALEATORIO()*6+1).** Observa que al presionar la tecla **F9** aparecen en D6 valores enteros entre 1 y 6, que son los resultados de simular el lanzamiento del dado.
- En el rango **A8:A13**, escribe la palabra *Número*, en **B8** el número 1 y **rellena en serie** hasta :B13.
- Para poder iniciar las tiradas, a partir de 0, escribe en la celda **A3**, el texto *Finalizar* y en B3 *NO.*
- En el rango **D8:D13** introduce las siguientes fórmulas[1]
  - En **D8** **=SI(B3="NO";SI(D6=1;D8+1;D8);0)**
  - En **D9** **=SI(B3="NO";SI(D6=2;D8+1;D8);0)**.
  - En **D10** **=SI(B3="NO";SI(D6=3;D8+1;D8);0)**
  - En **D11** **=SI(B3="NO";SI(D6=4;D8+1;D8);0)**.
  - En **D12** **=SI(B3="NO";SI(D6=5;D8+1;D8);0)**
  - En **D13** **=SI(B3="NO";SI(D6=6;D8+1;D8);0)**

Estas fórmulas permiten contar los resultados obtenidos en cada tirada que aparecen en **D6** mientras que en la celda B3 aparezca el texto *NO*.

- Para contabilizar el número de lanzamientos, escribe en **A16** *Número de tiradas* y en **D16** la fórmula **=SUMA(D8:D16).**
- Presiona sucesivamente la tecla **F9** hasta obtener 50 tiradas y pon título a la hoja.
- Observa que si en la celda B3 introduces un número o un texto distinto de *NO*, los contadores vuelven a 0 y puedes comenzar de nuevo a tirar el dado.

LANZAMIENTO DE UN DADO

Finalizar	NO		
Resultado de la tirada			1
Número	1		7
Número	2		6
Número	3		13
Número	4		9
Número	5		7
Número	6		8
Número de tiradas			50

LANZAMIENTO DE UN DADO

Finalizar	SI		
Resultado de la tirada			1
Número	1		0
Número	2		0
Número	3		0
Número	4		0
Número	5		0
Número	6		0
Número de tiradas			0

[1] En las siguientes fórmulas hay una referencia circular, para que el programa la admita hay que ir a Opciones del menú Herramientas y en la pestaña Calcular elegir en Iteraciones: Nº máximo de iteraciones 1.

Frecuencias absolutas.

En la misma hoja de cálculo, en el rango **H8:K16**, se van a contabilizar los resultados obtenidos al simular el lanzamiento del dado 100, 500, 1000 y 2000 veces.

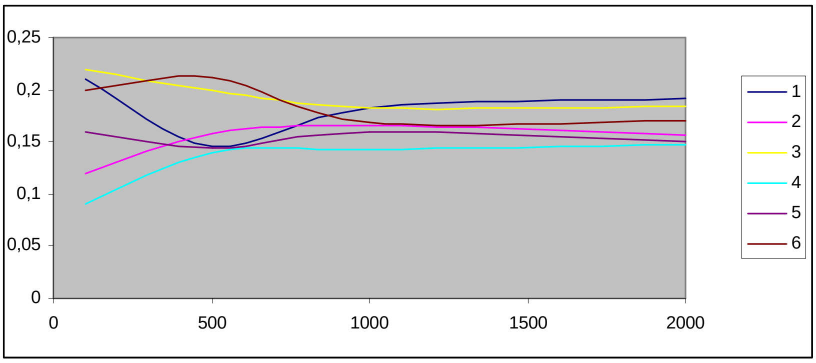
- Copia el rango **A8:B16** en **F8:G16**; en **H7**, escribe 100, en **I7**, 500, en **J7**, 1000 y en **K7** 2000; en **I6** el texto *número de tiradas* y en **H5** el título de la tabla: *FRECUENCIAS ABSOLUTAS*.
- Introduce *NO* en la celda **B3** y simula 100 lanzamientos del dado, presionando la tecla **F9,** cuando en la celda **D16**, que contabiliza el número de tiradas, se tenga 100, copia el rango **D8:D16** en **H8:H16** y pégalo con **Pegado especial** para que sólo se copien los **valores** y no las fórmulas.
- Continua presionando la tecla **F9** hasta realizar 500, 1000 y 2000 tiradas y copia el rango **D8:D16** en **I8:I16**, **J8:J16** y **K8:K16,** respectivamente**,** pegándolo con **Pegado especial** para que sólo se copien los **valores** y no las fórmulas.

		FRECUENCIAS ABSOLUTAS			
			Número de tiradas		
		100	500	1000	2000
Número	1	21	73	182	383
Número	2	12	79	166	313
Número	3	22	100	182	369
Número	4	9	70	143	295
Número	5	16	72	159	300
Número	6	20	106	168	340
Nº de tiradas		100	500	1000	2000

Frecuencias relativas.

- Copia el rango **F8:G13** en **M8:N13** y **H6:K7** en **O6:R7** y en **O5** introduce el título de la tabla: *FRECUENCIAS RELATIVAS*,
- Introduce en **O8** la fórmula **=H8/H$16** y cópiala en el rango **O8:R13,** copia también las fórmulas de **H16:K16** en **O16:R16**, escribe *suma* en la celda **M16**, para obtener la siguiente tabla.
- Selecciona el rango **N7:R16** y utilizando el **asistente de gráficos** busca el tipo de gráfico adecuado para representar la siguiente gráfica.

		FRECUENCIAS RELATIVAS			
			Número de tiradas		
		100	500	1000	2000
Número	1	0,21	0,146	0,182	0,1915
Número	2	0,12	0,158	0,166	0,1565
Número	3	0,22	0,2	0,182	0,1845
Número	4	0,09	0,14	0,143	0,1475
Número	5	0,16	0,144	0,159	0,15
Número	6	0,2	0,212	0,168	0,17
Suma		1	1	1	1



Observa que cuando aumenta el número de lanzamientos las frecuencias relativas tienden a estabilizarse y se aproximan al valor de la probabilidad.

Hoja de respuestas.

Nombre: ………………………………………………….. **Curso:** ………

1. Al realizar 1000 tiradas de un dado se ha obtenido 182 veces el número 1. (Elige la respuesta correcta)

a) La frecuencia relativa de 1 es 182
b) La frecuencia absoluta de 1 es 182
c) La probabilidad de 1 es 0,182.

2. Cuál es la frecuencia relativa de obtener 6 si en 2000 tiradas se ha obtenido 340 veces el valor 6? (Elige la respuesta correcta)

a) 170 b) 0,340 c) 0,170

3. La ley de los grandes números dice: (Elige la respuesta correcta)

a) Al aumentar el número de lanzamientos aumentan las frecuencias relativas
b) Al aumentar el número de lanzamientos disminuyen las frecuencias relativas
c) Al aumentar el número de lanzamientos se estabilizan las frecuencias relativas y se aproximan a la probabilidad.

4. ¿Qué se obtiene con la fórmula ALEATORIO()*6? (Elige la respuesta correcta)

a) Un número aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 1
b) Un número aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 6
c) Un número entero aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 6

5. ¿Y con la fórmula TRUNCAR(ALEATORIO()*6+1)? (Elige la respuesta correcta)

a) Un número aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 6
b) Un número entero aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 6
c) Un número entero aleatorio mayor o igual que 1 y menor o igual que 6

6. Valora de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto al programa informático. (1 muy fácil y 4 muy dificil)

1 2 3 4

7. Puntúa de 1 a 4 la dificultad que has tenido para realizar esta actividad con respecto a los contenidos matemáticos. (1 muy fácil y 4 muy dificil)

1 2 3 4

8. Valora de 1 a 4 tu interés al realizar esta actividad (1 nada interesante y 4 muy interesante).

1 2 3 4

9. Puedes hacer cualquier observación o sugerencia:

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

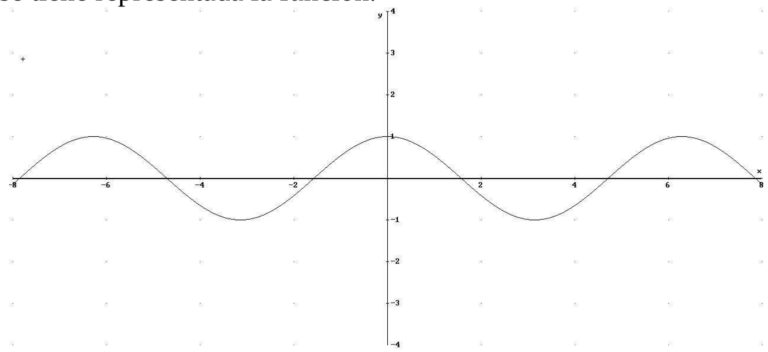
4.6 Funciones trigonométricas.

La facilidad que tiene *Derive* para representar gráficamente funciones permite relacionar la gráfica de una función y su expresión analítica al realizar una traslación según un vector paralelo a uno de los ejes de coordenadas o una homotecia.

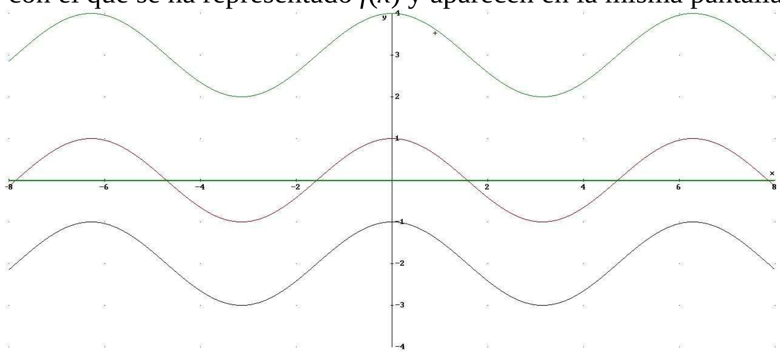
En la ventana de **Algebra**, en la parte inferior del área de trabajo aparece la línea para editar expresiones. Haciendo *clic* con el ratón sobre ella y escribiendo la expresión **f(x):=cos(x)**, queda definida la función *f*(*x*), como *cos*(*x*), al pulsar **Intro** la ecuación aparece en el área de trabajo:

 # 1: *f*(*x*):=*cos*(*x*).

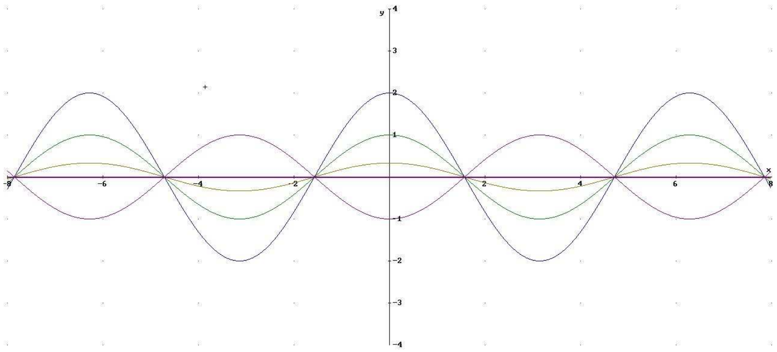
- Para representar esta función se presiona el icono  que pasa a la **Ventana-2D**, y con **Representar Expresión**, que aparece en esta ventana con el mismo icono anterior, se tiene representada la función.



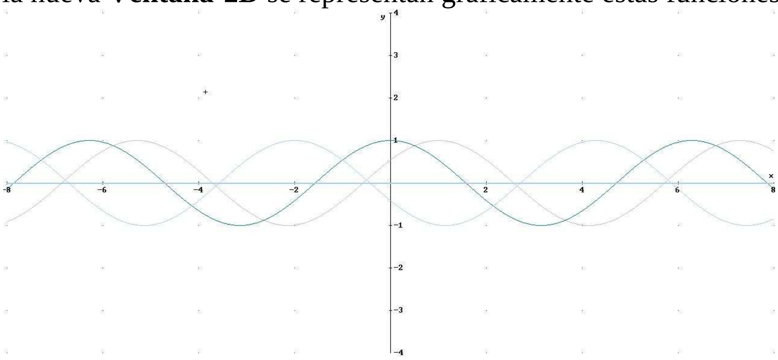
- De nuevo en la ventana de **Algebra** se introducen las expresiones **f(x) - 2** y **f(x) + 3**. Cuando están resaltadas en esta pantalla se representan en la **Ventana-2D**, con el mismo método con el que se ha representado *f*(*x*) y aparecen en la misma pantalla.



- Investiga como influye una transformación del tipo *f*(*x*) + *k* en la función *f*(*x*) con respecto a:
  - La gráfica de la función.
  - El período de la función.
  - El signo de la constante *k*.
- En la **Ventana-2D** en la opción del menú **Editar,** se borran las **últimas gráficas** y se deja sólo la de *f*(x).
- En la ventana de **Algebra** se introducen las expresiones **(1/3)f(x), 2f(x), y -f(x)**. Si están resaltadas en esta pantalla se representan en la **Ventana-2D**, con **Representar Expresión** y aparecen en la misma pantalla que *f*(x).



- Identifica cada una de las gráficas e investiga como influye una transformación del tipo *kf*(*x*) en la función *f*(*x*) con respecto a:
  - La gráfica de la función.
  - El período de la función.
  - El signo de la constante *k*.
- En la **Ventana-2D** en la opción del menú **Ventana** se abre una nueva **Ventana-2D** y se vuelve a representar *f*(x).
- Análogamente, en la pantalla de **Algebra,** se introducen las expresiones **f(x - 1)** y **f(x + 2),** y en la nueva **Ventana-2D** se representan gráficamente estas funciones.



- Identifica cada una de las gráficas e indica como influye una transformación del tipo *f*(*x* + *k)* en la función *f*(*x*) con respecto a:
  - La gráfica de la función.
  - El período de la función.
  - El signo de la constante *k*.
- Abre una nueva **Ventana-2D** para representar gráficamente *f*(2*x*), *f*(-*x*), y *f*(*x*/3) indicando como influye una transformación del tipo *f*(*kx*) en la función f(x) con respecto a:
  - La gráfica de la función.
  - El período de la función.
  - La constante *k*, su signo y que sea mayor o menor que 1.

ACTIVIDADES:

1. Esboza, sin utilizar *Derive*, las gráficas de las funciones *f*(*x*) = -sen(*x*+1), *g*(x) = 2cos(3*x*) y *h*(*x*) = sen(3*x*+2), calculando el período de cada una de ellas. Comprueba con Derive los resultados y justifícalos.
2. Explica cómo se transforma la expresión analítica de una función, cuándo efectuamos sobre su gráfica una translación según un vector:
   a) Paralelo al eje de ordenadas
   b) Paralelo al eje de abscisas.

5. CONCLUSIONES.

- Las actividades que utilizan los medios tecnológicos como recurso didáctico son *motivadoras* para el alumnado.
- La capacidad de *representación gráfica* de los medios informáticos favorece la adquisición y consolidación de los contenidos matemáticos.
- Manipular contenidos matemáticos con *programas interactivos* facilita la adquisición de conceptos.
- *Los factores de riesgo* derivados de utilizar los medios informáticos como recurso didáctico se pueden reducir:
  - Secuenciando convenientemente las actividades informáticas.
  - Diseñando adecuadamente las actividades para centrar el interés del alumnado en los contenidos matemáticos.
  - Minimizando el tiempo de aprendizaje del software utilizado.
- Las *características del alumnado* con respecto a su motivación hacia las matemáticas y a su nivel de disciplina en el aula de informática determinan la metodología.
  - En un grupo de alumnos que, en general, no son capaces de seguir un guión establecido para realizar una actividad en el aula de informática las actividades adecuadas son las de presentación.
  - Cuando el alumnado responde positivamente en el aula de informática, son éstas las actividades más adecuadas ya que además fomentan el *trabajo en grupo* y favorecen el *tratamiento de la diversidad*.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MOLERO, M, SALVADOR, A. y otro (200?). Didáctica de las Matemáticas, pp 161-174, 185-196.

[2] MOLERO, M, SALVADOR, A. N. ZUASTI y otro. (1998). Matemáticas en las Matemáticas, pp 34-38, 45-51, 61-64, 76-78, 91-93, 144-145, 152-153,182-188.

[3] MOLERO, M, RODRIGUEZ, F. (1999). El estudio del azar mediante juegos con hoja de cálculo. Calidad de enseñanza e innovación educativa, pp 265 – 274.