Grupos de Leonardo en la Mezquita del Cristo de la luz

Moratalla de la Hoz, Ascensión. ascensión.moratalla.delahoz@upm.es

Departamento de Matemática aplicada a la Edificación, al Medio Ambiente y al Urbanismo. E.T.S. Arquitectura de Madrid. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Sanz García, Mª Agripina. asanz@caminos.upm.es**.**

Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

RESUMEN

El presente trabajo es un estudio geométrico de las bóvedas de la Mezquita del Cristo de la Luz (Toledo, España). Se realiza en función de los grupos de simetría de la figura plana que se obtiene al proyectar sobre el plano la disposición de las nerviaciones de cada una de las bóvedas.

Palabras clave:

Isometrías; grupos de Leonardo;arte. ….

1. PRIMERAS DEFINICIONES

Transformaciones ortogonales.

Un endomorfismo f: $R^n \rightarrow R^n$ se dice ortogonal si conserva el producto escalar definido en el espacio euclídeo R^n

Por ser f una aplicación lineal y ortogonal conserva las normas, las distancias y los ángulos.

El conjunto **GO(R^n)={f/ f: $R^n \rightarrow R^n$ es lineal y ortogonal}**, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado grupo ortogonal de R^n.

Clasificación de transformaciones ortogonales.

En R^2 las únicas transformaciones ortogonales son los giros alrededor del origen y las simetrías axiales con ejes por el origen.

En R^3 las únicas son la rotación alrededor de un eje por el origen, la simetría especular respecto a un plano que contiene al origen y la simetría rotacional.

Isometrías.

Un movimiento rígido o isometría es una aplicación F: $R^n \rightarrow R^n$ que conserva las distancias.

Son isometrías las transformaciones ortogonales, las traslaciones y la composición de ambas.

Se demuestra que toda isometría es una transformación ortogonal o bien una traslación compuesta con una transformación ortogonal.

Grupo de simetría de una figura plana.

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de R^2. Una figura F puede ser estudiada "estáticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué movimientos rígidos permanece invariante.

Consideramos todas las isometrías que transforman la figura en sí misma,

$S\{F\} = \{f \in GM(R^2)$tal que $f(F)=F\}$, y lo llamamos grupo de simetría de la figura F.

Grupos de simetría de Leonardo.

Un grupo de simetría S{F} de una figura plana F, se llama grupo puntual o de Leonardo, si es un grupo finito y existe un punto de F fijo por todos los elementos de S{F}. A ese punto se le llama centro de simetría de la figura F.

Estos grupos tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central, sin romper la simetría central de ese núcleo. Leonardo hizo un estudio sistemático de estos grupos con vistas a establecer los métodos óptimos para resolver el problema de simetría.

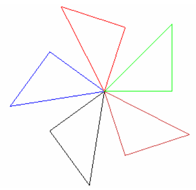
Puesto que los grupos de Leonardo se caracterizan por dejar un punto fijo pasemos a analizar qué isometrías del plano tienen dicha característica.

En primer lugar si S(F) es un grupo con un punto fijo P, podemos afirmar que dicho grupo no contiene traslaciones, por tanto en S(F) sólo habrá giros con centro en el punto P y simetrías respecto de ejes que contengan a P

Si el giro con centro P y ángulo α está en S(F) también estarán los giros con centro en P y ángulo kα. Por ser un grupo finito para k=n obtendremos que nα=2π por tanto α=2π/n. Entonces S(F) contendrá los giros que se obtienen por composición reiterada de $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$ A este grupo se le conoce por grupo cíclico generado por $G_P^{\frac{2\pi}{n}k}$ y lo designaremos por C_n

$$C_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, \ldots n \right\}$$

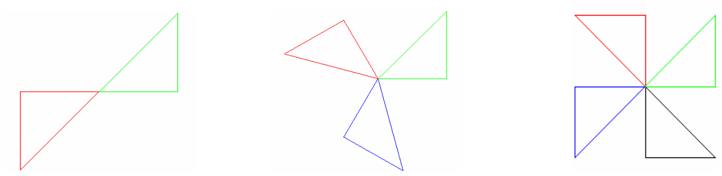
Un ejemplo de una figura con grupo de simetría C_5 es el siguiente:



Partiendo del triángulo verde y con un giro en el centro de la figura y ángulo $\frac{\pi}{5}$

obtenemos el triángulo rojo, sobre el que volvemos a aplicar el giro obteniendo el triángulo azul cuya imagen respecto del giro derá el triángulo negro que a su vez se tansforma bajo esta aplicación en el triángulo naranja.

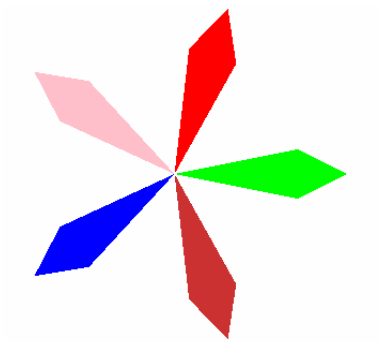
Los siguientes motivos son ejemplos de figuras con grupos de simetría C_2, C_3, C_4 respectivamente generados de forma análoga al caso anterior.



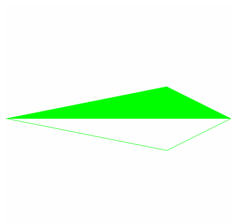
Pero los grupos cíclicos no son los únicos grupos de Leonardo. Existen otros grupos denominados grupos diedrales que designaremos por D_n .. Estos grupos además de contener giros alrededor del punto fijo P, contienen simetrías axiales cuyos ejes pasan por P de manera que la composición de dos de estas simetrías es un giro con centro en P

$$D_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, S_{r_k}, k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Veamos un diseño con el grupo de Leonardo D_5.

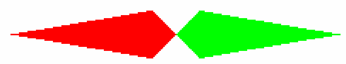


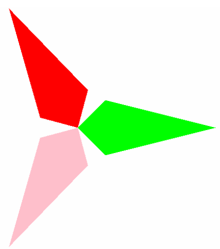
La imagen inicial es un triángulo al que hemos aplicado una simetría para obtener el motivo de color verde

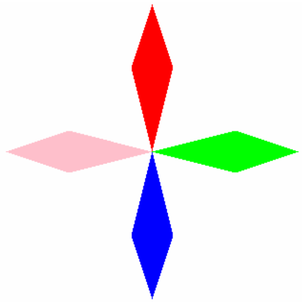


y a continuación hemos realizado un giro de centro el centro de la figura y ángulo $\frac{\pi}{5}$ obteniendo el triángulo rojo y continuando con el proceso descrito anteriormente.

Otros diseños diedrales correspondientes a D_2, D_3,D_4 se muestran a continuación



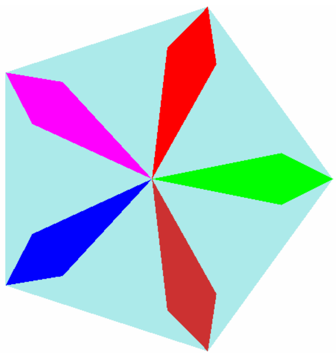




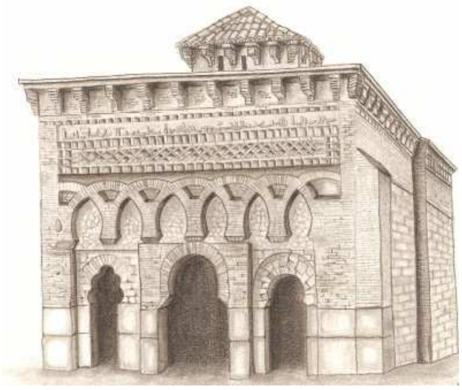
Por último señalar un resultado de interés geométrico;

Para todo n≥3 el grupo diedral de n es exactamente el grupo de simetría del polígono regular de n lados.

En el ejemplo anterior,el grupo de simetría D_5 de la figura, coincide con el grupo de simetría del pentágono.



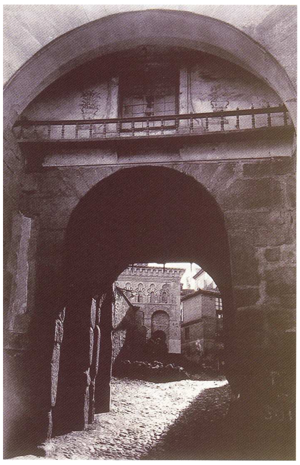
2. LA MEZQUITA



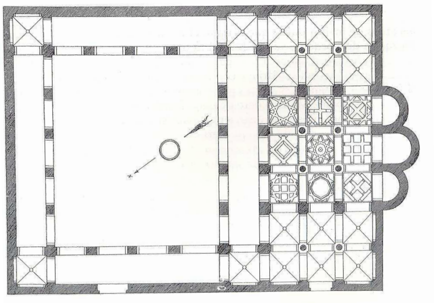
La obra que nos ocupa y a cuyo análisis geométrico dedicamos este artículo es una pequeña pero deliciosa obra arquitectónica que se encuentra en la ciudad de Toledo, España.

Una ciudad amurallada en la que se dieron cita tres culturas la visigoda, la musulmana y la cristiana y en la que podemos encontrar infinidad de tesoros arquitectónicos.

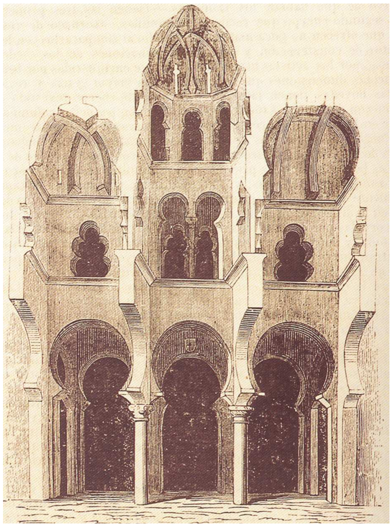
La Mezquita de Bab al-Mardum o Cristo de la Luz, nombre con el que se la conoce hoy en día, es una mezquita de la época califal de los Taifa, aproximadamente del año 1.000 d.C. y fue construída como oratorio ligado a una puerta de acceso a la ciudad (Bab al-Mardum, que se traduce como puerta del mayordomo) para uso de los recién llegados a Toledo o para la preparación a la salida.



En la época del rey Alfonso VI (1200 d.C.) fue transformada en un templo de culto cristiano dedicado al Cristo de la Luz, realizándose entonces la construcción de un ábside en su parte posterior de estilo mudéjar, siendo este la más antigua muestra de arte mudéjar de la que se tiene constancia.



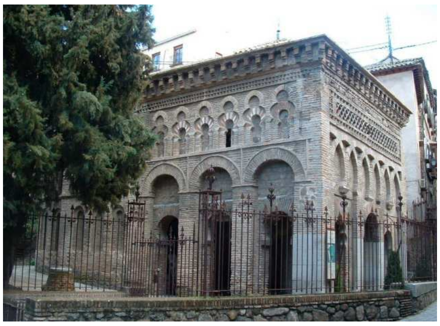
La planta de la parte inicial es prácticamente cuadrada (8,60m x 7,74m) y genera a partir de los cuatro soportes centrales, nueve compartimentos abovedados de dimensiones 1,85m x 1,72m.



Estas cuatro columnas están unidas por arcos de herradura y son la base para la organización del alzado: una zona baja, donde se insinúan los compartimentos, una zona media con ventanas y una zona alta integrada por los nueve compartimentos claramente diferenciados y cubiertos por bóvedas, destacando el central por su mayor altura, 10,5 m.

De manera que el edificio tiene un aspecto cúbico de altura 8 metros que gracias a la cúpula central adquiere una mayor esbeltez.

En cuanto al exterior, podemos apreciar la continuidad de su distribución interior en las fachadas N-O y S-O pues en cada una de ellas encontramos tres puertas que en el caso de la fachada N-O son del mismo tamaño mientras que en la fachada S-O, por ser la entrada principal, la puerta central es ligeramente más amplia debido, según Gómez Moreno, a una posible reforma coincidente con la construcción del ábside mudéjar.



Fachada N-O

Fachada S-O

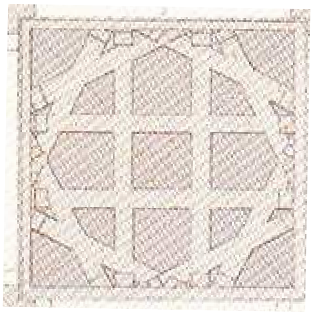
3. ESTUDIO GEOMÉTRICO DE SUS BÓVEDAS

Pasemos al interior de la mezquita para hacer un estudio geométrico de sus bóvedas. Como ya destacamos anteriormente el espacio interior está dividido en nueve compartimentos con cubiertas abovedadas cuyo diseño analizamos a continuación.

Proyectando sobre el plano la disposición de las nerviaciones de cada una de las bóvedas, obtenemos una figura en dos dimensiones. Curiosamente, todas ellas están generadas a partir de cuadrados. El estudio de estos diseños lo hacemos en función de su grupo de simetría.

El grupo de simetría de una figura plana es el grupo generado por el conjunto de isometrías del plano que dejan invariante la figura, G={f, isometría de R^2/f(F)=F}, siendo F una figura del plano R^2. Este conjunto G con la operación composición de isometrías del plano tiene estructura de grupo y recibe el nombre de grupo de simetría de la figura F.

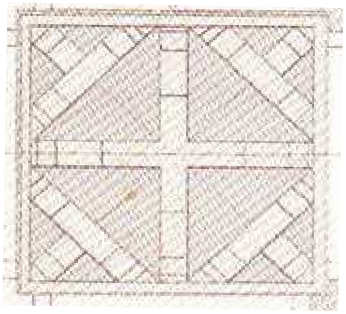
Todas las bóvedas, salvo la central, están diseñadas a partir de un cuadrado, en distintas posiciones, resaltando en algunos casos sus diagonales o las diagonales del cuadrado que las enmarca. Estas bóvedas que muestran una traza diferente en cada uno de los nueve tramos, son réplicas completas o fragmentadas de los modelos de Córdoba (s.X).



En particular en esta figura, podemos apreciar que el dibujo se puede obtener por la combinación de dos cuadrados, siendo uno de ellos el resultado de girar el otro, dando lugar a una estrella de ocho puntas.

En este caso los cuadrados se contienen unos a otros.

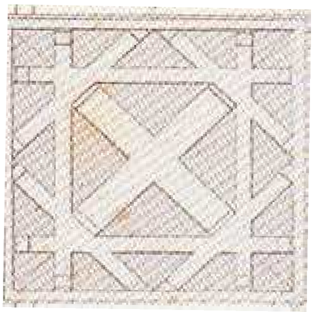
Aquí se combinan diagonales de los cuadrados interior y exterior.



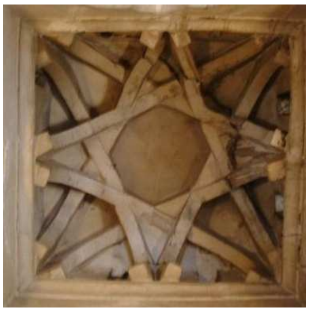
Este motivo resalta solamente las diagonales del cuadrado exterior.

Curiosamente el diseño de esta bóveda recuerda la organización de la planta central de la Mezquita.

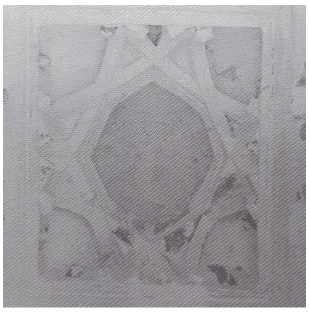
Una combinación de cuadrados y diagonales nos proporciona este elaborado trazado.



El conjunto de isometrías que dejan invariantes los diseños de las bóvedas anteriores, está formado por cuatro simetrías axiales, cuyos ejes se cortan en el centro de la figura, y giros de amplitud k90º, para k=1,2,3,4, con centro en dicho punto, cuya descripción es $D_4=\{G^{90^a}, G^{180^a}, G^{270^a}, G^{360^a}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$. El grupo de simetría al que da lugar este conjunto de transformaciones se conoce como grupo cíclico de Leonardo D_4 cuya característica principal es que la figura tiene un punto fijo respecto a las isometrías que la dejan invariante que coincide con su centro.

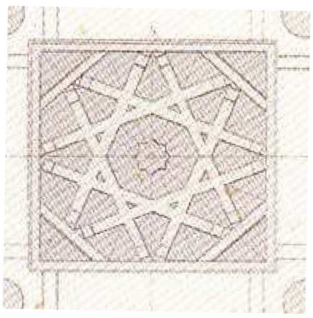


Los dos modelos siguientes tienen una apariencia estrellada cuyo grupo de simetría es D_4.



Si nos ceñimos a la estrella central podemos apreciar otras isometrías que la dejan invariante, dando lugar a un grupo de simetría distinto al anterior que incluyen giros de amplitud 45º.

El compartimento central presenta una traza diferente a las anteriores pues está enmarcado en un octógono cuyo grupo de simetría es el grupo diedral $D_8=\{G^{45k}, S_r, k = 1,..8, r = 1,...8\}$.



Los grupos de simetría de Leonardo tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas adyacentes a un núcleo central sin romper la simetría central de ese núcleo. Leonardo da Vinci hizo un estudio sistemático con vistas a establecer los métodos óptimos para realizarlo.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALSINA, C. y TRILLAS, E. (1984) Lecciones de Álgebra y Geometria. Ed. Gustavo Gili, S.A.,Barcelona.
2. COXETER, H.S.M. y GREITZER, S.L. (1993) Retorno a la Geometría. DLS Euler, Editores.
3. IZQUIERDO BENITO, R., MUÑOZ HERRERA, J.P. y PÉREZ HIGUERA, T., (1999) Mezquita de Bab Al Mardum. Cristo de la Luz. Ed. Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, Consejería de Cultura. Toledo.
4. MORATALLA DE LA HOZ, A. y SANZ GARCÍA, Mª A., (1998). Geometría en la Arquitectura. Serie Geometría y Arquitectura (I). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.
5. MORATALLA DE LA HOZ, A. y SANZ GARCÍA, Mª A., (1999) Simetría. Serie Geometría y Arquitectura (II). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.
6. QUARONI, L. (1987). Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura, Xarait Ediciones. Madrid.