

## HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

ENSEÑANDO RELATIVIDAD ESPECIAL GRÁFICAMENTE

EL LARGO VIAJE DE "SOBRE LA DIVISIÓN DE LAS FIGURAS", (UN LIBRO PERDIDO DE EUCLIDES)

EL PROBLEMA DE LAS CURVAS Y EL NACIMIENTO DEL CÁLCULO

## EXPERIENCIAS DOCENTES

ERRORES FRECUENTES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS, UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO CON ALUMNOS DE BACHILLERATO

FORMULACIONES Y DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS DE LOS CATETOS Y DE LA ALTURA MEDIANTE TESELACIONES POLIGONALES

## INVESTIGACIÓN

MODELO MATEMÁTICO PARA ESTUDIAR EL EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LAS POBLACIONES DE AONIDIELLA AURANTII Y DE APHYTIS MELLINUS

## JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

UN PRINCIPIO DE MÍNIMO PARA SOCORRER A UN BAÑISTA EN APUROS

## CUENTOS MATEMÁTICOS

LA HISTORIA DE GULLIVER

EL ORIGEN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

CURIOSIDAD DEL NÚMERO COMBINATORIO (CONCEPTO DE ORDEN)

## CRÍTICAS Y RESEÑAS

INFORME SOBRE LA PELÍCULA "UN DON EXCEPCIONAL"

## ENTREVISTA A:

MARÍA MEDINA: "HISTORIA DE UNA INVESTIGADORA EN MATEMÁTICAS QUE (SOBRE)VIVE LEJOS DE CASA"



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen X, Número 1, Abril 2020

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y  
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC  
Ilustración de portada / Escultura en calle La Princesa, 3 (Centro Comercial Plaza de los Cubos)  
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

# Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático  
y  
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



Volumen X, Número 1, ISSN 2174-0410

## Coordinación Comité Editorial

Mariló López González  
Sagrario Lantarón Sánchez  
Javier Rodrigo Hitos  
José Manuel Sánchez Muñoz

## Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla, Trinidad Menárguez Palanca, María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre, Susana Merchán Rubira

1 de abril de 2020



# Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. X) ..... 1

## Investigación

Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de *Aonidiella aurantii* y de *Aphytis Mellinus* ..... 11  
*Alfonso Garmendia y Adela Salvador*

## Experiencias Docentes

Errores frecuentes en el área de matemáticas, un análisis estadístico con alumnos de bachillerato ..... 23  
*Pablo Sánchez Madrigal*

Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales ..... 51  
*José Enrique Martínez Serra, Marco Vinicio Vásquez Bernal, Arellys García Chávez y Ramiro Infante Roblejo*

## Historias de Matemáticas

Enseñando Relatividad Especial gráficamente ..... 73  
*Daniel de la Fuente Benito, José Antonio Sánchez Pelegrín y Alfonso Zamora Saiz*

El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides) ..... 83  
*Juan Tarrés Freixenet*

El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo ..... 95  
*Román Ceano*

## Juegos y Rarezas Matemáticas

Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros ..... 109  
*Rosa H. Herrera*

Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden) ..... 115  
*Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe*

## Cuentos Matemáticos

La historia de Gulliver ..... 127  
*Rafael Rivera*

El origen de los números complejos ..... 139  
*Miguel Oscar Almarales Milán*

## Críticas y Reseñas

Informe sobre la película “Un Don Excepcional” ..... 143  
*José Manuel Sánchez Muñoz*

## Entrevista

María Medina: “Historia de una investigadora en matemáticas que (sobre)vive lejos de casa” ..... 151  
*Susana Merchán Rubira*



# Editorial del Número 1 (Vol. X)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 001-010, ISSN 2174-0410  
Recepción: 15 Mar'20; Aceptación: 20 Mar'20

1 de abril de 2020

## Resumen

Estamos viviendo un periodo extraño debido al confinamiento por culpa del COVID 19. Hemos querido comentar cómo está afectando esto al mundo científico, de las matemáticas, de la enseñanza ...

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física.

## Abstract

We are experiencing a strange period due to the confinement by the COVID 19. We wanted to comment on how it is affecting the scientific world, mathematics, teaching ...

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal or theoretical point of view but Maths applied to different areas such as engineering or physics.

## Introducción

Estamos viviendo un periodo para muchos sin precedentes, debido al confinamiento por culpa del COVID 19. Todos los días la televisión, los periódicos, los medios, nos dicen el número de contagiados, de muertos, de dados de alta. Las amistades toman esos datos, los ponen en una hoja de cálculo, hacen sus gráficas y dibujan sus curvas. Nos lo envían cada día. Los niños y niñas hablan de "crecimiento exponencial" del número de contagiados. Las matemáticas están cada vez más "en todas partes". Los correos electrónicos y los WhatsApp nos traen esos datos, esas gráficas. Se estudian por comunidades autónomas, los generales de toda España, los de los distintos países ...

Vamos a comentar únicamente tres de los muchos artículos, muy diferentes, que usan las matemáticas para explicar la situación actual.

En algunos países no hay contagiados, de momento, como en Indonesia, ¡por la gracia de Alá!<sup>1</sup>. Entonces surge un problema, ¿cómo comparar todos esos datos? En algunas gráficas se representan los datos en escala logarítmica.

¿Cómo se explica qué es una escala logarítmica y cómo es conveniente representar estos datos de crecimiento exponencial en dicha escala para poder comparar los de distintos países?<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> [1] <https://lacienciaysusdemonios.com/2020/02/25/indonesia-esta-libre-de-coronavirus-por-la-gracia-de-ala/>

<sup>2</sup> RODRÍGUEZ, Pablo. *¿Qué es una escala logarítmica?*, <https://fuga.naukas.com/2020/03/20/que-es-una-escala-logaritmica/>.

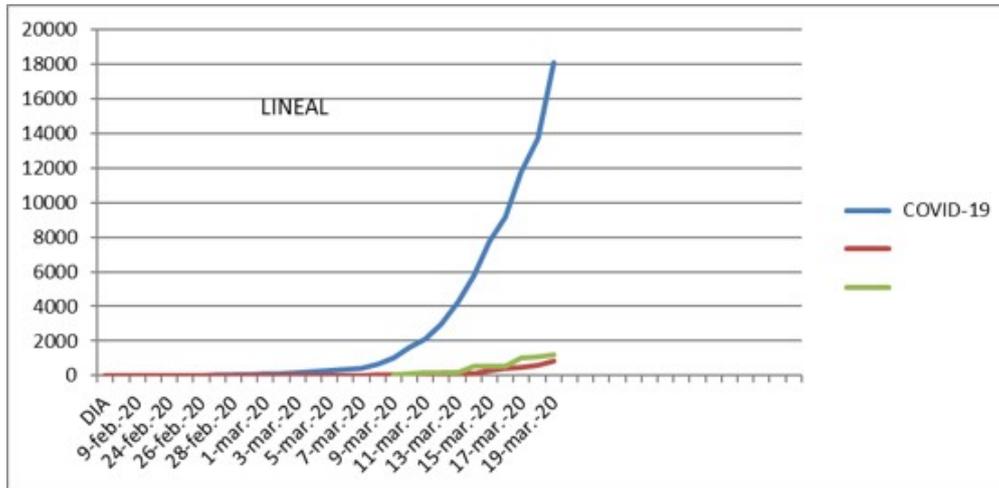


Figura 1. En azul, el número de contagiados en España, en verde, el número de muertos, en rojo, el número de curados.

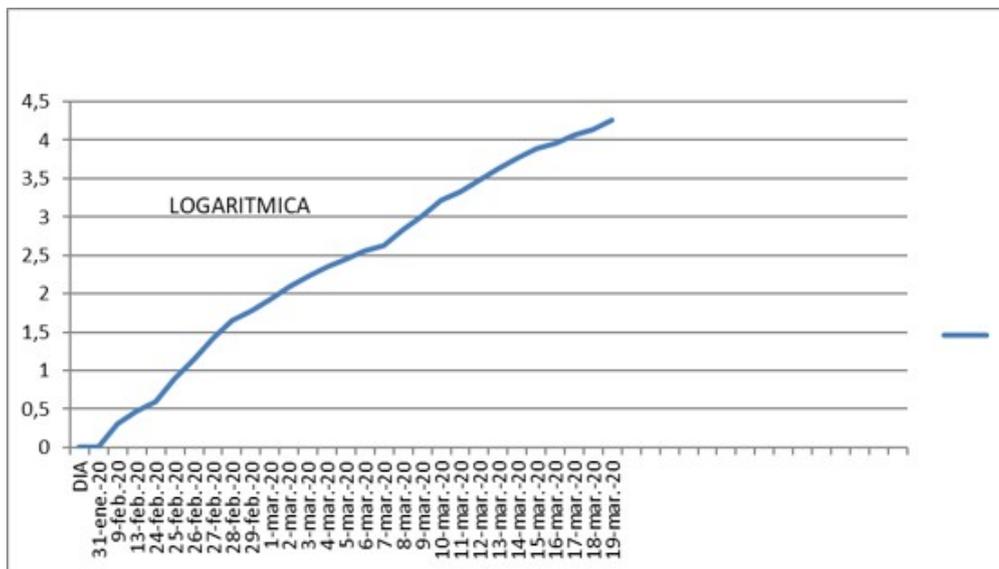


Figura 2. Los datos de número de contagiados en España, en escala logarítmica.

Primero vamos conociendo los datos en España en dicha escala, lo que nos permite saber cuándo la pendiente de la curva empieza a descender, es decir, cuando se empieza a vencer al virus. Las gráficas en escala logarítmica de los diferentes países, todas juntas, hasta a los más profanos, les dan una idea de la gravedad del problema. Permite conocer qué países van mejor que otros. La pregunta que suscita es si en todos los lugares se están tomando los datos con similares criterios. Con los datos publicados, parece que el virus ataca más a los países ricos. Pero suponemos que esa no es la explicación, sino que en esos países no se están tomando datos de contagiados, no se conocen los datos, todavía.

Otros quieren construir un modelo matemático que permita conocer de qué manera se van a comportar esos datos en el futuro<sup>3</sup>. Con los datos recogidos se puede construir un modelo que posibilite averiguar cómo se van a comportar el número de contagiados, por ejemplo, en los tres días sucesivos.

<sup>3</sup> <https://covid19.webs.upv.es/>

Gráficas, gráficas y más gráficas. Hay artículos que recogen los datos de diferentes países y al conocer la evolución en cada uno, pueden analizar las distintas estrategias para luchar contra el virus: no hacer nada, confinar a la población en sus casas, otras posibles estrategias<sup>4</sup>. Así, cada gobierno toma la decisión de, si es preferible la economía del país o la salud de sus habitantes. En muchos países se pensó que el Covid 19 no era gran cosa, y se pospusieron las decisiones, como declarar el estado de alarma. Si se toma la decisión de “no hacer nada” muchas personas morirán. Señala el artículo un país donde probablemente van a morir ¡diez millones de personas! Es una pandemia mundial, luego es probable que ningún país pueda escapar, y que tarde o temprano, tenga que tomar decisiones. Si se toma la decisión del “confinamiento” voluntario aparecen las gráficas de los tiempos que tardará en vencerse al virus, diferentes cronogramas, y se comparan con las gráficas de no hacer nada. Si se toman medidas drásticas y obligatorias de confinamiento, aparecen otras gráficas y otras fechas. Pero la economía de los países se va a resentir. Según sean de drásticas esas medidas, el comportamiento es diferente. Lo que se intenta con esta medida es ganar tiempo. Ganar tiempo para que no se bloqueen los sistemas sanitarios, para que los enfermos no lleguen todos al mismo tiempo a las UCIs, para que aparezca una medicina que cure a estos enfermos, para que aparezca una vacuna ... Añade el artículo los datos de camas de UCIs en varios países, si todos los contagiados graves llegan a la vez, siempre insuficientes, del número de ventiladores, la falta de recursos, y añade los daños colaterales de los enfermos de otras patologías que no pueden ser tratados. Se conocen otros datos matemáticos: como tasa de mortalidad, la velocidad de transmisión, etc. Si una persona contagiada, contagia a su vez a dos o tres personas, tenemos un crecimiento exponencial. También si está velocidad está por encima de 1. En Wuham era en un principio de 3,9, y se redujo a 0,32. Basta con reducir dicha velocidad a menor que 1 y entonces se vence al virus. Por último, en este artículo se analiza la actuación de Corea del Sur. Allí se ha aplicado la prueba de contagio a toda la población, y sólo se han aislado a los contagiados, aunque de forma férrea, usando modernas tecnologías, como el reconocimiento facial, para saber si un contagiado sale de su aislamiento, y conocer todos los contactos que ha podido tener. Y ese procedimiento ha dado frutos. Pero es difícil que se pueda aplicar en otros sitios.

Todos estos artículos nos ayudan a conocer a nuestro enemigo, y a aceptar las antipáticas medidas que deben tomarse. Pero no todo es negativo. Hace nada hubo una cumbre sobre el cambio climático, y resultaba imposible tomar ciertas medidas. Ahora, ¡se han tomado! El aire de las ciudades, vacías, está más limpio. Se ha reducido drásticamente el tráfico aéreo que tanto contamina. Venecia tiene el agua de los canales limpia, y hasta con peces. Esto indica que, aunque no creo que se haga, si es posible luchar contra el cambio climático.

Por último, recordar que el alumnado está también confinado en sus casas. Que el profesorado le está enviando trabajos para que lo haga. Un sistema de autoaprendizaje. No todo el alumnado está en las mismas condiciones. Es diferente tener un ordenador en casa que no tenerlo. Y ahora no se puede ir a utilizar el de la biblioteca pública. Pero, tanto para el profesorado, que está trabajando para enviar esos materiales, como para el alumnado que debe utilizarlos y hacer los trabajos encomendados en solitario, es una nueva experiencia. Esos materiales didácticos que se están confeccionando en este momento pueden tener una utilidad práctica en el futuro. Estaría bien que las autoridades académicas gestionaran una forma de que lo que ha hecho uno, pueda ser utilizado por otros. Por ejemplo, en <http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/index.html> se pueden encontrar materiales didácticos para secundaria obligatoria y bachillerato.

<sup>4</sup> PUEYO, Tomás. *Historia de Coronavirus: The Hammer and the Dance*. <https://medium.com/@tomaspueyo/coronavirus-the-hammer-and-the-dance-be9337092b56>

## Investigación

En “*Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de Aonidiella aurantii y de Aphytis Mellinus*”, se analiza la importancia del tipo de modelo para estudiar el efecto de la temperatura sobre el crecimiento de *Aonidiella aurantii* y su enemigo natural *Aphytis Mellinus*. Se han probado diferentes modelos con los datos existentes en la bibliografía y se propone que se utilice un modelo parabólico en vez de lineal. Los estudios de otros autores utilizan modelos lineales, más fáciles de calcular, pero se ajustan peor a los datos existentes. Tampoco desde un punto de vista conceptual, ya que no tiene sentido utilizar una función creciente (lineal o potencial  $y = a \cdot T^b$ ), cuando los datos son primero decrecientes y luego crecientes (temperatura vs. número de días). En este artículo se analizan otros ajustes, comprobando que el mejor ajuste es mediante una función polinómica de segundo grado.

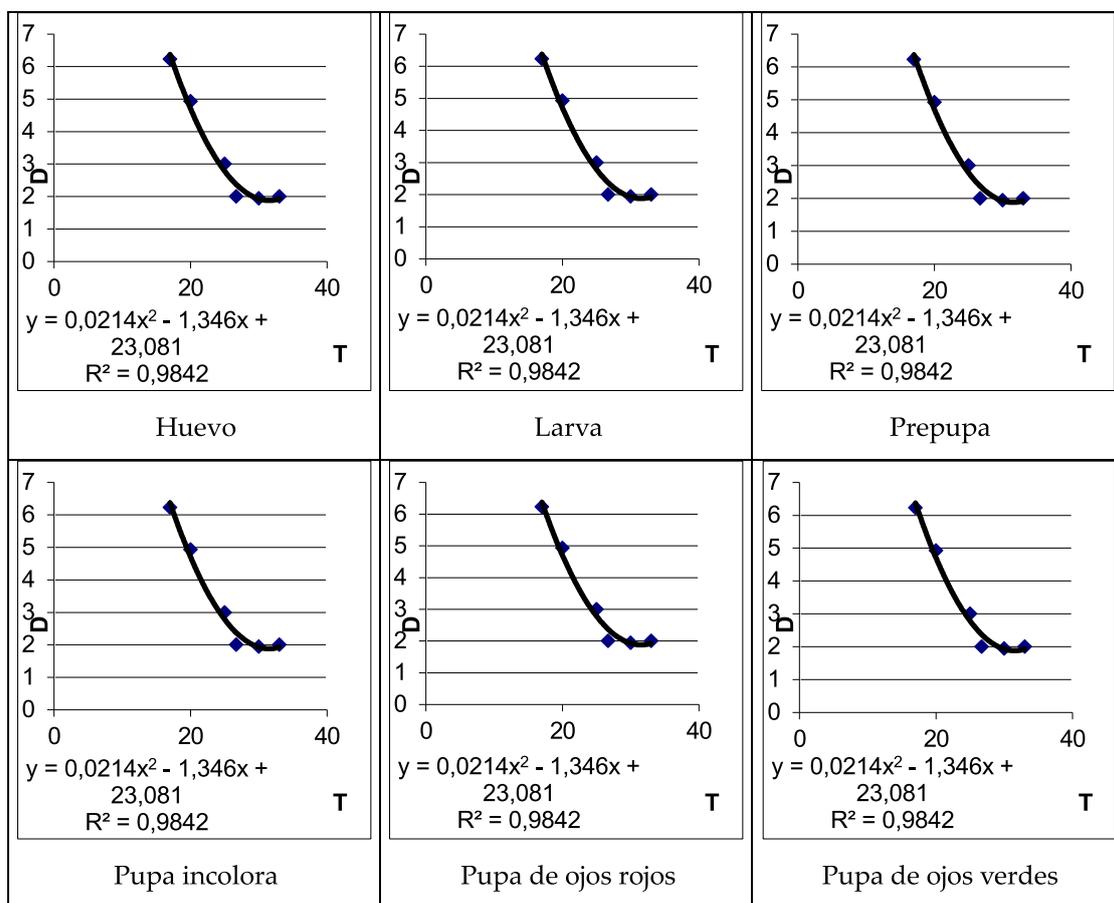


Figura 3. En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1988, y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, para cada una de las etapas, para *Aphytis mellinus*.

## Experiencias Docentes

“*Errores frecuentes en el área de matemáticas, un análisis estadístico con alumnos de bachillerato*” hace un estudio estadístico de los errores matemáticos de los estudiantes de una Escuela de bachillerato en México, mediante una evaluación escrita elaborada y aplicada a una muestra de alumnos. Con la información recabada y con la ayuda de la estadística descriptiva, se detectaron

aquellos errores típicos que con frecuencia cometen los estudiantes. Una vez realizado lo anterior, se implementaron estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generaron más dificultades, con el objetivo de superar los errores detectados. Consecuentemente, se aplicó una segunda evaluación escrita a la muestra de alumnos, para entonces aplicar la prueba estadística t de Student y relacionar los datos recabados. El objetivo fue comparar los resultados de aprendizaje del grupo de estudiantes antes y después de recibir el entrenamiento focalizado en los errores más frecuentes.



Figura 4. Número de aciertos por estudiante (Fuente: Elaboración propia con software RStudio).

“*Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales*” pone de manifiesto que una de las estrategias didácticas que más contribuye al aprendizaje por descubrimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los niveles inicial y medio, es el trabajo con material concreto o manipulativo, el cual permite a los estudiantes el tránsito por procesos mentales de comparación, análisis, síntesis, abstracción, generalización, etc., conducentes a la formación de nuevos conceptos y/o la formulación de nuevas proposiciones. En esta dirección, pueden aprovecharse las potencialidades que ofrece el empleo de las teselaciones poligonales, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones y/o demostraciones de nuevos teoremas.

Se ilustra cómo el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar deducciones y demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

Finalmente, se deja claro que para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, de las cuales se presentan dos de ellas, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.



Figura 5. Imagen del Teorema de Pitágoras como emblema de la Geometría en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia.

## Historias de Matemáticas

En *“Enseñando Relatividad Especial gráficamente”* se presenta una introducción a la Relatividad Especial sencilla y sin fórmulas, apta para ser explicada a un alumnado de Bachillerato. Gracias al planteamiento, los autores son capaces de demostrar de manera gráfica fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.

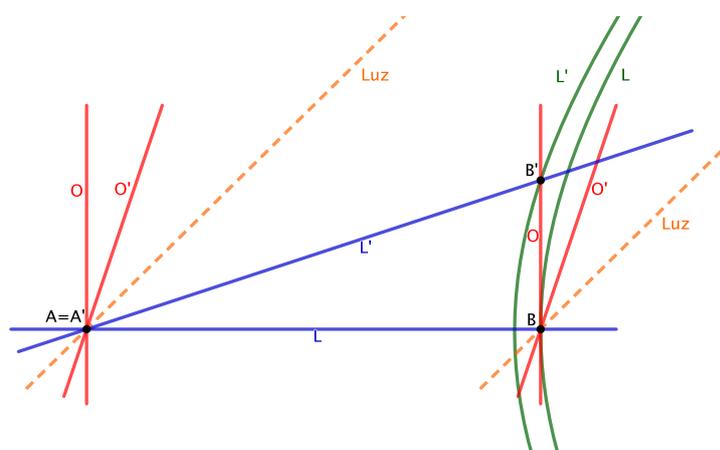


Figura 6. La longitud de la regla medida en reposo es  $L = \overline{AB}$ , mayor que la medida por un observador en movimiento  $O'$ , que vale  $L' = \overline{A'B'}$ .

En *“El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides)”* se pone de manifiesto que Euclides escribió un tratado de agrimensura que se perdió en las múltiples vicisitudes por las que atravesó la Biblioteca de Alejandría. Tenemos noticia de él gracias a la obra de Proclo (siglo V d.C.). Se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe, de los siglos XVI a XIX. Esto permitió a Raymond Clare Archibald publicar una reconstrucción del citado texto en 1915.

En *“El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo”* se explica a grandes rasgos cómo la matematización del conocimiento científico que se produjo en los siglos XVI y XVII exigió de las matemáticas una evolución súbita para poder hacer frente a las nuevas demandas. La matemática heredada de los griegos con su matriz geométrica, su aversión al infinito presente

y su torpeza en el manejo de curvas era incapaz de satisfacer las nuevas demandas.

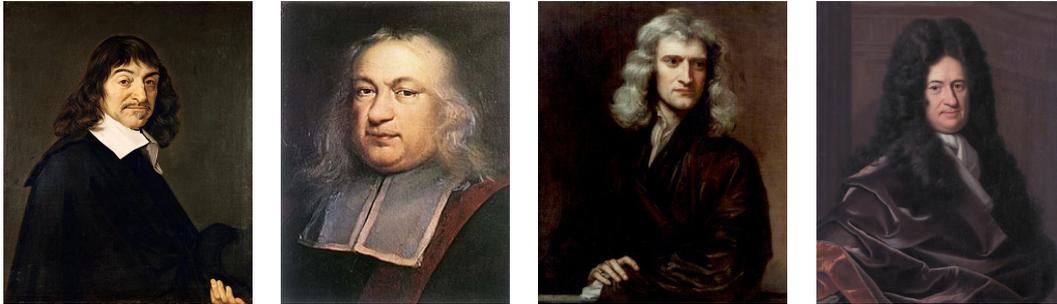


Figura 7. René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton y Gottfried Leibniz

## Juegos y Rarezas Matemáticas

En *“Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros”* se ve que el principio de Fermat de mínimo tiempo sirve para elaborar un modelo mecánico, que se puede ejemplificar en el ejercicio propuesto, en el que se compara la geometría de la ley de Snell de la óptica, que se corresponde con el principio de Fermat, con el problema físico idealizado.

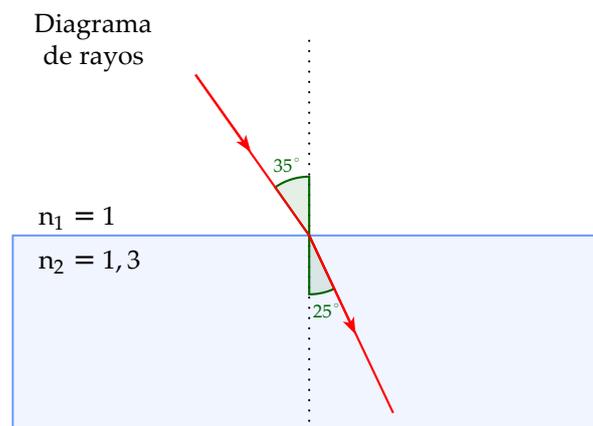


Figura 8. Un ejemplo de refracción de un rayo de luz.

En *“Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden)”* se muestra una manera curiosa en la que se pueden comportar los números combinatorios dando lugar a un nuevo concepto curioso (orden de número combinatorio). Además del orden, se analiza la suma, el binomio y algunos números primos interesantes empleando dicho concepto.

## Cuentos Matemáticos

En *“La historia de Gulliver”* se muestra el cuento que el arquitecto Rafael Rivera, creador del Parque Gulliver de Valencia, cuenta a niños y niñas de corta edad para relatarles y enseñarles cómo se plantea y realiza un proyecto, en este caso, de un parque infantil.

Con *“El origen de los números complejos”* se pretende iniciar de forma amena y desde un punto de vista didáctico el comienzo del estudio de los números complejos.



Figura 9. Esbozos de Sento Llobell.

## Críticas y Reseñas

*“Informe sobre la película: Un Don Excepcional”* presenta una reseña de la película “Un Don Excepcional” dirigida por Marc Webb. El largometraje trata sobre una niña con capacidades especiales para las matemáticas que junto con su tío, intenta superar la dificultad para asimilar la realidad del entorno social, personal, sentimental y familiar que la rodea y que impide un desarrollo “normal” de su infancia.



Figura 10. Cartel anunciador de la película.

## Entrevistas

*“María Medina: Historia de una investigadora en matemáticas que (sobre)vive lejos de casa”* muestra la cara más cercana de esta investigadora y profesora de la Universidad de Granada. Actualmente está viviendo en Roma e investiga en Ecuaciones en Derivadas Parciales.



Figura 11. María Medina.



Nos gustaría acabar poniendo de manifiesto que aunque actualmente no vivimos tiempos de celebración, debemos estar de enhorabuena por el hecho de que nuestro proyecto ya lleve 10 años vivo. ¡10 años! se dice muy pronto. Han sido 10 años de creer en un proyecto a pesar de la escasa o nula ayuda recibida para que siga adelante. Nos encantaría celebrarlo como un hecho así se merece, pero a los integrantes del equipo editorial nos parece que ahora todas nuestras fuerzas y objetivos tienen que dirigirse a paliar esta dura situación. Queremos que sepáis que vosotros lectores tenéis toda nuestra solidaridad y desde aquí os enviamos todos los ánimos que podamos haceros llegar. Si nuestra revista puede servir para paliar en cierto modo esta dura situación nos daremos por satisfechos.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

*“Las enfermedades no nos llegan de la nada. Se desarrollan a partir de pequeños pecados diarios contra la Naturaleza. Cuando se hayan acumulado suficientes pecados, las enfermedades aparecerán de repente”*

Hipócrates

El Comité Editorial



## Investigación

# Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de *Aonidiella aurantii* y de *Aphytis Mellinus*

## Mathematical model to study the effect of temperature on the populations of *Aonidiella aurantii* and *Aphytis Mellinus*

Alfonso Garmendia y Adela Salvador

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 011–022, ISSN 2174-0410  
Recepción: 10 Ene'20; Aceptación: 13 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

En este artículo se analiza la importancia del tipo de modelo para estudiar el efecto de la temperatura sobre el crecimiento de *Aonidiella aurantii* y su enemigo natural *Aphytis Mellinus*. Se han probado diferentes modelos con los datos existentes en la bibliografía y se propone que se utilice un modelo parabólico en vez de lineal. Los estudios de otros autores utilizan modelos lineales, más fáciles de calcular, pero se ajustan peor a los datos existentes. Tampoco desde un punto de vista conceptual, ya que no tiene sentido utilizar una función creciente (lineal o potencial  $y = a T^b$ ), cuando los datos son primero decrecientes y luego crecientes (temperatura vs. número de días). En este artículo se analizan otros ajustes, comprobando que el mejor ajuste es mediante una función polinómica de segundo grado.

**Palabras Clave:** *Aphytis*, *Aonidiella*, modelo matemático, control biológico de plagas, cítricos, parasitismo, parábola.

### Abstract

This article discusses the importance of building a model that studies the effect of temperature on *Aonidiella aurantii* and its natural enemy *Aphytis Mellinus* that is parabolic rather than linear. The studies of other authors use linear models that do not fit the facts and are not adequate, since it makes no sense to adjust with a straight line, or with a power function  $y = a T^b$ , which are increasing, when the temperature behaviour at which the number of days begins to grow is first decreasing and then increasing. This article analyses other adjustments, verifying that the best adjustment is through a polynomial function of the second degree.

**Keywords:** *Aphytis*, *Aonidiella*, Mathematic Model, Biological Control, Citrus, Parasitism, Parable

## 1. Introducción

La cochinilla roja o piojo rojo (*Aonidiella aurantii*) es una de las más importantes plagas de los cítricos en todo el mundo, que produce desde su desvalorización comercial hasta la muerte del árbol. Tiene enemigos naturales los cuales, bajo ciertas condiciones, pueden llegar a regular sus poblaciones de tal forma que no hagan falta medidas adicionales de control.

Su ciclo biológico presenta diferentes fases de desarrollo. Tiene de 2 a 7 generaciones anuales dependiendo del contraste térmico. (ASPLANATO [1]).

Para controlar la plaga se puede utilizar control biológico mediante parasitoides como el *Aphytis melinus*, entre otros, en lugar de utilizar insecticidas.

El efecto de la temperatura en el desarrollo de *Aonidiella aurantii* y *Aphytis melinus* ha sido ampliamente estudiado por distintos autores, ya que las condiciones climáticas extremas son el factor de mortandad más importante.

Por ejemplo, en ABDELRAHMANN [2] se analiza cómo afectan a las distintas fases de *Aonidiella aurantii*, *Aphytis melinus* y *Aphytis chrysomphali* el frío y el calor, para lo que se cultivan en laboratorio tanto *Aonidiella aurantii* como sus enemigos. En la naturaleza la temperatura fluctúa a lo largo de las 24 horas del día, por lo que los datos de laboratorio obtenidos a temperatura constante pueden diferir de los naturales. Ajusta cada una de las fases de *Aonidiella aurantii* y de sus enemigos naturales mediante rectas de regresión, cuando sería más adecuado ajustar con parábolas.

Otro ejemplo: KFIR, R. AND LUCK, R. F. [3], estudia el efecto de 5 temperaturas constantes de 21 a 32 grados centígrados y el efecto de 3 humedades relativas (10, 40 y 70 %) en la duración del desarrollo en España del adulto de *Aphytis chrysomphali* y *Aphytis melinus* con *Aonidiella aurantii* como huésped. Calcula los días-grados para *Aphytis melinus*, *Aonidiella aurantii* y *Aphytis chrysomphali*. MURDOCH ETAL [4], estudia un modelo día a día para *Aonidiella aurantii* y *Aphytis melinus* en el que las tasas demográficas se basan en grados-día, es decir, el número de grados por encima de un umbral inferior que se produce cada día. Cada fase de desarrollo se divide en una serie de "días-clases" que contiene los individuos que han estado en una fase un número determinado de días.

ABDELRAHMANN [5], calcula el porcentaje de mortalidad de pupas en relación con la temperatura, y las ajusta utilizando rectas de regresión al estudiar la relación entre duración del desarrollo en días y la temperatura. Concluye que la mortalidad es mayor a más baja temperatura. De nuevo observamos el ajuste a rectas de regresión lineal.

YU [6] al analizar los datos de temperatura y días de cada fase también ajusta mediante rectas. Observa que en general al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. Analizando los datos se observa que las bajas temperaturas son desfavorables al desarrollo de *Aonidiella aurantii* y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar en cada fase su ciclo biológico. Sin embargo, al crecer la temperatura a partir de una cierta temperatura óptima esa tendencia se invierte y dicho aumento de temperatura comienza

a ser desfavorable, el número de días aumenta en vez de disminuir. Esto es coherente con la Ley de la Tolerancia.

Hay pues una explicación biológica para la existencia de una temperatura óptima en la que se alcanza un valor mínimo en el número de días para cada fase, y por tanto, que al aumentar dicha temperatura el número de días crece, luego no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, (o de una función logarítmica, exponencial o potencial) que siempre mantienen la misma tendencia, o siempre crecientes o siempre decrecientes. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

También para *Aphytis melinus* se tienen los datos de YU & LUCK [8] donde se observa un comportamiento similar, al aumentar la temperatura disminuye el número de días hasta un cierto valor, una temperatura óptima, a partir de la cual el número de días comienza a aumentar. Y en el único caso en que esto no ocurre, pupa de ojos rojos, es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas empezaría a suceder. La existencia de dicha temperatura óptima constatada por los datos a partir de la cual el número de días para cada fase, que antes disminuía, comienza a crecer, hace de nuevo que no tenga sentido el ajuste a dichos datos por medio de funciones que, como las rectas, exponenciales, logarítmicas o potenciales son siempre crecientes o siempre decrecientes. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2. Material y métodos

Los datos de YU AND LUCK [7] para *Aonidiella aurantii* y para *Aphytis melinus* indican, para unas temperaturas dadas, el número de días que vive en cada una de las fases.

### 2.1. Análisis de los datos para *Aonidiella aurantii*

Se observa que al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. Para la última temperatura, 33 grados centígrados, para la 2ª Larva el número de días pasa de 2.1 a 30 °C a 6.39 para una temperatura de 33 °C; idéntico comportamiento se tiene para 2ª Muda, en que pasa de 4.39 a 5.19, para Hembras 3ª Larva de 6.4 a 7.4; para Hembra Madura, de 11.16 a 12.46; Prepupa, de 1.15 a 1.48, y Macho pupa de 2.44 a 2.87. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. En los casos en que esto no ocurre es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas se repetiría dicho comportamiento.

Analizando los datos se observa que las bajas temperaturas son desfavorables a la evolución de la *Aonidiella aurantii* y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar su ciclo biológico en cada fase. Sin embargo, al aumentar demasiado la temperatura, para una temperatura crítica, esa tendencia se invierte y un exceso de temperatura comienza a ser desfavorable. Existe, por tanto, una temperatura crítica en la que se modifica la tendencia pasando de ser una curva decreciente a ser una curva creciente.

Si existe un sentido biológico que explica la existencia de dicha temperatura crítica a partir de la cual tiene sentido que aumente el número de días para cada fase, no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, que siempre son decrecientes (o únicamente crecientes). Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2.2. Análisis de los datos para *Aphytis melinus*

En el artículo de YU & LUCK [8] para *Aphytis melinus* muestra, para unas temperaturas dadas, el número de días que vive en cada una de las fases. Se observa que también para *Aphytis melinus* al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. En *Aphytis melinus*, para huevo el número de días pasa de 1.94 para una temperatura de 30 grados centígrados a 2 para una temperatura de 33 °C; idéntico comportamiento para Larva en que pasa de 4.06 a 4.2; para Prepupa de 1.08 a 0.33; para pupa incolora de 2.09 a 2.13; para pupa de ojos verdes, de 0.69 a 0.92. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. En el único caso en que esto no ocurre, pupa de ojos rojos, es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas empezaría a suceder.

Analizando los datos se observa que, igual que *Aonidiella aurantii*, las bajas temperaturas son desfavorables a la evolución de *Aphytis melinus* pues necesita más días para completar la evolución de cada fase y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar el ciclo biológico. Sin embargo, un exceso de temperatura comienza a ser también desfavorable, y esa tendencia se invierte.

Si existe un sentido biológico que explica la existencia de una temperatura crítica a partir de la cual tiene sentido que aumente el número de días para cada fase, no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, que siempre es decreciente. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2.3. Ajuste de esos datos a funciones lineal, potencial, exponencial, logarítmica y cuadrática

Estas funciones mantienen siempre la misma tendencia, son o siempre crecientes o siempre decrecientes

## 2.4. Función cuadrática: Parábolas

La parábola  $y = ax^2 + bx + c$ , si el coeficiente  $a$  es positivo, primero decrece hasta su vértice y luego crece, o viceversa si  $a$  tiene signo negativo. Tiene el vértice en  $(-b/2a, c - b^2/4a)$ . El coeficiente  $a$  nos indica la forma de la parábola, si es más achatada o más estrecha. Los coeficientes  $b$  y  $c$  nos indican dónde se traslada el vértice la parábola  $y = ax^2$ .

En nuestro caso, la abscisa del vértice,  $-b/2a$ , nos indica la temperatura a la que los días empiezan a crecer, y la ordenada,  $c - b^2/4$ , el número de días correspondiente a dicha temperatura crítica.

## 2.5. Ajuste a parábolas de los datos de *Aonidiella aurantii*

Buscamos las parábolas  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajustan a los datos.

Para 1ª Larva la parábola obtenida es  $\text{Días} = 0.07 T^2 - 4.167 T + 70.88$ , donde  $T$  es temperatura, con un ajuste  $R^2$  de 1. Tiene su temperatura crítica para 31.57 °C, vértice de la parábola, con un número de días para esa temperatura de 5.12. Y así para cada una de las fases: 1ª Larva, 1ª Muda, 2ª Larva, Hembra 2ª Larva, Hembra 2ª Muda, Hembra 3ª Larva, Hembra madura, Macho 2ª Larva, Macho prepupa y Macho pupa.

Se ha buscado la parábola:  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajuste a los datos de YU AND LUCK [8] por el método de los mínimos cuadrados y se ha medido la bondad de esos ajustes. Los ajustes  $R^2$  se observa en la tabla 1 son bastante buenos.

Tabla 1: *Aonidiella aurantii*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$ , con ajuste, temperatura crítica y días

	Parábola	Ajuste $R^2$	Temperatura crítica en °C	Días
1ª Larva	Días = $0.07 T^2 - 4.167 T + 70.88$	1	31.57	5.12
1ª Muda	Días = $0.05 T^2 - 3.04 T + 50.41$	0.98	31.12	3.33
2ª Larva	Días = $0.05 T^2 - 3.04 T + 50.41$	0.91	27.06	3.09
Hembra 2ª Larva	Días = $0.01 T^2 - 0.41 T + 0.99$	0.99	32.56	1.46
Hembra 2ª Muda	Días = $0.04 T^2 - 2.65 T + 48.12$	0.94	32.86	4.59
Hembra 3ª Larva	Días = $0.04 T^2 - 2.23 T + 39.57$	0.99	29.39	6.75
Hembra madura	Días = $0.14 T^2 - 8.47 T + 137.97$	1	29.95	11.12
Macho 2ª Larva	Días = $0.02 T^2 - 1.44 T + 30.11$	0.98	37.75	2.89
Macho prepupa	Días = $0.01 T^2 - 0.58 T + 9.96$	0.97	29.84	1.32
Macho pupa	Días = $0.04 T^2 - 2.39 T + 38.78$	0.99	30.31	2.49

Para medir el ajuste obtenido se calcula para los datos de temperaturas utilizados por YU los días que les asignarían las parábolas obtenidas, y se calcula la diferencia, en valor absoluto, entre dicho valor y el de los datos que se proporcionados por YU. Se suman todos estos valores absolutos.

Por ejemplo, para 1ª Larva se tiene:

Temperatura	Diferencia en valor absoluto
17	0.03
20	0.01
25	0.32
26.7	0.49
30	0.14
33	0.06
Suma	1.05

Los valores obtenidos con dichos ajustes, para todas las fases, son: 1.05; 2.28, 0.38; 4.78; 1.06; 1.17; 1.68; 0.57; 1.14.

## 2.6. Ajuste a parábolas de los datos de *Aphytis melinus*

Buscamos las parábolas  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajustan a los datos de *Aphytis melinus* por el método de los mínimos cuadrados y se ha medido la bondad de esos ajustes. Los ajustes  $R^2$  se observan en la tabla 2 y son bastante buenos.

Para Huevo la parábola obtenida es  $Días = 0.021T^2 - 1.346 T + 23.08$ , donde T es temperatura, con un ajuste  $R^2$  de 0.98. Tiene su temperatura crítica para 32.05 °C, vértice de la parábola, con un número de días para esa temperatura de 1.51. Y así para cada una de las fases: Huevo, Larva, Prepupa, Pupa incolora, Pupa de ojos verdes, y pupa de ojos rojos.

Tabla 2: *Aphytis melinus*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$ , con ajuste, temperatura crítica y días

	Parábola	Ajuste $R^2$	Temperatura crítica en °C	Días	Ajuste calculado
Huevo	$D = 0.021T^2 - 1.346 T + 23.08$	0.98	32.05	1.51	1.77
Larva	$D = 0.025 T^2 - 1.69 T + 32.30$	0.99	33.32	4.1	0.71
Prepupa	$D = 0.009 T^2 - 0.55 T + 9.399$	0.94	31.14	0.87	0.88
Pupa incolora	$D = 0.019 T^2 - 1.23 T + 21.44$	0.99	31.62	2.05	0.43
Pupa de ojos rojos	$D = 0.0078T^2 - 0.55 T + 11.16$	0.96	35.56	1.3	0.99
Pupa de ojos verdes	$D = 0.003 T^2 - 0.21 T + 4.468$	0.91	34.9	0.81	0.52

Los ajustes son, en todos los casos, muy buenos.

## 3 Resultados

### 3.1. Ajustes de *Aonidiella aurantii*

Se analizan los datos de YU & LUCK [7] para *Aonidiella aurantii* y se calculan las ecuaciones de las funciones (polinomio de segundo grado, lineal, potencial, polinomio de tercer grado, polinomio de cuarto grado) que mejor se ajustan a esos datos.

Se calculan las ecuaciones de la función polinómica de segundo grado:

Tabla 3: *Aonidiella aurantii*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	1ª Larva	1ª Muda	2ª Larva	Hembra 2ª Larva	Hembra 2ª Muda	Hembra 3ª Larva	Hembra madura	Macho 2ª Larva	Macho Prepupa	Macho pupa
$a =$	0.066	0.0486	0.0717	0.0063	0.0403	0.038	0.1414	0.0191	0.0097	0.0395
$b =$	-4.167	-3.0253	-3.8804	-0.4103	-2.6489	-2.2336	-8.4702	-1.442	-0.5789	-2.3948
$c =$	70.882	50.413	55.59	8.1398	48.118	39.569	137.97	30.107	9.9604	38.783
$R^2 =$	0.9977	0.9842	0.9112	0.9858	0.9375	0.9894	0.9992	0.9831	0.9682	0.9916
Temperatura crítica: T	31.57	31.12	27.06	32.56	32.86	29.39	29.95	37.75	29.84	30.31
Días: D	5.12	3.33	3.09	1.46	4.59	6.75	11.12	2.89	1.32	2.49

Se calcula el vértice de cada parábola que nos da la temperatura crítica a la que el número de días comienza a crecer y el número mínimo de días para cada una de las etapas. Se calculan los ajustes.

Tabla 4: *Aonidiella aurantii*. Ajustes de la función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	1ª Larva	1ª Muda	2ª Larva	Hembra 2ª Larva	Hembra 2ª Muda	Hembra 3ª Larva	Hembra madura	Macho 2ª Larva	Macho Prepupa	Macho pupa
P(17) =	0.03	0.40	0.40	0.07	1.03	0.02	0.13	0.39	0.11	0.26
P(20) =	0.01	0.83	0.45	0.09	1.81	0.08	0.27	0.67	0.15	0.47
P(25) =	0.32	0.34	0.36	0.10	0.16	0.34	0.45	0.08	0.01	0.13
P(26.7) =	0.49	0.34	0.28	0.00	0.59	0.12	0.27	0.40	0.07	0.13
P(30) =	0.14	0.37	1.61	0.09	0.58	0.36	0.04	0.04	0.17	0.05
P(33) =	0.06	0.01	0.77	0.02	0.60	0.16	0.02	0.09	0.06	0.10
<b>TOTAL</b>	<b>1.05</b>	<b>2.28</b>	<b>3.87</b>	<b>0.38</b>	<b>4.78</b>	<b>1.08</b>	<b>1.17</b>	<b>1.68</b>	<b>0.57</b>	<b>1.14</b>

Los valores obtenidos con estos ajustes son: 1.05; 2,28; 3,87; 0,38; 4,78; 1,08; 1,17; 1,68; 0.57 y 1.14.

El peor ajuste en la función polinomial de segundo grado es para la Hembra 2ª Muda (4.78).

El ajuste de las funciones polinómicas del segundo grado se compara con el ajuste lineal,  $Días = aT + b$ , y con el ajuste potencial:  $Días = aT^b$ , obtenido por el mismo procedimiento.

Tabla 5: Cálculo de los ajustes para ecuaciones polinómicas de segundo grado, funciones lineales y funciones potenciales. T es la temperatura y D, el número de días que tarda cada etapa en desarrollarse para esa temperatura.

	Polinómica de Segundo grado: $D = aT^2 + bT + c$	Función Lineal: $D = aT + b$	Función Potencial:
1ª Larva	1.05	58.1	2.79
1ª Muda	2.28	38.8	3.42
2ª Larva	3.87	0	6.97
Hembra 2ª Larva	0.38	12.1	0.41
Hembra 2ª Muda	4.78	0	36.22
Hembra 3ª Larva	1.08	22.1	2.69
Hembra Madura	1.17	56.1	6.67
Macho 2ª Larva	1.68	38.4	2.38
Macho prepupa	0.57	0	0.84
M pupa	1.14	17.5	2.79

Se observa que las funciones polinómicas de segundo grado tienen mejores ajustes.

Los datos también se ajustan a otras funciones: cúbicas, cuárticas... Por ejemplo, en el caso más desfavorable, para "2ª Muda", las cúbicas y cuárticas que se ajustan a los datos de YU son, respectivamente:  $Días = 0.0089 T^3 - 0.6339 T^2 + 13.866 T - 82.483$ , con un ajuste de 2.7, y las funciones polinómicas de cuarto grado son:

$$Días = 0.0008 T^4 + 0.0868 T^3 - 3.4885 T^2 + 59.496 T - 350.58, \text{ con un ajuste de } 54.55.$$

Dibujamos los gráficos para verificar la bondad del ajuste de las funciones polinómicas de segundo grado a los datos de YU & LUCK [7].

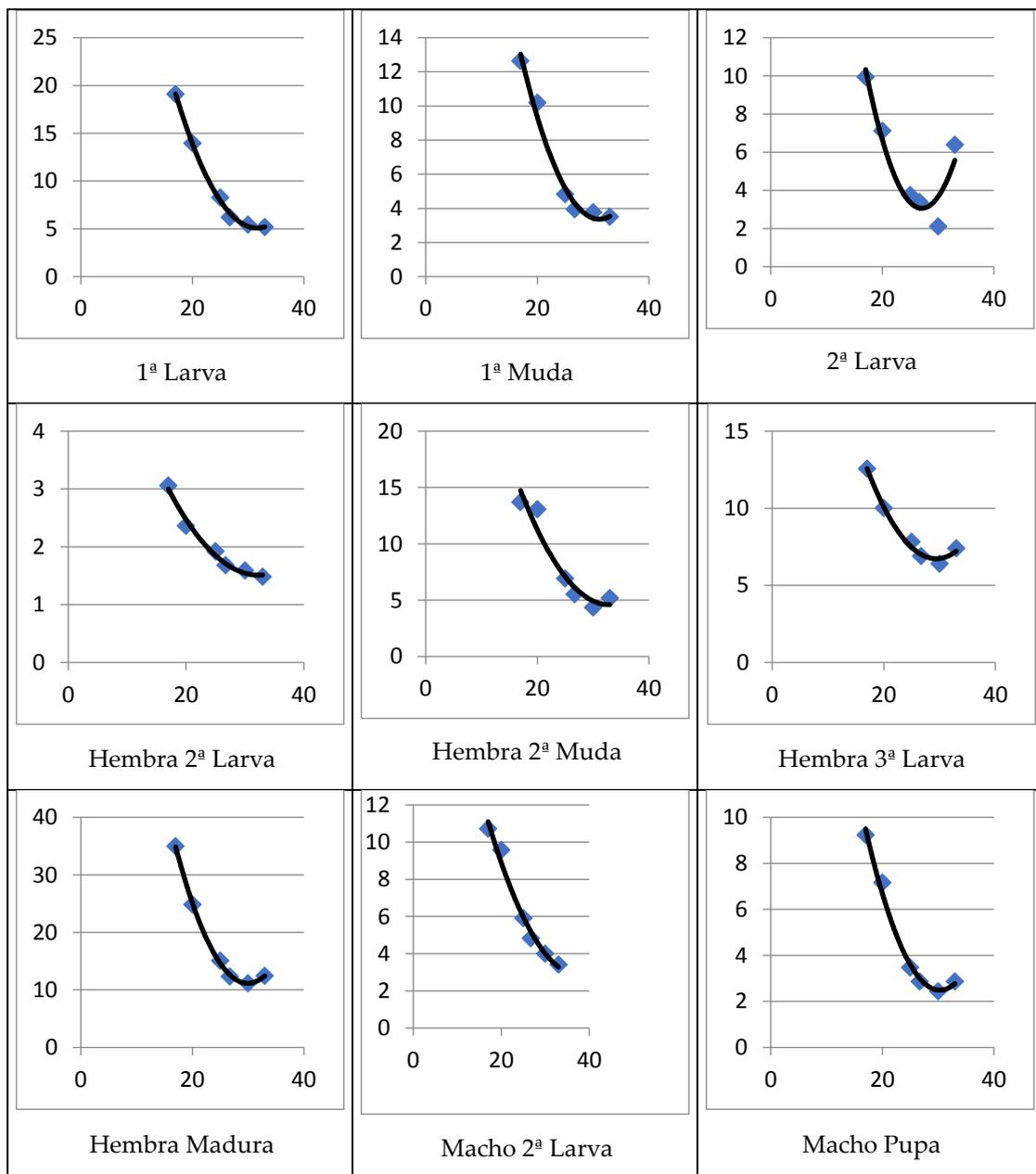


Figura 1: En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1990 [7], y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, en cada una de las etapas, para *Aonidiella aurantii*.

### 3.2. Ajustes de *Aphytis mellinus*

Se analizan los datos de YU, D.S. & LUCK, R. F. [8], para *Aphytis mellinus* y se calculan las funciones polinómicas de segundo grado (lineal, potencial, polinomio de tercer grado, polinomio de cuarto grado) que se ajustan mejor a esos datos.

Se calculan las ecuaciones de la función polinómica de segundo grado:

Tabla 6: *Aphytis mellinus*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	Huevo	Larva	Prepupa	Pupa incolora	Pupa de ojos rojos	Pupa de ojos verdes
a =	0.021	0.0254	0.0088	0.0194	0.0078	0.003
b =	-1.346	-1.6926	-0.548	-1.2267	-0.5548	-0.2094
c =	23.081	32.302	9.3994	21.444	11.162	4.4685
R2 =	0.9842	0.996	0.9431	0.9966	0.9649	0.9102
Temperatura crítica: T	32.047	33.318	31.136	31.616	35.564	34.9
Días: D	1.513	4.104	0.868	2.052	1.296	0.814

Calculamos el vértice de cada parábola que nos da la temperatura crítica a la que el número de días comienza a crecer y el número mínimo de días para cada una de las etapas.

Para determinar los ajustes, hemos calculado la diferencia, en valor absoluto, entre el valor asignado por la función obtenida y el valor de YU (YU, D.S. & LUCK, R. F. [8]).

Tabla 7: *Aphytis mellinus*. Ajustes de la función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	Huevo	Larva	Prepupa	Pupa incolora	Pupa de ojos rojos	Pupa de ojos verdes
P(17) =	0.04	0.02	0.14	0.03	0.13	0.09
P(20) =	0.37	0.07	0.23	0.07	0.21	0.12
P(25) =	0.44	0.18	0.16	0.18	0.19	0.01
P(26.7) =	0.11	0.03	0.08	0.09	0.27	0.01
P(30) =	0.34	0.32	0.20	0.01	0.07	0.20
P(33) =	0.47	0.09	0.07	0.04	0.11	0.09
TOTAL:	1.77	0.71	0.88	0.43	0.99	0.52

Los valores obtenidos para estos ajustes son: 1.77; 0.71; 0.88; 0.43; 0.99 y 0.52. Se observa que los ajustes de *Aphytis mellinus* son mejores que para *Aonidiella aurantii*.

Del mismo modo, se calculan otras funciones que ajustan los datos de Yu (YU, D.S. & LUCK, R. F. [8]): funciones lineales, funciones potenciales, funciones polinómicas de tercer grado, funciones polinómicas de cuarto grado, funciones exponenciales, funciones logarítmicas ... y en todos los casos, se calcula la bondad de los ajustes para determinar qué función se ajusta mejor a esos datos. Como Yu ajusta los datos a una función lineal, indicamos los valores obtenidos para este caso y para la función potencial.

Tabla 8: Cálculo de los ajustes para ecuaciones polinómicas de segundo grado, funciones lineales y funciones potenciales.

	Polinómica de segundo grado: $D = aT^2 + bT + c$	Función lineal: $D = aT + b$	Función potencial: $a \square T^b$
Huevo	1.77	8.29	7.40
Larva	0.71	15.84	16.88
Prepupa	0.88		0.84
Pupa incolora	0.43		0.96

Pupa de ojos rojos	0.99	4.34	8.64
Pupa de ojos verdes	0.52	5.08	7.39

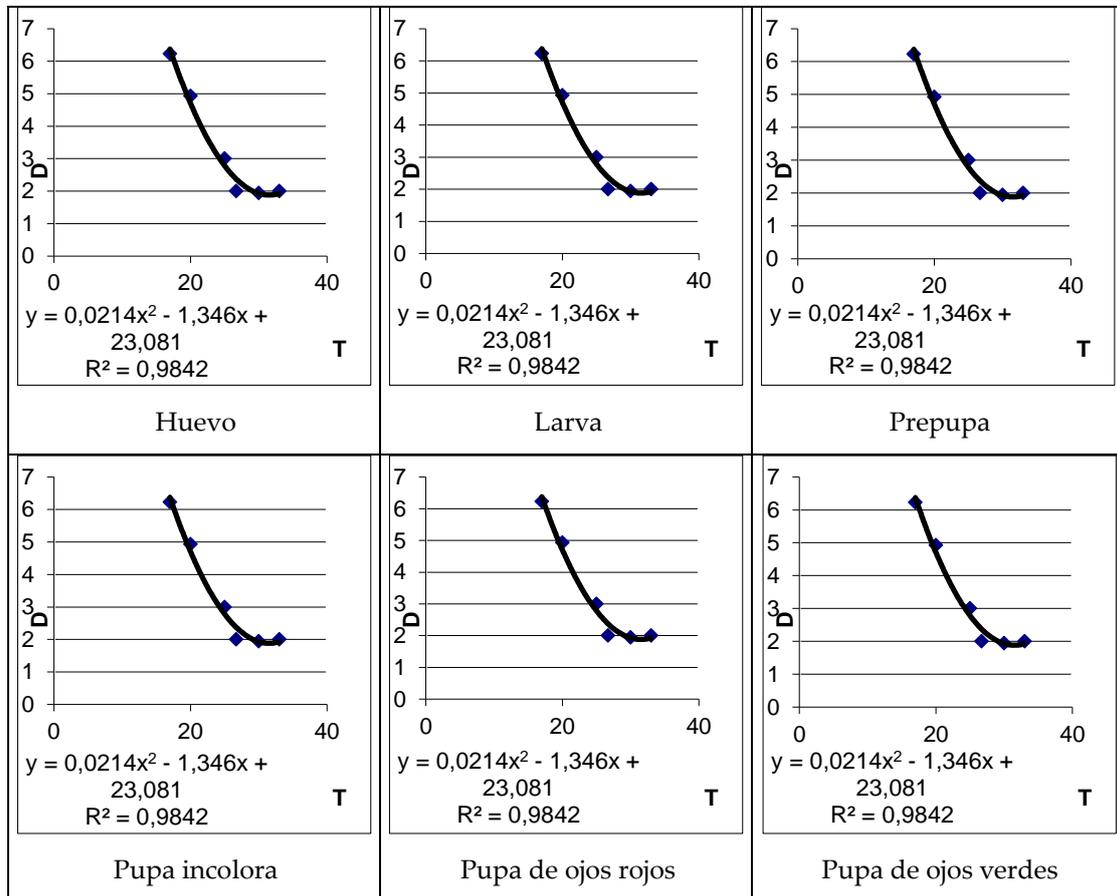


Figura 2: En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1988 [8], y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, para cada una de las etapas, para *Aphytis melinus*.

#### 4. Discusión

Los datos utilizados por YU [6] (y luego por otros autores) indican que para cada etapa de desarrollo de *Aonidiella aurantii* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [7]) y su enemigo *Aphytis melinus* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]) hay una temperatura crítica para la cual el número de días en que esta etapa completa su desarrollo comienza a crecer. Por lo tanto, hemos estudiado funciones como la función polinómica del segundo grado o la función polinómica del cuarto grado que decrecen hasta un valor mínimo y luego crecen.

Hemos estudiado el ajuste de los datos para éstas y otras funciones.

En el caso de *Aonidiella aurantii*, el peor ajuste con funciones polinomiales de segundo grado lo tenemos para hembra 2ª Muda (4.78). Esta es la razón por la cual hemos indicado el cálculo que hemos obtenido para esa etapa con la función polinómica de cuarto grado. Sin embargo, el valor obtenido es mayor (54.55), con lo que el ajuste es peor.

Parecía plausible que este ajuste fuera mejor ya que Yu ( YU, D.S. & LUCK, R. F., ([7]) usó solo seis temperaturas (17 °C, 20 °C, 25 °C, 26.7 °C, 30 °C y 33 °C) y si se utilizara una función polinomial de quinto grado, pasaría por todos los datos (aunque siendo una función decreciente no la consideramos un buen modelo).

Analizamos los datos de YU, D.S. & LUCK, R. F., [8] para *Aphytis mellinus* y calculamos las funciones polinómicas de segundo grado que mejor se ajustan a esos datos. Para cada una de las etapas calculamos la temperatura crítica a la que comienza a crecer el número de días y el número mínimo de días.

Para determinar los ajustes, hemos calculado la diferencia, en valor absoluto, entre el valor asignado por la función obtenida y el valor de Yu ( YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]). Los valores obtenidos con estos ajustes son: 1.77; 0,71; 0,88; 0,43; 0,99 y 0,52. Se observa que los ajustes para *Aphytis mellinus* son mejores que para *Aonidiella aurantii*.

## 5. Conclusiones

Ser capaz de modelar de la mejor manera posible el comportamiento de la plaga de *Aonidiella aurantii* y sus enemigos naturales ayuda a combatirla. En este trabajo se utilizan los datos de YU para analizar una mejor manera de modelar la relación entre la temperatura y la duración del desarrollo en *Aonidiella aurantii* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [7]) y su enemigo *Aphytis melinus* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]). Algunos autores ajustan los datos usando una función lineal que no es adecuada. Las bajas temperaturas son desfavorables para la evolución de *Aonidiella aurantii* y su enemigo *Aphytis melinus* porque necesitan más días para completar la evolución de cada fase. Sin embargo, a medida que la temperatura aumenta desde una cierta temperatura óptima, esa tendencia se invierte y un exceso de temperatura también se vuelve desfavorable. Por esta razón, no tiene sentido aproximar los datos por una función que siempre sea decreciente, cuando hay una temperatura óptima a partir de la cual el número de días comienza a crecer. La mejor manera de modelar la relación entre los días de duración que toma cada etapa con la temperatura es usar la función polinómica de segundo grado. Para verificarlo, hemos aproximado los datos a través de otras funciones y hemos calculado en todos esos casos la medida del ajuste a dichos datos.

## Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Apostolos Pekas por orientarnos en la búsqueda de las publicaciones que contenían los datos que son la base de este artículo.

## Referencias

- [1] ASPLANATO, G.; GARCÍA-MARÍ, F. *Parasitismo de la cochinilla roja californiana Aonidiella aurantii en la zona citrícola sur de Uruguay*. Bol. San. Veg. Plagas, 28: 5-20, 2002.

- [2] ABDELRAHIMAN, I., *The effect of extreme temperatures on California red scale, Aonidiella aurantii* Mask. (Hemiptera: Diaspididae), and its natural enemies. Australian Journal of Zoology 22(2): 203-212. 1974A.
- [3] KFIR, R. AND LUCK, R. F. *Effects of temperature and relative humidity on development rate and adult life span of three Aphytis species (Hymenoptera Aphelinidae) parasitising California red scale (Aonidiella aurantii)*. Zeitschrift für Angewandte Entomologie. Vol. 97. 314 – 320. 1984. Article first published online: 2009. doi: 10.1111/j.1439-0418.1984.tb03754.x. Division of Biological Control. University of California. Riverside.
- [4] MURDOCH ETAL. *Aphytis red scale system (Supplementary material to “Resource suppression and stability in a parasitoid host system experimental demonstration”)*. 1905.
- [5] ABDELRAHIMAN, I. *Growth, development and innate capacity for increase in Aphytis chrysomphali Mercet and Aphytis melinus DeBach, parasites of California red scale, Aonidiella aurantii (Mask.) in relation to temperature*. Australian Journal of Zoology 22 (2): 213-230. 1974B.
- [6] YU, D.S. *The interactions between California red scale Aonidiella aurantii (Maskell), and its parasitoids in citrus groves of inland southern California*. Ph.D. dissertation, University of California, Riverside, 105. 1986.
- [7] YU, D.S. & LUCK, R. F. *Variation in life history parameters of California red scale on different citrus cultivars*. Ecology - Wiley Online Library. 1990.
- [8] YU, D.S. & LUCK, R. F. *Temperature dependent size and development of California red scale and its effect on horst availability for the ectoparasitoid Aphytis melinus*. Environ. Entomol. 17: 154 – 161. 1988.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Alfonso Garmendia

*Correo Electrónico:* algarsal@upvnet.upv.es

*Institución:* Instituto Agroforestal Mediterráneo. Universitat Politècnica de València.

*Nombre:* Adela Salvador

*Correo Electrónico:* adela.salvador@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a las Ingenierías Civil y Naval. Universidad Politécnica de Madrid.

# Experiencias Docentes

## Errores frecuentes en el área de matemáticas, un análisis estadístico con alumnos de bachillerato

## Frequent mistakes in the area of mathematics, a statistical analysis with high school students

Pablo Sánchez Madrigal

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 023-050, ISSN 2174-0410  
Recepción: 31 Ago'19; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

En este artículo se hace un estudio estadístico de los errores matemáticos de los estudiantes de una Escuela de bachillerato en México, mediante una evaluación escrita elaborada y aplicada a una muestra de alumnos. Con la información recabada y con la ayuda de la estadística descriptiva, se detectaron aquellos errores típicos que con frecuencia cometen los estudiantes. Una vez realizado lo anterior, se implementaron estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generaron más dificultades, con el objetivo de superar los errores detectados. Consecuentemente, se aplicó una segunda evaluación escrita a la muestra de alumnos, para entonces aplicar la prueba estadística t de Student y relacionar los datos recabados. El objetivo fue comparar los resultados de aprendizaje del grupo de estudiantes antes y después de recibir el entrenamiento focalizado en los errores más frecuentes.

**Palabras Clave:** Análisis estadístico, errores frecuentes en matemáticas, estudiantes de bachillerato.

### Abstract

This paper makes a statistical study of the mathematical errors of the students of a High School in Mexico, by means of a written evaluation elaborated and applied to a sample of students. With the information collected and with the help of descriptive statistics, those typical mistakes that students frequently make were detected. Once this was done, strategies for better learning were implemented, insisting on those aspects that generated the most difficulties, with the objective of overcoming the errors detected. Consequently, a second written evaluation was applied to the sample of students, to then apply the t of Student statistical test and match the data collected. The objective was to compare the learning results of the group of students before and after receiving the training focused on the most frequent errors.

**Keywords:** Statistical analysis, frequent mistakes in mathematics, high school students.

## 1 Introducción

El bajo desempeño académico en el área de matemáticas de estudiantes de nivel medio superior es un problema generalizado en México y otros países. La Escuela Preparatoria Oficial No. 19, localizada en el municipio de San Martín de las Pirámides, Estado de México, no es la excepción. Para el plantel educativo, las bajas calificaciones de sus estudiantes en las áreas de matemáticas ha sido una problemática constante a superar. Aproximadamente, un 59% de los estudiantes muestran dificultades en su aprendizaje. En la Figura 1 se observa el resultado de una evaluación realizada por la Institución, la cual muestra una eficiencia de 41% en habilidades matemáticas de alumnos correspondientes al tercer grado.

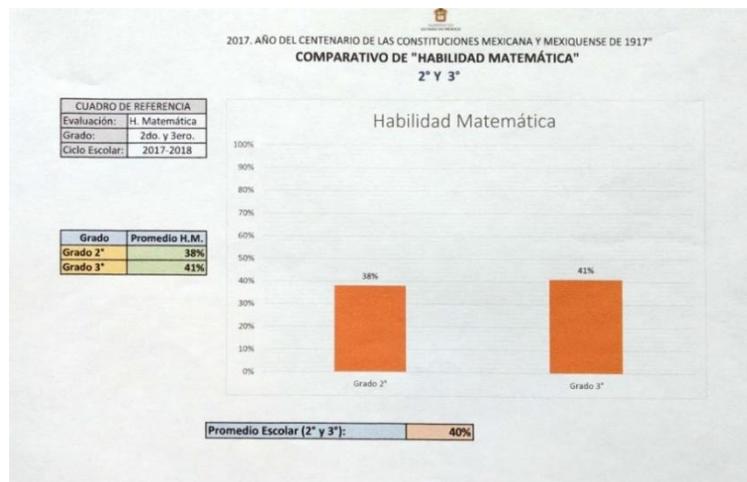


Figura 1. Comparativo de habilidad matemática 2º y 3º  
(Fuente: Escuela Preparatoria No. 19, San Martín de las Pirámides)

En gran medida, el aprendizaje de las matemáticas se ha visto obstaculizado por la presencia de errores implementados en los alumnos. El objetivo de este trabajo es identificar aquellos errores que son frecuentes en los estudiantes, aplicar técnicas de corrección (superación y/o eliminación) y evaluar la eficiencia de dichas técnicas. Se enfoca en los estudiantes que cursan el 5º y 6º semestre (último año de estudio y edades de 17 a 18 años) y que ya han cursado las materias correspondientes del 1º al 4º semestre (pensamiento numérico y algebraico, pensamiento algebraico, razonamiento complejo, trigonometría, geometría analítica), durante el ciclo escolar 2017-2018. Una vez identificados, se pretende apoyar a la toma de decisiones en la planificación docente y eventualmente, organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, para contribuir a una mejor preparación de instancias de corrección.

Los errores son parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pero pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas de los alumnos, lo que implicaría desarrollar actividades enfocadas a superar tales dificultades. Además, pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático. Con el análisis estadístico será posible revelar los errores sistemáticos que pueden estar cometiendo los alumnos y que les impiden obtener un

conocimiento adecuado de las matemáticas, lo que podría proporcionar elementos clave en las estrategias de enseñanza-aprendizaje.

## 2 Marco teórico

### 2.1 Escuela Preparatoria No. 19

Su fundación, data del 20 de octubre de 1986, como una escuela particular incorporada al Estado; tenía un grupo único de 40 estudiantes que pagaban colegiatura. La Institución ha ido creciendo tanto en infraestructura como en matrícula. En la actualidad cuenta con 7 grupos de cada grado en el turno matutino y 6 grupos de cada grado en el turno vespertino. La matrícula de alumnos es de 1045 en el turno matutino y 810 en turno vespertino.

La Escuela Preparatoria cuenta con infraestructura consistente en laboratorios de cómputo, laboratorios multidisciplinarios (física, química y biología), y de idiomas. Además de teatro, auditorio, sala audiovisual, biblioteca, canchas deportivas, cafetería, papelería y café internet. Se imparten diferentes asignaturas del área de matemáticas, como pensamiento numérico y algebraico, razonamiento complejo, trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial e integral.

### 2.2 Errores frecuentes en matemáticas

La educación matemática tiene el importante desafío de explicar en términos abstractos diversos fenómenos tanto naturales como sociales. El lenguaje abstracto y riguroso que caracteriza la enseñanza de esta materia en la mayoría de los centros educativos de nivel bachillerato en nuestro país, aunado a la prioridad procedimental, falta de ejemplos reales, para la percepción del estudiante, dificultan la comprensión, el interés y el sentido que tiene la matemática. Sin duda alguna, para la mayoría de los estudiantes de todos los niveles educativos, las matemáticas es una de las asignaturas que mayor problema les presenta para su aprendizaje [5].

Los errores aparecen en los trabajos de los alumnos, sobre todo al enfrentarse a conocimientos nuevos. El nuevo conocimiento es apoyado por los conocimientos anteriores, pero muchas veces resultan ser un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se complementa al antiguo, sino que lucha contra él y provoca cambios en su estructura. Los alumnos con dificultades pueden memorizar los procedimientos sin entenderlos, cometiendo, como resultado, errores consistentes en los procedimientos, obteniendo un conocimiento incompleto. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, que se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas, las cuales suelen interpretarse como señal de carencia en el aprendizaje, e incluso como un fracaso en la consecución de los objetivos planteados; resultando necesaria la detección y análisis de los errores, y su utilización positiva en el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas en los alumnos de la Institución [8].

Se habla de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar [5]. Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que permite establecer una investigación que informe, cuáles son y de qué tipo. Es importante indicar que los errores no aparecen por azar,

sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, además de que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de los cuales se presentan inevitablemente [10].

El estudio de errores en el aprendizaje ha sido una cuestión de interés constante. En el siglo XVIII, Roland Charnay (1789) investigador francés con gran influencia en la didáctica de las matemáticas afirmaba que:

*“considerar al error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos” [3].*

En las primeras décadas del siglo XX, los trabajos de investigación giraban en torno al análisis de errores cometidos en Aritmética por alumnos de los primeros años escolares. Una excepción, según Cury (1994), [2] fue la investigación llevada a cabo por Smith – en Estados Unidos –trabajando con alumnos de la high school, sobre errores en demostraciones de Geometría Plana.

Se considera a Weiner (1922), en Alemania, el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores. Diversos estudios posteriores, realizados en Alemania, la Unión Soviética, Estados Unidos y España, con anterioridad a 1960, consistieron fundamentalmente en recuentos del número de soluciones incorrectas y en el análisis de los tipos de errores detectados, para poder clasificarlos y de esta manera intentar examinar cómo surgen, y hacer inferencias sobre qué factores podrían haberlos provocado [10].

Radatz (1980), [9] afirma que hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la matemática. Señaló varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación, son importantes. Entre ellas, las reformas sucesivas del currículo de matemática, que originan nuevos errores debido a los contenidos específicos. La individualización y la diferenciación en la instrucción matemática, requiere de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas. Los profesores necesitan modelos de actuación para diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos. Radatz hace una revisión de gran parte de las investigaciones realizadas sobre errores, tanto en Estados Unidos como en Europa, hasta finales de los años 70, encontrando que:

- La Aritmética constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores.
- Los desarrollos teóricos en análisis de errores muestran cierta continuidad en Estados Unidos, mientras que en los países europeos las producciones han sido esporádicas y carecen de continuidad en el tiempo hasta fechas muy recientes.
- Existe una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicación de las causas de los errores.

Un abordaje más amplio sobre las posibilidades de la utilización del análisis de errores en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha sido presentado por la investigadora italiana Raffaella Borasi. En sus trabajos, según Cury (1994), se incluyen las ideas de Kuhn, Lakatos.

Piaget y Vergnaud, y la autora propone nuevos rumbos para el análisis de errores. Además del papel tradicional del análisis de errores, en el sentido de identificar y clasificar los errores

cometidos por los alumnos y proponer estrategias para eliminarlos, Borasi plantea otras posibilidades: usar los errores como instrumentos para explorar el funcionamiento de la mente, aprovechar los errores como elementos fundamentales para el desarrollo de una disciplina [2].

Indudablemente, la presencia de las matemáticas la observamos en todos los productos culturales de la vida moderna, y es un componente inseparable de la actividad científica. Su utilidad es indudable y la necesidad de su enseñanza es una prioridad en las políticas educativas y está presente durante toda la vida escolarizada; sin embargo, es la disciplina que presenta mayores dificultades para su aprendizaje. Por ejemplo, en el año 2013 en México, cerca del 63.7% de los estudiantes de Educación Media Superior tuvieron un desempeño insuficiente y elemental en matemáticas en la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares, ENLACE [4].

La implementación de una evaluación escrita para la detección de errores y la posterior clasificación de los mismos, ha permitido obtener una radiografía del estado de conocimiento de los alumnos y constituirá una valiosa ayuda a la hora de reorganizar la práctica pedagógica.

## 2.3 Análisis estadístico

La Estadística es la disciplina científica dedicada al tratamiento de la información que contiene series de datos que proceden de la observación de fenómenos colectivos (demográficos, económicos, sanitarios, etc.) en los que intervienen factores de variación que hacen necesario formular modelos probabilísticos para poder llegar a conclusiones o predicciones bajo un determinado nivel de probabilidad. En general los procedimientos estadísticos se aplican a la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisión más efectiva. Su objetivo es reunir una información cuantitativa concerniente a individuos, grupos, series de hechos y deducir, gracias al análisis de estos datos, unos significados precisos o unas previsiones para el futuro [12].

### 2.3.1 Estadística descriptiva

Esta rama de la estadística se encarga de obtener, organizar, presentar y reducir los diferentes datos observados de los registros efectuados por el investigador. Algunas medidas comúnmente utilizadas en la estadística descriptiva, son las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y las medidas de variabilidad o dispersión (varianza, desviación típica, curtosis, etc.)

Si se denota por  $n_1$  y  $n_2$  a los tamaños muestrales de un primer y segundo grupo, las medias  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  y las desviaciones típicas  $(s_1, s_2)$  para los dos grupos son:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1i}}{n_1}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{2i}}{n_2}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1} \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - 1} \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}$$

Donde  $x_1$  indica los valores para la variable del grupo 1 y  $x_2$  indica los valores para la variable del grupo 2.

### 2.3.2 Hipótesis

Una hipótesis se define simplemente como una afirmación acerca de una o más poblaciones. En general, la hipótesis se refiere a los parámetros de las poblaciones acerca de las cuales se hace la afirmación. Las hipótesis estadísticas se establecen en tal forma que puedan ser evaluadas a través de técnicas estadísticas apropiadas. En el contraste de hipótesis se trabaja con dos hipótesis estadísticas que deben enunciarse explícitamente. La primera es la hipótesis que se desea contrastar, conocida como hipótesis nula, y que se designa por el símbolo  $H_0$ . En general, la hipótesis nula se rechaza (si la evidencia estadística en su contra es mucha) o no se rechaza (si la evidencia estadística en su contra no es suficiente). De no rechazarse, se dirá que apoya a otra hipótesis. Esta otra hipótesis se conoce como hipótesis alternativa y puede designarse mediante el símbolo  $H_A$  [13].

### 2.3.3 Estadístico de prueba

El estadístico de prueba es algún estadístico que puede calcularse a partir de los datos de la muestra. Como regla, existen muchos valores posibles que puede tener el estadístico de prueba, dependiendo del valor particular observado de la muestra particular extraída. El estadístico de prueba sirve como un productor de decisiones, ya que la decisión de rechazar o no la hipótesis nula depende de la magnitud del estadístico de prueba [13].

Los contrastes de hipótesis permiten determinar la significancia estadística de los datos recopilados. Es decir, se puede saber, si los resultados obtenidos, fueron producto del azar o del tratamiento experimental aplicado por el investigador [7].

Existen diversas pruebas estadísticas que se emplean en función del diseño de la investigación, el tipo de datos y número de muestras. Para el caso que nos ocupa, la prueba t de Student para muestras pareadas, dependientes o relacionadas, es adecuada en primera instancia. Una prueba t es un contraste de hipótesis de la media de una o dos poblaciones distribuidas normalmente. Aunque existen varios tipos de prueba t para situaciones diferentes, en todas se utiliza un estadístico de prueba que sigue una distribución t bajo la hipótesis nula.

William Sealy Gosset, utilizando el seudónimo de estudiante (Student), desarrolló la prueba t y la distribución t. La t de Student, básicamente fue diseñada para examinar las diferencias entre dos muestras independientes y pequeñas con distribución normal y

homogeneidad en sus varianzas<sup>1</sup>. Gosset insiste en la normalidad de las dos muestras como in requisito en el desarrollo de la prueba [11].

La prueba t de Student se deriva de las distribuciones t. La distribución t es una distribución simétrica, pero a diferencia de la distribución normal que es mesokúrtica, esta distribución es leptokúrtica. Esto significa que la parte central de esta distribución es más delgada y elevada con colas más anchas con respecto a la distribución normal. Esta última característica (colas anchas) implica que la probabilidad de eventos extremos es más alta con la distribución t de Student que en la distribución normal. Esta propiedad convierte a la distribución t de Student en una distribución preferida respecto a la normal para modelar muchas series financieras, por ejemplo. La distribución t de Student tiene un parámetro adicional a la media y desviación estándar, que se conoce como los grados de libertad. Estos grados de libertad determinan el ancho de las colas de esta distribución. Cuanto menores sean los grados de libertad, mayor será el ancho de las colas. Por otro lado, en el límite cuanto más altos sean los grados de libertad, esta distribución tenderá hacia la distribución normal [1].

La distribución t de Student juega un rol protagónico en los test de hipótesis donde la varianza poblacional es desconocida. Se usa para los contrastes de hipótesis de diferencia de medias y para la construcción de intervalos de confianza cuando la desviación estándar poblacional es desconocida. Es importante señalar que se consideran muestras apareadas o dependientes, cuando se obtienen dos conjuntos de datos relacionados por la misma muestra; es decir, se obtienen dos observaciones para cada unidad elemental en la muestra o cuando se mide una característica en las unidades elementales con dos tipos de instrumento, en caso contrario se dice que las muestras son independientes [6].

### 2.3.4 Distribuciones t

Cuando se conoce el valor de la desviación típica  $\sigma$ , se basan los intervalos de confianza y las pruebas para la media  $\mu$ , en el estadístico z de una muestra,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Siendo  $\bar{x}$  la media muestral. La media de la distribución de  $\bar{x}$  es  $\mu$ . Este estadístico z tiene una distribución normal estandarizada  $N(0,1)$ . Cuando no se conoce  $\sigma$ , se sustituye la desviación típica de  $\bar{x}$ ,  $\sigma/\sqrt{n}$  por su error típico  $s/\sqrt{n}$ . El estadístico resultante no tiene una distribución normal. Su distribución se llama distribución t [1].

### 2.3.5 El estadístico t

Sea una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$  de una población que tenga una distribución normal con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ . El estadístico t de dicha muestra es

---

<sup>1</sup> En el artículo original, el autor no define qué es una muestra grande y/o pequeña.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Tiene una distribución  $t$  con  $n - 1$  grados de libertad [1].

### 3 Metodología

Se trata de un tipo de investigación descriptiva e inferencial, que se basa en la caracterización de un hecho, fenómeno o comportamiento de diseño experimental. Es decir, un proceso que consiste en someter a un objeto o grupo de individuos a determinadas condiciones o estímulos (variable independiente), para observar los efectos que se producen (variable dependiente); realizada con estudiantes que cursan el último año en la Escuela Preparatoria Núm. 19.

**Población:** La población que se toma es de 180 estudiantes que cursan el último año, del ciclo escolar 2017-2018 en la Institución (siete grupos del turno matutino), los cuales muestran deficiencias en las áreas de matemáticas.

**Muestra:** En base a la población antes referida, la muestra lo conforma un grupo de 15 estudiantes seleccionados aleatoriamente.

Como instrumento para la recolección de datos, se utilizó una evaluación escrita.

#### 3.1 Etapas

A continuación, se describen las diferentes etapas realizadas. Debe destacarse, que previo al diseño de la primera evaluación escrita, y con la finalidad de tener elementos que apoyaran el diseño del instrumento, se trabajó con la muestra de alumnos, realizando actividades como revisión de apuntes, preguntas y respuestas sobre temas específicos, examinación en la resolución de ejercicios, etc.

##### a) Diseño de evaluación escrita

Se diseña la primera evaluación escrita (Anexo 1) la cual consta de 33 reactivos (o situaciones matemáticas) algunas de solución única, a fin de que el estudiante pueda resolverlo en un lapso de una hora. Introduciendo diversos tipos de ejercicios que sin ser demasiado complejos o tediosos revelen los objetivos del presente trabajo de investigación.

##### b) Primera aplicación de evaluación escrita

Se aplica la primera evaluación escrita a la muestra de alumnos comunicándoles el motivo o la finalidad de la evaluación, además de las indicaciones de no consultar apuntes ni libros para su realización, pues el proyecto pretende conocer el pensamiento y aprendizaje del alumno.

##### c) Obtención y análisis de resultados

Con el uso del software estadístico IBM SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) Statistics 20 y RStudio versión 1.1.383, se procede a procesar los datos obtenidos, que incluyen, tablas de frecuencias, histogramas o gráfico de barras y medidas de tendencia central.

##### d) Implementación de estrategias correctivas

En esta fase se realizan e implementan técnicas didácticas, basadas básicamente en la revisión y estudio de los errores o conceptos; se intenta que el alumno sea quien perciba sus errores, explicando el modo correcto, mediante actividades orientadas a ayudar a la superación de las principales fallas detectadas. La finalidad es que los alumnos, reconozcan y perciban sus errores, se trabaje activamente en su superación, se comparen versiones correctas con incorrectas, etc. Se intenta usar los errores constructivamente a fin de que el alumno tome conciencia y logre superarlos.

e) Segunda aplicación de evaluación escrita

Después de realizar la estrategia anterior, se aplicó una segunda versión de la evaluación escrita (Anexo 2) para así tener elementos suficientes y decidir si la estrategia implementada ha sido efectiva. Esta evaluación contiene ejercicios semejantes a los de la primera evaluación, sin ser idéntica a la misma, lo que proporciona información suficiente para poder valorar si se logró o no la superación de los errores mostrados en la primera.

f) Obtención y análisis de resultados

De manera análoga a la primera evaluación, se procede a procesar los datos de la muestra, apoyados en el uso de software estadístico IBM SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) Statistics 20 y RStudio versión 1.1.383.

g) Contraste de hipótesis

Se usó la prueba estadística *t* de Student para muestras apareadas o relacionadas, puesto que interesa comparar una característica en una población o muestra en dos circunstancias distintas (antes-después); esencialmente se realizaron los siguientes pasos:

- Redactar Hipótesis Nula y Alterna.
- Ejecutar los cálculos (media y desviación estándar).
- Determinar el nivel de significación ALFA.
- Verificar supuesto de Normalidad. Prueba de normalidad con Kolmogorov-Smirnov o Shapiro-Wilks.
- Conclusión de la prueba de Normalidad.
- Se resuelve la fórmula para la prueba *t*.
- Decidir si se acepta o rechaza la Hipótesis nula ( $H_0$ ).
- Redactar la conclusión de la prueba *t* de Student para muestras relacionadas.

A partir del análisis se realizaron las conclusiones sobre cuáles son esencialmente los errores sistemáticos que predominan en determinados ejercicios, con la intención de realizar sugerencias o recomendaciones que contribuyan al mejoramiento del desempeño de los estudiantes en las áreas de matemáticas.

## 4 Resultados

A continuación, se describen en primer lugar, los resultados obtenidos en la 1ª evaluación, seguido de los principales errores frecuentes que fueron detectados. Después, los resultados derivados de la 2ª evaluación y finalmente, la comparación de ambos, para aplicar la prueba estadística.

## 4.1 Resultados de la primera evaluación

En la Figura 2 se observa el número de aciertos obtenido por cada estudiante de la muestra. Considerando al instrumento que se aplicó a los estudiantes como un examen que se califica en forma tradicional, la media del número de aciertos es de 15.53 de 33 reactivos en total, corresponde a una calificación de 47.06/100.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1i}}{n_1} = \frac{233}{15} = 15.53$$

La desviación estándar es de:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1} \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} = 3.2263$$

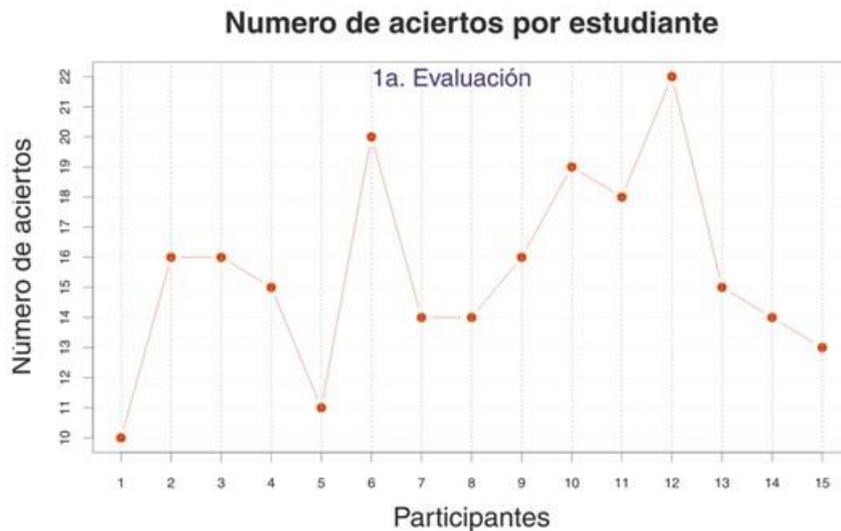


Figura 2. Número de aciertos por estudiante  
(Fuente: Elaboración propia con software RStudio)

La Figura 3 muestra la frecuencia de estudiantes de acuerdo al número de aciertos obtenidos; se observa que las mayores frecuencias se encuentran entre 14 y 16 aciertos.

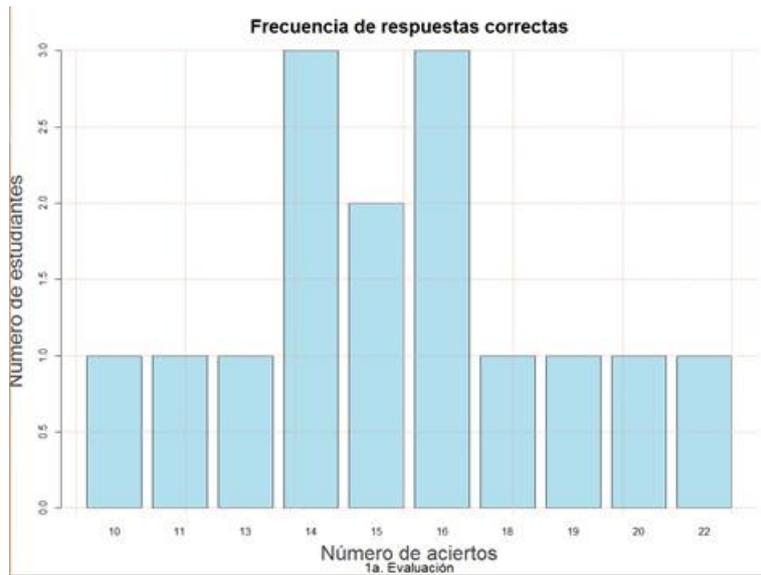


Figura 3. Frecuencia de respuestas correctas  
(Fuente: Elaboración propia con software RStudio)

En cuanto a la clasificación de los reactivos, en la Tabla 1, se presenta el número de respuestas correctas, incorrectas y sin contestar, del total de la muestra, expresados también en porcentaje. Un 51.1% de respuestas son incorrectas (253 de 495) lo que muestra un limitado conocimiento en cuanto a los reactivos de la evaluación. Se observa que el reactivo que más estudiantes contestaron incorrectamente fue el No. 12 y los que más contestaron correctamente fueron el No. 1 y 21.

Tabla 1. Respuestas por reactivo, correctas, incorrectas y sin contestar  
(Fuente: Elaboración propia)

Reactivo	Correcta		Incorrecta		Sin contestar	
	No.	%	No.	%	No.	%
1	12	92.31	3	23.08	0	0.00
2	10	76.92	5	38.46	0	0.00
3	8	61.54	6	46.15	1	7.69
4	3	23.08	12	92.31	0	0.00
5	8	61.54	7	53.85	0	0.00
6	10	76.92	5	38.46	0	0.00
7	11	84.62	4	30.77	0	0.00
8	4	30.77	11	84.62	0	0.00
9	8	61.54	5	38.46	2	15.38
10	7	53.85	7	53.85	1	7.69
11	4	30.77	10	76.92	1	7.69
12	2	15.38	13	100.00	0	0.00
13	3	23.08	12	92.31	0	0.00
14	3	23.08	12	92.31	0	0.00
15	5	38.46	10	76.92	0	0.00

16	8	61.54	7	53.85	0	0.00
17	11	84.62	3	23.08	1	7.69
18 a)	5	38.46	10	76.92	0	0.00
18 b)	4	30.77	11	84.62	0	0.00
18 c)	3	23.08	12	92.31	0	0.00
18 d)	8	61.54	7	53.85	0	0.00
18 e)	11	84.62	3	23.08	1	7.69
18 f)	6	46.15	8	61.54	1	7.69
18 g)	6	46.15	9	69.23	0	0.00
18 h)	3	23.08	12	92.31	0	0.00
18 i)	11	84.62	4	30.77	0	0.00
18 j)	7	53.85	8	61.54	0	0.00
18 k)	9	69.23	6	46.15	0	0.00
18 l)	10	76.92	5	38.46	0	0.00
18m)	9	69.23	6	46.15	0	0.00
19	5	38.46	10	76.92	0	0.00
20	7	53.85	7	53.85	1	7.69
21	12	92.30	3	23.08	0	0.00
<b>Totales</b>	<b>233</b>		<b>253</b>		<b>9</b>	

De los datos anteriores, en la Tabla 2, se muestran entonces los errores frecuentes cometidos, es decir aquellos reactivos donde la mayoría de los alumnos cometieron errores:

Tabla 2. Reactivos con mayores respuestas incorrectas  
(Fuente: Elaboración propia)

Reactivo	12	4	13	14	18c)	18h)	8	18b)	11	15	18a)	19	18g)	18f)	18j)
Porcentaje	86.6%	80%	80%	80%	80%	80%	73.3%	73.3%	71.4%	66.6%	66.6%	66.6%	60%	57.1%	53.3%

## 4.2 Errores frecuentes detectados

A continuación, se describen los errores comunes detectados a partir de la evaluación aplicada:

- Reactivo 12: ¿Es  $-x$  un número negativo?

Un total de 13 alumnos respondieron incorrectamente, lo que sugiere que los estudiantes son descuidados y despreocupados del signo que puede adquirir la variable  $x$ , dan por hecho que un signo menos significa un número negativo, y no dan importancia al valor de  $x$ , el cual puede ser negativo o positivo. Parece complicado entender el "doble negativo" si no está expresamente escrito o con paréntesis.

- Reactivo 4: La ecuación  $-7x + 5 = 0$  tiene como solución:

Las respuestas incorrectas más frecuentes fueron  $-\frac{7}{5}$  seguida de  $-\frac{5}{7}$ , revela deficiencias en el despeje de la variable y la trasposición correcta de términos, pues asumen erróneamente que, si el número (coeficiente) está multiplicando con signo negativo, pasa dividiendo cambiado de signo.

- Reactivo 13: Si un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras responden a la definición?

Identifican la presencia de sólo un triángulo rectángulo, a pesar de haber tres triángulos rectángulos. El hecho de girar los triángulos, dificulta su información espacial al identificar como correcto únicamente a aquel que está en la posición tradicional.

- Reactivo 14: El resultado de  $(-5)^0$  es:

Respuestas frecuentes:  $-5$  y  $0$ . Se infiere, por un lado, que  $a^0 = a$ , puesto que se debe multiplicar  $0$  veces la base, en consecuencia, queda la misma base; por otro lado, se infiere que  $a^0 = 0$ , pues se multiplica cero veces la base.

- Reactivo 18 c):  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

La mayoría de los estudiantes asume que esta igualdad es verdadera, pues infieren en descomponer la fracción en tantas, como sumandos tenga el denominador. En este caso, interfiere el análogo de la regla correcta, la cual es:  $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ .

- Reactivo 18 h):  $x^3 + x^5 = x^8$

Gran parte de los estudiantes asume que es verdadera, interfiere la ley de exponentes en la multiplicación de términos:  $x^3(x^5) = x^8$ , y no dan importancia al hecho de que se trata de una suma de términos, aplicando la misma regla.

- Reactivo 8: La expresión equivalente a  $\frac{3x^3-x}{x}$  es:

Lo frecuente en los alumnos, es que han simplificado la expresión anterior como:  $3x^2 - x$  o bien en:  $3x^3 - 1$ . Es decir, cancelan una  $x$  del denominador contra una  $x$  del primer o segundo término del numerador. Omiten la forma correcta de factorizar primero el numerador, antes de cancelar.

- Reactivo 18 b):  $\sqrt{(x+y)} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

La mayoría de los alumnos contesta que es verdadero. Se pierde el esquema y se asocia con  $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

- Reactivo 11: ¿Cuál es el resultado de  $\left(\frac{3}{5}x\right)^2$ ?

La mayor parte de las respuestas fueron para  $\frac{9}{25}x$  seguidas de  $\frac{3}{5}x^2$ . Descuidan el hecho de aplicar la potencia a ambos factores y solo afectan a uno de ellos.

- Reactivo 15: El resultado de  $-2^4$  es:

La respuesta más frecuente fue  $16$ . Se recupera el esquema previo "todo número negativo elevado a una potencia par da por resultado un número positivo" siendo que el contexto se ha modificado.

- Reactivo 18 a):  $\text{sen}(x+y) = (\text{sen } x) + (\text{sen } y)$

Asumen como verdadera la igualdad, pues suponen erróneamente que se trata de una multiplicación de algo llamado "sen", con algo llamado "x" y "y", a la cual se aplica la propiedad distributiva. No aplican el conocimiento de que el seno es una función trigonométrica y el  $\text{sen}(A)$  se utiliza para describir que se está hablando de la función seno del ángulo  $A$ .

- Reactivo 19: El resultado de  $2(x+1)^2$  es:

Suelen aplicar directamente la propiedad distributiva, sin antes desarrollar previamente la potencia indicada en el paréntesis.

- Reactivo 18 g):  $\text{sen } 3x = 3\text{sen } x$

Asumen como verdadera la igualdad, pues suponen erróneamente que se trata de una multiplicación de algo llamado "sen", con "x" y con "3", en la cual pueden intercambiar sus factores libremente. No aplican el conocimiento de que el *seno* es una función trigonométrica.

- Reactivo 18 f):  $\log(x + y) \neq \log x + \log y$

La respuesta frecuente fue que es falsa la desigualdad, por lo que suponen erróneamente que  $\log(x + y)$  equivale a  $\log x + \log y$ , aplicando la propiedad distributiva para la multiplicación de algo llamado "log", "x" e "y", sin tener en cuenta que *log* define la función logarítmica que posee ciertas propiedades.

- Reactivo 18 i):  $\frac{0}{2} = 0$

La respuesta frecuente es que la consideran como falso. Interfiere con  $\frac{2}{0}$ .

Después de la revisión de la evaluación y a lo largo de 6 semanas, se impartieron las estrategias correctivas, donde se trabajó con los alumnos de la muestra, implementando asesorías enfocadas a los errores que fueron detectados; explicando el tipo de error cometido con ejemplos ilustrativos, preguntas, reflexiones y ejercicios de reforzamiento, todo ello con la finalidad de superar dichas deficiencias; intentando en la medida de lo posible que sea el alumno quien perciba sus errores para obtener los conceptos validados y matemáticamente aceptados. Una vez concluidas las estrategias, se aplicó una segunda evaluación (Anexo 2) a los mismos 15 estudiantes de la muestra.

### 4.3 Resultados de la segunda evaluación

En la Figura 4 pueden observarse los resultados del número de aciertos por estudiante, obtenidos en la segunda evaluación.

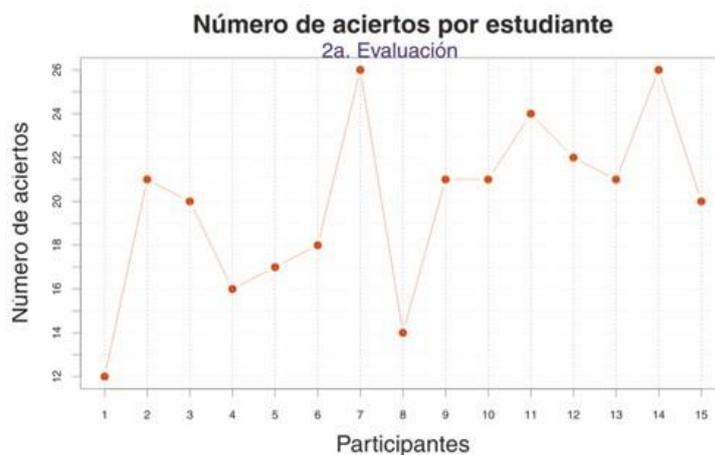


Figura 4. Número de aciertos por estudiante  
(Fuente: Elaboración propia con software RStudio)

El valor para la media es:

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{2i}}{n_2} = \frac{299}{15} = 19.93$$

La desviación estándar obtenida es de:

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - 1} \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2} = 4.008$$

Considerando una calificación tradicional, el promedio es de 60.39/100.

#### 4.4 Contraste de hipótesis. Prueba estadística t de Student para muestras relacionadas

Sean,

$X_i$ =Número de errores en la 1ª evaluación

$Y_i$ = Número de errores en la 2ª evaluación

Además, se define la variable diferencia  $D_i = X_i - Y_i$ . La Tabla 3, concentra los valores de ambas variables y que servirán de base para realizar la prueba estadística t de Student para muestras relacionadas o apareadas.

Tabla 3. Número de errores obtenidos en las 2 evaluaciones  
(Fuente: Elaboración propia)

Participante	$X_i$ (Errores en la 1a evaluación)	$Y_i$ (Errores en la 2a evaluación)	$D_i = X_i - Y_i$
1	23	21	2
2	17	12	5
3	17	13	4
4	18	17	1
5	22	16	6
6	13	15	-2
7	19	7	12
8	19	19	0
9	17	12	5
10	14	12	2
11	15	9	6
12	11	11	0
13	18	12	6
14	19	7	12
15	20	13	7

- Redacción de hipótesis.

$H_0$  = No existen diferencias significativas en el promedio de errores en la evaluación escrita antes y después de recibir las asesorías.

$H_A$  = Existen diferencias significativas en el promedio de errores en la evaluación escrita antes y después de recibir las asesorías.

Simbólicamente:

$$H_0 = \mu_{antes} = \mu_{después}$$

$$H_A = \mu_{antes} \neq \mu_{después}$$

□ Nivel de significación  $\alpha$

Definimos el nivel de confianza en los resultados en un 95%, es decir que el porcentaje de error será de:  $\alpha = 0.05$

□ Prueba de normalidad

Antes de aplicar el contraste de hipótesis t de Student, se verifica el supuesto de normalidad de las observaciones o puntuaciones de la variable dependiente ( $X_i, Y_i$ ). Como es el caso de una muestra menor a 30 sujetos, se aplicará la prueba Shapiro-Wilk.

Criterios para determinar la normalidad.

p-valor  $\geq \alpha$  aceptar la  $H_0$  = Los datos provienen de una distribución normal

p-valor  $< \alpha$  aceptar la  $H_A$  = Los datos no provienen de una distribución normal

Con ayuda del software SSPS, después de ingresar los datos de las variables de la Tabla 3 y mediante las siguientes opciones del menú: Analizar>Estadísticos descriptivos>Explorar; proporciona los resultados que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Prueba de normalidad  
(Fuente: Salida del programa SSPS)

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Evaluacion1	.176	15	.200*	.971	15	.868
Evaluacion2	.173	15	.200*	.954	15	.592

\*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Como puede observarse, en el apartado correspondiente a la prueba Shapiro-Wilk, el nivel de significación de la evaluación 1 y 2 es de 0.868 y 0.592 respectivamente, por lo que,

$$p\text{-valor (evaluación1)} = 0.868 \geq 0.05$$

$$p\text{-valor (evaluación2)} = 0.592 \geq 0.05$$

Por lo tanto, se acepta la Hipótesis nula ( $H_0$ ) y se puede afirmar que los datos provienen de una distribución normal.

□ Cálculos

Se calculan las medias de las variables  $X_i, Y_i$ :

$$\bar{X}_l = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{262}{15} = 17.466 \qquad \bar{Y}_l = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{196}{15} = 13.066$$

La desviación estándar para la variable  $D_i$ , es:

$$s_{D_i} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1} \sum (x_{1_i} - \bar{x}_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{n - 1} \sum (D_i - \bar{D}_i)^2} = 4.084$$

□ Se establece la zona de rechazo

Se obtienen los grados de libertad

$$g.l = n - 1 = 15 - 1 = 14$$

Enseguida, se establece el nivel de significación de  $\alpha = 0.05$  para una prueba de dos colas. Se encuentra en la Tabla de distribución de valores críticos para la prueba t (Figura 5) que el correspondiente valor crítico es  $t_{vc} = \pm 2.145$ .

$\alpha$ $r$	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,600
3	0,785	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,133	2,602	2,947	4,073

Figura 5. Tabla t de Student  
(Fuente: [1], p. 582)

Las regiones de aceptación y rechazo, se muestran en la Figura 6, en donde se puede observar la curva de la distribución normal y la curva de la distribución t, con 14 g.l.

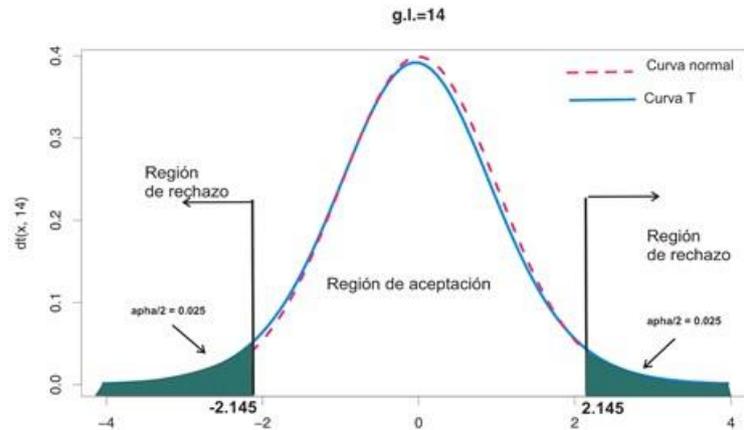


Figura 6. Regiones de aceptación y rechazo  
(Fuente: Elaboración propia con software RStudio)

- Se resuelve la fórmula para la prueba t

Utilizando la ecuación (6), y con los valores antes obtenidos, se tiene que,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_l - \bar{Y}_l}{s_{D_i}/\sqrt{n}} = \frac{17.466 - 13.066}{4.084/\sqrt{15}} = \frac{4.4}{1.0544}$$

Entonces,  $t = 4.172$

Se comprueba el resultado de la prueba t, con ayuda del software RStudio, empleando la función t.test() de R, y como se trata del mismo grupo de estudiantes, se toma la prueba de datos “apareados” lo cual se maneja en R, con el argumento: paired=TRUE dentro de la función, es decir la sentencia es:

```
Xi=c(23,17,17,18,22,13,19,19,17,14,15,11,18,19,20) #Resultados de la 1a
evaluación
Yi=c(21,12,13,17,16,15,7,19,12,12,9,11,12,7,13) #Resultados de la 2a evaluación
t.test(Xi,Yi,paired=T) #Prueba T de Student para muestras relacionadas
```

Lo cual, reporta el siguiente conjunto de resultados:

```
Paired t-test
data: Xi and Yi
t = 4.1718, df = 14, p-value = 0.0009407
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 2.137905 6.662095
sample estimates:
 mean of the differences
4.4
```

Que como se puede observar, se obtiene el mismo valor para  $t = 4.1718$ . Ahora bien, el intervalo de confianza ofrece información añadida al contraste de hipótesis propiamente dicho, pues en este caso plantea los valores entre 2.1379 y 6.6620, lo que permite conocer entre qué valores se encontrará en la población la diferencia entre las medias, es decir, que se puede afirmar que a nivel poblacional (con un nivel de confianza del 95%) la media en el número de errores en la 2ª evaluación, se encuentra entre 2.1379 y 6.6620 unidades por debajo de la media de la 1ª evaluación.

□ Se decide si se acepta o rechaza la  $H_0$

Si el valor de  $t > t_{vc}$ , entonces se rechaza la  $H_0$ ; pero si  $t < t_{vc}$ , entonces se mantiene la  $H_0$

De los cálculos obtenidos, se tiene que,

$t = 4.172$  y  $t_{vc} = \pm 2.145$ , por lo tanto, se rechaza la  $H_0$  y se acepta la  $H_A$

En consecuencia, por medio de la prueba t de Student para observaciones pareadas, cabe afirmar que existen diferencias estadísticamente significativas en las puntuaciones del número de errores de los estudiantes, después de asistir a las asesorías (Figura 7).

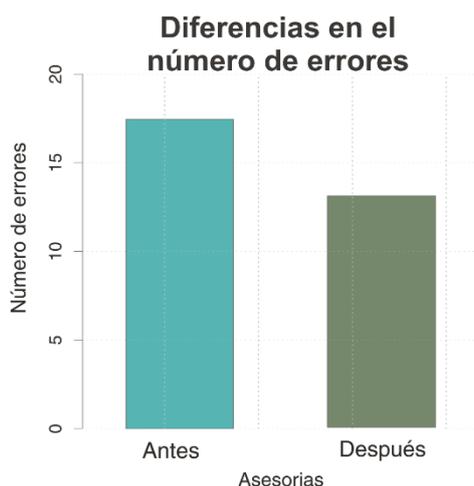


Figura 7. Diferencias en el número de errores  
(Fuente: Elaboración propia con software RStudio)

## 5 Conclusiones y futuras líneas de investigación

De los resultados obtenidos en el presente trabajo, se detectaron, derivados de una primera evaluación, ciertos errores que son frecuentes en los estudiantes al momento de efectuar dicha prueba y que se traducen en cierta deficiencia en los conocimientos matemáticos, sobre todo algebraicos. Particularmente las áreas con mayor prioridad para su atención son: ley de los signos, procedimiento en solución de una ecuación lineal, información espacial adecuada, exponente cero, descomposición de fracciones, leyes de exponentes, simplificación de fracciones algebraicas, leyes de los radicales, potencias negativas, funciones trigonométricas para la suma de dos ángulos y funciones logarítmicas.

Los datos obtenidos en la segunda evaluación, después de implementar las estrategias didácticas de corrección de los errores, muestran resultados que mejoran la calificación con respecto a la primera. El uso de la estadística inferencial, y en particular de la prueba estadística de hipótesis, denominada t de Student para muestras relacionadas, ha revelado en su resultado, que las estrategias didácticas enfocadas a superar los errores cometidos, han sido efectivas para mejorar el desempeño en la evaluación, es decir, contribuyen al mejoramiento en el desempeño de los alumnos.

Sería interesante de cara al futuro, desarrollar algunas vías de trabajo basadas en lo anterior, como por ejemplo:

- Explorar al inicio de cada curso o materia y con la aplicación de evaluaciones, los errores que pudiesen estar presentes en los estudiantes, a fin de corregir y mejorar su desempeño.
- Replicar este estudio, analizando los errores cometidos en el aprendizaje de las matemáticas, considerando los alumnos que egresan de la educación media básica y con ello, poder prevenir o rectificar a tiempo, antes de ingresar en la educación media superior.
- Puede ser útil extender los ejercicios de las evaluaciones en base a los señalamientos que los profesores han observado en sus estudiantes, lo cual permitiría profundizar e indagar aún más sobre los errores que cometen los alumnos.

En la práctica, la enseñanza de las matemáticas no es tarea sencilla, ya que hay muchos factores involucrados; sin embargo, identificar aquellos errores de manera oportuna y tratarlos, tendrá un impacto positivo en la mejora del aprendizaje de las matemáticas.

## 6 Referencias

- [1] COURT MONTEVERDE, EDUARDO, & WILLIAMS RENGIFO, Erick. *Estadísticas y econometría financiera*, pp. 111-115, 582 CENGAGE Learning-Fordham University, Buenos Aires, Argentina, 2011.
- [2] CURY, HELENA. *As concepções de matemática dos professores e suas formas. Tesis de Doctorado en Educación*, p. 84, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio, Brasil, 1994.
- [3] ENGLER, ADRIANA., GREGORINI, MARÍA., & MULLER, DANIELA. Sociedad Argentina de Educación Matemática. *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Fecha de consulta: 20 de Octubre de 2017, de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf>
- [4] GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO. (13 de marzo de 2012). *Plan de Desarrollo del Estado de México 2011-2017*, p. 59. Fecha de consulta: 8 de octubre de 2017, de [http://edomex.gob.mx/plan\\_desarrollo\\_estado\\_mexico](http://edomex.gob.mx/plan_desarrollo_estado_mexico)
- [5] GODINO, JUAN D., BATANERO, CARMEN, & FONT, VICENC. *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para el maestro*, pp. 62-70, Universidad de Granada, España, 2003.

- [6] MÁRQUES DOS SANTOS, MARÍA JOSÉ. *Estadística Básica. Un enfoque no paramétrico*, pp. 2, 3, 4, 5, Universidad Nacional Autónoma de México, FES Zaragoza, México, 2001.
- [7] MONCADA JIMÉNEZ, JOSÉ. *Estadística para ciencias del Movimiento Humano*, pp. 9-23, Editorial de la Universidad de Costa Rica, 2005.
- [8] PIERRE ASTOLFI, JEAN. *El "error" un medio para enseñar*, pp. 1-13, Diada Editora S.L., España, 1999.
- [9] RADATZ, HENDRIK. For the Learning of Mathematics. International journal. *Students' errors in the mathematical learning process: a survey*. V. 1, Nº 1, 1980. Fecha de consulta: 31 de octubre de: 2017, de: [https://flm-journal.org/Articles/flm\\_1-1\\_Radatz.pdf](https://flm-journal.org/Articles/flm_1-1_Radatz.pdf)
- [10] RICO, LUIS. *Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas*, pp. 69-108, Grupo Editorial Iberoamericana. Educación Matemática, México, 1995.
- [11] SEALY GOSSET, WILLIAM (STUDENT). (Marzo de 1908). UC Berkeley Seismology Lab. *The Probable error of a mean*. *BiométriKa*. Fecha de consulta: 30 de octubre de 2017, de: [http://seismo.berkeley.edu/~kirchner/eps\\_120/Odds\\_n\\_ends/Students\\_original\\_paper.pdf](http://seismo.berkeley.edu/~kirchner/eps_120/Odds_n_ends/Students_original_paper.pdf)
- [12] TOMÁS SÁBADO, JOAQUÍN. *Fundamentos de bioestadística y análisis de datos para enfermería*, pp. 13, 14, 41-48, UAB Universidad Autónoma de Barcelona, España, 2009.
- [13] WAYNE W., DANIEL. *Bioestadística*, pp. 221-279, Editorial Limusa S.A de C.V., México, 1991.

**Sobre el autor:**

Nombre: Pablo Sánchez Madrigal

Correo Electrónico: ppablosm@gmail.com

Institución: Universidad abierta y a Distancia de México (UnADM), México.



9. El resultado de  $7x^2 - (5x + 3)$  es:

- a)  $7x^2 - 5x - 3$       b)  $7x^2 - 5x + 3$       c)  $7x^2 + 5x + 3$       d)  $2x^3 - 3$

10. El resultado de  $(5xy^3z^5)^2$  es:

- a)  $25x^2y^6z^{10}$       b)  $5x^2y^6z^{10}$       c)  $25x^3y^5z^7$       d)  $10x^2y^6z^{10}$

11. ¿Cual es el resultado de  $(\frac{3}{5}x)^2$ ?

- a)  $\frac{9}{25}x$       b)  $\frac{3}{5}x^2$       c) Otra \_\_\_\_\_

12. ¿Es  $-x$  un número negativo?

- a) Si, si  $x$  es un número positivo      b) Si      c) No, si  $x$  es un número negativo

13. Si un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras responden a la definición?



14. El resultado de  $(-5)^0$  es:

- a) 1      b) -1      c) 0      d) -5

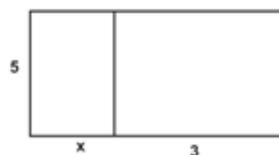
15. El resultado de  $-2^4$  es:

- a) 16      b) -16      c) 8      d) -8

16. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al enunciado: "La mitad de un número natural  $x$  más el triplo de dicho número, menos el que le precede, es igual a dos"?

- a)  $\frac{1}{2}x + 3x - (x - 1) = 2$       b)  $\frac{1}{2}x + x^3 - (x - 1) = 2$       c)  $\frac{1}{2}x + 3x - (x + 1) = 2$

17. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área del rectángulo?



- a)  $5x + 3$       b)  $5(x + 3)$       c)  $15x$       d)  $x + 15$

18. Indica si es verdadera(V) o falsa(F) cada una de las siguientes afirmaciones. Considera que  $x, y, z$  son números reales cualesquiera.

a)  $\text{sen}(x + y) = (\text{sen } x) + (\text{sen } y)$  ( )

b)  $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$  ( )

c)  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ( )

d)  $x \text{Sen } x = \text{Sen } x^2$  ( )

e)  $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$  ( )

f)  $\log(x + y) \neq \log x + \log y$  ( )

g)  $\text{sen } 3x = 3\text{sen } x$  ( )

h)  $x^3 + x^5 = x^8$  ( )

i)  $\frac{0}{2} = 0$  ( )

j)  $\frac{2}{0} = 0$  ( )

k)  $\frac{2}{0} = 2$  ( )

l)  $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3x}$  ( )

m)  $\cos^2 x = \cos x^2$  ( )

19. El resultado de  $2(x + 1)^2$  es:

- a)  $(2x + 1)^2$       b)  $2x^2 + 4x + 2$       c)  $2x^2 + 4$       d) Otra \_\_\_\_\_

20. Una expresión equivalente a  $\frac{(3x+7)(2x-1)+(x^2+1)}{(3x+7)}$  es:

- a)  $(2x - 1) + (x^2 + 1)$       b)  $(2x - 1) + \frac{(x^2+1)}{(3x+7)}$

21. La correcta factorización de  $x^2 - 4$  es:

- a)  $(x + 2)(x - 2)$       b)  $(x - 2)(x - 2)$       c)  $(x + 2)(x + 2)$       d)  $(x + 4)(x - 4)$

G R A C I A S



9. El resultado de  $7y - (x - 3)$  es:

- a)  $7y - x - 3$       b)  $7y - x + 3$       c)  $7y + x - 3$       d)  $7y + x + 3$

10. El resultado de  $(3a^2b^3c^4)^2$  es:

- a)  $9a^4b^6c^8$       b)  $3a^4b^6c^8$       c)  $9a^4b^5c^6$       d)  $6a^4b^6c^8$

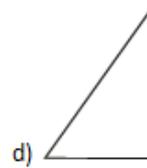
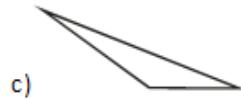
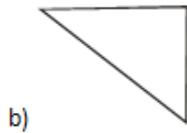
11. ¿Cuál es el resultado de  $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$ ?

- a)  $\frac{4}{9}x$       b)  $\frac{2}{3}x^2$       c) Otra \_\_\_\_\_

12. ¿Es  $-x$  un número negativo?

- a) Si, si  $x$  es un número negativo      b) No, si  $x$  es un número negativo  
 c) Si, si  $x$  es un número positivo

13. Si un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras responden a la definición?



14. El resultado de  $(-8)^0$  es:

- a) 1      b) -1      c) 0      d) -8

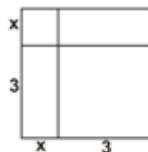
15. El resultado de  $-3^2$  es:

- a) 9      b) -9      c) 6      d) -6

16. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al enunciado: "La raíz cubica del cuadrado de la suma de dos números:"?

- a)  $\sqrt[3]{2(x+y)}$       b)  $\sqrt[3]{(x+y)^2}$       c)  $\sqrt[3]{2x+2y}$

17. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área del cuadrado?



- a)  $(x+3)^2$       b)  $x^2+3^2$       c)  $(3x)^2$       d)  $x^2+3$

18. Indica si es verdadera(V) o falsa(F) cada una de las siguientes afirmaciones. Considera que  $x, y$ , son números reales cualesquiera.

a)  $\cos(x + y) = (\cos x) + (\cos y)$  ( )

b)  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  ( )

c)  $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$  ( )

d)  $x \tan x = \tan x^2$  ( )

e)  $\frac{x+5}{y} = \frac{x}{y} + \frac{5}{y}$  ( )

f)  $\log(x + y) = \log x + \log y$  ( )

g)  $\sin 5x = 5 \sin x$  ( )

h)  $x^5 - x^2 = x^3$  ( )

i)  $\frac{0}{8} = 0$  ( )

j)  $\frac{2}{0} = \text{No esta definido}$  ( )

k)  $\frac{2}{0} = 2$  ( )

l)  $\frac{2}{3} x = \frac{2}{3x}$  ( )

m)  $\sin^2 30^\circ = \sin (30^\circ)^2$  ( )

19. El resultado de  $3(x + 2)^2$  es:

- a)  $(3x + 6)^2$     b)  $3x^2 + 12x + 12$     c)  $3x^2 + 36$     d) Otra \_\_\_\_\_

20. Una expresión equivalente a  $\frac{(x+1)(2x-3)+(x^2+3)}{(x+1)}$  es:

- a)  $(2x - 3) + (x^2 + 3)$     b)  $(2x - 3) + \frac{(x^2+3)}{(x+1)}$

21. La correcta factorización de  $x^2 - 9$  es:

- a)  $(x + 3)(x - 3)$     b)  $(x - 3)(x - 3)$     c)  $(x + 3)(x + 3)$     d)  $(x + 9)(x - 9)$

G R A C I A S



# Experiencias Docentes

## Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales

## Formulations and demonstrations of leg and height theorems using polygonal tessellations

José Enrique Martínez Serra, Marco Vinicio Vásquez Bernal,  
Arellys García Chávez y Ramiro Infante Roblejo

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 051-072, ISSN 2174-0410  
Recepción: 21 Oct'19; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

Una de las estrategias didácticas que más contribuye al aprendizaje por descubrimiento en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los niveles inicial y medio, es el trabajo con material concreto o manipulativo, el cual permite a los estudiantes el tránsito por procesos mentales de comparación, análisis, síntesis, abstracción, generalización, etc., conducentes a la formación de nuevos conceptos y/o la formulación de nuevas proposiciones. En esta dirección, pueden aprovecharse las potencialidades que ofrece el empleo de las teselaciones poligonales, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones y/o demostraciones de nuevos teoremas.

Se ilustra cómo el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar deducciones y demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

Finalmente, se deja claro que para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, de las cuales se presentan dos de ellas, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.

**Palabras Clave:** Teorema de Pitágoras, teorema de la altura, teorema de los catetos, material concreto, teselaciones poligonales, heurística, demostración geométrica

### Abstract

One of the didactic strategies that most contributes to discovery learning in the process of teaching and learning of mathematical contents at the initial and middle levels, is the work with concrete or manipulative material. This work allows students to transit through mental processes of comparison, analysis, synthesis, abstraction, generalization, etc., conducive to the formation of new concepts and / or the formulation of new propositions. In this way, the potential offered by the use of polygonal tessellations can be exploited, in order to deduce in an elegant, motivating and creative way the formulations and / or demonstrations of new theorems.

It is illustrated how Pythagoras' theorem has had a vast amount of geometric proofs through polygonal tessellations. However, height and leg theorems, also members of the Pythagorean Theorem Group, have not run the same fate. For this reason, the main objective of the present work is to present deductions and geometric demonstrations of the theorems of height and legs by manipulating concrete material based on polygonal tessellations. At the same time, is offered recommendations to teachers for the treatment of these theorems in the teaching-learning process, based on the timely use of various heuristic resources.

Finally, it is clear that for students of higher levels, more powerful deductive tools can be used, of which two of them are presented, which although they are not contemplated in the curricular design of Mathematics, can be introduced as part of circles of interest, math club or other attractive ways to deepen mathematics.

**Keywords:** Pythagorean Theorem, height theorem, leg theorem, concrete material, polygonal tessellations, heuristics, geometric proof

## 1. Contextualización y antecedentes

### 1.1. La Geometría en el Sistema Educativo Ecuatoriano

En la generalidad de los sistemas educativos actuales, la Geometría es una de las áreas insoslayables que deben abordarse en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los diferentes niveles de enseñanza.

Refiriéndose a los niveles: inicial, medio y bachillerato, Andonegui, citado en Vargas y Araya (2013) afirma que el estudio de la geometría es importante porque:

*“ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial que le permiten comprender e influir el espacio donde vive” (p. 77).*

De ahí la importancia de aprender geometría a partir de la experimentación, pues permite desarrollar diferentes tipos de habilidades y destrezas espaciales, a la vez que facilita la comprensión de objetos geométricos que se encuentran en el medio donde vivimos; sin embargo, la forma tradicionalista en que se lleva a cabo su proceso de enseñanza aprendizaje, solo requiere de la memorización de conceptos y fórmulas para que los estudiantes tengan éxito ante las pruebas estandarizadas.

En esta dirección, Araya y Alfaro (2010) indican que

*“la enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfatizado en la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas” (p.127).*

Esta afirmación permite inferir que la metodología de enseñanza define la importancia de la geometría para el educando. Si la enseñanza se limita a llenar al estudiante de contenidos, fórmulas, propiedades, entre otras se tendrá como resultado una transferencia de contenidos y no una construcción activa de estos.

Estas ideas, conllevan a reflexionar sobre la conveniencia de que el aprendizaje de muchos contenidos geométricos proceda a través de progresivas aproximaciones parciales a su formalización, y no ofrecer los resultados acabados; reafirmando esta idea, Fripp y Varela (2012) señalan que:

*“El docente que ostenta un saber insiste con información geométrica, adelantándose a las necesidades intelectuales de sus alumnos. Presenta información sobre las figuras geométricas, pero sin establecer las relaciones que favorecen la construcción del concepto. Generalmente la presentación ostensiva apela a representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que puede provocar otras consecuencias. El alumno puede agregar a las figuras con las que trabaja dos pseudopropiedades geométricas: la posición y la dimensión. Si se considera un concepto geométrico como una terna conceptual, lo estaríamos pensando como una representación, un nombre y un conjunto de atributos. Hacer énfasis en la representación podría conducir a prácticas ostensivas. Hacer énfasis en el nombre podría conducir a prácticas nominalistas” (p. 13).*

Finalmente, se citan y se asumen por los autores, los principios didácticos del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, según Báez e Iglesias, citados por Araya y Alfaro (2010), de los cuales se mencionan solo los dos últimos, por ser los que mayor presencia tienen en el presente artículo:

- *“Aprendizaje por descubrimiento: Todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiantado, de manera que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.*
- *Innovación de estrategias metodológicas: El grupo docente debe buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.” (p.128)*

En aras de contribuir a estos principios didácticos y lograr el deseado aprendizaje por descubrimiento por los estudiantes en Geometría, se propone, como uno de los recursos didácticos oportunos, el empleo de material concreto para la deducción de algunas proposiciones geométricas.

## 1.2. Recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría

Martínez (2010) define los recursos didácticos como:

*“... aquellos materiales, medios didácticos, soportes físicos, actividades, etc. que van a proporcionar al formador ayuda para desarrollar su actuación en el aula” (p.1).*

En el área de Geometría, actualmente se emplean disímiles recursos didácticos que facilitan la construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes, entre estos están: las presentaciones dinámicas, calculadoras gráficas (Geogebra, Cabri, Geometry, etc.), plataformas interactivas (Khan Academy, foros, chats, etc.), software educativo, vídeos, programas de ordenador de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos (rompecabezas, puzzles), material concreto o manipulativo, el retroproyector, entre otros.

En el presente trabajo se hace énfasis en el empleo de material concreto o manipulativo para abordar el proceso de enseñanza aprendizaje del grupo de teoremas de Pitágoras, por medio de teselaciones convenientes de cuadrados y rectángulos.

### 1.3.1. El material concreto o manipulativo en Geometría

En Cenera (2015) se retoma la idea de Alsina, Burgués y Fortuny (1991), llegando a establecer:

*“la necesidad de crear y manipular gran variedad de material se ha de remarcar la conveniencia de elevar el material a la categoría de experimentación regular y viva. Un uso esporádico del material convierte a éste más en una curiosidad que en una herramienta metodológica” p. 16.*

Bajo este criterio, los autores del presente artículo concuerdan en la necesidad de lograr la manipulación, por los estudiantes, de material concreto, a partir del cual puedan descubrir rasgos esenciales de ciertos conceptos, hasta llegar a su definición y de conjeturar ciertas hipótesis y conjeturas, hasta llegar a formular una proposición (verdadera o falsa) y demostrar un teorema.

Con el ánimo de clasificar los materiales manipulativos Cenera (2015) asume la clasificación de Cascallana (2002) en: materiales estructurados y no estructurados, estableciendo que:

*“El material no estructurado es cualquier objeto tomado del entorno del/la niño/a...el primer material utilizado para la enseñanza es el que procede de sus propios juegos y actividades; los juguetes representativos como animales, muñecos, coches, material de desecho y de uso corriente... a partir de ellos se pueden establecer relaciones lógicas básicas, agrupar, clasificar, ordenar, seriar... una misma actividad debe realizarse con materiales diversos para favorecer el proceso de generalización de los conceptos...” p. 16-17.*

*“El material estructurado es aquel que se diseña para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos... son multiuso, en la medida en que pueden utilizarse para varios conceptos y objetivos... en general, un material determinado no es privativo de una edad específica... el mismo material puede utilizarse de forma más o menos compleja en diferentes edades” p.17.*

Precisamente, uno de los materiales manipulativos estructurados es el empleo de figuras para realizar teselaciones de ciertas superficies planas.

### 1.3.2. Teselaciones

Como parte del conocimiento matemático, la palabra teselación o embaldosado hace referencia al uso repetido de polígonos u otras figuras que llenan completamente una región plana infinita sin vacíos ni superpuestos.

En este sentido, los autores Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez (2007) se citan en Uribe et all. (2014), estableciendo que

*“una teselación de una región es su cubrimiento completo mediante una o más figuras en un patrón repetido, con ninguna figura superpuesta”. p. 141*

Al analizar algunos casos particulares de teselaciones, puede resumirse de esta fuente, que cuando la teselación se realiza mediante polígonos, se denomina teselación poligonal y si estos polígonos fueran regulares y congruentes, se tendría una teselación regular. Finalmente, si se combinan dos o más polígonos regulares no congruentes, tendríamos una teselación semirregular, y si la combinación de polígonos no sigue ningún patrón, entonces se estaría en presencia de una teselación poligonal irregular. p. 142-143

Algunos ejemplos son:

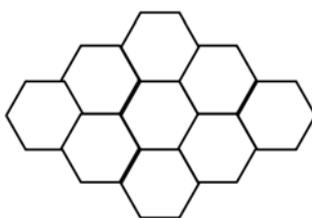


Figura 1. Teselación poligonal regular del plano mediante hexágonos

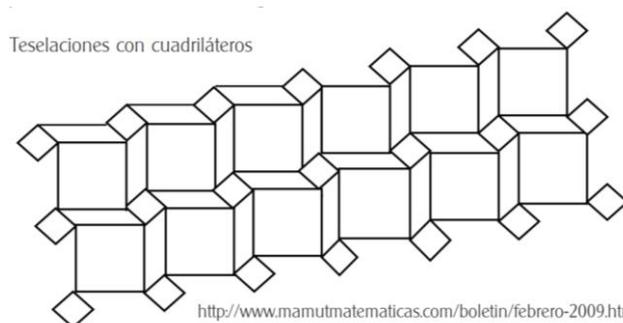


Figura 2. Teselación poligonal semirregular del plano mediante dos tipos de cuadrados y paralelogramos. Tomado de Miller (2009), p.2

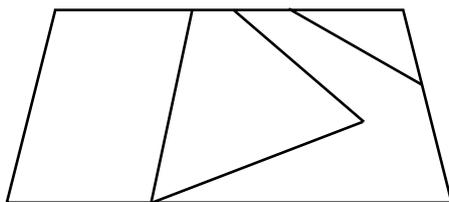


Figura 3. Teselación poligonal irregular de un trapecio isósceles

Uno de los teoremas de la Historia de las Matemáticas que más demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales ha tenido es el Teorema de Pitágoras, al cual se dedica el próximo epígrafe.

### 1.3. Teorema de Pitágoras con material concreto basado en teselaciones poligonales

El problema de la deducción y demostración geométrica del Teorema de Pitágoras se reduce a “teselar los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo mediante polígonos, con las cuales se pueda teselar el cuadrado construido sobre la hipotenusa”.

Desde las obras de Euclides de Alejandría (325 a. C.- 265 a. C.), matemático y geómetra griego considerado el “Padre de la Geometría”, ya se planteaban demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras, como puede verse en su tratado matemático “Los Elementos” que se compone de trece libros, escrito originalmente en papiro y que ha tenido múltiples ediciones por varios autores.



Figura 4. Imagen de una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras que aparece en “Los Elementos” de Euclides, tomada de Urbaneja (2008), p.124

#### 1.3.1. La recopilación de Loomis

La Historia de la Matemática reconoce a E.S. Loomis (1852–1940), como el mayor recopilador de diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras, por medio de su agrupación oportuna, según ciertos criterios.

En Gonzáles Urbaneja (2008) se refleja cómo

*“Loomis realizó durante muchos años una recopilación exhaustiva de múltiples pruebas que se han dado del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia. Su encomiable labor de investigación, dio como fruto la publicación en 1927 de una magna obra de gran valor didáctico, The Pythagorean Proposition. El texto de E.S.Loomis fue reeditado en 1940 (en Ann Arbor, Michigan) y en 1968 como el primer título de una serie de “Classics in Mathematics Education” de la National Council of Teachers of Mathematics” p. 120.*

En esta obra, también se recoge el discernimiento de Loomis entre lo que es una demostración y una simple ilustración del Teorema de Pitágoras y propone una clasificación de los diferentes resultados recopilados en cuatro tipos:

*“Pruebas algebraicas: basadas en relaciones entre lados y segmentos, presentando un total de 109 resultados recopilados en este grupo. Pruebas geométricas: basadas en*

*comparaciones de áreas, presentando 255 resultados. Pruebas dinámicas: basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc., mostrando 4 resultados. Pruebas cuaterniónicas: basadas en operaciones vectoriales, recogiendo 2 resultados". p. 120.*

Como puede apreciarse, la recopilación de Loomis es la colección más importante de pruebas y demostraciones del Teorema de Pitágoras con un total de 370 resultados excelentemente agrupados en cuatro categorías.

En el sexto apartado de Gonzáles Urbaneja (2008) se presenta un epílogo que versa:

*"El Teorema de Pitágoras, tesoro y símbolo de toda la geometría.... El Teorema de Pitágoras es la joya más bella de la tradición pitagórica. Como recuerdo inolvidable de los tiempos escolares pertenece a la base cultural común de la humanidad. Su soberbia grandeza introduce una radical inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el marco histórico cultural matemático como en el ámbito escolar de la Educación matemática. La multitud de demostraciones realizadas con pasión matemática, por una pléyade extensa y heterogénea de personajes ilustres, realza la idea de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad. Como origen de la Geometría racional, fundamento de multitud de teoremas, causa primera de la Incommensurabilidad, umbral entre la Matemática empírica y la deductiva, paradigma para la Matemática y paradigma para la Educación matemática, el Teorema de Pitágoras pertenece al imaginario cultural de casi todos los pueblos de la tierra." p. 124.*

Otra encomiable muestra de admiración de la humanidad por el Teorema de Pitágoras se presenta en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia, una joya gótica construida entre 1248 y 1880, en esta ciudad alemana, que hoy ostenta la condición de Patrimonio de la Humanidad, otorgada por la UNESCO en 1996.

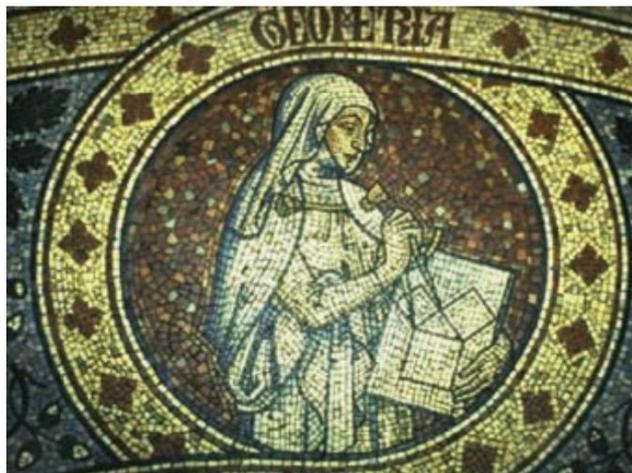


Figura 5. Imagen del Teorema de Pitágoras como emblema de la Geometría en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia

Dos de las demostraciones geométricas por teselaciones poligonales reflejadas en la obra de Loomis se exponen en los siguientes subepígrafes.

### 1.3.2. La demostración de Perigal

En Casselman (2000), puede constatarse que Henry Perigal (1801 – 1898) fue un matemático británico que presentó en 1830 una elegante demostración geométrica del Teorema de Pitágoras consistente en una teselación poligonal del cuadrado construido sobre la hipotenusa en un cuadrado y cuatro trapezoides iguales, tal que dicho cuadrado es igual al cuadrado construido sobre el cateto menor y los trapezoides se obtienen dividiendo el cuadrado sobre el mayor de los catetos del triángulo rectángulo, mediante dos segmentos perpendiculares que se cortan en el centro del cuadrado, siendo uno de ellos paralelo a la hipotenusa.

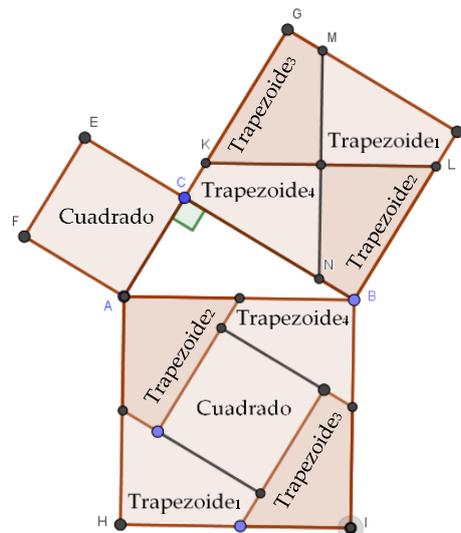


Figura 6. Versión de los autores hecha en Geogebra sobre la demostración de Perigal

### 1.3.3. La demostración de Anaricio – Göpel

En la figura de análisis de la demostración de Anaricio - Göpel se observa una teselación poligonal del cuadrado construido sobre la hipotenusa en cinco polígonos, que reordenados convenientemente, también teselan los cuadrados construidos sobre los catetos. Los polígonos se forman de la siguiente forma: el cuadrado construido sobre el cateto menor se divide en un trapecio y un triángulo mediante un segmento que pasa por el vértice A del triángulo, perpendicular a la hipotenusa y el cuadrado construido sobre el cateto mayor se divide en un trapecioide y dos triángulos mediante dos segmentos, el DK trazado por el vértice D del cuadrado paralelo a la hipotenusa y el segmento KL perpendicular a la hipotenusa, como se muestra en la figura.

Estos tres triángulos, el trapecio y el trapecioide teselan exactamente el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

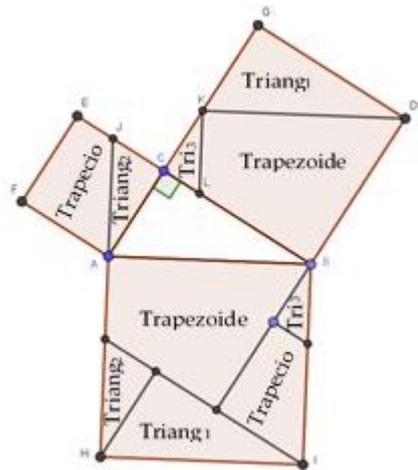


Figura 7. Versión de los autores hecha en Geogebra sobre la demostración de Anaricio-Gopel

Como se ha ratificado, el teorema de Pitágoras ha tenido una vasta cantidad de demostraciones geométricas por medio de teselaciones poligonales; sin embargo, los teoremas de la altura y de los catetos, también miembros del Grupo de Teoremas de Pitágoras, no han corrido con la misma suerte; es por ello que el objetivo fundamental del presente trabajo es: presentar demostraciones geométricas de los teoremas de la altura y de los catetos mediante la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales, y a la par, ofrecer recomendaciones didácticas a los docentes para abordar estos teoremas en el proceso de enseñanza aprendizaje, basadas en el empleo oportuno de variados recursos heurísticos.

#### 1.4. El Grupo de Teoremas de Pitágoras en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

Con respecto al Teorema de Pitágoras, en muchos países, entre los que se incluye el Ecuador, en la enseñanza general, no se aprovechan las posibilidades que ofrecen las teselaciones para deducir su formulación y demostrarlo geoméricamente, incluso, su abordaje en el proceso de enseñanza aprendizaje se reduce a formular su planteamiento y proceder a la resolución de problemas representativos, tanto intramatemáticos como de aplicaciones del teorema a diferentes situaciones; por lo cual no se deduce ni se demuestra dicho teorema mediante teselaciones ni ningún tipo de material concreto que catalice los procesos de pensamiento de los estudiantes, tanto durante la deducción, como en la demostración.

Con respecto a los Teoremas de la Altura y de los Catetos, muchas veces, son introducidos mucho tiempo después de introducido el Teorema de Pitágoras, por ejemplo, en el Ecuador, se introduce el Teorema de Pitágoras en el séptimo grado de la enseñanza general, se ejercita durante el octavo y noveno grados y no es hasta el décimo grado que se introducen los teoremas de la altura y los catetos, también por una vía eminentemente informativa, sin establecer deducciones ni demostraciones oportunas, motivantes y creativas mediante el empleo de material concreto.

Un paso de avance en esta dirección se aprecia en otros países, como Alemania, donde estos tres teoremas son introducidos de manera deductiva en el mismo grado, como consecuencia de la semejanza de triángulos, pues al establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos entre las tres parejas de triángulos semejantes que se forman al trazar la altura relativa a la

hipotenusa de un triángulo rectángulo, se pueden escoger convenientemente la igualdad entre algunas razones, y al realizar operaciones elementales, se obtienen, de manera sencilla los planteamientos de los tres teoremas. Sin embargo, en este caso, tampoco se aprovechan las potencialidades del empleo de las teselaciones poligonales, como material concreto oportuno, para deducir de manera elegante, motivante y creativa las formulaciones de estos tres teoremas.

## 2. Principales resultados

### 1.5. Primera aproximación a los teoremas de los catetos y de la altura por medio de teselaciones con material concreto

Para abordar por primera vez el proceso de enseñanza aprendizaje de los teoremas de la altura y de los catetos, puede conducirse a los alumnos al descubrimiento de sus planteamientos, por medio de la manipulación de material concreto basado en teselaciones poligonales de un cuadrado en un rectángulo y haciendo empleo del aprendizaje basado en problemas (ABP), por medio de la resolución de los siguientes problemas sencillos:

**Problema 1.** En la figura de análisis que se presenta se conoce que:

$\triangle ABC$  es rectángulo en  $C$  con catetos  $a$  y  $b$  e hipotenusa  $c$ .

$CD$  es la altura relativa a la hipotenusa.

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son  $AD=p$  y  $BD=q$ .

$ACEF$  es un cuadrado construido sobre el cateto de lado  $b$ .

$ACHG$  es un rectángulo construido sobre la hipotenusa, con lados  $p$  y  $c$ .

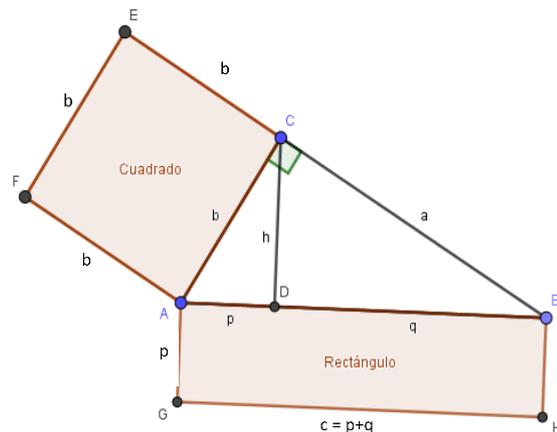


Figura 8. Figura de análisis del problema 1

¿Es posible teselar tanto el cuadrado como el rectángulo con los siguientes polígonos?

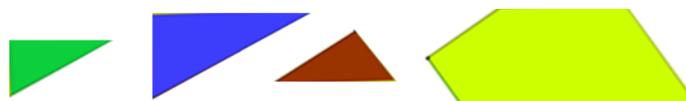


Figura 9. Polígonos como material concreto para trabajar en el problema 1

Durante la resolución de este problema, los estudiantes comprueban que una simple manipulación de las figuras conduce a que, tanto el cuadrado como el rectángulo, pueden ser teselados con estos cuatro polígonos, como se muestra en las figuras:

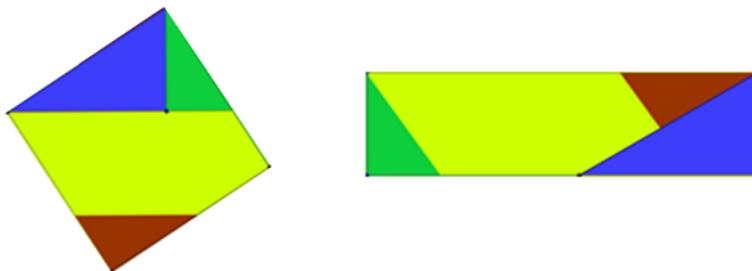


Figura 10. Resultado de los estudiantes al teselar el cuadrado y el rectángulo en el problema 1

A continuación, puede formularse el problema:

**Problema 2.** El resultado que muestra la anterior teselación se denomina “Teorema de los catetos”. ¿Cómo puede formularse el Teorema de los catetos”

La teselación realizada conduce a los estudiantes a razonar que las áreas de ambos polígonos son iguales, y pueden establecerse intercambios heurísticos encaminados a formular este teorema de manera algebraica y verbal, concluyendo que

$$b^2 = p \cdot c$$

También puede hacerse notar que no se pierde generalidad si se hubiesen construido el cuadrado sobre el cateto de longitud  $a$  y el rectángulo de lados  $q$  y  $c$  sobre la hipotenusa, con lo que tiene lugar la igualdad:

$$a^2 = q \cdot c$$

Finalmente, formulando verbalmente el resultado obtenido se concluye que “En el triángulo rectángulo considerado se cumple que el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de su proyección sobre la hipotenusa por la longitud de la hipotenusa”.

Hasta aquí se tiene una primera aproximación al conocimiento del teorema de los catetos por medio de la manipulación de material concreto.

Un tratamiento semejante puede llevarse a cabo con la primera aproximación al teorema de las alturas, como se muestra a continuación.

**Problema 3.** En la figura de análisis que se presenta se conoce que:

$\square ABC$  es rectángulo en  $C$  con catetos  $a$  y  $b$  e hipotenusa  $c$ .

$CD = h$  es la altura relativa a la hipotenusa.

Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son  $AD=p$  y  $BD=q$ .

$CDGH$  es un cuadrado construido sobre la altura  $h$ .

$BDEF$  es un rectángulo construido sobre el segmento  $BD$ , con lados  $p$  y  $q$ .

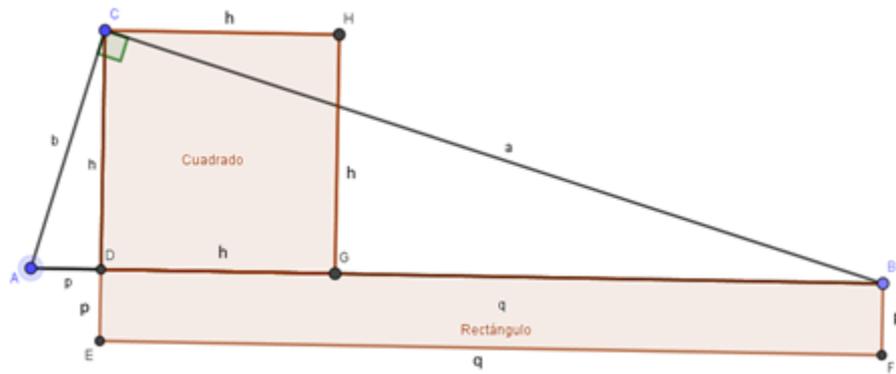


Figura 11. Figura de análisis del problema 2

¿Es posible teselar tanto el cuadrado como el rectángulo con los siguientes polígonos?



Figura 12. Polígonos como material concreto para trabajar en el problema 3

Al manipular estos polígonos sobre el cuadrado y el rectángulo, los estudiantes comprueban que, tanto el cuadrado como el rectángulo pueden ser teselados con estos seis polígonos, como se muestra en las figuras:



Figura 13. Resultado de los estudiantes al teselar el cuadrado y el rectángulo en el problema 3

Entonces, puede formularse el problema:

El resultado que muestra la anterior teselación se denomina “Teorema de la altura”. ¿Cómo puede formularse el Teorema de la altura”

Análogamente al teorema anterior, las teselaciones realizadas conducen a los estudiantes a razonar que las áreas de ambos polígonos son iguales, y pueden realizarse análisis heurísticos encaminados a formular este teorema de manera algebraica y verbal, concluyendo que

$$h^2 = p \cdot q$$

Formulando verbalmente el resultado obtenido se concluye que “En el triángulo rectángulo considerado se cumple que el cuadrado de la longitud de la altura es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa”.

Posterior a estas primeras aproximaciones de los teoremas de los catetos y la altura, se procede, haciendo uso de recursos heurísticos oportunos, a la formalización de la demostración geométrica de ambos teoremas.

### 3.2. Papel de la Heurística en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los teoremas.

Dado que la mayoría de los problemas a los que nos enfrentamos no pueden ser resueltos mediante algoritmos, deben emplearse procedimientos heurísticos para tener éxito.

Hoy la Heurística es aplicada en varias ramas del saber y es entendida como la capacidad de un sistema para realizar innovaciones positivas para sus fines, es el arte y la ciencia del descubrimiento y la invención mediante la creatividad y el pensamiento lateral-divergente; de ahí la conveniencia del empleo de la Heurística en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la resolución de problemas, viendo los procesos de formación, definición y caracterización de conceptos, así como la obtención, formulación y demostración de teoremas, como variantes de problemas.

Como metodología científica, la heurística es aplicable a cualquier ciencia e incluye la elaboración de medios auxiliares, principios, reglas, estrategias y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas; o sea, para resolver tareas de cualquier tipo para las que no se cuente con un procedimiento algorítmico de solución. Según Horst Müller, matemático y didacta alemán, citado en Ballester (1992):

*“Los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes” p. 139.*

Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias.

Los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar — directamente — la idea de solución; posibilita determinar, por tanto, a la vez, los medios y la vía de solución. Dentro de estos principios se destacan: la analogía, la reducción (reducción del problema a otro ya resuelto, recursión, descomposición del problema en subproblemas, diferenciación de casos, reducción de una proposición a otra equivalente, demostración de refutaciones por contraejemplo), la modelación, inducción, generalización, movilidad, consideración de casos especiales y casos límites, los cuales poseen amplia presencia en la resolución de problemas de las diferentes áreas matemáticas y constituyen ingredientes importantes en el desarrollo de la metacognición de los estudiantes.

Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver los problemas. Entre las reglas heurísticas que más se emplean están: separar lo dado de lo buscado, confeccionar figuras de análisis: esquemas, tablas, mapas, representar magnitudes dadas y buscadas con variables, determinar si se tienen fórmulas adecuadas, utilizar estructuras más simples, reformular el problema, etc; aunque también existen reglas heurísticas específicas para determinadas clases de problemas.

Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado. Existen dos estrategias: el trabajo hacia adelante, en el cual se parte de lo dado para

realizar las reflexiones que han de conducir a la solución del problema y, el trabajo hacia atrás, donde se examina primeramente lo que se busca y, apoyándose en los conocimientos que se tienen, se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado, hasta llegar a los datos.

Mediante el empleo de la Heurística, el docente no les informa a los alumnos los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, mediante el trabajo independiente o el trabajo cooperativo.

Específicamente, sobre el empleo de la heurística en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, Ballester (1992) expresa:

*“El método heurístico se caracteriza por un método de enseñanza mediante el cual se le plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de sus soluciones. Al utilizar este método el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados que se someterán a su asimilación, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma independiente.” P.142.*

En los próximos epígrafes puede verse cómo, a partir de preguntas heurísticas convenientes, pueden facilitarse los procesos de obtención y demostración geométrica de los teoremas de los catetos y de la altura, como elementos importantes dentro del Grupo de Teoremas de Pitágoras.

### **3.2. Demostraciones geométricas de los teoremas de los catetos y de la altura por medio de teselaciones con material concreto.**

A partir de la comparación de las teselaciones obtenidas anteriormente en el epígrafe 2.1, puede dirigirse la reflexión hacia la determinación de semejanzas y diferencias en ambas, por medio de las preguntas heurísticas siguientes.

**Pregunta heurística 1:** ¿Cuáles semejanzas pueden apreciarse en la obtención de ambos resultados?

La reflexión conjunta sobre las semejanzas, conduce a que:

- En la deducción de ambos teoremas se utilizan los mismos polígonos para realizar la teselación de un cuadrado y de un rectángulo con la misma área.
- En ambas distribuciones de polígonos aparecen tres triángulos y un pentágono.

**Pregunta heurística 2:** ¿Cuáles diferencias pueden apreciarse en los procesos de obtención de ambos resultados?

Los intercambios heurísticos que se establecen en torno a esta interrogante conducen a que:

- La cantidad y variedad de polígonos que se emplean en la teselación de un cuadrado y de un rectángulo con la misma área, pueden ser diferentes al variar de un rectángulo a otro.
- En el rectángulo más alargado de la segunda teselación aparecen dos paralelogramos que no aparecieron en la primera.

En este punto, las condiciones están creadas para formular nuevas preguntas generalizadoras conducentes a la demostración geométrica formal y rigurosa de estos resultados.

**Pregunta heurística 3.** Para cualquier rectángulo ¿siempre es posible realizarle una teselación poligonal con la cual se pueda teselar el cuadrado que tiene su misma área?

En este punto puede informarse que la respuesta a esta pregunta es positiva, y se propone el empleo de la estrategia heurística de “trabajo hacia atrás” para deducir los tipos y dimensiones de los polígonos que se realizan en la teselación.

**Pregunta heurística 4.** Los resultados particulares obtenidos anteriormente, pueden visualizarse según las figuras:

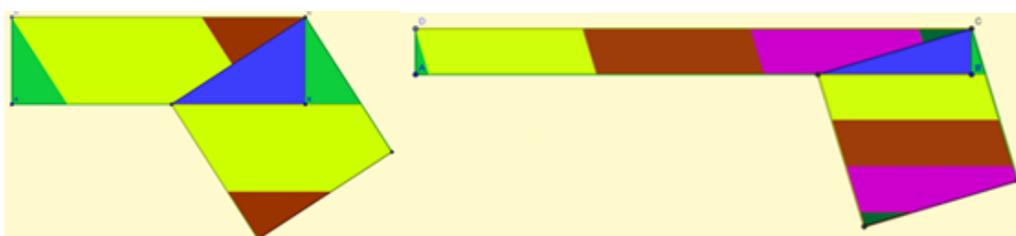


Figura 14. Presentación conveniente de los dos resultados obtenidos anteriormente

Donde se ratifica que la cantidad de polígonos de la teselación en el segundo caso es mayor que en el primero y se diferencia en dos paralelogramos. Teniendo en cuenta esta figura ¿cómo puede reformularse el problema de la teselación poligonal del rectángulo, con notaciones convenientes y posiciones adecuadas del rectángulo y el cuadrado?

Los debates heurísticos, pueden conducir a que una posible reformulación del problema es:

**Reformulación conveniente del problema:** Dado el rectángulo ABCD, de lados “a” y “b”, determinar una teselación conveniente del mismo en polígonos y construya el cuadrado PQRC,  $P \in AB$ , que puede ser teselado con las mismas figuras que el cuadrado.

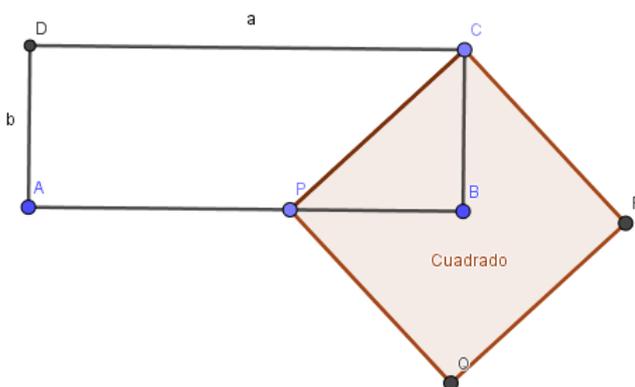


Figura 15. Figura de análisis que responde a la reformulación del problema

**Pregunta heurística 5.** Como se ha podido ver, la cantidad de polígonos a emplear en la teselación es directamente proporcional al alargamiento del rectángulo ABCD ¿De qué depende la cantidad de regiones en que se realiza la teselación?

Los primeros intercambios heurísticos para contestar esta interrogante son dirigidos a determinar una medida matemática del “alargamiento” del rectángulo, y esta es precisamente, la razón entre las longitudes de los lados del rectángulo, con lo cual se concluye que la cantidad de polígonos de la teselación depende de dicha razón.

De aquí, se deriva la interrogante

**Pregunta heurística 6.** Sea “ $k$ ”, la razón entre los lados del rectángulo, ¿cómo se pueden determinar las longitudes de los segmentos de los polígonos que teselan el rectángulo?

Considerando el primer caso mostrado anteriormente, se realiza la siguiente figura de análisis, con sus notaciones, donde se tiene que: el triángulo BCP es común al rectángulo y al cuadrado, el triángulo ADF es igual al triángulo BCE, el triángulo CGH es igual al triángulo IJQ y el pentágono DGHPF es igual al pentágono EPIJR.

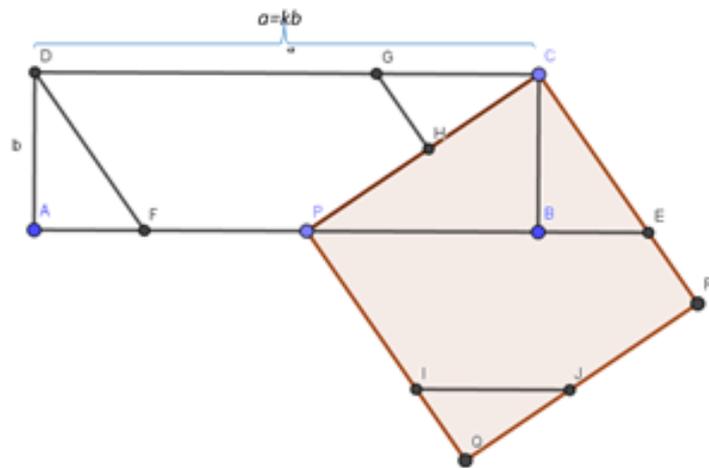


Figura 16. Figura de análisis con notaciones convenientes

Para proceder a la determinación de las longitudes buscadas y, con ello, los tipos y dimensiones de los polígonos que teselan el rectángulo y el cuadrado, se establecen intercambios heurísticos, basados en los principios de: analogía, reducción, movilidad, descomposición del problema en subproblemas, consideración de casos especiales, etc; conduciendo las conversaciones heurísticas a la obtención de los siguientes resultados.

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que  $a > b$ .

Si  $\frac{a}{b} = k$ , entonces se infiere que  $k > 1$ , y resulta:

$$a = kb, \text{ con } k > 1$$

Como las áreas del rectángulo ABCD y el cuadrado PQRS son iguales, se tiene

$$AD \cdot CD = CP^2,$$

o sea,  $b \cdot kb = CP^2,$

de donde, el lado del cuadrado será:

$$CP = \sqrt{k} \cdot b$$

Por el Teorema de Pitágoras en el  $\square PBC$ , se tiene

$$BP^2 = CP^2 - BC^2,$$

o sea,  $BP^2 = k \cdot b^2 - b^2,$

de donde resulta:

$$BP = \sqrt{k-1} \cdot b$$

Por el Teorema de Pitágoras en el  $\square CPE$ , se tiene

$$BE^2 = CE^2 - BC^2,$$

Análogamente, por el Teorema de Pitágoras en los  $\square CPE$  y  $\square CBP$ , respectivamente se tiene:

$$CE^2 = PE^2 - PC^2 \quad \text{y} \quad BC^2 = PC^2 - BP^2$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la anterior, resulta:

$$BE^2 = PE^2 - PC^2 - PC^2 + BP^2$$

$$BE^2 = PE^2 - 2PC^2 + BP^2$$

Pero, por suma de segmentos,  $PE = BP + BE$ , y sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$BE^2 = (BP + BE)^2 - 2PC^2 + BP^2$$

$$BE^2 = BP^2 + 2BP \cdot BE + BE^2 - 2PC^2 + BP^2,$$

$$0 = 2BP^2 + 2BP \cdot BE - 2PC^2$$

Donde, al despejar  $BE$ , resulta:

$$BE = \frac{PC^2 - BP^2}{BP}$$

Sustituyendo los segmentos ya calculados  $CP = \sqrt{k} \cdot b$  y  $BP = \sqrt{k-1} \cdot b$ , resulta

$$BE = \frac{(\sqrt{k} \cdot b)^2 - (\sqrt{k-1} \cdot b)^2}{\sqrt{k-1} \cdot b}$$

$$BE = \frac{k \cdot b^2 - (k-1)b^2}{\sqrt{k-1} \cdot b}$$

$$BE = \frac{b}{\sqrt{k-1}}$$

Volviendo a la suma de segmentos  $PE = BP + BE$ , sustituyendo por las expresiones anteriores se tiene,

$$PE = \sqrt{k-1} \cdot b + \frac{b}{\sqrt{k-1}}$$

$$PE = \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Además, como el pentágono DGHPF es igual al pentágono EPIJR, se tiene que:

$$DG = PE = \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

**Pregunta heurística 7.** Como se ha descubierto, la cantidad "C" de polígonos que conforman la teselación depende de la razón "k" entre los lados del rectángulo, ¿Cómo puede determinarse "C" en función de "k"?

Al comparar las figuras 3 y 4, puede notarse que la cantidad C varía en función de la cantidad de polígonos que se conformen con un lado igual al lado DG.

Como se aprecia, en general, existen 3 triángulos en la distribución de polígonos de las teselaciones, por lo que la cantidad de polígonos con lado DG será "C-3".

Luego, por diferencia de segmentos, la longitud del segmento CG será

$$CG = CD - (C - 3) \cdot DG$$

Sustituyendo las longitudes de los segmentos involucrados en el miembro derecho, resulta

$$CG = k \cdot b - (C - 3) \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

$$CG = (\sqrt{k-1} - C + 3) \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Por otra parte, resulta obvio que  $0 \leq CG \leq DG$ , y al sustituir, se tiene

$$0 \leq (\sqrt{k-1} - C + 3) \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}} \leq \frac{k \cdot b}{\sqrt{k-1}}$$

Y al realizar transformaciones elementales, se obtiene:

$$\sqrt{k-1} + 2 \leq C \leq \sqrt{k-1} + 3$$

Con este resultado y conociendo que  $C \in \mathbb{N}$ , se infiere que

$$C = \begin{cases} \sqrt{k-1} + 2, & \text{si } \sqrt{k-1} + 2 \in N \\ \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor + 3, & \text{si } \sqrt{k-1} + 2 \notin N \end{cases}$$

donde  $[x]$ , significa “parte entera de  $x$ ” y se refiere al mayor número entero menor o igual que  $x$ .

De esta forma, se ha conducido a los estudiantes, mediante el empleo oportuno de los recursos heurísticos, a la obtención y demostración geométrica de los teoremas de la altura y de los catetos, utilizando el manejo de materiales concretos adecuados para ello, consistentes en teselaciones poligonales óptimas.

No obstante, resulta válido señalar que, para estudiantes de niveles superiores, pueden emplearse herramientas deductivas más potentes, que aunque no están contempladas en el diseño curricular de la Matemática, pueden introducirse como parte de círculos de interés, club de matemáticas u otras formas atractivas para la profundización en Matemáticas.

### 3. Otras herramientas para la deducción y demostración formal de los teoremas de la altura y de los catetos utilizando teselaciones

Las herramientas de profundización para la formalización deductiva de los resultados que se han expuesto, se presentan en los dos epígrafes siguientes, destinados a estudiantes, preferiblemente, de bachillerato o universitarios.

#### 3.2. La equidescomposición y equicomplementación como fundamentación teórica del proceso de teselación poligonal

Como se ha visto hasta el momento, para realizar la teselación poligonal de una región plana, se requiere la descomposición de la región en polígonos que no deben superponerse el uno sobre el otro.

A continuación se presenta la formalización matemática de estas ideas, a la luz de la teoría de equidescomposición y equicomplementación de polígonos propias de David Hilbert (1862 - 1943), reconocido matemático alemán enfrascado en la formalización de la Matemática, expuestas en Pressiat (2002) y que se citan en Duque Navarro & Maca Cortés (2011).

*“Dos figuras  $P$  y  $P'$  son equidescomponibles si es posible expresar cada una de ellas como la unión de triángulos (polígonos) no superpuestos el uno sobre el otro, de modo tal que para cada  $i$  los triángulos  $T_i$  y  $T'_i$  sean congruentes y se cumple:*

$$P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n \text{ y } P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_n$$

*Dos figuras  $P$  y  $P'$  son equicomplementarias (tienen la misma superficie) si existen dos figuras  $Q$  y  $Q'$  que satisfagan las siguientes cuatro condiciones:*

- $P$  y  $Q$  no se superponen la una con la otra.
- $P'$  y  $Q'$  no se superponen la una sobre la otra.

- $Q$  y  $Q'$  son equidescomponibles.
- $P \cup Q$  y  $P' \cup Q'$  son equidescomponibles." p. 59-60

Como consecuencia de estas definiciones, se tiene que la equidescomponibilidad es una "relación de equivalencia" (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), y que la equicomplementariedad es una condición necesaria para la equidescomponibilidad, es decir, que si las dos figuras  $P$  y  $P'$  son equidescomponibles entonces, también son equicomplementarias (tienen la misma superficie).

Un ejemplo de esta situación es el triángulo equilátero formado por la unión de dos triángulos rectángulos congruentes, es equidescomponible con un triángulo isósceles o con un trapecoide simétrico, construidos uniendo dichos triángulos por su menor cateto y por su hipotenusa, respectivamente, tal y como lo muestra la figura:

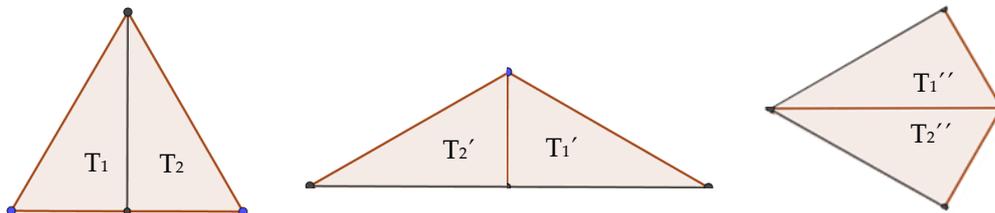


Figura 17. Ejemplo de figuras equidescomponibles

Aplicando estos conceptos a los teoremas de la altura y de los catetos ya discutidos, puede verse cómo ambos se reducen a la equidescomposición y equicomplementación de un rectángulo con el cuadrado de su misma área.

### 3.2. Método de la p-tira para la equidescomposición

El problema de encontrar una figura equidescomponible con otra puede resultar una tarea bastante ardua y a veces difícil, sin embargo, con el método de la p-tira, esto puede facilitarse en muchos casos.

Como puede verse en Duque Navarro & Maca Cortés (2011), el método de la p – tira

*“consiste en encontrar la equidescomposición de dos rectángulos con igual área, las “piezas” en las que se descompone cada rectángulo, resultan del cruce de dos bandas, cada una de ellas, con la forma de su respectivo rectángulo, como se muestra en la siguiente figura” p.67*

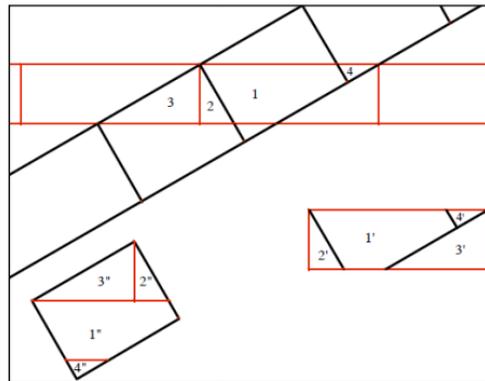


Figura 18. Ejemplificación del método de la  $p$ -tira en la equidescomposición de rectángulos. Tomado de Duque Navarro & Maca Cortés (2011), p.68

Para que este método ofrezca el resultado esperado, las bandas deben cruzarse de manera óptima, de tal manera que un extremo del lado del rectángulo de la segunda banda que se superpone, coincida con el vértice del rectángulo de la primera banda y el otro extremo corte el otro lado del rectángulo de la primera banda.

Como puede apreciarse, este método pudo haberse usado en la cuadratura del rectángulo, que se empleó en la deducción y demostración geométrica de los teoremas de la altura y de los catetos en epígrafes anteriores.

## Referencias

- [1] BALLESTER, Sergio y otros. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, pp.134 – 146, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1992.
- [2] CASSELMAN, Bill. *On the dissecting table: Henry Perigal 1801 - 1898*, Plus Magazine, 16, December, <https://plus.maths.org/content/dissecting-table>, 2000.
- [3] CENERA GARCÍA, Verónica. *El aprendizaje de la geometría con la ayuda de material didáctico en primer ciclo de primaria trabajo fin de grado de Licenciada en Educación Primaria*, Ediciones Universidad de Valladolid, España, 2015.
- [4] COLL, César. *Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje*, pp. 157-186, Alianza Editorial, Madrid, España, 2001.
- [5] DUQUE NAVARRO, Jonathan Har & MACA CORTÉS, Oscar Eduardo. *Análisis histórico y epistemológico de la noción de cuadratura en los libros I y II de Los Elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la Educación Básica*, Tesis en opción al título de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3853/4/CB-0449756.pdf> Universidad del Valle, Cali, Colombia, 2011.
- [6] GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. *El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años*, Revista SIGMA N° 32, Noviembre 2008, pp.103-130, España, [http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_32/8\\_pitagoras.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf)

- [7] LARROSA, Ignacio. *Cuadrando el rectángulo*. Animación en Geogebra, <http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Rectangulo2Cuadrado.html>. 2014.
- [8] MILLER, María. *Un problema de teselación*, Boletín 11 Mamut Matemáticas, <https://www.mamutmatematicas.com/boletin/febrero-2009.htm>, 2009.
- [9] SERRANO, José Manuel & PONS PARRA, Rosa María. *El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación*. Revista Electrónica de Investigación Educativa. ISSN: 1607-4041. Vol. 13, Núm. 1, <http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html>, México, 2011.
- [10] URIBE GARZÓN, Sonia Milena; CÁRDENAS FORERO, Óscar Leonardo & BECERRA MARTÍNEZ, James Frank. *Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños*, Educación Matemática, vol. 26, núm. 2, pp. 135-160, Grupo Santillana México Distrito Federal, México, 2014.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* José Enrique Martínez Serra  
*Correo Electrónico:* jose.martinez@unae.edu.ec  
*Institución:* Universidad Nacional del Ecuador.

*Nombre:* Marco Vinicio Vásquez Bernal  
*Correo Electrónico:* marco.vasquez@unae.edu.ec  
*Institución:* Universidad Nacional del Ecuador.

*Nombre:* Arellys García Chávez  
*Correo Electrónico:* arelys.garcia@unae.edu.ec  
*Institución:* Universidad Nacional del Ecuador.

*Nombre:* Ramiro Infante Roblejo  
*Correo Electrónico:* rinfanteroblejo@gmail.com  
*Institución:* Universidad de Granma, Cuba.

# Historias de Matemáticas

## Enseñando Relatividad Especial gráficamente

### Teaching Special Relativity graphically

Daniel de la Fuente Benito, José Antonio Sánchez Pelegrín  
y Alfonso Zamora Saiz

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 073–082, ISSN 2174-0410  
Recepción: 29 Ene'20; Aceptación: 16 Mar'20

1 de abril de 2020

#### Resumen

En este trabajo presentamos una introducción a la Relatividad Especial sencilla y sin fórmulas, apta para ser explicada a un alumnado de Bachillerato. Gracias a nuestro planteamiento somos capaces de demostrar de manera gráfica fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.

**Palabras Clave:** Relatividad Especial, Geometría, Física, Bachillerato, Einstein.

#### Abstract

In this work we present a simple introduction of the Special Relativity theory without formulae, suitable for being explained to high school students. Using this framework we are able to prove graphically the time dilation and length contraction.

**Keywords:** Special Relativity, Geometry, Physics, High School, Einstein.

## 1. Introducción

Aunque ya ha pasado más de un siglo desde su descubrimiento en 1905, la teoría de la Relatividad sigue siendo inaccesible para la inmensa mayoría de la población, tachándose con frecuencia de ser extremadamente difícil e incomprensible. Los medios de comunicación suelen referirse a ella como una materia apta sólo para especialistas, haciendo hincapié en su complejidad. Influenciada por este tratamiento popular, su introducción y explicación en los sistemas educativos a nivel preuniversitario suele ser muy breve o inexistente. En muchas ocasiones esto es debido a las dificultades que encuentra el profesorado para explicar esta materia de manera asequible. No obstante, en el marco del sistema educativo español aparece en la asignatura de Física de 2º de Bachillerato (alumnos de 17 años) dentro del bloque de contenidos de la Física del siglo XX un apartado dedicado al estudio de la Relatividad Especial [RD 1105/2014]. De hecho,

en nuestra experiencia docente encontramos que existe un extraordinario interés del alumnado por la Relatividad, notablemente superior al mostrado hacia otras ramas de la Física y las Matemáticas. Ello se debe tanto a la belleza de la teoría como al halo de misterio que envuelve siempre su explicación y comprensión.

Obviamente, que el tiempo no transcurra para todos igual o que distintos observadores pueden medir diferentes longitudes de un mismo objeto resulta extraño y no es fácil de asimilar, sobre todo cuando la experiencia nos grita a diario lo contrario. Pese a que los efectos relativistas no sean apreciables en nuestra vida cotidiana, existen y son de sumo interés en el funcionamiento de numerosos dispositivos modernos, como por ejemplo el GPS. De hecho, es precisamente esta ausencia de intuición lo que convierte a la teoría de la Relatividad en una herramienta excepcional para estimular y potenciar la capacidad de abstracción de cualquiera que se enfrente a ella por primera vez, permitiendo al alumnado familiarizarse con una geometría de gran relevancia distinta de la euclídea.

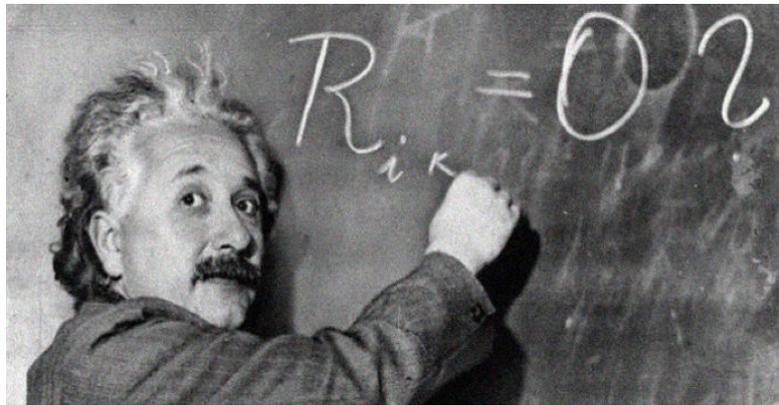


Figura 1. Albert Einstein (1879-1955).



Figura 2. Henri Poincaré (1854-1912).

Como es bien conocido, la teoría de la Relatividad Especial se atribuye a Albert Einstein, el primero en dar una explicación satisfactoria de los sorprendentes hechos experimentales medidos por Michelson y Morley dos décadas atrás. Lo cierto es que no fue el único que resolvió el enigma, pues Henri Poincaré llegó de manera independiente a las mismas conclusiones prácticamente al mismo tiempo (ver, por ejemplo, [Requena, 2005] para detalles históricos). Sin embargo, sí podemos afirmar que Einstein fue el indiscutible precursor de la teoría de la Relatividad General, la cual fue exclusivamente fruto de su intelecto, sin necesitar de ningún experimento físico. La formulación de esta teoría, a diferencia de la Relatividad Especial, es mucho más compleja ya que se requieren conocimientos de geometría avanzados.

En este artículo pretendemos mostrar que las bases de la Relatividad Especial, o al menos las ideas esenciales que la sustentan, pueden ser explicadas de una manera asequible tanto para el público general como para el alumnado de Bachillerato. Para simplificar en la mayor medida posible nuestra exposición apenas utilizaremos su intrincada formulación matemática, sino que nos basaremos en un tratamiento gráfico basado en dibujos. De hecho, pensamos que esta manera de introducir e interpretar las primeras consecuencias relativistas es más visual y didáctica que las usualmente utilizadas en los libros de texto (véase [Callahan, 2013], por ejemplo).

## 2. Jugando con la geometría de Minkowski

La Relatividad, más que una teoría, es un marco teórico sobre el que se asientan todas las teorías físicas. En particular, la Relatividad Especial describe cómo es la geometría del espacio-tiempo, esto es, el conjunto de sucesos espaciotemporales o eventos, en ausencia de gravedad, mientras que la Relatividad General es esencialmente una teoría de la Gravitación de la cual se derivan el resto de leyes físicas.

La hipótesis fundamental de la teoría de la Relatividad Especial es que el espaciotiempo tiene una geometría pseudoeuclídea, es decir, diferente de la geometría euclídea del espacio a la que estamos acostumbrados. Por tanto, para comprender las ideas principales de la Relatividad Especial hemos de conocer cómo es esta geometría. Las herramientas matemáticas necesarias para tal fin son bastante más básicas de lo que pueda parecer, máxime si nos restringimos al caso bidimensional (es decir, una dimensión espacial y otra temporal), como haremos en lo que resta de artículo.

Consideremos un evento  $P$  del plano espaciotemporal  $M$ , también conocido como espacio de Minkowski. Los vectores en  $P$  se clasifican en espaciales, temporales futuros, temporales pasados y luminosos, de acuerdo con la Figura 3. En dicha figura vemos las rectas que definen el llamado cono de luz, donde se encuentran los vectores luminosos y que representa la frontera entre vectores espaciales y temporales.

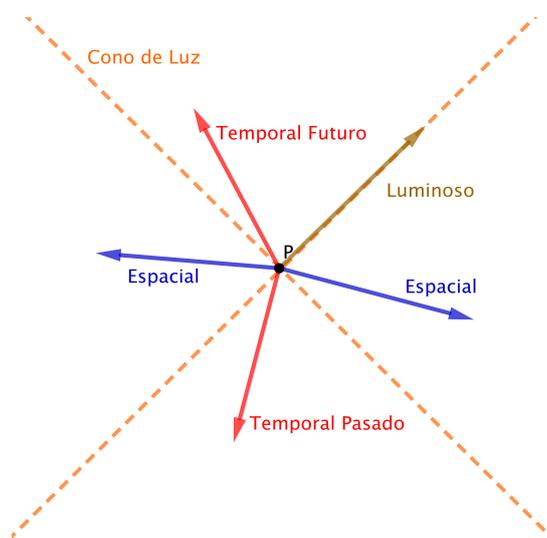


Figura 3. Cono de luz y vectores espaciales, temporales y luminosos en  $P$

Sólo se requiere conocer las siguientes tres afirmaciones sobre la geometría minkowskiana: entender qué significan dos rectas perpendiculares, cuáles son las circunferencias y la nueva desigualdad triangular. Estos elementos definen la geometría llamada hiperbólica del espacio de Minkowski (para una introducción más detallada a esta geometría, consultar [Romero, 1998]).

- a) Rectas perpendiculares: Dada una recta  $r$  y un punto  $P \in r$ , la recta perpendicular a  $r$  en  $P$  (que denotamos por  $s$  en la Figura 4) es la simétrica respecto de la diagonal que pasa por  $P$ . En particular, las rectas de pendiente 1 o -1 (como la línea discontinua, de pendiente 1) son perpendiculares a sí mismas.

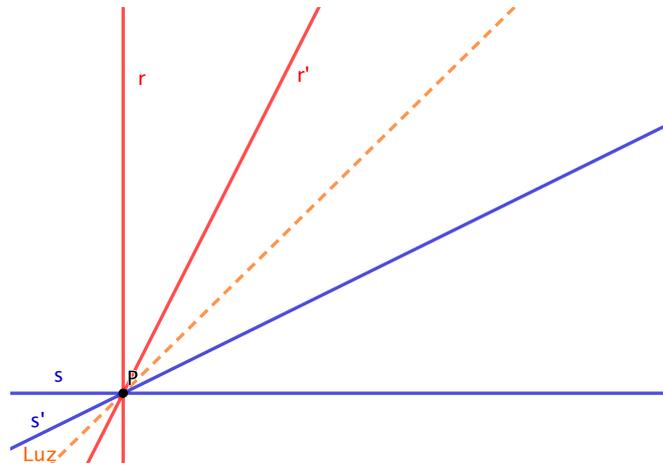


Figura 4. Las rectas  $r$  y  $s$  son ortogonales en la geometría minkowskiana. Lo mismo sucede con las rectas  $r'$  y  $s'$ . La diagonal, es decir, el cono de luz es perpendicular a sí misma.

- b) Circunferencias: Dado un punto  $P \in M$ , el conjunto de puntos que distan  $R$  unidades de  $P$  viene dado por el par de hipérbolas de la Figura 5(b).

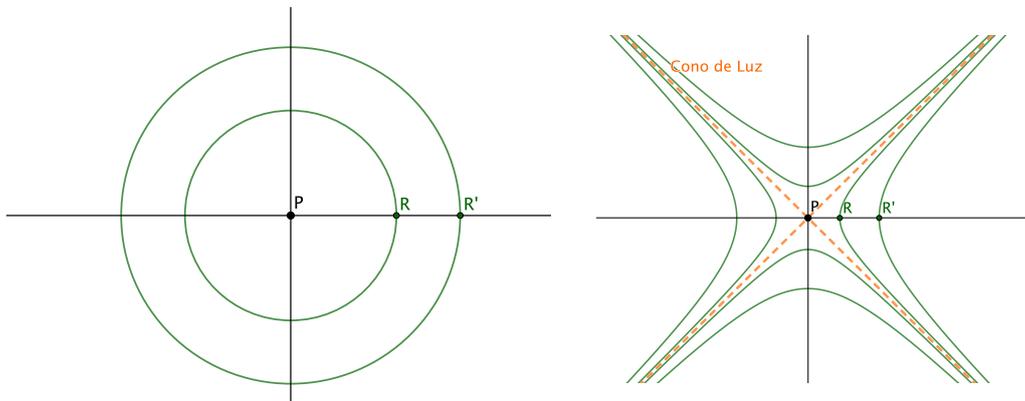


Figura 5. (a) Circunferencias de radio  $R$  y  $R'$  en el plano euclídeo usual. (b) En el plano de Minkowski, los puntos que distan  $R$  y  $R'$  unidades de  $P$  son las hipérbolas de semieje transverso  $R$  y  $R'$ , respectivamente.

- c) Desigualdad triangular: Dado un triángulo como el de la Figura 6, en el que los tres lados son temporales (es decir, el triángulo se encuentra dentro del cono de luz en la Figura 3), se cumple la siguiente desigualdad triangular invertida:

$$\overline{AB} + \overline{BC} \leq \overline{AC} .$$

En realidad, la afirmación (c) no será utilizada explícitamente en este artículo. La mencionamos aquí para resaltar lo "extraña" que resulta esta geometría no euclídea. Una aplicación directa de esta desigualdad prueba la conocida "Paradoja de los gemelos".

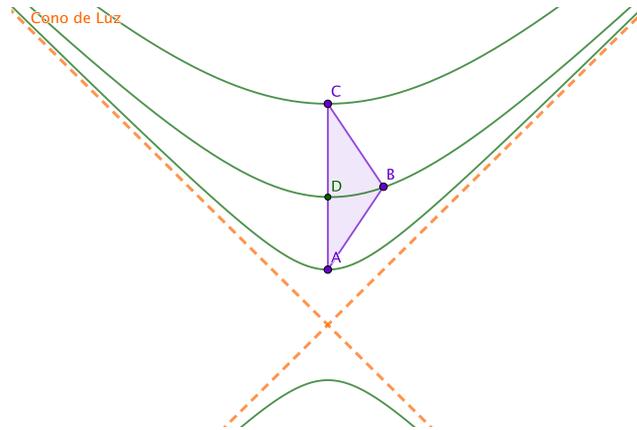


Figura 6. Triángulo con todos sus lados temporales.

### 3. Interpretaciones físicas

A continuación procedemos a dar una interpretación física a cada uno de los elementos geométricos del espacio de Minkowski. Un observador en  $M$  se puede representar como una curva temporal futura  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ , parametrizada por la longitud de este intervalo  $I = [t_1, t_2]$ , cuyo vector tangente es temporal futuro y unitario en todo punto de su trayectoria (ver Figura 7). La longitud de  $\gamma$  entre dos eventos de su vida  $A$  y  $B$  representa el tiempo propio transcurrido entre ambos sucesos, es decir, el tiempo que mide su reloj (y no el de otro observador, como veremos). Así, si  $A = \gamma(t_1)$  y  $B = \gamma(t_2)$ , el tiempo transcurrido para el observador  $\gamma$  entre  $A$  y  $B$  es  $t_2 - t_1$ .

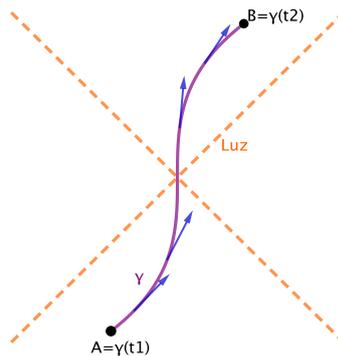


Figura 7. La curva  $\gamma$  representa un observador en el espacio de Minkowski.

En particular, si la curva  $\gamma$  es una recta, el observador se llamará inercial. Recordemos que un observador en ausencia de gravedad es inercial cuando no actúa ninguna fuerza sobre él, de modo que se desplaza con velocidad uniforme respecto a otro observador en reposo. Las trayectorias de los rayos de luz vienen representadas por rectas de pendiente 1 o -1, coincidentes con el cono de luz, y de ahí su nombre.

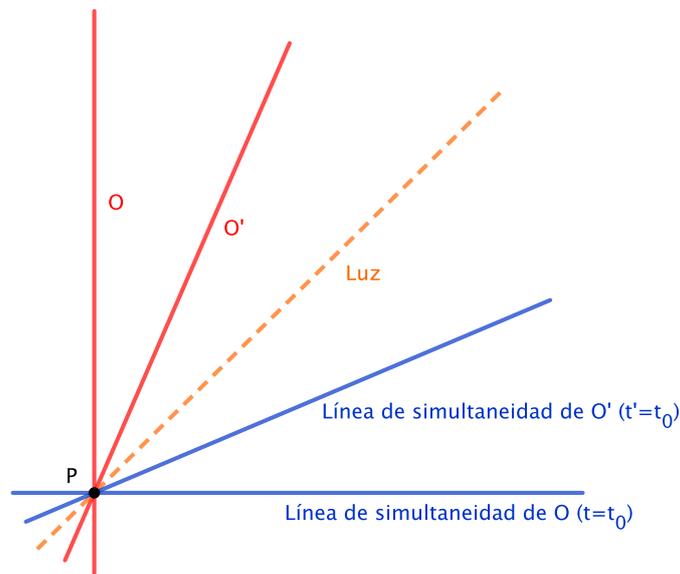


Figura 8. Líneas de simultaneidad de los observadores  $O$  y  $O'$ .

Consideremos un observador inercial representado por la recta  $O = O(t)$ . Supongamos un evento en la vida de este observador,  $P = O(t_0)$ . En la Figura 8 observamos la recta perpendicular a  $O$  en  $P$ , que representa el conjunto de eventos simultáneos con  $P$  para  $O$ , es el llamado espacio (o línea) de simultaneidad con  $P$  para  $O$ . Esta recta representa el “espacio físico” que  $O$  observa en el instante en que su reloj marca  $t = t_0$ . Sobre este espacio, el observador  $O$  mide longitudes de objetos (en dimensiones superiores mide áreas o volúmenes). De esta manera, el espacio ya no es absoluto (es decir, igual para todos los observadores), sino que depende del observador y del evento de su vida que estemos considerando. Del mismo modo observamos la recta perpendicular a  $O'$  en  $P$ , que es la línea de simultaneidad con  $P$  para  $O'$  y representa el espacio físico que  $O'$  observa en el instante en que su reloj marca  $t = t_0$ .

Supongamos que dos observadores (inerciales, por simplicidad)  $O$  y  $O'$  coinciden en un evento  $P$  en cierto instante de sus vidas. El ángulo hiperbólico  $\alpha$  entre ambas rectas se denomina rapidez de  $O'$  respecto de  $O$  y su tangente hiperbólica  $\tanh \alpha$  es la velocidad que  $O$  mide de  $O'$ . La velocidad de  $O'$  medida por  $O$  será mayor conforme su trayectoria se acerca más al cono de luz, ya que el ángulo hiperbólico aumentará hasta hacerse infinito en la dirección del mismo. De aquí se puede deducir una de las afirmaciones más importantes de la Relatividad: la velocidad de la luz en el vacío es constante para cualquier observador (e igual a 300.000 km/s). Notemos también que la rapidez de la luz es infinita para todos los observadores.

#### 4. La dilatación del tiempo gráficamente

Una de las primeras consecuencias “anti-intuitivas” de la Relatividad Especial está relacionada con la dilatación temporal, expuesta por ejemplo en [Merino y Merino, 2005], y que ahora pasamos a mostrar gráficamente sin su formulación matemática. Sean  $O$  y  $O'$  dos observadores inerciales, moviéndose con velocidad relativa  $v$ , que en un determinado instante de sus vidas se encuentran en el evento  $P \in M$ . Supongamos que sincronizan sus relojes a un mismo tiempo  $t_0$  en el suceso  $P$ , por tanto,  $O(t_0) = O'(t_0) = P$ . Nos preguntamos, ¿qué marcará el reloj de  $O'$  cuando para  $O$  haya transcurrido un tiempo  $T$ ? Con más precisión, ¿qué verá  $O$  que marca el reloj de  $O'$  cuando el reloj de  $O$  marca  $T$ ?

Para analizarlo, observemos primero la Figura 9 (a). Llamemos  $A = O(T)$  al evento de la vida de  $O$  cuando para él ha transcurrido un intervalo de tiempo  $T$ . Trazando la línea de simultaneidad de  $O$  en  $A$  (es decir, la recta simétrica a la recta  $O$  respecto a la diagonal que pasa por el evento  $A$ ; en este caso es la perpendicular usual euclídea) obtenemos que  $A'$  es el evento simultáneo con  $A$  para el observador  $O$ , y será de la forma  $A' = O'(T')$  para cierto tiempo  $T'$ . ¿Será  $T = T'$  tal y como nos grita la intuición? La respuesta es negativa. De hecho, teniendo en cuenta cómo son las circunferencias en el espacio de Minkowski (como vimos en la Figura 5 (b)) se tiene que  $T > T'$ . Como vemos en la Figura 9 (a), la circunferencia del espacio de Minkowski que pasa por  $A$  está más alejada del origen que la que pasa por  $A'$ . Es decir, el segmento  $\overline{PA}$  visto con “gafas minkowskianas” es más largo que  $\overline{PA'}$ .

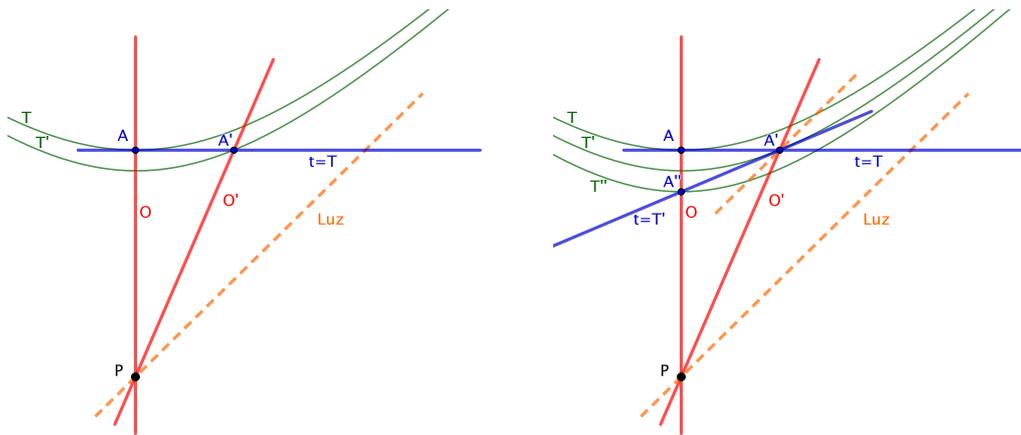


Figura 9. Dilatación del tiempo. Observamos que se verifica  $\overline{PA} = T > \overline{PA'} = T' > \overline{PA''} = T''$ .

Por tanto,  $O$  percibe que su reloj se adelanta respecto al de  $O'$ , o que el tiempo para  $O'$  se dilata. Ahora bien, puesto que ambos observadores son inerciales (y por tanto, físicamente equivalentes),  $O'$  tiene perfecto derecho para afirmar que es él quien está quieto y que es  $O$  el que se mueve. Aplicando los mismos argumentos que antes, concluiríamos que  $O'$  percibe que es su reloj el que se adelanta respecto al de  $O$ . ¿Es esto posible o es una contradicción?

Fijémonos en el dibujo de la Figura 9 (b). Trazando la línea de simultaneidad de  $O'$  en  $A'$  obtenemos que el suceso simultáneo para el observador  $O'$  con el evento  $A'$  es, sin embargo,  $A'' = O(T'')$  para cierto valor de  $T''$  que, como observamos gracias a las circunferencias del espacio minkowskiano de la Figura 9 (b), es menor que  $T$  (y también menor que  $T'$ ). Es por ello que el segmento  $\overline{PA'}$  también es más largo que  $\overline{PA''}$ . Por tanto, no hay contradicción, pues cada observador mide que el reloj del otro se atrasa.

## 5. La contracción de las longitudes gráficamente

Un argumento similar al anterior conduce a otro de los fenómenos paradigmáticos de la Relatividad: la contracción de las longitudes.

Consideremos una regla cuya longitud medida por el observador  $O$  (en reposo respecto a la regla, ver Figura 10) vale  $L$ , que es la longitud del segmento  $\overline{AB}$  situado sobre la línea de simultaneidad de  $O$  en  $A$ . La cuestión es: ¿cuánto mide la regla para los observadores  $O'$ , que se mueven con una cierta velocidad  $v$  respecto a la regla y los observadores  $O$ ?

Para saber cuánto mide la regla para el observador  $O'$  debemos trazar la línea de simultaneidad del observador  $O'$  en el suceso  $A = A'$ , obteniendo que el evento simultáneo a  $A'$  para

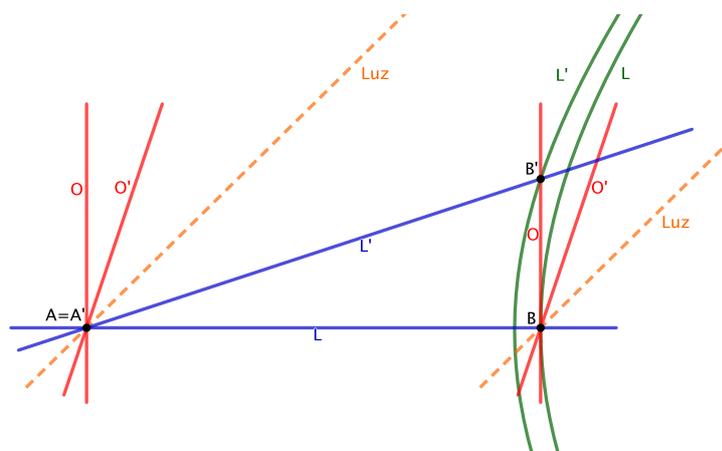


Figura 10. La longitud de la regla medida en reposo es  $L = \overline{AB}$ , mayor que la medida por un observador en movimiento  $O'$ , que vale  $L' = \overline{A'B'}$ .

$O'$  es  $B'$ . Una forma de entender esto es recordar que la regla siempre está en reposo respecto al observador  $O$ , por lo que siempre medirá  $L$  para este observador conforme transcurre su tiempo propio. Sin embargo, la longitud de la regla para el observador  $O'$ , que mide sobre la citada línea de simultaneidad, es  $L'$ , la distancia de  $A'$  a  $B'$ . Vemos que  $L'$  es menor que  $L$  sin más que tener en cuenta cómo son las circunferencias minkowskianas, como se observa en la Figura 10. Por tanto, las longitudes de objetos medidas en movimiento relativo son menores que las realizadas en reposo.

## 6. Comentarios finales

En este artículo hemos demostrado los dos fenómenos relativistas más conocidos, teniendo sólo en cuenta la hipótesis fundamental de la teoría de la Relatividad Especial, es decir, usando sólo que la geometría del espaciotiempo es pseudoeuclídea, en base a tres postulados. De hecho, con argumentos puramente geométricos que pueden ser representados gráficamente de manera sencilla es posible demostrar prácticamente cualquier otra paradoja relativista [Boya y Santander, 2005] y [De la Fuente y Salamanca, 2017].

Debido a que las herramientas matemáticas utilizadas son aptas para un alumnado de Bachillerato defendemos por tanto esta manera esquemática de introducir y explicar la Relatividad Especial no sólo por su sencillez, sino por ser mucho más precisa y próxima a las ideas esenciales que sustentan la teoría.

## Agradecimientos

Los dos primeros autores están parcialmente financiados por el proyecto de investigación "Semi-Riemannian Geometry and variational problems in Mathematical Physics" (Referencia MINECO y ERDF MTM-2016- 78807-C2-1-P).

## Referencias

- [1] BOYA, L.J., SANTANDER, M, *Paradojas relativistas*, Revista Española de Física, 19, pp. 17–24, 2005.
- [2] CALLAHAN, J.J., *The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] DE LA FUENTE, D., SALAMANCA, J.J., *El movimiento rígido en Relatividad: paradojas de Bell y Ehrenfest*, Revista Española de Física, 31, n°1., 2017.
- [4] MERINO, F., MERINO, A., *En recuerdo de Einstein*, Suma, n°50, pp.15–18, 2005.
- [5] *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, 3 de enero de 2015.
- [6] REQUENA, A., *Einstein y las Matemáticas*, Suma, n°50, pp.7–14, 2005.
- [7] ROMERO, A., *Geometría y Relatividad: una introducción a la geometría básica de la teoría*, Epsilon, n°41, pp. 305–320, 1998.

### Sobre los autores:

*Nombre:* Daniel de la Fuente Benito

*Correo electrónico:* fuentedaniel@uniovi.es

*Institución:* Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, 33003, Gijón, España.

*Nombre:* José Antonio Sánchez Pelegrín

*Correo electrónico:* jpelegrin@ugr.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad CEU San Pablo, Julián Romea 23, 28003, Madrid, España.

*Nombre:* Alfonso Zamora Saiz

*Correo electrónico:* alfonso.zamorasais@ceu.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad CEU San Pablo, Julián Romea 23, 28003, Madrid, España.



# Historias de Matemáticas

## El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides)

## The long journey of the “On the Division of Figures” (A lost book of Euclid)

Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 083–094, ISSN 2174-0410  
Recepción: 10 Sep'19; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

Euclides escribió un tratado de agrimensura titulado *Sobre la División de las Figuras* que se perdió en las múltiples vicisitudes por las que atravesó la Biblioteca de Alejandría. Tenemos noticia de él gracias a la obra de Proclo (siglo V d.C.). Se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe, de los siglos XVI a XIX. Esto permitió a Raymond Clare Archibald publicar una reconstrucción del citado texto en 1915.

**Palabras Clave:** Euclides, Agrimensura, Geometría.

### Abstract

Euclid wrote a land surveying treatise entitled *On the Division of Figures* that was lost in the many vicissitudes through which the Library of Alexandria crossed. We have news of this work thanks to Proclo (Vth century d.C.). It has been possible to be recovered after a long journey through some Arabic manuscripts, geometry texts from the 12th and 13th centuries and translations into Latin and other languages from Arabic, from the 16th to the 19th centuries. This allowed Raymond Clare Archibald to publish a reconstruction of the cited text in 1915.

**Keywords:** Euclid, Land Surveying, Geometry.

## 1. Introducción

Con el nacimiento en la antigüedad de la agricultura surgió un nuevo concepto de utilización del suelo desconocido hasta entonces. Como consecuencia de ello, aparecieron los primeros conflictos acerca de la propiedad del mismo, lo que obligó a una parcelación adecuada del terreno conforme a una distribución previamente acordada. Para hacer frente a esta situación,

los responsables de las diferentes sociedades debieron crear un nuevo tipo de funcionarios que fueran capaces de delimitar las tierras con precisión, tanto para realizar asignaciones como para mediar en los diferentes conflictos o restituir el terreno a sus usuarios tras alguna catástrofe natural cuyo máximo exponente eran las crecidas de los ríos.

Este fenómeno, común en todas las culturas, tuvo un modelo muy claro en el antiguo Egipto, cuya economía dependía de las crecidas periódicas del Nilo que depositaban un limo fértil en sus riberas. Así, los primeros faraones crearon la figura de los agrimensores, que ellos llamaron tensadores de cuerdas, expertos en la medición y delimitación de las tierras y que debían ejercitar su trabajo mediante la aplicación de depuradas técnicas geométricas. Se ocupaban también de la división del terreno tanto en los casos de algún trato comercial entre propietarios como en el caso de las herencias entre sus descendientes o en asignaciones concretas de los faraones a sus súbditos.

Estos funcionarios usaban sus propios métodos de trabajo, que plasmaban en manuales prácticos de trazado de figuras geométricas. Estos manuales se fueron perfeccionando con el paso del tiempo y de ellos surgió, primero en Egipto y más tarde en Grecia, una nueva ciencia: la Geometría. Así lo expresa Herodoto (siglo V a.C.) en sus Historias (Libro II, nº 109):

*Sesostris ... dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes ... Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar por medio de una medición la extensión exacta de la pérdida ... A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la Geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia.*

Si bien la geometría alcanzó altos grados de abstracción y generalidad, especialmente en la Grecia antigua, la actividad de los agrimensores seguía siendo indispensable y algunos autores escribieron tratados que, si bien podían ser usados por esos funcionarios, tenían una fuerte carga teórica. Tal es el caso de un libro escrito por Euclides, que tituló *Sobre la División de las Figuras*, dedicado en exclusiva a la partición de diferentes figuras geométricas y que se perdió a causa de las múltiples vicisitudes que sufrió la Biblioteca de Alejandría durante el ocaso de la civilización griega. Aunque no disponemos del original griego, éste se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe de los siglos XVI y XIX. Finalmente, en 1915 Raymond Clare Archibald publicó una reconstrucción del texto de Euclides a partir de los diferentes Manuscritos y ediciones de los siglos que hemos citado.

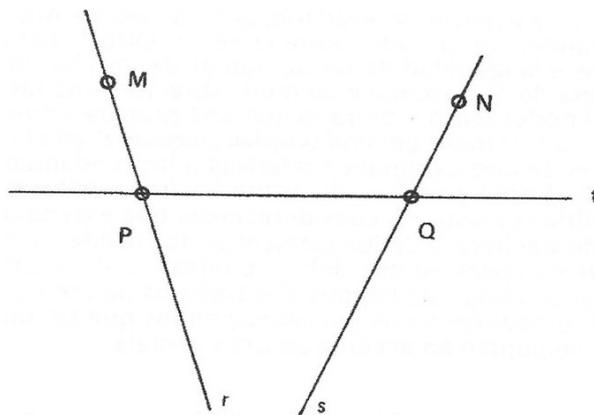
## 2. Los tiempos de la Grecia antigua

1. Tenemos noticias de *Sobre la División de las Figuras* gracias al *Comentario al Libro I de los Elementos*, de **Proclo** (siglo V d.C.) que cita, sin añadir ningún comentario, la existencia de la obra *Peri Diaipeson Biblion* (*Sobre la División de las Figuras*) que atribuye a **Euclides**. Un poco más adelante, al hablar de la definición de figura y de la divisibilidad de las mismas en otras diferentes, añade:

*Puesto que el círculo se puede dividir en partes distintas al mismo en cuanto a concepto, también se puede hacer lo mismo con las figuras lineales; esta es, en efecto, la intención del autor de los Elementos en sus Divisiones, donde divide figuras dadas en unos casos en figuras semejantes y en otros, en figuras no semejantes.*

2. Una de las pocas obras que se ha conservado de Apolonio de Perga, además de las famosas *Cónicas*, es la titulada *Sobre la sección de la razón*, que fue conservada en árabe y traducida al latín en 1706 por Halley. En ella, el problema principal es el siguiente:

Dadas dos rectas coplanarias y dos puntos en ellas, trazar desde un tercer punto del plano una recta transversal que corte a las anteriores en segmentos que medidos sobre ellas formen una proporción dada.



Es decir, dada una razón  $\alpha$ , trazar desde A una recta t de manera que:

$$\frac{MP}{NQ} = \alpha$$

Si las dos rectas son convergentes el problema es una cuestión de división de un triángulo mediante una recta transversal que pase por un punto situado en algún lugar del plano de manera que se cumpla el resultado del enunciado anterior.

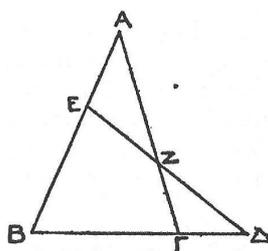
Parecido a éste es el que aparece en la obra *Sobre la sección del área*, desgraciadamente perdida, pero del que conocemos esta proposición:

Dadas dos rectas coplanarias y dos puntos en ellas, trazar desde un tercer punto del plano una recta transversal que corte a las anteriores en segmentos que medidos sobre ellas desde lo puntos respectivos determinen un rectángulo igual a un rectángulo dado.

En este caso sería  $MP \cdot NQ = \alpha$ .

Si las dos rectas se cortan en un punto y las distancias de los segmentos respectivos se toman desde este punto, esta proposición es prácticamente equivalente a las proposiciones 19, 20, 26 o 27 del texto restaurado de Euclides. Por ejemplo.

**Proposición 20.** Cortar una cierta fracción de un triángulo mediante una línea trazada de un punto dado en el interior del triángulo.



3. En el siglo I d.C., **Herón de Alejandría** estudió la división de figuras planas y sólidas en el tercer libro de su *Métrica*. Pero al contrario del tratamiento de Euclides a estas cuestiones, las soluciones que da Herón son casi siempre aproximaciones prácticas. Por ejemplo, en la proposición siguiente, que aparece también en la reconstrucción de la obra de Euclides:

**Proposición 2.** *Dividir un triángulo en una razón dada mediante una línea paralela a la base.*

Euclides da una construcción general mientras que Herón considera que las longitudes de los lados del triángulo dado tienen un valor numérico concreto y a partir de aquí halla la distancia aproximada de los vértices a los puntos de los lados en que éstos cortan a la paralela a la base buscada y argumenta que lo hace así debido a que en un campo con una superficie irregular es difícil trazar una línea paralela a otra.

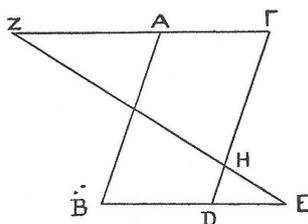
Sin embargo, en algunos casos da resultados teóricos generales como en la:

**Proposición 10.** *Dividir un triángulo en una razón dada mediante una línea recta trazada desde un punto situado en la prolongación de un lado.*

En la demostración de esta proposición, análoga a la Proposición 20 del libro de Euclides, utiliza el resultado de Apolonio de Perga que hemos visto antes, perteneciente al libro *Sobre la sección del área*.

4. Finalmente, **Pappus** (siglo IV d.C.) al describir los 171 teoremas del libro perdido de los *Porismas* de Euclides, da previamente 38 lemas, el último de los cuales está en relación con las cuestiones que estamos tratando aquí:

**Lema 38.** *Trazar una línea por un punto fijo E en la prolongación del lado BD del paralelogramo AFDB de manera que el triángulo ZHT sea igual al paralelogramo dado.*



En la demostración de la solución que se da a este problema se usa de nuevo la proposición de Apolonio que ya hemos visto en *Sobre la sección del área*.

Tracemos la recta EZ por E tal que el rectángulo de lados  $\Gamma Z$  y  $\Gamma H$  sea igual al que tiene como lados  $A\Gamma$  y  $\Gamma D$ . Entonces, el triángulo  $Z\Gamma H$  es igual al paralelogramo  $AZDB$  y la recta EZ es la solución.

### 3. Dos manuscritos árabes

En el largo viaje del tratado de Euclides que nos ocupa tienen un papel importante dos manuscritos árabes que han sido de gran utilidad para la reconstrucción de la obra original. El primero de ellos fue descubierto por el sabio inglés **John Dee** (1527-1608) en una fecha anterior a 1563. Según John Dee contenía parte de la obra de Euclides pese a que estaba encabezado con el nombre de **Machometus Bagdadinus**, al que Dee describe como *geómetra del siglo X*. John Dee tradujo el manuscrito al latín y entregó la traducción a **F. Commandino**, quien lo publicó en forma de libro en 1570 atribuyendo a ambos la autoría. Posteriormente, James Gregory publicó una nueva edición impresa de esta obra en 1706.

Según todos los indicios, el original árabe no habría sido una traducción directa de la obra de Euclides ni, probablemente, una adaptación de la misma; contiene errores y expresiones no matemáticas y, además, no incluye las proposiciones referentes a la división del círculo a las que alude Proclo, lo que confirma la afirmación de Dee de que dicho manuscrito contenía solamente un fragmento del trabajo original de Euclides.

A mediados del siglo XIX, **Woepcke** (1826-1864), sabio geómetra y arabista alemán, halló otro manuscrito árabe que contenía dos fragmentos de las obras desaparecidas de Euclides en la Biblioteca Nacional de París. En 1851 publicó un estudio comparado de este manuscrito y el de John Dee, en una versión bilingüe en árabe y francés en el *Journal Asiatique* (sept.-oct. 1851, pp. 217-247) con el título: *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*. La diferencia principal que existe entre el manuscrito de Dee y el de Woepcke es que el primero es más teórico y contiene principios generales sobre los problemas estudiados mientras que el segundo presenta casos particulares y concretos que se pueden agrupar bajo aquellos principios.

Está explícitamente atribuido a Euclides en el propio manuscrito y corresponde a la descripción que da Proclo del mismo. De manera general, las divisiones lo son en figuras del mismo tipo que las originales, como por ejemplo, de triángulos en triángulos; pero hay también divisiones en figuras no semejantes, como por ejemplo, la división de un triángulo mediante una línea recta paralela a la base. Las proposiciones perdidas sobre la división de un círculo están también aquí: *dividir en dos partes iguales una figura dada limitada por un arco de circunferencia y dos líneas rectas que forman un ángulo dado o bien dibujar en un círculo dado dos líneas rectas paralelas entre sí que determinan una cierta parte del círculo*.

Por desgracia, sólo están las demostraciones de cuatro proposiciones (incluyendo las dos anteriores) de las treinta y seis totales puesto que el traductor las consideró demasiado sencillas y las omitió. Las cuatro demostraciones son elegantes y dependen solamente de las proposiciones de los *Elementos* o son simples consecuencias inmediatas de las mismas.

#### 4. Otros tres autores árabes

Se tienen noticias de otros tres tratados árabes sobre la cuestión que nos atañe:

1. **Thabit ibn Qurra** (826-901) tradujo partes de los trabajos de Arquímedes y Apolonio, revisó la traducción de **Ishâq** de los *Elementos* así como de los *Datos* de Euclides y, finalmente, revisó el libro *Sobre la división de las figuras*, traducido por un autor anónimo.

2. **Abû Muhammad el-Hasan** (fallecido en 901) fue un destacado geómetra que escribió *Un comentario sobre las partes difíciles de las obras de Euclides* y *El libro de la proporción*. Según algunos autores, como **H. Sutter**, publicó también otro comentario de *Sobre Divisiones de Figuras* de Euclides.

3. **Abû'l Wefâ** (940-997), uno de los más grandes matemáticos y astrónomos árabes pasó sus últimos años en Bagdad. Es autor de unas *Lecciones de Construcciones Geométricas*. Los capítulos VII, VIII y IX de la versión persa de este tratado, que ha llegado hasta nosotros tras no pocas vicisitudes, se titulaban *Sobre la división de triángulos*, *Sobre la división de cuadriláteros* y *Sobre la división de círculos*, respectivamente. Las tres proposiciones del capítulo IX son prácticamente idénticas a las proposiciones 28 y 29 de la versión de **Woepcke** del libro de Euclides. En el capítulo VIII hay 24 proposiciones inspiradas o incluso idénticas a otras que aparecen en la obra reconstruida de Euclides. Asimismo, en el capítulo XII aparecen nueve proposiciones referidas a la división de una superficie esférica en triángulos equiangulares y equiláteros, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos.

#### 5. El *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyyá

**Abraham bar Hiyyá** (1065-1136), llamado también **Savasorda**, forma latinizada que deriva del término árabe que designa el cargo que ocupó como jefe de la guardia (sahib al-surta). También se le conoce por el sobrenombre de **Nasí, Príncipe**. Se desconoce el lugar de su nacimiento, aunque se sabe que vivió mucho tiempo en Barcelona y también que pasó largas temporadas

en Provenza. Fue un ilustre filósofo y científico, campo este último en el que cultivó las matemáticas y la astronomía.

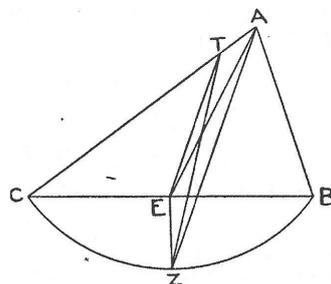
Publicó un libro de geometría, escrito en hebreo que fue traducido al latín por **Platón de Tívoli**, finalizado en 1116, titulado *Liber embadorum*, o libro de las medidas. Es un libro de geometría para los agrimensores que pasó a ser una obra fundamental en el mundo cristiano, tanto por su carácter práctico como por su contenido teórico. Es una de las fuentes del *Liber abaci* y la *Practica geometriae*, de **Leonardo de Pisa** (Fibonacci).

Aunque la versión latina del libro quedó concluida en 1116, no fue publicada en versión impresa hasta 1902 a partir de un manuscrito del siglo XV. Las páginas 130 a 159 de esta edición contienen un *capitulum tertium in arearum divisionum explanatione* con texto latino y alemán. Por otra parte, en 1931, J. Millás Vallicrosa realizó una traducción al catalán de la obra basándose en un texto en hebreo de 1912-13, publicada en la colección de la Biblioteca Hebraico-Catalana.

El Capítulo III del libro tiene un título sumamente explícito: *Sobre la explicación de lo que se refiere a la división de las áreas*. El capítulo trata de la división de los terrenos y se inspira claramente en el libro de Euclides *Sobre la División de las Figuras*. Contiene proposiciones coincidentes con las del libro de Euclides que se recogen también en los libros de **Fibonacci**.

En particular, figura la proposición siguiente, citada por Proclo, del libro de Euclides y que no figura en la versión de John Dee y que si está contenida tanto en la *Practica Geometriae* de Fibonacci como en la versión de Woepcke en una versión más general:

*Si se tiene una figura, un lado de la cual es curvo y los otros dos rectos, la queremos dividir en dos partes iguales,*



Demuestra esta proposición tanto en el caso simétrico como en el no simétrico. Las demostraciones que da son idénticas a las que podemos encontrar tanto en el libro de Fibonacci como en el de Woepcke.

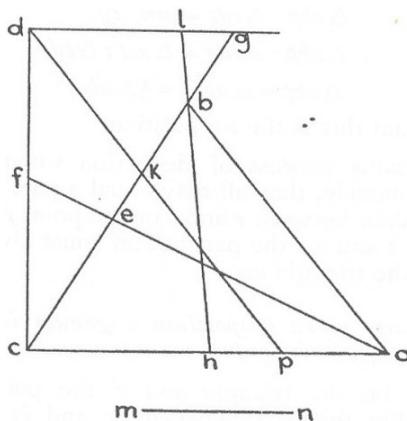
## 6. Jordano Nemorario y la división de las figuras

Otro autor que trató la cuestión de la división de las figuras es Jordano Nemorario, fallecido el 1237 y del que sabemos muy poco de su vida. Escribió varios tratados de matemáticas, entre los que destaca una *Geometria vel De Triangulis*, que consta de cuatro libros. El segundo de ellos está dedicado casi en su totalidad a problemas sobre divisiones: las proposiciones 1 a 7 tratan de la división de líneas, mientras que las que llevan los números 8, 13, 17, 18 y 19 estudian la división de figuras planas. La mayoría de estas últimas aparecen también en el libro de Woepcke y también en la *Practica Geometrie* de **Fibonacci**, si bien las demostraciones que da difieren de las de estos dos últimos autores.

Así, por ejemplo, la proposición 13 de Jordano, que corresponde a la 26 en los libros de Woepcke y Fibonacci, los enunciados coinciden, pero las demostraciones son completamente diferentes:

**Proposición 13.** *Dados un triángulo y un punto exterior al mismo, trazar una línea por este punto que divida el triángulo en dos partes iguales.*

**Demostración de Jordano.** Sean  $abc$  el triángulo y  $d$  el punto exterior, comprendido entre las medianas prolongadas  $aef$  y  $hbl$ .



Trazamos la recta  $dg$ , paralela al lado  $ca$ , que corta la prolongación de  $cb$  en  $g$ . Unimos  $cd$  y determinamos  $mn$  de manera que sea

$$\frac{\Delta cdg}{\Delta aec} = \frac{cg}{mn}$$

y observamos que  $\Delta aec = \frac{1}{2}\Delta abc$ . Ahora, dividimos  $cg$  por el punto  $k$  de manera que:

$$\frac{gk}{kc} = \frac{kc}{mn}$$

Prolongamos  $dk$  hasta cortar  $ca$  en  $p$ . Afirmamos que  $dp$  divide el triángulo  $abc$  en dos partes iguales:

En efecto, como el triángulo  $ckp$  es semejante al  $kdg$ , por la proposición VI.4 de los *Elementos* de Euclides y, en virtud de la proposición I.15 y el corolario VI.17 de los citados *Elementos*, se tiene

$$\frac{\Delta ckp}{\Delta kdg} = \frac{mn}{kg}$$

pero:

$$\frac{\Delta kdg}{\Delta cdg} = \frac{kg}{cg}$$

por lo que:

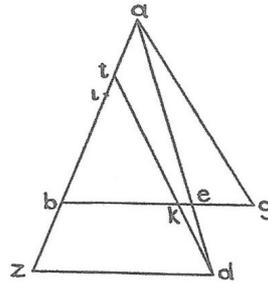
$$\frac{\Delta ckp}{\Delta cdg} = \frac{mn}{cg}$$

$$\frac{\Delta ckp}{\Delta cdg} = \frac{\Delta aec}{\Delta cdg}$$

y, en consecuencia:

$$\Delta ckp = \Delta aec = \frac{1}{2}\Delta abc$$

por V.9 de los *Elementos*, lo que prueba la proposición.



**Demostración de Woepcke.** Sean  $abg$  el triángulo y  $d$  el punto exterior. Unimos  $ad$ , que corta el lado  $bg$  en el punto  $e$ . Si  $be = eg$ , el problema está resuelto. Pero si  $be \neq eg$  sea  $be > eg$  y tracemos por  $d$  una línea paralela a  $bg$ , que corta la prolongación de  $ab$  en el punto  $z$ .

Como  $be > \frac{1}{2}bg$ , se tiene  $\text{área}(ab.be) > \text{área}(ab.bg)$  y como  $zd > be$ , también  $\text{área}(ab.zd) > \text{área}(ab.bg)$ . Si  $i$  es un punto tal que:

$$\text{área}(ib.zd) = \text{área}(ab.bg)$$

se tiene entonces  $\text{área}(ab.be) > \text{área}(ib.zd)$  y también  $\frac{zd}{be} = \frac{ba}{bi}$ .

Pero:  $\frac{zd}{be} = \frac{za}{ba}$  y así o bien  $\frac{zd}{ba} = \frac{ai}{ib}$  o bien  $\text{área}(zb.bi) < \text{área}(ba.ai)$ .

Aplicando un rectángulo igual al  $zb.bi$  a la línea  $bi$ , pero que exceda en un cuadrado; es decir, a  $bi$  se aplica una línea tal que, al multiplicarla por sí misma y por  $bi$ , la suma sea igual a  $zb.bi$ . Sea  $ti$  el lado del cuadrado.

Trazamos ahora la recta  $tkd$ . Como:

$$\text{área}(zb.bi) + ti = \text{área}(bt.ti)$$

$$\frac{zb}{bt} = \frac{ti}{ib}; \quad \frac{zt}{bt} = \frac{bt}{bi}$$

Pero  $\frac{zt}{bt} = \frac{zd}{bk}$  lo que conlleva que  $\frac{zd}{bk} = \frac{bt}{bi}$  y  $\text{área}(bt.ti) = \text{área}(zd.bi)$ . Y como  $\text{área}(zd.bi) = \frac{1}{2} \text{área}(ab, bg)$  se cumple  $\Delta tbk = \frac{1}{2} \Delta abg$ .

Luego, el triángulo  $abg$  queda dividido en dos partes iguales por la línea  $tkd$ , trazada desde el punto  $d$ . Estas partes son el triángulo  $tbk$  y el cuadrilátero  $tkga$ . La proposición queda probada.

Digamos finalmente que la proposición 18 se refiere a encontrar el centro de gravedad de un triángulo, cuestión que se plantea como un problema de división:

**Proposición 18.** Hallar un punto en un triángulo tal que, al unirlo con cada uno de sus puntos angulares, el triángulo queda dividido en tres partes iguales.

## 7. El De Practica Geometrie de Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Aunque la obra más famosa de **Leonardo de Pisa**, conocido habitualmente como **Fibonacci** (ca. 1170 - ca. 1240) es el *Liber Abaci*, publicado en 1202, es autor de otras obras, entre las que queremos destacar *De Practica Geometrie*, de 1222, que es una recopilación de toda la geometría Griega y Árabe conocida hasta entonces. El propio título del libro indica la intención inicial de

su autor, que no es otra que la de escribir un tratado de Geometría Práctica, término acuñado por **Hugo de San Víctor** (ca. 1096 - 1141) para denominar la geometría que usaban los agrimensores. Sin embargo, la obra traspasa con amplitud los intereses de estos artesanos y es un auténtico tratado de geometría teórica que permite su aplicación a las necesidades de los encargados de su aplicación a otros ámbitos.

Las fuentes que utilizó Fibonacci son muy variadas dada la amplitud de cuestiones tratadas en el mismo. Conocía los textos griegos a través de las traducciones árabes dado que viajó con frecuencia al norte de África desde su Pisa natal. Asimismo, pudo tener una influencia importante el *Liber Embadorum* de Abraham Bar Hiyyá, que ya hemos comentado, puesto que bastantes de las proposiciones de esta última obra aparecen de manera casi literal en el libro de Fibonacci. Por otra parte la mayoría de las proposiciones de la versión de Woepcke están recogidas también en el libro de Fibonacci si bien éste contiene las demostraciones de todas ellas, mientras que en la versión de Woepcke solamente cuatro de ellas están demostradas, como ya hemos dicho.

Respecto del tema que nos interesa, la división de las figuras, el *De Practica Geometrie* dedica el capítulo cuarto a esta cuestión. Este capítulo está titulado *División de campos entre socios*, suficiente explícito en lo que se refiere a sus objetivos. El énfasis del contenido se centra en los tipos de campos y en cómo dividirlos en una abundante variedad de casos. Fibonacci da una corta introducción y divide el capítulo en cuatro partes, cada una de las cuales está dedicada a las diferentes formas del campo que hay que dividir: triangular, cuadrangular, polígonos de más lados y circular. La propia tabla de contenidos muestra la complejidad del desarrollo del capítulo. Las condiciones para dividir las figuras son estas: en dos partes iguales, varias partes iguales, dos partes formando una razón dada y varias partes formando razones determinadas. Todas las proposiciones, además de ir acompañadas de una demostración teórica de las mismas, contienen una aplicación práctica con números, igual que en el *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyyá.

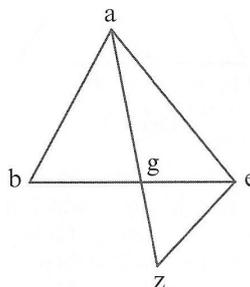
En muchos casos, Fibonacci saca consecuencias de las propias proposiciones. Por ejemplo, la proposición 1, cuyo enunciado es:

**Proposición 1.** *Dividir un triángulo en dos partes iguales desde uno de sus ángulos.*

Va seguida de dos corolarios, que utilizará después en sus demostraciones:

**Corolario 1.** *Si dos triángulos tienen un ángulo igual, sus áreas forman una razón compuesta por los lados que contienen los ángulos iguales.*

Sean los triángulos  $abg$  y  $gez$ , con ángulos iguales en  $g$ . El sentido que hay que dar al enunciado de este corolario es:



$$\frac{abg}{gez} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{ag}{gz}$$

**Demostración.** Dibujemos la línea  $ae$  entre los triángulos  $abg$  y  $gez$ . La razón del triángulo

$abg$  respecto del  $gez$  la podemos escribir:

$$\frac{abg}{gez} = \frac{abg}{age} \cdot \frac{age}{egz}$$

Pero la razón del triángulo  $abg$  al  $age$  es igual a la razón de las bases respectivas, ya que los dos comparten sus alturas, y lo mismo sucede con la razón de los triángulos  $age$  y  $egz$ . Es decir:

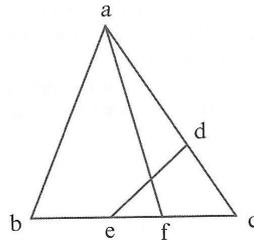
$$\frac{abg}{age} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{age}{egz} = \frac{ag}{gz}$$

Luego:

$$\frac{abg}{gez} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{ag}{gz}$$

**Corolario 2.** Si se traza una línea que corte dos lados de un triángulo formando con ellos un triángulo que tenga un ángulo común con el triángulo original, la razón de las áreas de un triángulo al otro es como la de los productos respectivos de los dos lados que contienen dicho ángulo.

**Demostración.** Sean el triángulo  $abc$  y la línea de que corta los lados  $ca$  y  $cb$  en los puntos  $d$  y  $e$  respectivamente. Construimos el triángulo  $acf$  igual a  $dec$  (Elementos, I.44). Veamos que es:



$$\frac{abc}{dec} = \frac{bc \cdot ac}{dc \cdot ec}$$

Como los triángulos  $abc$  y  $afc$  tienen la misma altura será:

$$\frac{abc}{afc} = \frac{bc}{fc}$$

pero

$$\frac{ac}{fc} = \frac{ac \cdot bc}{bc \cdot fc}$$

Luego:

$$\frac{abc}{afc} = \frac{ac \cdot bc}{ac \cdot fc}$$

y como  $acf$  y  $dce$  son iguales y tienen un ángulo común podemos afirmar:

$$\frac{abc}{dec} = \frac{ac \cdot bc}{ac \cdot cf}$$

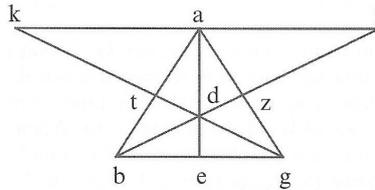
Ahora, puesto que  $acf$  y  $dce$  son iguales y tiene un ángulo común, con lados comunes que forman tal ángulo, de acuerdo con Elementos IV.15, se cumple: que  $\frac{ac}{dc} = \frac{ce}{cf}$ . Luego:

$$\frac{abc}{dec} = \frac{ac \cdot bc}{dc \cdot ce}$$

Con el fin de preparar a sus lectores para proceder a la división de triángulos desde un punto situado en el interior de un triángulo, Fibonacci da algunos principios:

**P1.** Si se trazan dos líneas desde sendos ángulos de un triángulo hasta los puntos medios de los lados opuestos, se cortarán con proporcionalidad y cada parte de la línea comprendida entre el ángulo y el punto de intersección es el doble de la otra parte de la misma.

Este principio es el que determina el centro de gravedad, cuestión recurrente en muchos autores. Hemos visto como Jordano la trata como un problema de división de un triángulo en tres partes iguales, que es muy distinto del tratamiento que le da Fibonacci en esta obra.



Sean el triángulo  $abg$  y las rectas  $ae$  y  $bz$  que cortan los puntos medios de los lados  $bg$  y  $ag$ , respectivamente y que se encuentran en el punto  $d$ . Desde  $a$  trazamos una recta  $ai = bg$  y prolongamos la recta  $bz$  hasta el punto  $i$ . Tenemos así dos triángulos semejantes  $azi$  y  $gbz$ , por lo que  $\frac{az}{zg} = \frac{iz}{zb}$  y por tanto  $\frac{ai}{g} = \frac{az}{zg}$ .

En consecuencia,  $\frac{iz}{zb} = \frac{az}{bg}$  y como los triángulos  $adi$  y  $bde$  son semejantes,

$$\frac{ia}{be} = \frac{ab}{de} = \frac{id}{db}$$

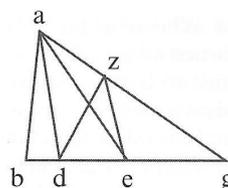
Ahora,  $bg = 2be$  y así,  $ad = 2de$ ,  $id = 2bd$  y como  $iz = zb$ , si se añade a ambas  $zd$  resulta  $bi = bz + zd$ , por lo que  $id = 2db$ . Como  $bz + zd = 2bd$ , restando  $bd$  de ambos miembros de la igualdad se obtiene  $bd = 2dz$ .

**P2.** (Recíproco de P1). Una línea trazada desde el ángulo restante que pase por el punto de intersección divide el lado opuesto en dos partes iguales.

**P3.** (Consecuencia de P1). Una línea trazada desde el ángulo restante hasta el punto medio del lado opuesto pasará por el punto de intersección.

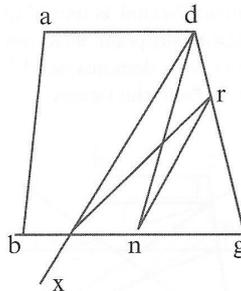
**Proposición 2.** Dividir un triángulo en dos partes iguales mediante una línea trazada en un punto situado en uno de sus lados.

**Demostración.** Sea el triángulo  $abg$  y tomemos el punto  $d$  situado en el lado  $bg$ . Dividimos el lado  $bg$  en dos partes iguales por el punto  $e$  y unimos  $a$  con  $d$  y con  $e$ . Trazamos la recta  $dz$ . Afirmamos que el triángulo  $abg$  queda dividido en dos partes iguales por la recta  $dz$ .



Los triángulos  $ade$  y  $adz$  son iguales ya que tienen la base común  $ad$  y la misma altura puesto que  $ad$  y  $ez$  son paralelas. Añadimos a ambos triángulos el triángulo  $abd$  con lo que obtenemos el cuadrilátero  $abdz$  y el triángulo  $abe$ . Pero este último es igual al triángulo  $aeg$  y, en consecuencia, el cuadrilátero  $abdz$  es también la mitad de  $abg$ .

En la demostración del método que resuelve la división de un cuadrilátero en dos partes iguales desde un punto exterior al mismo (Proposición 36), Fibonacci da la solución de manera semejante a la anterior, moviendo un par de rectas paralelas hasta que una de ellas pasa por el punto.



Destaquemos, finalmente, que a lo largo de todo el capítulo, Fibonacci da muestras de sus conocimientos de geometría teórica y sus proposiciones están cuidadosamente probadas con demostraciones basadas preferentemente en las obras de Euclides.

## 8. Conclusión

Tras todos estos avatares, el largo viaje de Sobre la División de las Figuras llega ya a su fin. Como ya hemos comentado, en 1915, Raymond Clare Archibald consiguió restaurar el texto perdido de Euclides. Para ello se valió, principalmente, de los textos de Woepcke y Fibonacci y la referencia que de esa obra nos dio Proclo.

Sin embargo, el interés que la cuestión de la división de las figuras suscitó en todas las épocas fue notable, como hemos visto en el relato de este largo viaje. Esto dio lugar a que una gran cantidad de autores trataran estos problemas en las obras que hemos comentado. Éstos y otros dieron soluciones a los problemas planteados tanto en lo que respecta a los aspectos teóricos de la cuestión como sus aplicaciones prácticas.

## Referencias

- [1] ARCHIBALD, Raymond Clare, *Euclid's Book on Division of Figures*. Cambridge University Press, 1915.
- [2] [BAR HIYYÁ, Abraham, *Llibre de geometría*, Versión en catalán a partir del hebreo de J. Millás Vallicrosa. Biblioteca Hebraico-Catalana. Alpha. Barcelona, 1931.
- [3] HUGHES, Barnabas, *Fibonacci's De Practica Geometrie. Sources and Studies in the Mathematics and Physical Sciences*. Springer. New York, 2008.

### Sobre el autor:

Nombre: Juan Tarrés Freixenet

Correo electrónico: jtarres@ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

# Historias de Matemáticas

## El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo

### The Problem of Curves and the Birth of Calculus

Román Ceano

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 095–108, ISSN 2174-0410  
Recepción: 10 Feb'20; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

#### Resumen

En este artículo se explica a grandes rasgos cómo la matematización del conocimiento científico que se produjo en los siglos XVI y XVII exigió de las matemáticas una evolución súbita para poder hacer frente a las nuevas demandas. La matemática heredada de los griegos con su matriz geométrica, su aversión al infinito presente y su torpeza en el manejo de curvas era incapaz de satisfacer las nuevas demandas.

**Palabras Clave:** curvas, Cálculo Infinitesimal.

#### Abstract

In this paper we overview how the mathematization of the knowledge in the XVI and XVII centuries demanded from mathematics a sudden evolution to cope with the needs of the new science. The classical mathematics from Greek and Hellenistic period with its geometric focus, its reluctance to use infinities and its inability to deal with curves other than conics were unable to satisfy the challenge.

**Keywords:** curves, Calculus.

## 1. Necesidad de matemáticas

En el siglo XVIII la ciencia dio un salto intelectual que en el siglo XIX se convertiría en una revolución que cambió la humanidad para siempre. Si analizamos lo que sucedió en estos dos siglos y buscamos los antecedentes, de manera inevitable llegamos a la conclusión que el primer síntoma de lo que iba a ser el futuro se encuentra en la matematización de la ciencia durante el Renacimiento y la época inmediatamente posterior. El acontecimiento cumbre de esta matematización fue sin duda la creación del cálculo infinitesimal. Esta creación fue producto de la necesidad de herramientas que estuvieran a la altura del desafío que planteaba a las matemáticas el convencimiento en las élites intelectuales de que eran la clave para la comprensión del universo.

En el siglo XIII Tomás de Aquino promovió el aristotelismo entre los católicos y legalizó la prevalencia del conocimiento adquirido sobre el conocimiento innato o revelado en aquellos asuntos que no fueran estrictamente referidos a la Esencia Divina. A partir de entonces el creyente quedaba libre para examinar el mundo que le rodeaba y deducir él mismo sus leyes, en lugar de limitarse a preguntárselas a Dios. Este “nihil obstat” a la reflexión sobre el mundo físico, entró en relación simbiótica con la evolución económica y social que produjo en Europa la prosperidad que siguió al final de las epidemias de peste del siglo XIV, creando las bases de la revolución científica posterior. Sin embargo, el mismo aristotelismo que había sido revolucionario comparado con el platonismo obscurantista de la baja Edad Media, entró en crisis cuando en siglo XVI los descubrimientos científicos y las invenciones tecnológicas mostraron su obsolescencia a todos los niveles.

No era solamente que sus afirmaciones sobre la estructura del universo se hubieran mostrado falsas o que sus ideas sobre física resultara incongruentes, era la propia concepción epistemológica del aristotelismo lo que se había convertido en un freno. Por ejemplo, su idea de que las cosas se mueven de manera natural hacia arriba o hacia abajo según su naturaleza, invitaba a discutir sobre esencias, no sobre dinámica. La tendencia del pensamiento aristotélico a la discusión cualitativa sobre esencias se reforzaba por sus reparos a la abstracción de cualidades geométricas o aritméticas (es decir cuantificables) desde objetos físicos. Para las personas que deseaban saber dónde caería una piedra lanzada desde una catapulta esta filosofía natural discursiva e imprecisa era desesperante.

El exceso de precaución epistemológica de la filosofía natural aristotélica no exasperaba solo a las personas que buscaban aplicaciones prácticas del conocimiento teórico sino también a los metafísicos escolásticos. El paso de un conocimiento revelado a un conocimiento adquirido por observación activa no podía suponer para la humanidad sumirse en un limbo sin estructura. Para conocer el plan de Dios de forma exacta había que interrogar a la naturaleza en lenguaje matemático, aunque ello supusiera ignorar los escrúpulos de Aristóteles. Así fue como el platonismo volvió a dominar el paisaje intelectual europeo tras dos siglos de aristotelismo. Pero los dos siglos habían dejado su huella y ya no era posible restaurar la separación entre el mundo ideal perfecto y predecible y el mundo real. La misión de los sabios a partir de entonces sería extender a todo el universo la plácida y sólida certidumbre que emanaba de la aritmética y de la geometría euclidianas. Lo que sucedió en realidad fue que hubo que meter a martillazos las complejidades de la realidad en el mundo armónico ideal que habían creado los matemáticos griegos.

## 2. Antecedentes clásicos

Para que el universo fuera explicado como una analogía del espacio euclídeo debía ser uniforme, isótropo y de tamaño infinito, lo cual traía consigo dificultades epistemológicas y contradicciones con el cosmos aristotélico que no trataremos aquí. Las dificultades que si trataremos son las que se refieren a cómo describir curvas en el espacio euclídeo, unas formas que en el mundo real son con mucho las más habituales. El Renacimiento europeo cultivaba la nostalgia por el mundo perdido de la antigüedad clásica, del que se consideraba un humilde seguidor. En esta línea, se suponía que las matemáticas del mundo clásico habían sido infinitamente superiores a las que se conocían en ese momento. Cuando hizo falta representar curvas en el espacio euclídeo los sabios se volvieron hacia los matemáticos griegos y helenísticos en busca de ayuda.

Existían tres fuentes principales para conocer las matemáticas anteriores a la larga noche medieval. La más completa era la *Synagoge* de Pappus, una enciclopedia de ocho libros que describe detalladamente el saber aritmético y geométrico acumulado desde los tiempos de Tales de Mileto. Pappus escribió su obra en Alejandría poco antes de la caída de Roma y de la conversión del Imperio Bizantino al cristianismo, dos sucesos que marcan el final de la Edad

Antigua. Es probable que él mismo estuviera lleno de nostalgia mientras compilaba los brillantes logros de una tradición casi milenaria de la que iba a ser el último representante. Una copia de la *Synagogue* se conservaba en el archivo del Vaticano donde debió llegar en algún momento del siglo XIII. Además de esta obra monumental, los sabios del Renacimiento tenían también acceso a los *Elementos* de Euclides, traducidos del árabe poco después del año 1000 d.C. y cuya gran difusión los había convertido en el canon matemático desde su primera publicación en Alejandría, poco después de la muerte de Alejandro Magno. La tercera fuente clásica eran las obras completas de Arquímedes. Este autor no gozaba de la fama de Euclides pero era muy apreciado entre los ingenieros por su orientación eminentemente práctica y su concepción operativa del rigor y la exactitud. En cuanto en Europa se tuvo acceso a su obra se convirtió en el matemático más influyente y citado.

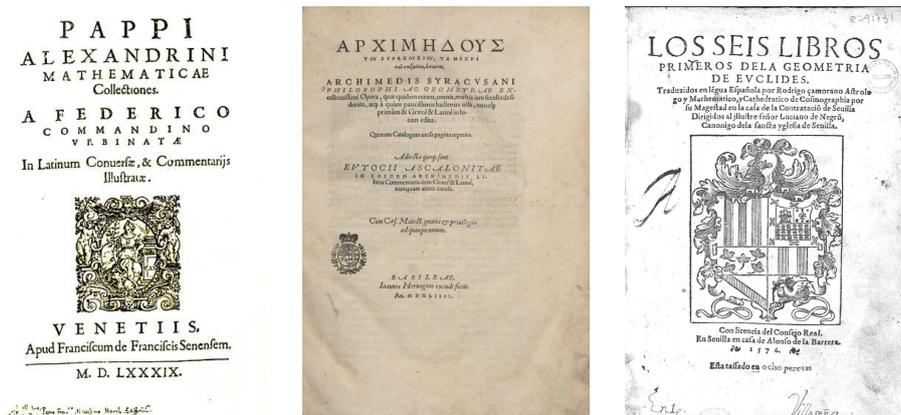


Figura 1. De izq. a drcha: Portadas de la edición de Comandino de la *Synagogue* de Pappus, de la edición de 1654 de la obra de Arquímedes y de la primera edición en castellano de los *Elementos* de Euclides.

El estudio de estas tres fuentes de saber matemático clásico no resultaba nada tranquilizadora para quien buscaba compatibilizar la geometría euclídea con las curvas. No existía ningún procedimiento general para calcular áreas, longitudes o tangentes. Tras nueve siglos de trabajo, los que van de Thales a Pappus, tan solo la circunferencia y hasta cierto punto la parábola podían considerarse terreno conocido. Y aunque sus áreas, longitudes y tangentes habían sido laboriosamente calculadas, la naturaleza de las curvas como objeto matemático y su taxonomía no quedaban nada claras.

Los métodos ofrecidos para calcular las áreas, desde siempre el principal propósito de la geometría, se basaban en aproximaciones mediante polígonos. Euclides describe el procedimiento llamado exhaución, popularizado por Eudoxo y que Arquímedes manejó con gran virtuosismo. No se trata realmente de un método sino de una idea genérica que permite construir procedimientos ad-hoc según el problema que se quiera tratar. Como es sabido, consiste en describir polígonos de tamaño creciente inscritos en curvas. Euclides nos dice que el requisito principal a cumplir por el procedimiento propuesto como candidato es que la diferencia entre el área del polígono " $n + 1$ " y el área de la curva sea menos de la mitad de la diferencia entre el área del polígono " $n$ " y la de la curva. De esta manera podemos ir reduciendo la diferencia entre las dos áreas tanto como queramos. La misma idea puede aplicarse utilizando polígonos circunscritos y permite no solo el cálculo de áreas sino también el de longitudes (comparándolas con perímetros).



Figura 2. Arquímedes, según óleo de Domenico Fetti (c. 1620).

A pesar del aura de perfección que para los renacentistas tenía la matemática clásica era evidente que el método de exhaustión era muy rudimentario, mucho más una técnica para gestionar la impotencia conceptual frente a las curvas que la expresión de un conocimiento solvente como el que se desplegaba frente a los polígonos y haces de rectas. El lector moderno se pregunta si lo que se está diciendo es que “se puede reducir la diferencia entre áreas tanto como se quiera” o que “que en el caso de polígonos de infinitos lados (o infinitos polígonos) ambas áreas se igualan”. Arquímedes en el planteamiento del problema del cálculo del área del círculo parece afirmar que es lícito considerarlo un triángulo de altura igual al radio y base igual a la longitud de la circunferencia, es decir parece considerar que la iteración infinita que presenta a continuación puede considerarse como presente, aunque sea a nivel potencial. Sin embargo, en la práctica se molesta en ir calculando polígonos hasta llegar al polígono de noventa y seis lados, con lo que da la sensación de estar enfocando el problema como una aproximación “tan próxima como se desee”, sin llegar nunca a dar el paso que hoy llamaríamos “pasar al límite”. Trabajos de Arquímedes encontrados mucho después (en 1906) muestran que estaba muy próximo a manejar los conceptos del cálculo infinitesimal, pero el hecho de que se molestara en calcular el área del polígono de noventa y seis lados, así como algunas afirmaciones que han llegado hasta nuestros días señalan que no se sentía cómodo con esa aproximación. De hecho, el método de exhaustión (un sinónimo de “agotar”) no era llamado así por los griegos y no hay ninguna prueba que el objetivo del método fuera agotar el área entre el polígono y la curva. Hemos de recordar que la matemática griega sentía un gran respeto por el concepto de infinito y se negaba a convocarlo en modo presente. Lo más prudente es afirmar que Arquímedes consideraba el método de exhaustión una forma rigurosa de aproximar curvas con la precisión que se quisiera, y la extrapolación de las áreas mediante una iteración infinita un recurso heurístico.

Además de la aversión al infinito y de la suficiencia en la práctica de las aproximaciones del tipo “tanto como se quiera”, debemos nombrar otra consideración que afectaba a los matemáticos griegos y helenísticos. En esa época, la geometría y la aritmética eran dos disciplinas separadas y lo eran por buenas razones. Al conocimiento desde tiempo inmemorial de la inconmensurabilidad de la razón entre la longitud de la circunferencia y el radio, se había unido en el siglo V a.C. el traumático descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal primero del pentágono y luego de la del cuadrado. La constancia de que había longitudes geométricas perfectamente determinadas que no podían expresarse como números tratables aritméticamente sugería una incompatibilidad ontológica entre ambas disciplinas o al menos un conflicto latente que no podía ser tratado a la ligera. Como ilustración del efecto de esta constatación diremos que las reglas y cartabones de la Grecia clásica no tenían números sino que eran completamente lisas. En este contexto intelectual, preguntarse si el cálculo del área de la circunferencia mediante exhaustión implica un infinito presente o un infinito potencial es absurdo. Muchas magnitudes geométricas no pueden expresarse como cantidades aritméticas, entre ellas la relación entre longitud de la circunferencia y su radio, precisamente el producto que estamos buscando.

A pesar de las dificultades conceptuales, de la ausencia de un método general y de la sombra amenaza de la inconmensurabilidad, el ingenio y la paciencia habían permitido a los matemáticos clásicos calcular algunas áreas y volúmenes de algunas curvas, además de la circunferencia. Ya hemos dicho que Arquímedes era el maestro indiscutible de la exhaustión. Tanto en sus libros como en la compilación de Pappus se encontraban los cálculos del área de la parábola, de la elipse y de la espiral.

La parábola forma parte de las cónicas, una familia de curvas que incluye ejemplares muy exóticos pero que gracias a su parentesco con la circunferencia tiene un aire doméstico. Dicha curva había sido estudiada exhaustivamente por Apolonio de Perga en una colección de ocho libros sobre las cónicas. Mediante razonamientos geométricos encuentra sus expresiones, determina la forma de obtenerlas así como de hallar ejes, asíntotas y tangentes. Para caracterizar los puntos utilizaba proyecciones de la curva sobre dos líneas perpendiculares, una idea que resultaría crucial para los matemáticos del siglo XVII. La importancia de las cónicas es que se habían convertido en los dos ejemplos de que el universo está regido por leyes matemáticas.

La parábola era conocida en óptica por su capacidad para concentrar los rayos de luz y en el siglo XVII se demostró lo que ya se sospechaba desde tiempo atrás, que describía la trayectoria de las balas de cañón. Para medir su área, Arquímedes traza una línea que intersecta la curva creando un segmento de parábola. Después construye un triángulo que tenga su base en la línea y el vértice en la parábola. A continuación traza dos triángulos que tienen como base los lados del triángulo original y su vértice también sobre la curva. Entonces demuestra que por construcción la suma de las áreas de los dos nuevos triángulos es un  $1/8$  de la del triángulo original y que por tanto el área del polígono suma de los tres triángulos es  $A_{T_1} + 2(1/8 \cdot A_{T_1})$ . Iterando el proceso obtiene la serie  $A_{T_1} + 2(1/8 \cdot A_{T_1}) + 4(1/8^2 \cdot A_{T_1}) + 2(1/8^4 \cdot A_{T_1}) + \dots$ . Utilizando exclusivamente métodos geométricos demuestra que la suma de la serie excluyendo el primer término se acerca indefinidamente a  $1/3$  y que por ello la proporción entre el primer triángulo y el área comprendida entre el segmento y la curva es  $4/3$ . Aquí aplica otra vez la reflexión que hemos hecho más arriba sobre infinito presente e infinito potencial. Un ingeniero por riguroso que sea considerará que el área bajo la parábola es o bien  $3/4$  la del triángulo, o bien algo tan cercano que la diferencia es irrelevante. Un matemático utilizará la expresión "aproximadamente igual".

Curiosamente, algunos sabios del Renacimiento que leyeron los resultados de Apolonio y Arquímedes llegaron a la conclusión de que era imposible que los hubieran encontrado sin la ayuda de un álgebra cuyo secreto se había perdido y que quizás aparecería en la biblioteca de algún monasterio o en un fajo de pergaminos salvado después de la caída de Constantinopla. No faltaba quién afirmaba que los autores clásicos habían ocultado deliberadamente los arcanos de esa álgebra. Estas creencias ilustran el cambio que estaba a punto de ocurrir y que llevaría a la fundación del cálculo. Instintivamente, incluso antes de que Descartes y Fermat consagraran la idea, los matemáticos se daban cuenta que la certidumbre que ofrece la geometría es ilusoria. La geometría organiza y sistematiza intuiciones basadas en nuestro sistema de percepción espacial del mundo físico pero no puede ofrecer la certeza universal que emana de la aplicación de un procedimiento algebraico riguroso.

Los éxitos en la domesticación de curvas que narraban los libros de Euclides, Arquímedes y Pappus eran espectaculares pero distaban mucho de ser la norma. Las cónicas son un subconjunto diminuto de las curvas posibles. Si los antiguos no habían fracasado más a menudo era porque se habían limitado a atacar objetivos asequibles. Además, al carecer de álgebra no podían crear curvas arbitrarias como empezaba a hacerse en esa época manipulando las potencias de los polinomios y/o combinando diferentes tipos de funciones. La única forma que conocían de crear curvas era aludiendo a la trayectoria de un punto situado sobre una figura geométrica o en la intersección de dos y que cambiaba de posición por variaciones de posición y/o orientación de la o las figuras que lo determinaban.

Las curvas más famosas de este tipo (en realidad familias de curvas cuya morfología variaba dependiendo de los parámetros) eran la espiral de Arquímedes, la cisoide de Diocles y la conoide de Nicomedes. La espiral de Arquímedes es la trayectoria trazada por un punto que se mueve a velocidad constante sobre una línea que gira a velocidad también constante. La cisoide de Diocles era una curva extraña que representaba la trayectoria del punto medio de un segmento cuyos extremos estuvieran unidos, uno a una recta y otro a una circunferencia. Había sido creada como ayuda para resolver la duplicación del cubo, que junto a la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo formaba la triada de problemas geométricos imposibles que obsesionaban a los matemáticos clásicos. Finalmente, la conoide de Nicomedes se genera de forma parecida a la cisoide pero siguiendo las trayectorias dos puntos determinados sobre un diámetro de la circunferencia cuyo centro se mueve sobre la recta de que hablábamos en el caso de la cisoide. La conoide permite calcular la trisección de un ángulo pero cada ángulo requiere unos parámetros muy concretos por lo que no resulta un método realmente práctico. De las tres curvas, tan solo la espiral estaba mínimamente estudiada y se podía calcular el área, utilizando un método descrito por el propio Arquímedes. Es decir, que podemos resumir el conocimiento de las curvas en la Grecia clásica como escaso y concentrado de forma casi exclusiva en las có-

nicas, de las cuales las únicas realmente estudiadas exhaustivamente eran la circunferencia y la parábola. La conclusión era clara: los sabios de la nueva modernidad deberían trabajar mucho si realmente querían representar en el plano euclídeo el universo real y su infinita variedad de curvas.

### 3. Antecedentes próximos



Figura 3. Tycho Brahe y Johannes Kepler.

A principios del siglo XVII el plan de matematizar la física y la astronomía consiguió su primer éxito resonante cuando Kepler logró encajar los datos de Tycho Brae en figuras geométricas sencillas. La hipótesis neoplatónica de un universo ordenado armónicamente por las leyes de la matemática recibió así una espectacular confirmación. Sorprendentemente, se trataba de elipses, no de los cinco sólidos platónicos como Kepler había supuesto. En tiempos de Kepler, las elipses eran ampliamente conocidas y estudiadas gracias a su aparición en los libros de Arquímedes, de los que circulaban nu-

merosas traducciones y ediciones críticas comentadas. Kepler se reconcilió rápidamente con las elipses y afirmó que estaba de acuerdo con los que comparaban las curvas con Dios y las líneas rectas con Su creación. Desde este punto de vista, el estudio de las curvas desde una perspectiva lineal buscando sus áreas (cuadratura), líneas tangentes, ejes y diámetros, se convertía en la empresa mística de relacionar el universo con su Creador.

A pesar de esta altura de miras, la obra de Kepler sobre medición de volúmenes curvos giraba alrededor de un ejemplo completamente terrenal: la maximización del volumen de los toneles de vino. Utilizando esta base como excusa Kepler publicó un extenso estudio sobre volúmenes que resulta interesante para vislumbrar el eclecticismo y pragmatismo de su metodología. Kepler empezaba su estudio con algunas sorprendentes definiciones y en la tradición de Nicolás de Susa, asumía literalmente la afirmación heurística de Arquímedes de que un círculo es un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio. No contento con esto, Kepler daba un nuevo salto diciendo que esto era equivalente a decir que un círculo está formado por infinitos triángulos con vértice en el centro de la circunferencia. Extendía estas afirmaciones a la esfera, formada según él por infinitos conos pero puede ser considerada ella misma un cono de base curva cuya superficie es el área de la esfera. Con respecto a los toneles, los mercaderes utilizaban como medida del volumen de un barril la diagonal desde el agujero que había en el diámetro máximo hasta un punto situado al otro lado y sobre una de las dos bases. Esto intrigó a Kepler porque lo encontró arbitrario y decidió estudiar exhaustivamente el problema. Su enfoque consistió en suponer que el tonel estaba compuesto por cilindros de diferentes diámetros, medir sus volúmenes y luego sumarlos. Estudió como el número de cilindros afectaba a la exactitud del resultado para decidir cual era la cantidad óptima de estos, es decir aquella para la que la aproximación (número de iteraciones de la exhaustión en términos clásicos) era suficiente. Después decidió utilizar el mismo método para buscar cual sería la silueta óptima y compiló series de volúmenes para cada forma de tonel. Llegó a algunos resultados interesantes que llamarían la atención a futuros estudiosos de las curvas, como por ejemplo su observación de que la velocidad con la que crece una media circunferencia va disminuyendo y se hace mínima (de hecho cero) en el punto máximo.

No está claro si Fermat conocía el libro de Kepler pero su ataque al problema de los máximos

de una función parece una continuación analítica de las conclusiones casi empíricas de este. Según propia confesión Fermat sacó su idea de la lectura de Viète y Pappus. Del primero sacó la pregunta de porqué todas las parábolas tienen dos raíces menos aquellas cuyo vértice es tangente a las abscisas, y del segundo un problema muy sencillo de optimización consistente en hallar el rectángulo con la mayor superficie posible de entre todos los que tienen un mismo perímetro. Con estos mimbres Fermat compone una serie de pasos algebraicos que al lector moderno le recuerdan extraordinariamente



Figura 4. François Viète y Pierre de Fermat.

el cálculo de una derivada y su igualación a cero. Más allá de la discusión historiográfica sobre si eso es o no un antecedente del cálculo diferencial, queda clara la preeminencia del método algebraico sobre el geométrico. Fermat da una receta que conduce a un máximo en la función. No se puede considerar un método general, sobre todo porque en los ejemplos no triviales, su falta de fundamentos teóricos exige que en la aplicación a veces haya que ser más creativo de lo prudente. Sin embargo, vemos claramente la expresión algebraica de las dos ideas de Kepler en su estudio de los toneles, la evaluación del crecimiento y la búsqueda del punto en que esta es cero. Fermat utilizó este método de hallar máximos para atacar algebraicamente el problema de la determinación de las tangentes en un punto. Al principio el sistema era un poco confuso pero bajo la presión de sus críticos Fermat lo fue clarificando. En su forma más depurada quedaba claro que consistía en hallar el cero de una ecuación que evaluaba la diferencia entre la tangente a la curva y la curva en sí en función de la  $x$ . Utilizando su método, Fermat fue capaz de calcular la tangente de curvas mecánicas como la cisoide, la conoide, la cuadratriz, la cicloide (la curva más famosa del siglo XVII) y del folium, una curva algebraica inventada por Descartes.

Uno de los críticos más crueles con Fermat fue precisamente el propio Descartes que atacó con acidez las primeras versiones de su método de hallar tangentes. El motivo, aparte de cuestiones personales, era que Descartes era un seguidor acérrimo del método deductivo que había practicado Euclides. Su famoso lema "cogito ergo sum" llevaba tan lejos la búsqueda de los axiomas a partir de los cuales edificar el razonamiento que al final solo podía estar seguro de su propia existencia, y aún ello por reducción al absurdo. No es de extrañar que no le gustaran la heurística y los pasos ad-hoc de las primeras versiones del método de Fermat. Con el tiempo llegó a aceptar las ideas de Fermat hasta tal punto que las grandes líneas de las propuestas de Descartes tienen su origen en las reflexiones del primero. En su libro "La geometrie", publicado como apéndice de su gran obra "El discurso del método" y donde Descartes quiere sentar las bases de la nueva matemática, abraza las técnicas que Fermat había tomado de Viète, caracterizando las cónicas mediante sus expresiones algebraicas y dejando de considerar los cuadrados como áreas y los cubos como volúmenes. Descartes, al igual que Fermat abandona la idea del plano euclídeo como una superficie indiferenciada y sin orientación. Mediante el uso de los ejes de coordenadas -una versión estandarizada de las proyecciones sobre rectas ortogonales utilizadas por Apolonio- el plano euclídeo deja de ser un limbo indiferenciado y se convierte en un espacio ordenado donde los objetos matemáticos están localizados y orientados. Un efecto muy importante de esta innovación fue que terminó de facto con la separación clásica entre aritmética y geometría. Además de estar orientados y localizados, los objetos matemáticos que estuvieran sobre el plano tendrían



Figura 5. René Descartes.

dimensiones en unidades normalizadas, las divisiones establecidas sobre los ejes. Finalmente, al utilizar ejes perpendiculares Descartes le dio definitivamente al espacio euclídeo una textura cuadrículada.

Para delimitar el objeto de su estudio, Descartes realiza una discriminación taxonómica de las curvas que resultará fundamental. Por un lado están las cónicas que pueden ser representadas por polinomios y que llamó “algebraicas”, y por otro las curvas que llamó “mecánicas”, las que son generadas en la forma en que hemos visto más arriba. Descartes afirmó en un exceso de pesimismo que tan solo las curvas algebraicas son tratables analíticamente, lo cual estaba desmintiendo Fermat de forma contemporánea. Al separar las curvas en dos categorías y afirmar que debían ser estudiadas con métodos diferentes, Descartes facilitaban el estudio de las cónicas pero despreciaba la idea intuitiva de que todas las curvas pueden ser descritas como la composición de dos movimientos, una idea que resultaría fundamental para Newton.



Figura 6. Buenaventura Cavalieri.

A la vez que Descartes publicaba “*La geometrie*”, Buenaventura Cavalieri publicaba su “*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*”. Este libro retomaba el tema clásico del cálculo de áreas bajo las curvas y trataba de llevarlo más allá de donde lo había llevado Arquímedes, el maestro indiscutible durante doce siglos. La novedad que proponía Cavalieri era buscar un método general que funcionara para todas las curvas y que permitiera abandonar las técnicas de exhaustión que requerían de un gran ingenio ad-hoc para cada situación y cuya aplicación numérica en los casos en que no se podía definir una creación algorítmica y/o calcular el área a la que tendía, resultaba extraordinariamente tediosa. Curiosamente, en los escritos de Arquímedes descubiertos en 1906 que hemos nombrado anteriormente, ya estudiaba, rechazándola, la alternativa a la exhaustión que proponía Cavalieri.

La obra de Cavalieri tiene fama de ser muy tediosa de leer por estar escrita mediante lemas verbales que se van encadenando, el paradigma del rigor en la Grecia clásica. Su base conceptual es el Libro V de Los Elementos de Euclides donde se trata el problema de las magnitudes y sus proporciones siguiendo las ideas de Eudoxo. Este Libro V contiene toda la aritmética aceptable para un geómetra griego y desarrolla los conceptos de suma, resta, multiplicación y división, así como las propiedades elementales de estas operaciones y de sus combinaciones. Su tradición geométrica queda clara cuando establece la homogeneidad de las magnitudes como un requisito necesario para que sea posible compararlas. Así cuando vemos un número nos hemos de preguntar si es una longitud, un área o un volumen ya que solo podremos trabajar con otros números que sean del mismo tipo.

A pesar de que Cavalieri cita explícitamente el Libro V, consciente o inconscientemente ignoró la homogeneidad de magnitudes. De hecho todo su trabajo se basa en ignorar esta homogeneidad y considerar la suma de todas las líneas (“*omnes liniae*”) como equivalente al área. Para ello, propuso imaginar un plano perpendicular al plano euclídeo y moverlo de manera que barra la figura que queremos estudiar. Sabemos por Euclides que en la intersección de ambos planos irán apareciendo líneas. El propio Euclides define las líneas en el Libro I como “*una longitud sin anchura*” lo cual asegura que no puedan dividirse. Las líneas son por tanto los “*indivisibles*” que forman el plano, una nomenclatura que haría fortuna para bien y para mal.

La intuición de Cavalieri era considerar que si un área es más ancha que otra, tendrá más líneas, asumiendo que como las áreas se definen sobre el plano euclídeo que preexiste a las figuras geométricas, la textura o la estructura interna o como le queramos llamar será siempre la misma. Si aceptamos esto, podemos definir el conjunto de todas las líneas y operar con él siguiendo las reglas definidas en el Libro V, es decir reglas aritméticas santificadas por la geometría. Al igual que un área más ancha tiene más líneas, las líneas de un área más alta son más

largas. Y si la frontera superior del área es una curva, las variaciones en altura de las líneas determinarán el área. Así que tomaba la fórmula de las curvas que determinaban la frontera superior y las manipulaba para estudiar su influencia en el área.

La obra de Cavalieri tuvo una gran difusión y todos los eruditos de su tiempo estudiaron minuciosamente el laberinto de sus lemas. A sabiendas o no, Cavalieri se había metido en el pantano conceptual que está en el centro del paraíso Euclidiano. Tal como muchos filósofos descreídos y sin conocimientos matemáticos habían señalado en infinidad de ocasiones, si un punto euclidiano no puede ser dividido, es porque no tiene longitud y si no tiene longitud es imposible que se forme una recta por muchos puntos que pongamos uno detrás de otro. Y entre la recta y el plano pasa lo mismo. Por eso el Libro V contenía el *caveat* sobre homogeneidad de magnitudes que Cavalieri estaba ignorando.

Sorprendentemente, la inconsistencia teórica del método de Cavalieri no impidió que hallara las fórmulas que relacionaban con sus áreas a las curvas algebraicas correspondientes a los polinomios de casi todas las potencias entre dos y diez. A pesar de que la vocación de rigor formal es evidente en todo el planteamiento de su trabajo, cuando Cavalieri fue atacado duramente por sus críticos, pudo defenderse aludiendo a la practicidad de los resultados obtenidos. Galileo, de quien Cavalieri se sentía discípulo, no rechazaba sus escritos pero tampoco los aprobaba. Galileo era un entusiasta de la matematización de la ciencia que se pasaba los días y las noches haciendo experimentos numéricos a pesar de que sus instrumentos eran tan rudimentarios que los resultados no servían para nada. Como buen neoplatonista pensaba que aunque no pudiera constatarlas por lo precario de su tecnología, las leyes de la física matemática existían realmente. Deseaba encontrar una solución al problema que estudiaba Cavalieri y veía que los resultados estaban al alcance la mano. Como tantos matemáticos de ese siglo, sentía la llamada del pragmatismo radical, pero pensaba que el abandono del rigor llevaría a un abandono de la certidumbre, precisamente aquello que estaban buscando.

Blaise Pascal fue uno de los que reflexionó sobre el trabajo de Cavalieri, encontrando una forma de esquivar el problema de inhomogeneidad de las magnitudes área y longitud. Su idea era un cruce entre la exhaustión y el concepto de "*omnes liniae*" de Cavalieri. Inscribamos bajo la curva un cierto número de rectángulos de una cierta anchura igual para todos. Construyamos el sumatorio de las áreas de todos esos rectángulos. Ahora, procedamos de manera análoga a la que Arquímedes proponía cuando aproximaba el área de la circunferencia utilizando polígonos formados por triángulos. Al igual que él aumentaba el número de triángulos, nosotros aumentamos el número de rectángulos y análogamente a como él reducía el ángulo del vértice de sus triángulos nosotros reducimos la longitud de la base. Pascal afirmaba que cuando el número de rectángulos se hiciera infinito, la suma de sus áreas igualaría el área bajo la curva. Una vez obtenido el resultado, Pascal no dudaba en atacar el principio de la homogeneidad de magnitudes que había vulnerado Cavalieri. En una carta a un amigo decía que los que no comprendían que un área es la suma de las líneas que la forman es un ignorante.



Figura 7. Blaise Pascal.

Despejado el camino conceptual de esta forma tan contundente, quedaba por hallar el método práctico. Pascal concentró sus esfuerzos en una curva no algebraica, el seno, y logró calcular su área. Para hacerlo utilizó el triángulo característico, un concepto desarrollado para calcular tangentes. Se trata del triángulo que forma la tangente a la curva en un punto con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas y que tiene al propio punto como uno de los dos vértices de la hipotenusa. Este triángulo aparecía una y otra vez en la literatura porque es semejante con el triángulo que forma la subtangente y sus proyecciones sobre los ejes pero al no estar ligado a nada sugiere el concepto de "hacerlo tan pequeño como se quiera" hasta que sea un solo punto

sobre la curva, pero heredando del triángulo la pendiente de la hipotenusa.

Otro lector de Cavalieri que reflexionó extensamente sobre su fracaso en fundamentar resultados correctos fue John Wallis, geómetra en la universidad de Oxford. A pesar de ser geómetra, Wallis comprendió que la continua referencia a entidades geométricas era un lastre insoportable. Pensaba que las leyes de la aritmética heredadas por el álgebra tenían rigor suficiente y resultaban más flexibles porque no dependían de nuestra intuición espacial. De hecho, una vez Cavalieri había obtenido resultados correctos con su método había que preguntarse si su vulneración del principio de la homogeneidad de magnitudes no era completamente legítimo, otra forma de decir que la aritmética en su forma algebraica debía prevalecer sobre la geometría.



Figura 8. John Wallis.

Para convertir las intuiciones de Cavalieri en un modelo aritmético riguroso Wallis proponía trabajar de manera inversa a como lo había hecho este. En lugar de tomar “todas las líneas” directamente, construía el conjunto de líneas añadiendo una cada vez. Para estudiar el caso de  $x^3$  construía una proporción en la que el numerador era la suma de los cubos de las líneas de un triángulo y el denominador la suma de los cubos de las líneas de un cuadrado. Así podía comparar la proporción entre ambas áreas. Calculaba este resultado para infinitas líneas y obtenía  $x^4/4$ . Tras este primer éxito reprodujo todos los resultados de Cavalieri para las primeras diez potencias de  $x^n$  y llegó a la fórmula general  $x^{n+1}/n + 1$ . Se ha dicho que la falta de rigor de Wallis fue una bendición porque consagró el álgebra literal sin referencias geométricas como método de análisis de una forma que le habría resultado imposible si hubiera querido construir los razonamientos de forma deductiva y

obsesivamente perfecta como dictaba la tradición euclidiana. Mediante inducciones y analogías deambuló por los problemas que planteaba la incipiente integración, encontrando resultados útiles y equivocándose de cuando en cuando.



Figura 9. Isaac Barrow.

Barrow, era un contemporáneo de Wallis pero al contrario que él, luchaba por recuperar el enfoque de Euclides y su visión geométrica en la que los números que carecían de representación como longitudes debían ser considerados como ajenos a la matemática. En cambio, Barrow si que simpatizaba con la idea moderna que había expresado Torricelli de considerar las curvas como puntos en movimiento. Esto le sumergió en versiones actualizadas de la paradoja de Zenón que eran a su vez las versiones físicas de los problemas conceptuales sobre el continuo que habían de perseguir a muchas generaciones de matemáticos durante dos siglos. Sin embargo, planteados como problemas físicos resultaban menos conflictivos porque estaba claro que las flechas reales llegaban al blanco y por tanto si el objetivo era representar la realidad el error tenía que estar en las flechas propuestas por Zenón. Analizando un gráfico que relacionaba el tiempo con la velocidad y en

el que por tanto el área bajo la curva representaba la distancia recorrida, afirmó que era indiferente si se hablaba de líneas sin dimensión o de rectángulos muy pequeños pero que estaba claro que había unas unidades indivisibles como las que había defendido Cavalieri. Barrow recuperó además el triángulo característico de Pascal que si bien insinuaba el paso al límite, en realidad no lo requería porque bastaba con pensar que era “muy pequeño”. Esta posición confortable y ortodoxa en el plano teórico le permitió realizar un trabajo exhaustivo en el cálculo de tangentes y áreas, refinando el método de Fermat. Barrow fue el primero que realmente manejó la diferenciación y la integración como inversos aunque nunca acabara de comprender la importancia que tenía esto.

## 4. Newton

Newton fue alumno de Barrow y su sucesor en la cátedra. Heredó de él las técnicas para calcular áreas y tangentes, así como el enigma de qué había detrás de todas aquellas correspondencias bidireccionales entre funciones. Al principio, Newton estuvo trabajando en los mismos problemas que habían ocupado tanto a sus contemporáneos como a las generaciones anteriores: el cálculo de áreas bajo curvas arbitrarias y la búsqueda de tangentes. Gracias a los trabajos de Cavalieri, Wallis y otros, resultaba habitual aplicar la fórmula  $x^{n+1}/n + 1$  para calcular el área bajo la curva  $x^n$  que hemos nombrado más arriba y que es hoy universalmente conocida. El programa de Descartes de averiguar las áreas de las cónicas y del resto de curvas polinómicas utilizando métodos algebraicos estaba por tanto casi terminado. La idea de Newton era extender el estudio a las curvas mecánicas utilizando series polinómicas para aproximarlas. Las aproximaciones por series polinómicas simplificaban las operaciones ya que el álgebra de polinomios es trivial y como decimos, su integral era ampliamente usada. El hecho de que las series contuvieran infinitos términos no asustaba a Newton que tenía un enfoque ingenieril y se contentaba con métodos que aproximasen todo lo que se quisiera, dejando al usuario decidir el nivel de precisión deseado. Por lo que respecta al tema de las tangentes, Newton descubrió que el método del paralelogramo, que había sido usado con profusión desde los tiempos de Kepler, no era correcto. Este método consiste en considerar las dos componentes del movimiento, dibujar sus vectores y considerar que el vector resultante determina la tangente. Esto es cierto en muchos casos, como por ejemplo con la elipse, cuya tangente calculaba Kepler con este método pero funciona por motivos equivocados y cuando Newton lo aplicó a la cuadratriz descubrió que era erróneo. Newton determinó la verdadera tangente de la cuadratriz pero lo más importante es que las reflexiones sobre la composición del movimiento le permitieron encontrar no solo una forma de fundamentar los métodos ya conocidos de cálculo de áreas sino crear un método general.

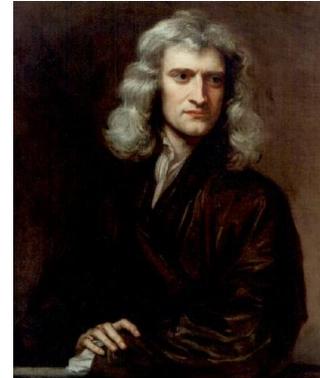


Figura 10. Isaac Newton.

Su idea fue revertir la clasificación de Descartes. En lugar de distinguir las curvas algebraicas de las que no lo eran y tratarlas de manera diferente, Newton decidió mirarlas todas igual. Y en lugar de aproximar curvas mecánicas convirtiéndolas en series polinómicas como había estado haciendo, decidió mirar todas las curvas como el producto de dos movimientos. Si tomamos una recta vertical y una horizontal que se alejen del origen de coordenadas, su intersección se moverá por el primer cuadrante trazando trayectorias que dependerán de la velocidad relativa de las dos generatrices. Al principio Newton tenía reparos con el concepto de velocidad instantánea pero finalmente los abandonó y aceptó la versión física de la paradoja del continuo, un problema heredado de Euclides que iba tomando diferentes formas y que como se ha dicho perseguiría a los matemáticos durante dos siglos. Newton no buscaba una justificación exhaustiva sino una metáfora intuitiva que vistiera sus manipulaciones algebraicas. La encontró en la idea de analizar la componente vertical y horizontal del movimiento de un punto es decir la variación simultánea de cada una con respecto al tiempo. Newton denominó a las variables “fluente” y a sus variaciones “fluxión” y creó sobre la marcha una notación para operar con estos conceptos. No era una idea óptima porque en lugar de una sola cantidad como tenemos ahora, él manejaba la razón entre las dos derivadas respecto al tiempo pero el resultado práctico era el mismo y para evitar las dificultades era fácil considerar constante la variación respecto al tiempo de una de las dos variables.

Esta conceptualización de la relación entre una variable y su cambio le permitió ser el primero en darse cuenta de la importancia teórica y práctica de que el cálculo de tangentes y el cálculo de áreas sean inversos. Esta idea le vino como consecuencia de otra previa. En lugar de tomar curvas y buscar su área, se le ocurrió hacer lo contrario, estudiar qué curva tiene un

área que crece al ritmo de una función determinada. Así fue como encontró que tomando una fluxión, la fluente sería la fórmula del área, lo que hoy conocemos como teorema fundamental del cálculo diferencial.

A partir de un momento Newton ya no buscaba resolver casos sueltos porque se daba cuenta que tenía en la mano un método general. Por ello estudió las composiciones de fluxiones para muchas curvas utilizando su arsenal de series polinómicas. El patrón general era el que sus predecesores habían ido fijando: tomaba la ecuación de la curva en un punto cualquiera, le sumaba un incremento a las dos variables y luego operaba buscando encontrar un momento propicio en el que hacer tender a cero ambos incrementos. De esta forma obtenía las razones entre la variación de coordenadas en un punto, es decir las tangentes del ángulo que formaba la tangente con el eje de abscisas. Y para calcular el área solo tenía que hacer la operación inversa.

## 5. Leibniz



Figura 11. Gottfried Leibniz.

Ya hemos dicho que Newton a partir de un momento no quería resolver casos sueltos sino que buscaba un método general para resolver problemas tanto de áreas como de tangentes. Leibniz fue mucho más lejos desde el principio y su objetivo fue crear un armazón conceptual y una notación. En nomenclatura moderna podríamos decir que Leibniz estaba interesado en el metaproblema. Por ello no arrancó como Newton buscando casos particulares sino que directamente se centró en los conceptos. Su forma de trabajar se parecía mucho más al enfoque euclidiano y en lugar de resolver problemas buscando patrones de manera inductiva, Leibniz definió primero todos los conceptos para luego deducir sus consecuencias. En primer lugar puso fin al problema de las líneas sin anchura que forman áreas. Sus curvas no eran verdaderas curvas sino polígonos con infinitos lados. Estos lados tenían una longitud muy pequeña y que se podía despreciar pero que era una auténtica longitud. Gracias a que la curva era en realidad un polígono, las líneas tenían anchura y podían sumarse para crear áreas. Leibniz respetaba la homogeneidad de dimensiones de Euclides y Eudoxo por lo que siempre tenía en cuenta si la cantidad que iba a operar era una longitud o un volumen. Además de la dimensión, las cantidades que manejaba tenían una cierta magnitud que cambiaba el operador como veremos más abajo.

Todo este entramado de definiciones permitía esquivar tanto los problemas que habían perseguido a Cavalieri como los que suscitaba operar el incremento de las variables para de pronto decir que “era como si fueran cero”, quitando sus magnitudes pero dejando su razón (el método adoptado por Newton que Leibniz no conocería hasta unos años después). En el esquema de Leibniz, los rectángulos bajo los lados de su curva poligonal tenían todos una anchura fija que valía “ $dx$ ” (la diferencia de una  $x$  a la siguiente) y se relacionaban mediante una cierta proporción (“ $dx/dy$ ”) con las diferencias de altura con el rectángulo siguiente que llamaba (diferencial de  $y$ ). Desde el primer momento Leibniz tuvo claro que la derivación y la integración eran inversas porque tenían su origen en operaciones inversas, concretamente la suma y la resta. A Leibniz le gustaba mucho la sencillez con que se pueden operar entre sí las series de diferencias e incluso las sumas en serie que son algo más engorrosas. El cálculo de áreas representaba sumar rectángulos mientras el cálculo de tangentes consistía en restar sus alturas, es decir tomar las diferencias de “ $y$ ”. La magnitud de las variables a que hemos hecho alusión más arriba no era absoluta sino relativa. “ $dx$ ” es infinitesimal con respecto a “ $x$ ” que a su vez es infinitesimal con respecto a su integral. Por eso la integral de “ $x$ ” se ha de multiplicar por “ $dx$ ”, para igualar su magnitud a “ $x$ ”.

Leibniz no fue como Newton estableciendo la notación sobre la marcha sino que la planeó a conciencia. Al principio a la integral la llamaba “omn” como había hecho Cavalieri pero a sugerencia de uno de los hermanos Bernoulli cambió a la S estilizada que conocemos hoy. Ya hemos hablado de la “d” que encontramos en “dx” y “dy”. Con el tiempo añadiría “dx/dy” entendido como un solo signo. La forma de operar que utilizaba era mucho más clara que la de Newton porque deliberadamente buscó crear un lenguaje algebraico organizado y completo.

## 6. Conclusión

Newton y Leibniz enfrentaron por separado el mismo problema y llegaron a soluciones análogas. Sin embargo cada uno de ellos plasmó la solución de forma diferente. Newton no tenía más deseo de generalizar que el que le permitiera solucionar toda la problemática del cálculo de áreas y tangentes con un método estandarizado que obedeciera a reglas bien establecidas. En cambio Leibniz quería ir mucho más allá y fundar una nueva rama de las matemáticas con su notación diferenciada y sus conceptos perfectamente establecidos. Podríamos decir que la vocación de Newton era inductiva y buscaba lo que tenían en común todos los casos para definir un sistema mientras Leibniz trabajaba de manera deductiva y quería partir de unos axiomas “evidentes por si mismos” para construir sobre ellos un edificio sólido y duradero. Los matemáticos que vinieron después, pulieron el cálculo infinitesimal y crearon la síntesis que llegó a su apogeo a principios del siglo XIX. Hoy podemos ver como a la larga se prefirió el infinito presente y el paso al límite que se desprende de la visión de Newton sobre las curvas poligonales y las líneas rectangulares de Leibniz. En cambio la notación de Leibniz, pensada y estudiada para ser práctica y lógica perduró sobre la de Newton creada apresuradamente sobre una intuición de cinemática. Los infinitésimos no lograron el estatuto de “clase de números” que les quería dar Leibniz pero dejaron de ser las aberraciones lógicas o los fantasmas que mucha gente veía en ellos. Hoy en día los infinitésimos son actores secundarios que son convocados para desaparecer poco después gentilmente, como el gato de Cheshire que nos deja su sonrisa.

No queremos acabar sin decir que en el siglo XVII no se resolvió el problema del continuo que visualizan las paradojas de Zenón, que hacen que el Libro I y el Libro V de Los Elementos sean incompatibles y que persiguió a Cavalieri. Newton, Leibniz y todos los que trabajaron sobre los cimientos que ellos crearon, solo hicieron que enterrar la paradoja en axiomas y conceptos cada vez más refinados. Dos siglos después, la generación de Hilbert tuvo que reconocer por fin que la paradoja no tenía solución y que los axiomas no podían elegirse porque fueran “claros y distintos” en nuestra mente sino porque permitían llevar a cabo los cálculos de la forma que nos era necesaria. Que incluso la aritmética que Fermat y Descartes adhirieron a la recta, no es ni completa, ni consistente. La matemática no puede dar la certidumbre que el neoplatonismo buscaba en ella.

## Referencias

- [1] AYERBE TOLEDANO, José María, *Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes*. § Historias de Matemáticas, Revista “Pensamiento Matemático”, Vol. VII. Núm. 2. pp. 65-86, Oct. 2017. ISSN: 2174-0410. G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, España.
- [2] BERNAL, John D., *La proyección del hombre. Historia de la Física Clásica*, Trad. María-Carmen Ruiz de Elvira Hidalgo. Siglo XXI. Ciencia y Técnica, Madrid, 1975. ISBN-13: 978-8432301865.
- [3] BOYER, Carl B., *The history of calculus and its conceptual development*. Dover Books on Mathematics, 1959. ISBN: 9780486175386.

- [4] DURÁN, Antonio José, *Historia con personajes, de los conceptos del Cálculo*. Alianza Universidad, 1996. ISBN: 84-206-2861-1.
- [5] GRATTAN-GUINNESS, Ivor, *Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910)*. Alianza Editorial, Madrid, 1984. ISBN: 84-206-2387-3.
- [6] LAKATOS, Imre, *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Alianza Editorial, Madrid, 2007. ISBN: 9788420687223.
- [7] KOYRÉ, Alexandre, *Del mundo cerrado al universo infinito*. Trad. Carlos Solís Santos. Siglo XXI Editores, 1979. ISBN: 978-84-323-0349-4.
- [8] KLINE, Morris, *Matemáticas, la pérdida de la Incertidumbre*. Trad. Andrés Ruíz Merino. Siglo XXI Editores, 1985. ISBN-13: 978-8432305290.

**Sobre el autor:**

Nombre: Román Ceano

Correo electrónico: roman.c@vector3.es

Autoría: Monografía sobre la máquina Enigma publicada en Kriptopolis.

# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros

### A Minimum Principle to Help a Swimmer in a Hurry

Rosa M. Herrera

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 109–114, ISSN 2174-0410  
Recepción: 15 Mar '19; Aceptación: 25 Mar '20

1 de abril de 2020

#### Resumen

El principio de Fermat de mínimo tiempo sirve para elaborar un modelo mecánico, que se puede ejemplificar en el ejercicio propuesto, en el que se compara la geometría de la ley de Snell de la óptica, que se corresponde con el principio de Fermat, con el problema físico idealizado.

**Palabras Clave:** Principio de Fermat, Ley de Snell, Principios de mínimo.

#### Abstract

The Fermat's Principle (Least Time Principle) serves to develop a mechanical model, which can be exemplified in the proposed exercise, in which the mathematics of Snell's law of optics is compared to the idealized physical problem.

**Keywords:** Fermat's Principle, Snell Law, Minimum Principle.

## Introducción

La ley geométrica de Snell y el principio de mínimo tiempo son leyes de la óptica valiosas en la escala de la física clásica. Algunos principios optimizadores, de los cuales este es solo un ejemplo, son muy útiles también en el ambiente de las físicas del siglo XX y principios del XXI.

Un caso hipotético que propuso el físico R. Feynman (1918-1988) es el problema conocido como el del bañista a punto de ahogarse. Para afrontar este planteamiento se usa un razonamiento mecánico-matemático que establece un uso directo de un principio de mínimo -el citado de mínimo tiempo- y aquí sirve de motivo para la presentación de esta nota. Tenemos pues una situación en la que la física se puede usar para producir sorprendentes resultados en matemáticas. La inversa es muy bien conocida: las matemáticas son imprescindibles para la física.

## 1. La ley de Snell

Supongamos un rayo de luz que atraviesa la interfaz de dos medios, la ley de Snell establece que los senos de los ángulos respectivos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  entre el rayo y la normal a la interfaz son proporcionales respectivamente a las velocidades  $c_1$  y  $c_2$  de la luz en ambos medios.

Pero, ¿esta observación empírico-geométrica qué significa físicamente?  $c / \text{sen } \alpha$  es la velocidad del punto donde el frente de onda interseca la interfaz de los dos medios. Según la ley de Snell los rayos incidente y refractado con la normal a la interfaz entre los dos medios diferentes son proporcionales:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} = n_{21}$$

donde  $n_{21}$  es el índice de refracción relativo característico de los dos medios situados a cada lado de la interfaz.

La ley de Snell se puede obtener sencillamente del principio de mínimo tiempo de Fermat, que discutimos brevemente en el apartado siguiente. Se puede también escribir así:

$$n_1 \text{sen } \alpha_1 = n_2 \text{sen } \alpha_2$$

Donde  $n_1, n_2$  son las inversas de las velocidades en los dos medios.

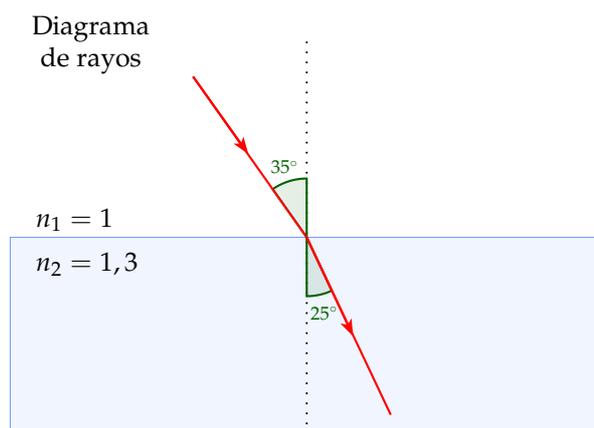


Figura 1. Un ejemplo de refracción de un rayo de luz.

## 2. Fermat y el principio de mínimo tiempo

Un rayo de luz viajando en el aire se refleja sobre un espejo siguiendo el camino más corto independientemente del punto en que la luz incida sobre el espejo, esa observación se remonta a tiempos de Herón (c. 125 a.C.) quien afirmaba que el ángulo formado por el rayo incidente y el rayo reflejado minimizan este camino de incidencia y reflexión.

Pierre de Fermat (1601-1665) conocía algunos de los aspectos más importantes de la geometría de los rayos ópticos y esto le sirvió para hacer una buena descripción: I) la luz viaja en línea recta en un medio uniforme; II) la luz se refleja en un espejo como una bola de billar que rebota en el borde de la mesa; III) los rayos de luz al pasar de un medio más denso a uno menos denso se inclinan (o se refractan) hacia la normal a la interfaz (esto se observa muy bien cuando la luz pasa del aire al agua); IV) los rayos de luz pueden seguir la misma trayectoria en los dos sentidos (son reversibles).

Estos comportamientos de los rayos ópticos son una consecuencia del principio de *mínimo tiempo* que relaciona la longitud y la orientación de un rayo luminoso<sup>1</sup> con el tiempo necesario para que se propague según la trayectoria que hace este tiempo el menor posible. En realidad este enunciado empírico tiene una carencia, tal y como históricamente fue usado, y es que los puntos tienen que estar suficientemente próximos.

Fermat<sup>2</sup> lo presentó en 1662 y en los libros actuales de texto se usa como modelo para otras situaciones cuya geometría es similar, que se pueden tratar matemáticamente escribiendo el punto de contacto en la interfaz de ambos medios como una incógnita  $x$ , y encontrando el mínimo por diferenciación. Esto es un principio de optimización de la naturaleza, un principio de forma perfecta coherente con la ley de Snell que vimos en el apartado 1.

El principio de Fermat con condiciones de contorno es un principio finalista; de hecho, la diferencia con el problema dinámico newtoniano resuelto por las leyes del movimiento (concretamente la segunda ley de Newton) estriba en que estas se refieren a un problema de condiciones iniciales. En ese sentido el enfoque de Fermat y los similares se denominan de causa final, mientras que el planteamiento clásico newtoniano corresponde con el tratamiento de causa eficiente<sup>3</sup>.

## 2.1. Principios variacionales. El principio de mínima acción

Por otra parte, el principio de Fermat forma parte de un cierto tipo de principios matemáticos muy útiles en física, los *principios variacionales*.

Veamos: estos principios se asocian con una descripción global de la evolución del sistema físico; en sentido matemático, se pueden leer porque expresan la optimización del proceso, y mecánicamente vienen descritos mediante las leyes de Newton, para ello se debe considerar un suceso cuyas condiciones iniciales son conocidas (posición y tiempo), y un suceso final caracterizado por la posición y el tiempo final. Esta optimización significa que entre todos los caminos posibles de evolución, el realmente seguido (siempre compatible con las restricciones y las condiciones impuestas por la situación del problema) es el que minimiza, o hace minimal, una magnitud característica del sistema llamada *acción*,  $S$ .

En sentido general y clásico, en realidad se convierte casi siempre el proceso en estacionario, es decir, invariante por perturbación infinitesimal del camino seguido. De hecho, posiblemente la generalización más destacable en el ámbito de la física clásica es el principio de Hamilton de acción estacionaria (físicamente equivalente al principio de conservación de la energía): considérese una partícula en un campo gravitatorio uniforme, moviéndose de un punto,  $A$ , a otro,  $B$ , en un cierto tiempo. Es plausible imaginar que dicha partícula puede seguir una ruta diferente para moverse entre esos dos puntos ( $A$  y  $B$ ) en la que invierta el mismo tiempo. Pues bien, si se calcula en cada instante la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, el *lagrangiano*, y se halla la media de esta diferencia a lo largo de la trayectoria imaginaria (realizada invirtiendo el mismo tiempo), entonces el resultado es un valor siempre mayor que el encontrado para la trayectoria real: la que de hecho sigue la partícula para desplazarse entre las dos posiciones.

Observación: En la formulación matemática debida a J. L. Lagrange (1736-1813) de la física newtoniana, se define,  $L$ , el lagrangiano como  $L = E_c - E_p$ , una cierta función diferencia de la

<sup>1</sup> O. Römer (1644-1710) en 1675 infirió que la luz se desplaza indefinidamente, a velocidad finita, al observar la velocidad en el vacío interplanetario de la variación anual en el periodo de la luna Io de Júpiter.

<sup>2</sup> Pero no fue el único que trabajó en este tema, otros científicos como Maupertius, Euler, Lagrange, Gauss, Hamilton, Dirac, Feynman y algunos más fueron descubriendo una gran cantidad de generalizaciones espectaculares.

<sup>3</sup> Una discusión muy interesante se encuentra en el libro de Lemons [3] *Perfect Form*.

energía cinética y la potencial, y a partir de ella se define la acción,  $S$ , del modo siguiente:

$$S = \int L dt$$

donde la integral se realiza a lo largo de la trayectoria recorrida. La trayectoria de mínima acción verifica:

$$\delta S = 0$$

Aquí  $\delta$  representa una variación infinitesimal de la acción.

Este principio suscitó en sus primeras formulaciones muchas controversias metafísicas y análisis sobre el carácter y el sentido profundo del mismo, porque según interpretaciones de talante filosófico, esto significaría que es como si los sistemas mecánicos “deciden al modo de un organismo consciente” su propia evolución.

Como pequeña curiosidad animamos al lector a indagar por ejemplo en que Feynman y Dirac con sus trabajos en Mecánica Cuántica proporcionaron una explicación a la causa final, apoyándose en el cálculo de interferencia de funciones de onda; R. Feynman escribió en 1964 con su estilo provocativo y señalando el aspecto físico que representa la mínima acción en “Physics Lectures”:

*¿Es cierto que la partícula “mira” todas las demás trayectorias posibles? [...] Una partícula rechaza todos los caminos de alrededor y elige el que tiene la mínima acción [...].*

### 3. El problema del bañista a punto de ahogarse salvado por la física

Un socorrista,  $S$ , ve a un nadador,  $N$ , que se está ahogando. El socorrista corre en dirección al agua a una velocidad,  $v$ , se tira al agua y nada con una velocidad,  $w$ . ¿En qué punto el socorrista se debe lanzar para invertir el menor tiempo posible? (se supone que la velocidad de la persona que se está ahogando es  $v_a = 0$ ).

Esta situación constituye un problema parecido al de la figura 1, que representa un caso arbitrario de la trayectoria de un rayo de luz refractado.

Así el socorrista sigue el principio de Fermat de mínimo tiempo, de la misma manera que el rayo de luz representado en la figura 1; esto nos hace pensar que se puede usar la ley de Snell para modelizar su movimiento. La ley de Snell, que es coherente con el principio de Fermat, identifica cada una de las variables que lo definen con las variables de este proceso de carácter cercano a la mecánica.

Imaginemos la línea de costa como una recta unidimensional tipo alambre y una arandela que se desliza por dicho alambre, que está unido en cierto punto  $A$  en el agua<sup>4</sup> a un resorte de tensión constante, de tal manera que dicha tensión sea  $1/v$  (la inversa de la velocidad de carrera del socorrista), el sistema tiene otra conexión, un punto  $B$ , mediante otro resorte a tensión constante,  $1/w$  (la inversa de la velocidad del socorrista nadando), y el tercer punto interesante,  $C$ , será el punto de la interfaz (la orilla ideal o la línea de borde de piscina ...) en el cual el corredor se convierte en nadador, el punto donde se traza la normal a la interfaz. La energía potencial de este sistema tipo resorte a tensión constante es el trabajo necesario para estirar el resorte desde una longitud de referencia, que tomamos como cero, a otra longitud dada. Este trabajo es igual a la fuerza (el peso, la tensión) por la distancia.

<sup>4</sup> El punto  $A$  representaría al bañista en apuros.

Trasladado este concepto a nuestro sistema problema, la energía potencial de este sistema mecánico en el que la tensión se ha sustituido por la inversa de la velocidad es:

$$\frac{AC}{v} + \frac{CB}{w}$$

Esta expresión coincide con el tiempo que invierte el socorrista en viajar desde  $A$  hasta  $B$ . Es una manera de trasladar al tiempo el significado mecánico de energía potencial. Si el tiempo de viaje es mínimo, entonces la energía es mínima y por tanto el sistema está en equilibrio.

La ley de Snell da el mínimo tiempo en el punto  $C$  que verifica:

$$\frac{1}{v} \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{1}{w} \operatorname{sen} \alpha_2$$

Donde  $\alpha_1$  es el ángulo en la interfaz entre la trayectoria en la tierra y la normal en el punto de contacto y  $\alpha_2$  el ángulo entre la normal y la trayectoria en el medio acuático.

Por tanto el socorrista tendrá que entrar en el agua en ese punto  $C$  (quizá el socorrista es físico y ya lo sabe ...).

Nota: la idea básica de este articulo está recogida de una lección de Feynman e inspirada básicamente en los libros de Levi [4] y Lemons [3].

## Referencias

- [1] BASDEVANT, Jean-Louis. *Le principe de moindre action et les principes variationnels en physique*, Vuibert, Paris, 2010.
- [2] BOURGUIGNON, Jean-Pierre. *Calcul variationnel*, Les editions de l'ecole polytechnique, Palaiseau Cedex, 2010.
- [3] LEMONS, Don S. *Perfect form, Variational Principles, methods and Applications in Elementary Physics*, Princenton University Press, Princeton, 1997.
- [4] LEVI, Mark. *The Mathematical Mechanic*, Princenton University Press, Princeton, 2009.

### Sobre la autora:

Nombre: Rosa M. Herrera

Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com

Institución: Research Group of Celestial Mechanics (SEAC).



# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden)

## Curiosity of the combinatorial number (concept of order)

Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 115-126, ISSN 2174-0410

Recepción: 5 Mar'20; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

En este artículo se muestran una manera curiosa en la que se pueden comportar los números combinatorios dando lugar a un nuevo concepto curioso (orden de número combinatorio). Además del orden, se analiza la suma, el binomio y algunos números primos interesantes empleando dicho concepto.

**Palabras Clave:** Curiosidad del número combinatorio, orden del número combinatorio.

### Abstract

This article shows a curious way in which combinatorial numbers can behave giving rise to a curious new concept (order of combinatorial number). In addition to the order, the sum, the binomial and some interesting prime numbers using this concept are analyzed.

**Keywords:** Curiosity of the combinatorial number, order of the combinatorial number.

## 1. Un producto de números combinatorios

➤ Se considera:  $c_m^n \cdot c_n^k = \binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k}$ ;

Si tomamos como referencia los índices superior e inferior, observamos que el índice superior del primer factor coincide con el índice inferior del segundo factor.

Como sabemos los números combinatorios se calculan de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Entonces podemos establecer que:

$$c_m^n \cdot c_n^k = \binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Y a ese producto lo denotamos por:

$$\binom{m}{n}{k}$$

Por lo tanto tenemos que:  $\binom{m}{n}{k} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$  siendo  $m \geq n \geq k$

Donde:  $m \rightarrow$  índice superior,  $n \rightarrow$  índice medio,  $k \rightarrow$  índice inferior

**En conclusión:**

El producto de dos números combinatorios cuyo índice superior del primer factor es igual al índice inferior del segundo factor, y el índice inferior del primer factor es igual al índice superior del segundo factor, es otro número al que llamaremos número combinatorio de orden 2 cuyo índice superior es el mayor de los índices superiores y cuyo índice medio es el índice común (que tienen en común) y cuyo índice inferior es el menor de los índices inferiores.

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{m}{n}{k}$$

Definición: Se llama número combinatorio de orden 2 a:

$$\binom{m}{n}{k}$$

Ejemplos:

$$\binom{6}{6} \cdot \binom{9}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!(6-6)!} = 84$$

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{1} = \binom{7}{3}{1} = \frac{7!}{1!(7-3)!(3-1)!} = 105$$

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{9}{8} = \binom{9}{8}; \binom{11}{9} \cdot \binom{9}{3} = \binom{11}{9}{3}; \binom{k}{s} \cdot \binom{s}{x} = \binom{k}{s}{x} \quad k \geq s \geq x$$

## 2. Igualdad de números combinatorios de orden 2

También podemos proceder a establecer la igualdad, por ejemplo, si tenemos un número combinatorio de tipo:

$$\binom{m}{n-k}$$

Y otro de tipo:

$$\binom{m}{n}$$

Entonces:

$$\binom{m}{n-k} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(n-k)!(m-n)![n-(n-k)]!} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$$

Por lo tanto serán iguales cuando los índices superiores son iguales al igual que los índices medios y la suma de los índices inferiores sea igual al índice medio.

$$\binom{m}{n-k} = \binom{m}{n}$$

### Ejemplos

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{2}; \quad \binom{9}{8} = \binom{9}{5}; \quad \binom{18}{15} = \binom{18}{7}; \quad \binom{23}{21} = \binom{23}{11}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{6}{x}; \quad \binom{13}{x} = \binom{13}{4}; \quad \binom{4}{2} = x + 2$$

$$3 + x = 5 \rightarrow x = 2 \quad 5 + 4 = x \rightarrow x = 9 \quad \frac{4!}{1!(4-2)!(2-1)!} = x + 2 \rightarrow x = 10$$

Esta expresión está relacionada con la expresión de la propiedad de igualdad de los números combinatorios normales (orden 1).

Sabemos que:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Al ser iguales podemos multiplicar a la expresión  $\binom{m}{n}$  por  $\binom{n}{k}$  y por  $\binom{n}{n-k}$  obtenemos:

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{m}{n} \cdot \binom{n}{n-k}$$

Con lo establecido en la sección 1 obtenemos que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n-k}$$

### 3. Suma de números combinatorios de orden 2

Para la suma, si tenemos un número combinatorio de tipo:

$$\binom{m}{n}$$

Y otro de tipo:

$$\binom{m}{n+1}$$

Entonces:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Lo vemos:

$$\begin{aligned} & \frac{m!}{n!(m-n)!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-m)![m-(n+1)]!} \\ &= \frac{m!}{(n+1)![(m+1)-(m+1)]![(m+1)-(n+1)]!} = \\ &= \frac{m!}{n!0!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!0!(m-n-1)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!0!(m-n)!} \end{aligned}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{m!}{n!0!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!0!(m-n-1)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!0!(m-n)!} \\ & \frac{m!}{n!(m-n)(m-n-1)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} = \frac{(m+1)m!}{(n+1)!(m-n)(m-n-1)!} \\ & \frac{m![(n+1)! + n!(m-n)]}{n!(n+1)!(m-n)(m-n-1)!} = \frac{(m+1)m!}{(n+1)(m-n)(m-n-1)!} \\ & \frac{(n+1)! + n!(m-n)}{n!} = m+1 \rightarrow \frac{n![(n+1) + (m-n)]}{n!} = m+1 \rightarrow n+1 + m-n = m+1 \end{aligned}$$

Sumando y restando nos queda:  $m = m$

Se ha deducido que: la suma de dos números combinatorios cuyos índices superiores y medios son iguales entre sí y los índices inferiores difieren en una unidad, da como resultado otro número combinatorio cuyos índices superior y medio son mayores en una unidad a los índices superiores y medios de los sumandos y cuyo índice inferior es el mayor de los índices inferiores.

Ejemplos:

$$\binom{7}{7} + \binom{7}{6} = \binom{8}{8}; \quad \binom{4}{4} + \binom{4}{1} = \binom{5}{2}$$

Al igual que la igualdad de los números combinatorios de orden 2, la suma también está relacionada con los números combinatorios normales (orden 1) ya que:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

#### 4. Un triángulo de números combinatorios de orden 2

En esta sección vamos a desarrollar un análogo del triángulo de Pascal o Tartaglia para los números combinatorios de orden 2.

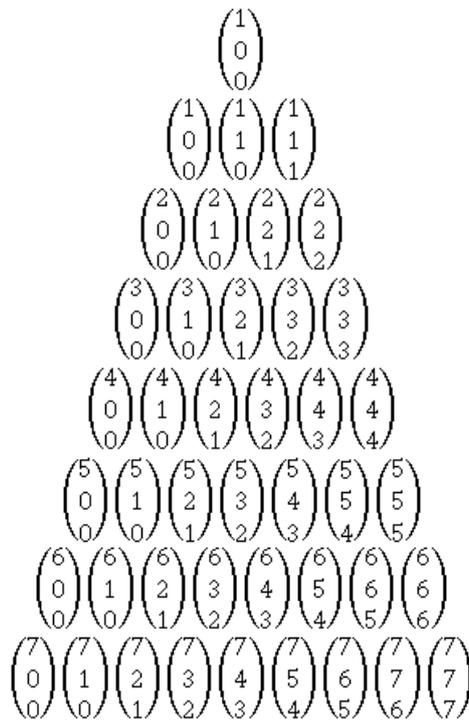


Figura 1: Triángulo de Tartaglia para números combinatorios de orden 2.



$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 12 & 12 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 20 & 30 & 20 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 30 & 60 & 60 & 30 & 6 & 1 & \\
 1 & 7 & 42 & 105 & 140 & 105 & 42 & 7 & 1
 \end{array}$$

Figura 5: resto de números que no se obtienen por los criterios anteriormente mencionados

Para la obtención de los números restantes basta observar que todos los números equidistantes son iguales debido a la propiedad vista en la sección 2 por lo que basta con una pequeña fórmula para obtenerlos, por ejemplo para obtener el 30 vemos que se encuentra en la posición número 3 si contamos desde la izquierda o desde la derecha sin tener en cuenta las unidades, en este caso comenzaríamos contando desde el número 5.

Ahora si contamos otra vez desde la derecha o desde la izquierda empezando desde el segundo término sin tener en cuenta las unidades el número 30 ocuparía la posición número 2.

De donde:

5 es el primer término de la derecha o la izquierda (sin tener en cuenta las unidades),

3 es la posición que ocupa el número 30

Y por último le añadimos el término factorial a la posición que ocupa el número 30 respecto al segundo término (sin tener en cuenta las unidades), es decir, posición número 2 (2!) y entonces nos quedaría:

$$J = \frac{n!}{a! b!}$$

Siendo:

$n$  el primer término localizado en la derecha o en la izquierda (sin tener en cuenta las unidades)

$a$  el número que se obtiene al restar el primer término de la derecha o de la izquierda (sin tener en cuenta las unidades) con respecto a la posición que ocupa el número buscado respecto al mismo

$b$  el número que se obtiene al contar desde el segundo (sin tener en cuenta las unidades) hasta el número o término buscado.

Por ejemplo, el 30:

$$n! = 5! , \quad a! = (5 - 3)! = 2! , \quad b! = 2!$$

$$J = \frac{5!}{2! 2!} = 30$$

Para 60, 105 y 140:

$$n! = 6!, \quad a! = (6 - 3)! = 3!, \quad b! = 2!$$

$$J = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

$$n! = 7!, \quad a! = (7 - 3)! = 4!, \quad b! = 2!$$

$$J = \frac{7!}{4!2!} = 105$$

$$n! = 7!, \quad a! = (7 - 4)! = 3!, \quad b! = 3!$$

$$J = \frac{7!}{3!3!} = 140$$

Al ser todos los números equidistantes iguales, al obtener uno se conoce inmediatamente el otro.

Nota: Esta forma de sacar números no es eficiente, ya que al final tenemos que hacer factoriales.

Otra forma mucho más fácil de obtener los números sería: primero dividiremos el triángulo en filas.

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \text{fila 0} \\ 1 \ 1 \ 1 \rightarrow \text{fila 1} \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \rightarrow \text{fila 2} \\ 1 \ 3 \ 6 \ 3 \ 1 \rightarrow \text{fila 3} \\ 1 \ 4 \ 12 \ 12 \ 4 \ 1 \rightarrow \text{fila 4} \\ 1 \ 5 \ 20 \ 30 \ 20 \ 5 \ 1 \rightarrow \text{fila 5} \\ 1 \ 6 \ 30 \ 60 \ 60 \ 30 \ 6 \ 1 \rightarrow \text{fila 6} \\ 1 \ 7 \ 42 \ 105 \ 140 \ 105 \ 42 \ 7 \ 1 \rightarrow \text{fila 7} \end{array}$$

Figura 6: triángulo dividido en filas

Conociendo ya la manera en la que se distribuyen las filas, vamos a proceder a obtener los números que arriba habíamos encerrado; por ejemplo, el **30** (figura 5), en un triángulo.

Primero si no hubiéramos colocado ya el **30** sabríamos que el número que estamos buscando se encuentra en la fila **5**, y de antemano ya habríamos obtenido los números de la fila **4**, por lo que para obtener el treinta, basta con sumar **12+12** y dividirlo entre **4** ya que son de la fila **4**, y por último multiplicar por **5** ya que el número que queremos obtener es la fila **5**. (Figura 7)



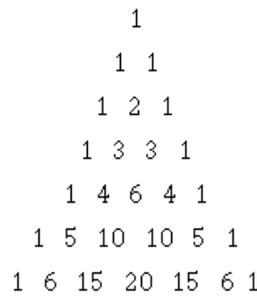


Figura 10: resultados obtenidos al dividir los números marcados en verde entre el número de la fila que ocupa

Que es conocido como el triángulo de Pascal

### 5. Números combinatorios de orden superior

Se puede extender la definición de los números combinatorios a cualquier orden de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n, k, p} = \frac{m!}{p!(m-n)!(n-k)!(k-p)!}$$

$$\binom{m}{n, k, \dots, j, p} = \frac{m!}{p!(m-n)!(n-k)! \dots (j-p)!}$$

El orden lo obtenemos aplicando la siguiente fórmula:  $N=t-1$ , donde  $N$  representa el orden y  $t$  el número de índices.

### 6. Números primos curiosos

En esta sección se aplican los números combinatorios de orden 2 la obtención de una curiosidad acerca de ciertos números primos: 3, 5, 7, 13, 37, 41. La curiosidad radica en que a partir de ellos podemos obtener otros números primos mediante la siguiente expresión.

$$L_p = \left[ \binom{2p-1}{p-1, p-3} - 1 \right] \frac{1}{p}$$

Ejemplo: si  $p=3$  tenemos

$$L_3 = \left[ \binom{2 \cdot 3 - 1}{3 - 1, 3 - 3} - 1 \right] \frac{1}{3} = \left[ \binom{5}{2, 0} - 1 \right] \frac{1}{3}$$

Aplicando la fórmula:

$$\binom{m}{n, k} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$$

Obtenemos que:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{0!(5-2)!(2-0)!} = 10$$

$$L_3 = [10 - 1] \frac{1}{3} = 3 \rightarrow L_3 = 3$$

Así:

$$L_5 = 151$$

$$L_7 = 3677$$

$$L_{13} = 26401523$$

Probando con los primeros valores de  $L_p$ , se observa que es posible plantear la siguiente conjetura:  $L_p$  es natural si y sólo si  $p$  es primo o cuadrado.

## 7. Identidad notable

Se plantea ahora establecer el binomio de Newton utilizando los números combinatorios de orden 2:

$$(a + b)^n = b^n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ejemplos:

$$(x + 3)^2 = 3^2 + \frac{1}{1} \binom{2}{1} x^1 3^{2-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{2} x^2 3^{2-2} = 9 + 6x + x^2$$

$$(m + n)^4 = n^4 + \frac{1}{1} \binom{4}{1} m^1 n^{4-1} + \frac{1}{2} \binom{4}{2} m^2 n^{4-2} + \frac{1}{3} \binom{4}{3} m^3 n^{4-3} +$$

$$+ \frac{1}{4} \binom{4}{4} m^4 n^{4-4} = n^4 + 4mn^3 + 6m^2n^2 + 4m^3n + m^4$$

La expresión se obtiene de forma inmediata utilizando la fórmula clásica del binomio de Newton y que  $\binom{n}{k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k-1}$  si  $k \neq 0$

Como consecuencia de la identidad se obtiene:

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k} = 2^n$$

## Referencias

- [1] FERNÁNDEZ, Justo. *Combinatoria: Variaciones, permutaciones y combinaciones. Fórmulas*, <https://soymatematicas.com/combinatoria/>

- [2] PÉREZ, Victoria. *Números combinatorios*,  
<https://matematica.laguia2000.com/general/numeros-combinatorios>

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe

*Correo Electrónico:* [juanpatricio965@gmail.com](mailto:juanpatricio965@gmail.com)

*Institución:* Alumno de ingeniería de la Universidad de Alicante, España.

# Cuentos Matemáticos

## La historia de Gulliver

### Gulliver's story

Rafael Rivera

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 127-138, ISSN 2174-0410  
Recepción: 1 Oct '16; Aceptación: 24 Mar '20

1 de abril de 2020

#### Resumen

En este artículo se muestra el cuento que el arquitecto Rafael Rivera, creador del Parque Gulliver de Valencia, cuenta a niños y niñas de corta edad para relatarles y enseñarles cómo se plantea y realiza un proyecto, en este caso, de un parque infantil.

**Palabras Clave:** Proyecto de un parque infantil, Parque Gulliver.

#### Abstract

This paper shows the story that the architect Rafael Rivera, creator of the Gulliver Park in Valencia, tells young children teach them how to propose and carry out a project, in this case, of a playground.

**Keywords:** Project for a playground, Gulliver's Park.

## 1. Sobre el autor del Parque Gulliver

Nací en Valencia (1950), y estudié en el Instituto Luis Vives primero, y en la Escuela de Arquitectura, después. Pero he tenido otras muchas escuelas imprescindibles. Mis padres, las Asociaciones de Vecinos, los ayuntamientos de Godella y de Valencia en los que trabajé en los años 80, mucho tiempo de voluntariado con críos increíbles, otra vez la Escuela de Arquitectura, ahora 14 años como profesor, el activismo desde siempre. Todo han sido aprendizajes estupendos.

Siempre me ha preocupado la vertiente pública de mi profesión y especialmente la ciudad y el mundo de la infancia.

El Gulliver nació como un encargo de un parque infantil cuando trabajaba en el Ayuntamiento de Valencia. Huía de los mecanismos y artilugios de catálogo para juegos infantiles, quería algo diferente y planteé los esquemas de una figura del Gulliver, llena de juegos, aunque era mucho más pequeño del que luego se hizo. No les gustó la idea y, además, excedía del presupuesto asignado. Quedó en el cajón.

Cuando me fui del ayuntamiento (año 1987), desarrollé con Manolo Martín (artista fallero) un anteproyecto al que se incorporó Sento Llobell, como ilustrador. Ese anteproyecto dio varios tumbos y acabó en el despacho del consejero de Turismo del Gobierno Autónomo Valenciano, que se entusiasmó.

Está construido con estructura metálica y muros de hormigón gunitado. El recubrimiento es de poliéster con fibra de vidrio.

El proyecto tuvo la supervisión del Instituto del Juguete de Ibi, y del laboratorio del servicio de Bomberos del Ayuntamiento de Barcelona, como pionero en la respuesta al fuego de los materiales utilizados.

Redactamos el proyecto en 1989, y la obra se acabó en diciembre de 1990, dentro de los Jardines del Turia.

Desde entonces, en las encuestas sobre parques infantiles de Valencia, cada año es el más valorado. Es una visita tradicional de los colegios durante el curso escolar.

La opinión general destaca que es una instalación inclusiva, que permite muchos juegos (todos sin instrucciones previas) y que mezcla las edades y los géneros. Incentiva la imaginación y multiplica la capacidad de divertirse. Jugando, explica las relaciones, las escalas, los tamaños y la relatividad de las dimensiones.

Así lo soñamos, pero la verdad es que ha ido más lejos de lo que podíamos imaginar, precisamente porque es un proyecto abierto.

Hoy, 29 años después, sigue teniendo sus valores conceptuales vigentes y recoge los principios actuales de ciudad cuidadora, inclusiva, con una mirada fundamental hacia la infancia.

## 1.1. La historia de Gulliver

No me conocéis, pero me llamo Rafa, y trabajo de arquitecto. ¿Sabéis lo que es eso? Hago proyectos de casas, parques, colegios, jardines, objetos, y muchas más cosas. Las pienso, las imagino, las dibujo, preparo los planos y luego colaboro para que las personas que saben construirlos, hagan bien el trabajo.

Pues, os voy a contar una historia. Érase una vez un arquitecto (que soy yo) que pensó que su ciudad (que es Valencia) necesitaba un parque para niños, pero que fuera muy especial, tan especial como son los niños y las niñas.

Para hacer el parque, se fue a ver al alcalde y llamó a su puerta. Pom, pom, ¿quién es? Soy Rafa Rivera, y quiero hablar con usted. Entró en su despacho y le contó lo que había pensado. El alcalde se rascó la barbilla, se quedó pensando un momento (el arquitecto estaba muy nervioso, ya os podéis imaginar) y al final dijo, me parece una idea estupenda, haremos un jardín especial para niños.

Rafa se puso muy contento porque le gustaban mucho las niñas y los niños, pero pensó, ¿cómo voy a hacer un parque para niños si no soy un niño? Y se puso a darle vueltas porque, para hacer bien las cosas, siempre hay que pensar primero. Ya sé, dijo, tengo que recordar las cosas me gustaban cuando era un niño.

¿Sabéis lo que le gustaba a aquel arquitecto cuando era niño? Le gustaba ir a un parque cerca de su casa, donde había una montaña pequeña, la *montañeta* le llamaban. Por ella corría, subía y bajaba, se escondía, y jugaba a pillar con su hermano y sus primos.

Además, aquel arquitecto, aunque ya no era un niño, conocía a muchos, y pensó que sería bueno preguntarles. Por eso fue de colegio en colegio hablando con niñas y niños como vosotros. Todos le dijeron cosas diferentes que él se apuntaba en su libreta con cuidado y buena letra. A vosotros, ¿a qué os gusta jugar? Algunos le dijeron cosas extrañas; que haya dinosau-

rios en el parque, dijo una niña. Que tenga cuevas peligrosas dijo un pequeñajo. Pero casi todos dijeron: que se pueda correr, que haya sorpresas, escondites donde no nos encuentren papá y mamá. Donde podamos ir solos, donde haga sol, donde podamos inventar juegos, donde quepan grandes y pequeños.

Menudo lío. El arquitecto se fue a casa y siguió pensando y pensando, mientras repasaba sus notas. Pero no encontraba una solución.

¡Ya está!, gritó. ¡Haré una montaña!, una montaña parecida a la "montañeta" con escondites y cuevas. Enseguida hizo un dibujo (figura 1)

Pero, pero eso no es nada nuevo, eso ya existe, se dijo, ya hay montañas con caminos y recovecos, con árboles y plantas. Y siguió pensando.

Pero, esta montaña será especial porque ... porque ... porque será un hombre-montaña. Eso es, en vez de caminos tendrá toboganes, en vez de cuevas tendrá pliegues en la ropa. Ya está, será un gigante-montaña, ¡bien! Hizo otro dibujo al lado del anterior, y descansó tranquilo (figura 2).

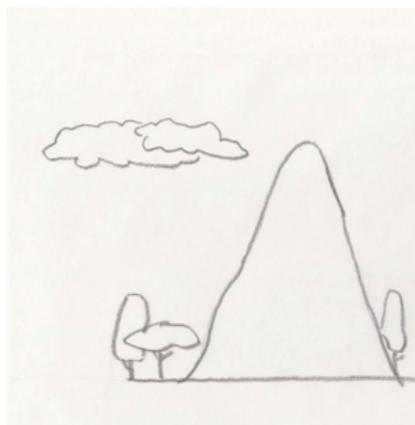


Figura 1

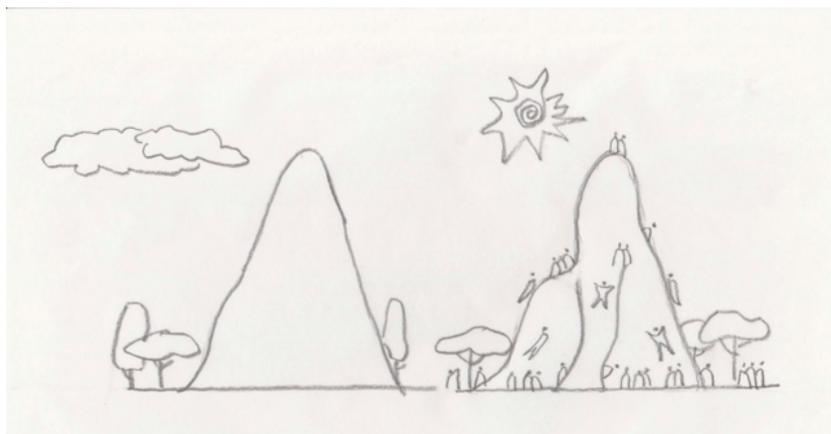


Figura 2

Luego, cogió un trozo de barro húmedo y empezó a modelar y modelar, hasta conseguir una figura que representaba el hombre montaña. Creo que esto es una buena idea, murmuraba (figura 3).

Estuvo todo el día trabajando y, después de cenar, fue a acostar a sus dos hijos, y a contarles un cuento como cada noche. Buscó en la estantería y, por casualidad, encontró un libro antiguo, que había leído hacía muchísimos años; se llamaba Los viajes de Gulliver. Se sentó en la cama y empezó a leer y leer.

Para su sorpresa, los niños no se dormían enseguida como otras veces, al revés, cada vez estaban más despiertos, y muy interesados con la historia de Gulliver. Solo pudo apagar la luz con la promesa de que al día siguiente continuaría leyendo el libro (figura 4).

No se acostó. Se fue a su despacho porque le rondaban la cabeza muchas ideas. Ya está claro, el parque será un hombre-montaña y representará a Gulliver cuando viajó al Lilibut. Los niños y niñas lo reconocerán y estarán encantados de que haya venido a la ciudad, jugarán con sus ropas, su sombrero, su sable. Pero, tendrá que estar acostado, para que al jugar nadie



Figura 3

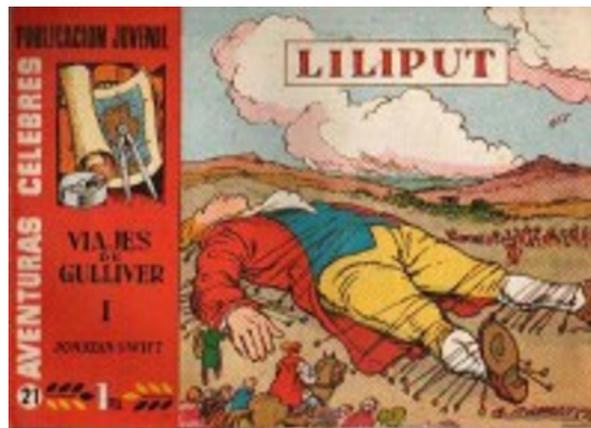


Figura 4

pueda hacerse daño. Se puso a dibujar otra vez, y luego se durmió contento y feliz por haber encontrado la solución. Mirad lo que dibujó (figura 5).

Al día siguiente volvió a ir a ver al alcalde. Pom, pom, ¿quién es? Soy yo otra vez, dijo nervioso. Pasa, pasa, te estaba esperando. Y el arquitecto empezó a hablar y hablar, contándole todo lo que había pensado. El alcalde se entusiasmó, y juntos cantaban y bailaban imaginando el parque acabado (figura 6).

Cuando se sentaron, el alcalde le preguntó, Pero, si esto no es un edificio, ni un jardín, ¿quién lo construirá? ¿un albañil? ¿un jardinero?

No te preocupes, alcalde, lo tengo todo pensado, como estamos en Valencia, lo construirá... ¡un artista fallero! Mmm, dijo el alcalde tocándose otra vez la barbilla. Buena idea, buena idea. Ya tengo ganas de que esté acabado, date mucha prisa.

Eso hizo, se fue corriendo a buscar a un amigo que hacía fallas, se llamaba Manolo Martín, y le preguntó si le gustaría hacer una falla que no se quemara nunca y con la que pudieran jugar todos los niños y niñas. Dijo que sí sin pensarlo dos veces, y se pusieron a trabajar (figura 7).

Pero se dieron cuenta de que necesitaban a alguien que dibujara mejor que ellos y que creara



Figura 5



Figura 6



Figura 7

un Gulliver especial, un personaje nuevo, que fuera Gulliver pero que fuera diferente. Buscaron a otro amigo, se llamaba Sento Llobell, y le contaron lo que tenían entre manos. También le gustó mucho la idea y se entusiasmó enseguida. Ya eran un equipo.

Trabajaron los tres juntos. Rafa les contaba sus ideas, preparaba planos y hacía bocetos para que todo fuera divertido, Sento los dibujaba una y otra vez, y Manolo pensaba cómo las construirían para que todo fuera muy seguro y durara mucho tiempo. Discutían, se reían pensando en los niños y, a veces, hacían el tonto bromeando un poco para descansar.

Mirad lo que fue dibujando Sento (figuras 8 y 9):



Figura 8



Figura 9

¿Qué os parece? Así trabajando, trabajando, hasta conseguir la figura que buscaban (figura

10).



Figura 10

Siempre pensando mucho, decidieron hacer una maqueta. ¿Cómo hacerla? Pues mirad, llamaron a un amigo, lo disfrazaron e hicieron que se tumbara en el suelo. Un poco más hacia aquí, pon de lado la rodilla. Y sirvió de modelo (figura 11).



Figura 11

Luego volvieron a visitar al alcalde. Pom, pom, ¿quién es? ¿No sabes quién soy? Claro, claro, dijo el alcalde, eres Gulliver, quiero decir, eres el arquitecto. Sí, soy yo, y te traigo una sorpresa.

Rafa dejó una bandeja sobre la mesa y después, ¡zas! quitó de golpe la tela que había encima, y apareció la maqueta del Gulliver (figura 12).

Se quedó impresionado. Daba palmas y saltitos. Es preciosa! Es preciosa! ¿Cuándo estará acabada la figura? ¿Cuándo podrán jugar los niños? ¿Cuándo podremos ir a verla? Paciencia, paciencia, alcalde, le dijeron, nos daremos toda la prisa que podamos.



Figura 12

Imaginaros, la hicieron a trozos en el taller. Casi vivían allí, sobre todo Rafa y Manolo. Que si esto, que si aquello, que si este tobogán será muy divertido, que si ponemos una cuerda aquí para que nadie se caiga. Incluso se tiraban por los toboganes para probarlos.

Luego fueron llevando las piezas a los Jardines del Turia para ir las montando, como un rompecabezas (figura 13).



Figura 13

Era un poco de lío, pero cada pieza tenía un número y tenían que estar puestas precisamente en su sitio, para que todo cuadrara. No se podían mover ni un poquito. Así fue creciendo el Gulliver poco a poco. Y la última pieza que llegó, fue la cabeza. Con un camión especial, muy despacio, atravesó la ciudad, y la gente miraba asombrada y decía, ¿qué será eso? Parece un gigante. Los niños y niñas se subían al brazo de sus papás, yo quiero verlo, yo quiero verlo (figura 14).

Lo acabaron de pintar, pusieron la grava alrededor, y así se quedó Gulliver descansando,

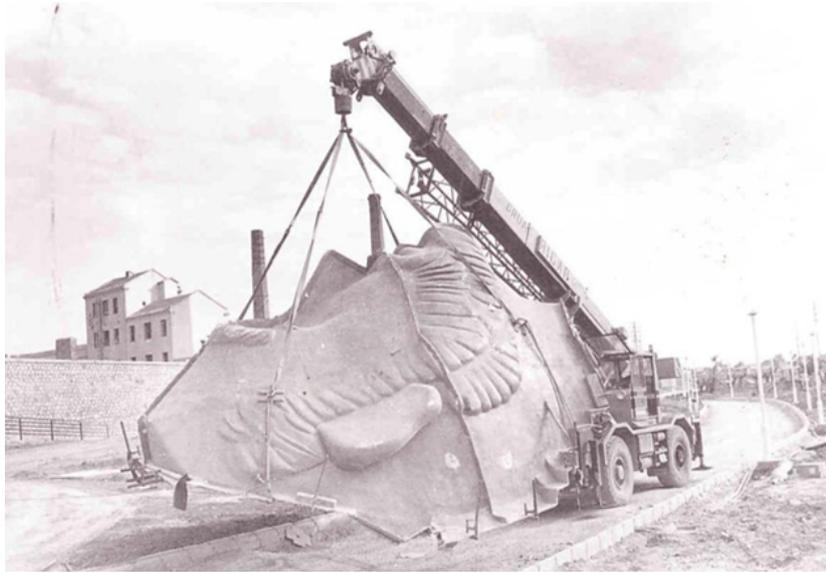


Figura 14

como durmiendo, sin saber lo que iba a pasar entonces (figura 15).



Figura 15

Estaba entero, ya parecía acabado, pero no era así, ¿sabéis por qué? Porque faltaban todas las niñas y niños corriendo y jugando por las ropas. El día de la inauguración, cuando abrieron las puertas y se llenó de juegos y risas, entonces fue cuando se quedaron tranquilos de verdad, porque vieron por el rabillo del ojo que Gulliver sonreía (figura 16).

El alcalde estaba contento, la gente reía y bailaba, los críos no paraban de correr, tirarse por los toboganes, esconderse, jugar a pillar.

Pero aún faltaba una última sorpresa que nadie sabía, algo que habían mantenido en secreto.



Figura 16

Un secreto muy secreto. Abrieron una puerta que estaba escondida y dentro había un trozo de la ciudad de Valencia hecho chiquitito. ¿Sabéis para qué? Para que nadie se sintiera ni gigante ni pequeño, como le pasó a Gulliver en sus viajes. En realidad, cada uno es como es, unos más altos, otras más bajas, unas más delgadas, otros más gorditos, unas con los ojos muy azules, otras más oscuros, pero nada de eso importa porque todos somos personas, y podemos jugar juntos.

Mirad lo que había dentro del Gulliver. Allí estaban representados los edificios más importantes de la ciudad, y se podía jugar con ellos, subir por encima, esconderse, y todo lo que se les ocurriera a los niños-gigantes. Las casas no se podían romper porque estaban hechas precisamente para eso. Lo mismo que se jugaba por fuera, también se jugaba de otra manera por dentro (figura 17).

Y esta es la historia del Gulliver que la he escrito para que sepáis todos sus secretos; cómo lo pensé, cómo lo dibujamos, y cómo se construyó dentro de los jardines del Turia.

Desde entonces, ¿sabéis?, es el parque preferido de los niños y niñas, y muchos colegios van de excursión para pasar un día entero corriendo y jugando. Y en diciembre, Gulliver va a cumplir ¡29 años! Fijaros si ha durado. Y he ido a muchos colegios a explicar la historia de este parque tal como os la he contado.

Queda una última cosa. Un día hubo una tormenta muy grande sobre Valencia. Se oían truenos tremendos y llovía muchísimo, tanto, que se inundó una parte de la ciudad, y también el Gulliver. Se llenó de agua y las casas que había dentro se estropearon. Fijaros cómo se quedó (figura 18).

Por eso ahora queremos arreglarlo todo, reparar las casas que había dentro, tapar las grietas y pintarlas otra vez, para que vuelvan a estar como antes y las niñas y niños como vosotros puedan entrar a correr y saltar por las calles como si fueran gigantes.



Figura 17

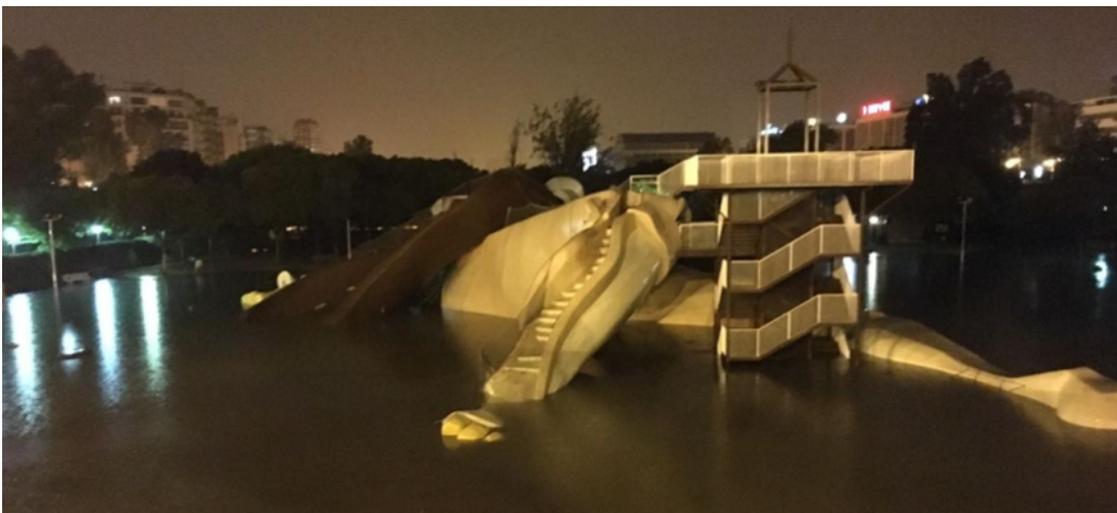


Figura 18

Cuando esté acabado os avisaré para que vengáis a verlo.

¿Querréis?

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Rafael Rivera

*Correo electrónico:* rivera7@sol7.jazztel.es

*Institución:* Arquitecto. Autor del Parque Gulliver (Un riu de xiquets) inaugurado en diciembre de 1990.

# Cuentos Matemáticos

## El origen de los números complejos

### The origin of complex numbers

Miguel Oscar Almarales Milán

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 139–142, ISSN 2174-0410  
Recepción: 24 Feb'20; Aceptación: 24 Mar'20

1 de abril de 2020

#### Resumen

Con el presente cuento se pretende iniciar de forma amena y desde un punto de vista didáctico el comienzo del estudio de los números complejos.

**Palabras Clave:** Cuentos con contenido matemático, números complejos

#### Abstract

This story is intended to begin in an entertaining way and from a didactic point of view the beginning of the study of complex numbers.

**Keywords:** Tales with mathematical content, complex numbers

## 1. El origen de los números complejos

Cuenta la historia que hace ya muchísimos años el mundo aritmético estaba al borde de la guerra. Para ese entonces el mundo de los reales, gobernado por el rey 1 (uno) estaba dividido en dos clases sociales fundamentales: la clase dominante que estaba formada por los números positivos y la clase explotada por los negativos. El 0 (cero) era el que funcionaba como vía de comunicación entre una clase y otra.

Los números negativos trabajaban día y noche sin descanso en condiciones pésimas y por un salario que no les daba ni para comer, mientras que los positivos vivían en casas lujosas, no trabajaban y se pasaban el día entero jugando a ser longitudes de segmentos, cantidades, áreas, perímetros y todo tipo de cosas que se les ocurriera. El rey 1 era un tirano, reprimía a los números negativos y castigaba a aquellos negativos que trataban de llegar a ser alguien importante. 1 decía que los negativos habían nacido para ser esclavos, que el simple hecho de estar a la izquierda de ellos en la recta numérica los hacía inferiores y que nunca pasarían la prueba de la dignidad. Esta prueba consistía en colocarle al número el sombrero mágico  $\sqrt{\quad}$  (raíz cuadrada) y entonces este indicaría si el número era o no era digno. Lo cierto es que cada

vez que se le colocaba el sombrero a un número negativo este decía: “NO TIENE SOLUCIÓN”. Para los números negativos eso no indicaba que el número no era digno y era una excusa de 1 para reprimirlos.

Como siempre ocurre en estos casos, existen libres pensadores que no se dan por vencidos y luchan hasta el final por la libertad, y  $-1$  (menos uno) era uno de ellos. Por suerte  $-1$  sabía de una antigua leyenda que planteaba que entre todos los números existía el llamado “ELEGIDO”, que sería el encargado de llevar la paz a todos y que en el momento justo entraría a la cueva “ecuación” para convertirse en la llave del nuevo mundo; un mundo donde todos tendrían los mismos deberes y derechos y donde nadie pueda reprimir a nadie; un mundo sin reyes ni esclavos.

El  $-1$  decidió emprender un largo viaje en busca de la cueva ecuación pues tenía absoluta confianza en la veracidad de esa leyenda. Cruzó ríos de sumas, bosques de multiplicaciones y hasta luchó con animales cocientes. Pasaron años, décadas y hasta siglos, pero  $-1$  nunca se dio por vencido y nunca descansaría hasta encontrarla. Hasta que un día, ya casi al oscurecer,  $-1$  vio algo a lo lejos, algo brillante que simulaba la figura del sombrero mágico, se acercó tan rápido como pudo y se dio cuenta que era una cueva con la forma  $\sqrt{\quad}$ .  $-1$  se puso a llorar pues se había dado cuenta de que había encontrado la cueva “ecuación”; se levantó al instante y pensó:

✓ no puede ser una casualidad, y se adentró en la cueva.

Una vez dentro de la cueva se dio cuenta por qué le decían la cueva “ecuación”, pues en su interior había una construcción con una parte de una ecuación a la que le faltaba la parte que sigue después del signo de igualdad y en ella había algo parecido a una puerta. Era algo así:

$$x^2 = \square,$$

$-1$  inmediatamente se llenó de tristeza pues pensó que si entraba, como era un número negativo, no iba a tener solución; pero algo en su interior le devolvió la esperanza y decidido abrió la puerta y entró. Para su sorpresa la ecuación se comenzó a evolucionar y el exponente de la ecuación se transformó en un sombrero mágico que fue a parar a su cabeza, solo que esta vez no dijo que no había solución. La cueva se comenzó a llenar de colores y al abrir la puerta salió algo nunca visto.  $-1$  y el sombrero se transformaron en algo nunca visto, como un gusano cuando se convierte en mariposa.  $-1$  abrió la puerta y salió con un nuevo número en sus brazos, el número  $i$ .

$-1$  salió corriendo con  $i$  en sus brazos para contarle a sus hermanos lo sucedido y mientras corría vio como el mundo que él conocía se estaba transformando, dejó de ser una línea recta y se expandió por encima y por debajo de ella; mientras se encontraba con sus hermanos comenzaron a aparecer nuevos números y se eliminaron de una vez las contradicciones, los reyes y los esclavos.

Y cuentan que ese mismo día, uno de los números le preguntó a  $i$ :

✓ ¿eres real o eres solo producto de mi imaginación? A lo que  $i$  contestó:

✓ Real no soy, así que debo de ser “**imaginario**”.

Así fue cómo surgió el número  $i$ , cómo se eliminaron las clases sociales en el mundo de los números y cómo el sombrero mágico nunca más pronunció las palabras “NO TIENE SOLUCIÓN”.

1 se dio cuenta de que todos eran importantes, pues fue  $-1$  (un número negativo) el “elegido” para cambiar el mundo, un mundo que no era tan “real” como se pensaba, sino bastante “COMPLEJO”.

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Miguel Oscar Almarales Milán

*Correo electrónico:* malmaralesmilan@gmail.com

*Institución:* Universidad de Granma, Cuba.



# Críticas y Reseñas

## Informe sobre la película “Un Don Excepcional”

### A report of the film “Gifted”

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 143–150, ISSN 2174-0410  
Recepción: 15 Feb'20; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

#### Resumen

En este artículo se presenta una reseña de la película “Un Don Excepcional” dirigida por Marc Webb. El largometraje trata sobre una niña con capacidades especiales para las matemáticas que junto con su tío, intenta superar la dificultad para asimilar la realidad del entorno social, personal, sentimental y familiar que la rodea y que impide un desarrollo “normal” de su infancia.

**Palabras Clave:** Ecuaciones de Navier-Stokes, adaptación curricular, innovación educativa.

#### Abstract

This article presents a review of the film “Gifted” directed by Marc Webb. The film is about a girl with special abilities for mathematics who along with her uncle tries to overcome the difficulty in comprehending the reality of the social, personal, sentimental and family environment that surrounds her which prevents a “normal” development of her childhood.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, curricular adaptation, educational innovation.

## 1. Ficha Técnica

**Título:** Un Don Excepcional (Gifted).

**Dirección:** Marc Webb.

**Año:** 2017.

**Duración:** 101 min.

**País:** Estados Unidos.

**Guión:** Tom Flynn.

**Reparto:** Chris Evans, Jenny Slate, Octavia Spencer, Lindsay Duncan, McKenna Grace, Keir O'Donnell, John Finn, Kelly Collins Lintz, Joe Chrest, Scott Christopher Kelly, Cameron Mills, Jeremy Ambler, Candace B. Harris, Jona Xiao, Michael Kendall Kaplan .



**Fotografía y Música:** Stuart Dryburgh y Rob Simonsen.

**Productora:** Fox Searchlight / Dayday Films / Filmnation Entertainment.

**Género:** Drama. Infancia. Familia. Matemáticas.

**Tráiler:** <https://youtu.be/A9gD70WQQC0>

## 2. Introducción

A veces la vida misma se encarga de llevarte a lugares insospechados. Otras el azar o la casualidad se encargan de sorprenderte. En mi caso me encontré de manera fortuita con esta película. Resulta que en el canal de Youtube que utilizo para subir algún que otro vídeo de innovación educativa para las matemáticas me encontré hace ya un tiempo un comentario de uno de mis suscriptores, por el que no presté demasiado atención debido a que no llegaba a comprender el sentido del mismo. Era un comentario algo así como “*Like si vienes desde Gifted*”. Como he reconocido no le hice demasiado caso, pero hace poco otro suscriptor de Paraguay me daba la enhorabuena y me decía que había llegado a mi vídeo a través de la búsqueda de información de un método de cálculo rápido denominado Método Trachtenberg que se referenciaba en una película con el título de “*Gifted*” y que en español se había traducido como “*Un Don Excepcional*”. Sin lugar a dudas aquel comentario primitivo que en su momento no supe interpretar ahora cobraba sentido para mí. Entonces mi curiosidad me llevó precisamente hasta la película que alquilé en Youtube y me dispuse a visualizar tranquilamente.

## 3. Argumento



Figura 1. Reparto: (De izquierda a derecha y de arriba a abajo) Jenny Slate, Chris Evans, Octavia Spencer, Jona Xiao y McKenna Grace (Créditos Fotográficos: Todd Williamson / Getty Images).

Sobre la trama, en apariencia se trataba de una película alejada del tipo de las grandes superproducciones estadounidenses, todo lo contrario, más bien cercana a una producción de cine de autor independiente, a pesar de que alguno de sus protagonistas, como Chris Evans, lo hemos visto en producciones como la saga de “*Los Vengadores*” y nos resulta complicado disociarlo de su disfraz de superhéroe del Capitán América. En defensa de Chris Evans ha de reconocerse la buena actuación que realiza en el presente trabajo, lo que le llevó en 2017 a ser nominado por su actuación

primero y resultar ganador después como mejor actor de drama en el Teen Choice Award. También resultó nominada a dichos premios como mejor actriz joven la protagonista de la historia McKenna Grace, y la película obtuvo el galardón de mejor película de drama.

La trama se localiza en un pequeño pueblo cerca de Tampa, costa oeste de Florida. Mary Adler es una niña de 7 años que vive con su tío Frank Adler. Diane, mamá de la pequeña, se suicidó cuando Mary tenía sólo 6 meses, no sin antes pedirle a su hermano que la bebé quedara a su cuidado. La niña posee un asombroso desarrollo intelectual y no tiene amigos por lo que Frank decide que es bueno para la niña que vaya a la escuela y se relacione con otros niños y haga amigos de su edad. El primer día de clase, la niña pone en evidencia a su maestra Bonnie Stevenson que tiene una habilidad superior para las matemáticas, y sorprendida habla

con Frank para intentar ponerle de manifiesto que cree que la niña es superdotada. Frank le contesta que todo se basa en el método Trachtenberg, un método de cálculo rápido desarrollado por el ingeniero ruso Jakow Trachtenberg (1888-1953) cuando estaba recluido en los campos de concentración nazis durante la 2ª Guerra Mundial.

Pasado un tiempo ofrecen a Frank la posibilidad de que la niña sea becada en un colegio que pueda atender las necesidades educativas especiales que la niña demanda dada su capacidad. Aparece entonces el primer dilema al que Frank debe hacer frente, pero al final rechaza dicha beca puesto que considera que es mucho más importante para la niña que "la dejen ser niña" a que colmen las expectativas formativas de la misma y en cierto modo desnaturalicen a la pequeña. Frank argumenta la razón de su decisión en conocer de primera mano por experiencias familiares pasadas que dichas "superescuelas" coartarán la posibilidad de que Mary pueda llegar a tener una infancia "normal".

A medida que la trama avanza, la maestra Bonnie descubre el origen de Mary. Su madre, Diane, era una prometedora matemática dedicada a uno de los siete problemas del Milenio sin resolver aún, el problema de Navier-Stokes, que se suicidó el mismo día que fue a pedir a su hermano Frank ayuda para que se quedase con Mary, siendo la niña un bebé de seis meses. Desde ese momento Mary y Frank viven juntos. Antes de mudarse a Florida donde trabaja como reparador de botes, Frank era profesor adjunto de Filosofía en el MIT. Tío y sobrina viven alejados de la antigua vida familiar que lideraba Evelyn, la enérgica y posesiva madre de Frank, que aparece en la trama para obtener la custodia legal de Mary mediante la celebración de un juicio y cuya intención es llevarse a la niña a Massachusetts, donde podrá satisfacer las necesidades que una niña prodigio como Mary necesita. Sin embargo Frank está completamente convencido de que los deseos de su hermana eran que la niña acudiera a una escuela pública normal y tener una buena infancia a diferencia de la que ella tuvo en parte por la presión sometida por su madre Evelyn.

Antes de emitir sentencia, el juez autoriza a Evelyn a que la niña visite Boston con su abuela. Evelyn lleva a Mary al MIT, donde la explica qué son los problemas del Milenio y su repercusión en cuanto a reconocimiento mundial, en especial del problema al que se dedicaba su madre Diane, el problema de Navier-Stokes, poniendo de manifiesto que quien sea capaz de resolverlo obtendrá la medalla Fields e incluso el premio Nobel, dado que tiene repercusiones en el campo de la Física (recuérdese que no existe el Nobel de Matemáticas). Para ver la capacidad de la niña, un profesor del Departamento de Matemáticas le plantea un problema complicado transcrito erróneamente de forma deliberada. La niña es capaz de resolverlo sin problema cuando pone de manifiesto que un simple signo omitido hace que sea un problema trivial.

Preocupado por que el juez dicte sentencia en su contra y pierda por completo a Mary, Frank accede finalmente a un acuerdo negociado en el que Mary tendrá un hogar adoptivo a tan sólo

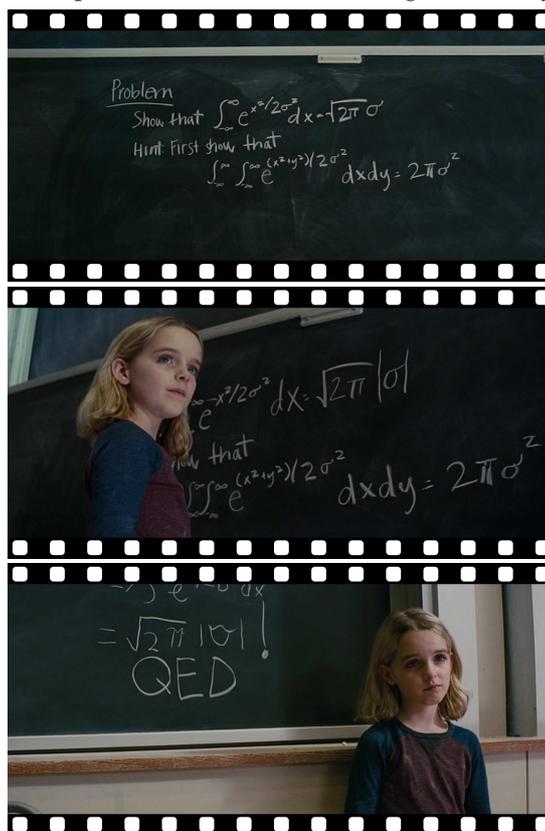


Figura 2. Fotogramas de la película (© Fox Searchlight / Dayday Films / Filmnation Entertainment).

30 minutos en coche de la casa de Frank y asistirá a una escuela privada donde Evelyn quiere que la niña estudie.

Mary sufre una conmoción cuando se entera de que la separarán de Frank, y en un principio se niega a recibir sus visitas. De manera casual, Bonnie ve en su colegio una foto del antiguo gato de Frank que está en un centro de animales para que alguien lo adopte a pesar de que los deseos de éste eran que la niña pudiera llevarse al gato a su nuevo hogar. Antes de que sea sacrificado Frank rescata al gato y se presenta en el hogar de acogida de Mary sospechando que tras los acontecimientos únicamente cabía la posibilidad de que Evelyn estuviera detrás, ya que ella es alérgica a los gatos. Al llegar al hogar Frank descubre que Evelyn está supervisando la educación de Mary y que está viviendo en la casa de huéspedes del nuevo hogar de la niña.

Sucede entonces un giro argumental que pone de manifiesto que Diane había logrado resolver el problema de Stokes-Navier y que había dado órdenes de que no se hiciera público hasta que su madre Evelyn hubiera muerto. Frank le ofrece entonces a Evelyn que se encargue de difundir el trabajo de Diane, pero en contrapartida que acepte que él tenga la custodia de la niña. Evelyn acepta resignándose.

La película termina con la niña asistiendo a clases de matemáticas de licenciatura en la universidad y a continuación regresando a sus clases de primaria donde juega con sus amigos.

#### 4. Sobre el director y el guionista



Figura 3. Marc Webb y Tom Flynn.

La dirección corre a cargo del estadounidense Marc Webb (Bloomington, Indiana, 31 de julio de 1974). Webb debutó en 2009 con la original comedia “(500) días juntos”. A pesar de haber firmado superproducciones como “The Amazing Spiderman” (en español “El sorprendente hombre araña” -2012-), sin lugar a duda “Un Don Excepcional”, su penúltimo trabajo hasta la fecha, pasa por ser su trabajo más serio y convencional, y desde mi punto de vista uno de los más completos. Dejando de lado ciertos clichés en los

que otras películas incurren cuando toman también las matemáticas como hilo conductor, Webb hilvana el drama centrándose fundamentalmente en el sentimentalismo. De este modo, la trama resulta sencilla y elegante, evitando que el espectador se pueda perder. En realidad en la película las matemáticas sirven como pretexto para plantear lo complicado que pueden resultar las relaciones humanas entre adultos, y lo sencillo que sería a veces utilizar aquello de la empatía para intentar comprender qué es lo que realmente importa en la formación personal, no sólo académica, de los niños que serán los adultos del mañana.

El guión está escrito por Tom Flynn. Flynn que se había retirado justo antes de la realización de la película, aceptó el reto de “dar a luz” una historia dramática a petición de su mujer, quien le convenció de que tenía una oportunidad inmejorable de hacer algo distinto de las 23 comedias que había hecho con anterioridad. El trabajo tan sólo le llevó 5 semanas en el retiro de la casa invernal de la playa que su hermana Pat le prestó para la ocasión. El mismo Tom Flynn declaraba en una ocasión que su propia hermana también es superdotada, lo que sin duda le sirvió para construir la historia desde un punto de vista mucho más cercano y experimentado. En palabras de Flynn:

*“He convivido con una mente brillante toda mi vida y he aprendido lo importante que es también saber divertirse; si mi hermana no lo hubiera hecho, podría haber sido muy desdi-*

chada".

## 5. Crítica

La película me recordó muchísimo a "La profesora de parvulario" (2014) del provocador director israelí Nadav Lapid. Ambas tratan sobre niños con ciertas capacidades inmersos en un mundo de adultos que toman decisiones por ellos con la excusa de proteger su inocencia, su supuesta fragilidad, pero sobre todo con el fin de poner a buen recaudo sus capacidades y aislarlos de un entorno hostil que los rodea. Mientras que la argumentación de Lapid era mucho más reflexiva en su análisis, abriendo nuevos interrogantes a medida que sus personajes avanzaban en la trama, Webb apela sencillamente al sentimentalismo como tabla de salvación. Webb propone al espectador una crítica de los valores tradicionales de la educación. La formación académica es importante, pero quizás sea igual o más la formación en valores, la importancia de sabernos relacionar con los demás en un entorno que cada vez nos está haciendo más y más individuales, aislados de los demás. Resulta paradójico que podamos hablar con alguien del otro lado del mundo, que seamos capaces de aceptarlo como amigo en nuestras redes sociales y compartamos con él parte de nuestro mundo interior, y que sin embargo no seamos capaces de saber apenas nada de la vida del vecino del otro lado de la escalera.

## 6. Guiños Matemáticos

### 6.1. Método Trachtenberg

Al principio de la película, se pone de manifiesto que la sobresaliente capacidad para el cálculo de la niña se debe fundamentalmente según Frank a la utilización del método Trachtenberg. Dicho método fue desarrollado por el ingeniero ruso Jakow Trachtenberg cuando fue encerrado como prisionero político en los campos de concentración nazi durante la 2ª Guerra Mundial. Trachtenberg, en ausencia de papel y lápiz, ingenió un sistema de algoritmos diferentes a los de la operativa aritmética convencional, que después de su salida de los campos y su asentamiento en Suiza perfeccionó y llegó incluso a enseñar cuando fundó el Instituto Matemático de Zurich.

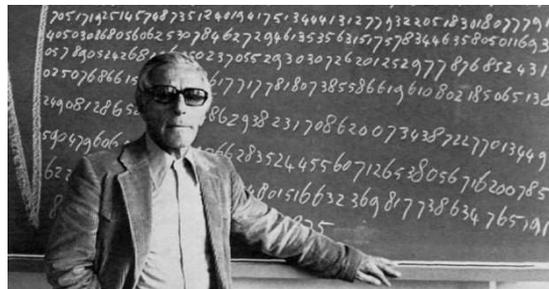


Figura 4. Jakow Trachtenberg.

Su método no está únicamente basado en la rapidez del cálculo, sino que posee la característica de ser simple. Una vez que se han aprendido las reglas básicas, el cálculo aritmético resulta tan lógico y sencillo como leer una historia.

Trachtenberg tenía una mente ingeniosa, capaz de crear un método que simplificara la aritmética convencional, evitando la memorización de tediosas tablas de multiplicar. Aunque su método fue inicialmente concebido en condiciones trágicas e inhumanas dentro de los campos de concentración, su superlativo esfuerzo quizás no hubiera dado los mismos frutos si no hubiera sido de este modo.

La vida de Trachtenberg resulta fascinante, y muchos expertos creen que revolucionaría la enseñanza de la aritmética en los colegios de primaria a lo largo del mundo si su método fuera instaurado. Sin embargo la llegada de la calculadora, y la instauración de la misma en las es-

cuelas, nos está haciendo un flaco favor. El método de Trachtenberg no sirve únicamente para calcular mentalmente de una manera mucho más efectiva y rápida, sino para mejorar muchos aspectos de nuestra formación personal y académica, seguridad en uno mismo, fluidez mental, aumento de nuestra capacidad analítica y creación de nuevas estrategias de abordar problemas complejos y convertirlos en pequeños microproblemas más sencillos, etc.

Recomiendo para empezar a familiarizarse con el método la visualización de algunos vídeos que preparó este humilde servidor:

- Multiplicación por 11: [https://youtu.be/ND7s\\_lkQrdk](https://youtu.be/ND7s_lkQrdk)
- Multiplicación por 12: <https://youtu.be/BBADJqCu67U>

## 6.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Estas ecuaciones son parte de los denominados “siete problemas del milenio” (este problema ocupa el sexto lugar). En el año 2000 el popular Instituto Clay de Matemáticas planteó el reto de solucionar siete problemas mediante la recompensa de un millón de dólares a aquella persona que fuera capaz de hacerlo. Estos problemas son:

1. P versus NP. Consiste en decidir si la inclusión entre las clases de complejidad P y NP es estricta o no.
2. La conjetura de Hodge. Dicha conjetura dice que para variedades algebraicas proyectivas, los ciclos de Hodge son una combinación lineal racional de ciclos algebraicos.
3. La conjetura de Poincaré. Es la única resuelta hasta la fecha por el ruso Grigori Perelman (1966) en 2002. En 2003, tras su comprobación, dicha conjetura pasó a ser teorema sosteniendo que la esfera cuatridimensional, también llamada 3-esfera o hiperesfera, es la única variedad compacta cuatridimensional en la que todo lazo o círculo cerrado (1-esfera) se puede deformar (transformar) en un punto. Este último enunciado es equivalente a decir que solo hay una variedad cerrada y simplemente conexa de dimensión 3: la esfera cuatridimensional.
4. La hipótesis de Riemann. Dicha hipótesis establece que todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen parte real igual a  $1/2$ .
5. Existencia de Yang-Mills y del salto de masa. En teoría cuántica de campos, la teoría de Yang-Mills, que generaliza la teoría de Maxwell del campo electromagnético, ha sido usada para describir la cromodinámica cuántica que explicaría en última instancia la estructura de protones y neutrones, así como el grado de estabilidad del núcleo atómico.
6. Las ecuaciones de Navier-Stokes. Dichas ecuaciones en derivadas parciales describen el movimiento de los líquidos y gases. Aunque fueron formuladas a finales del siglo XIX, no se conocen aún todas sus implicaciones, debido fundamentalmente a la no linealidad de las ecuaciones y los múltiples términos acoplados.
7. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer. Dicha conjetura trata sobre un cierto tipo de ecuación que define curvas elípticas sobre los racionales. La conjetura dice que existe una forma sencilla de saber en todo caso si esas ecuaciones tienen un número finito o infinito de soluciones racionales.

En el hall del MIT existe una pared que espera los retratos de aquellos que sean capaces de alcanzar una solución de dichos retos. Evelyn le hace referencia a su nieta Mary que aquella mente que sea capaz de resolver Navier-Stokes alcanzará la medalla Fields y probablemente el Nobel por sus implicaciones en la Física, pero sobre todo "tu nombre vivirá para siempre".



Figura 5. Hall del MIT (© Fox Searchlight / Dayday Films / Filmnation Entertainment).

Navier-Stokes es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Relacionan las variables de velocidad, presión, temperatura y densidad. Su resolución tendrá importantes aplicaciones a los fenómenos físicos de turbulencias. De momento, en ausencia de una solución analítica, en la práctica se recurre a aproximaciones mediante análisis numérico. En el desenlace de la película, esas ecuaciones juegan un papel decisivo.

### 6.3. Asesoramiento Matemático

Entre los créditos finales, pueden leerse los nombres de los asesores matemáticos Terence Tao, Jordan Ellenberg, Russell Caflish y Nicholas Broom.

Terence Tao (1975) es un matemático australiano que trabaja principalmente en análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales, combinatoria, detección comprimida, teoría analítica de números y teoría de representación. Ganador de la medalla Fields en 2006, con tan sólo 7 años ya cursaba secundaria, con 10 se entrevistó con el gran Paul Erdős y concursó en la Olimpiada Matemática Internacional, donde con la temprana edad de 13 años fue el medallista de oro más joven de la historia del certamen. Todo ello le llevó a ser apodado como "el Mozart de las matemáticas" por su precoz expresión de talento. Con 14 años, Tao empezó a asistir al Research Science Institute del MIT. A los 17 años recibió su graduación bachelor y master de la Universidad Flinders con Garth Gaudry. En 1992 obtuvo una Beca Fulbright para cursar estudios de posgrado en Estados Unidos. Entre 1992 y 1996, Tao fue estudiante de grado superior en la Universidad de Princeton bajo la dirección de Elias Stein, recibiendo su doctorado a la edad de 20 años. Ese mismo año entró en la UCLA, donde actualmente es profesor. Es considerado un experto en las ecuaciones de Navier-Stokes, y hasta la fecha se le considera el matemático que más se ha acercado a la resolución analítica del problema.



Figura 6. Terence Tao (© The Sydney Morning Herald, 7 Marzo, 2015).

Jordan Ellenberg (1971) es profesor en la Universidad de Wisconsin y autor del libro "How not to be wrong: The Power of Mathematical Thinking" (Penguin Books, 2014). La productora Karen Lunder leyó dicho libro y como quería que cualquier expresión matemática que se viera en pantalla tuviera la máxima corrección además del máximo respeto y fidelidad hacia los procesos mentales y vitales de una niña superdotada, consideró que Ellenberg debía formar parte del elenco asesor de la

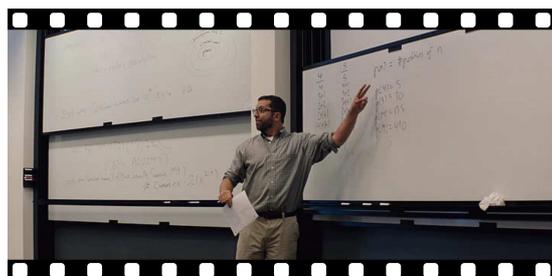


Figura 7. Jordan Ellenberg en la película (© Fox Searchlight / Dayday Films / Filmnation Entertainment).

película. Ellenberg había aprendido a leer por sí solo cuando tenía sólo 2 años viendo Barrio Sésamo en televisión. En cierto modo la historia de Mary en la película refleja el camino seguido por Ellenberg en su niñez, cuando unos padres se encuentran frente a la encrucijada de gestionar la pasión, el talento, la habilidad y el amor por algo de su hijo. En palabras de Ellenberg:

*“En ocasiones la gente considera el talento matemático como si fuera un yacimiento de petróleo. No se puede tratar a una persona de la misma manera que a un recurso natural, así que siempre es un desafío [...] Alguien podría decirte que los niños superdotados necesitan estar entre los de su misma especie y yo creo que esa forma de pensar es muy peligrosa [...] Si vas a vivir en este mundo, vas a pasar la mayor parte de tu tiempo entre personas que no piensan precisamente en las matemáticas”.*

Sin embargo, la aportación de Ellenberg al proyecto fue incluso mucho más lejos, hasta el punto de protagonizar al final de la película, cuando Mary asiste a las clases universitarias, un breve cameo como profesor de matemáticas universitario, es decir, haciendo de sí mismo. En dicha participación, hace referencia a la aritmética modular y a los logros obtenidos por otro de los grandes genios de la matemática, el indú Srinivasa Ramanujan (1887-1920), del que hace poco se estrenaba su biopic, y que en algún momento analizaremos con mayor profundidad en esta publicación.

## Referencias

- [1] TRACHTENBERG MATH, <https://web.archive.org/web/20031008094243/...>
- [2] OTERO, Julio Gerardo, *Sistema rápido de matemáticas básicas. Tablas o no tablas (Método Trachtenberg)*, Revista SIGMA, ISSN-e 2027-064X, Vol. 7, pp.25–32, 1996.

### Sobre el autor:

*Nombre:* José Manuel Sánchez Muñoz

*Correo electrónico:* [jmanuel.sanchez@educarex.es](mailto:jmanuel.sanchez@educarex.es)

*Instituciones:* I.E.S. Jaranda, Jarandilla de la Vera, Cáceres. G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, España.

## Entrevista

María Medina: “Historia de una investigadora en matemáticas que (sobre)vive lejos de casa”

María Medina: “A mathematical researcher living far from home”

Susana Merchán Rubira

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 151–154, ISSN 2174-0410  
Recepción: 20 Ene'20; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

María Medina es investigadora y profesora de la Universidad de Granada. Actualmente está viviendo en Roma e investiga en Ecuaciones en Derivadas Parciales.

**Palabras Clave:** matemáticas, investigación, ecuaciones en derivadas parciales.

### Abstract

María Medina is a researcher and professor at the Universidad de Granada. She is living in Rome and her researching is based on Partial differential equations.

**Keywords:** math, research, partial differential equations.

## 1. Introducción

María Medina es investigadora y profesora de la Universidad de Granada. Comenzó su carrera investigando en la Universidad Autónoma de Madrid, haciendo estancias predoctorales en Estados Unidos y Alemania. Más tarde realizó un postdoctorado en la Universidad Católica de Chile y, actualmente, se encuentra en Roma. María obtuvo el premio de investigación matemática Vicent Caselles en 2017.

Su paso por todas estas ciudades extranjeras durante el doctorado y postdoctorado ha hecho posible que María tenga una visión bastante amplia de la investigación y la docencia en matemáticas fuera de España.



Figura 1. María Medina.

## 2. Formación y líneas de investigación

– *¿Cuál es tu formación y dónde has estudiado?*

Soy doctora en matemáticas por la Universidad Autónoma de Madrid. Antes de esto hice una licenciatura en matemáticas, una ingeniería informática y un máster en matemáticas y aplicaciones, todo en la misma universidad.

– *¿Cuáles son tus líneas de investigación principales?*

Mi área de investigación corresponde a las Ecuaciones en Derivadas Parciales, una especialidad dentro del Análisis Matemático. Más concretamente durante mi doctorado estudié problemas relacionados con fenómenos no locales, tema muy de moda ahora mismo por sus numerosas aplicaciones en disciplinas como la probabilidad o la economía. Sin embargo, en la actualidad mi línea principal de investigación es el estudio de fenómenos de concentración en problemas provenientes de la física o la geometría.

– *¿Cómo crees que entiende tu trabajo alguien ajeno a las matemáticas?*

Pues no muy bien. La parte de la docencia universitaria sí, eso se explica y se entiende bien, pero la parte investigadora es mucho más difícil. Es muy común la pregunta “¿pero tú qué haces?” y, al menos yo, todavía no soy capaz de responder. La gente cuando oye la palabra investigación se imagina un laboratorio o una tecnología avanzada y es difícil explicar que nosotros sólo trabajamos con ordenador, papel y boli. Por ello es tan importante la divulgación, porque acerca el concepto de las matemáticas reales (que van más allá de hacer cuentas) a la sociedad. Creo que es un aspecto al que se debería dar mucho más valor e invertir muchos más recursos.

## 3. La experiencia fuera de España

– *¿Cuánto tiempo llevas fuera de España?*

Tras leer la tesis estuve fuera con un contrato postdoctoral durante tres años. Después volví a España pero en la actualidad vuelvo a encontrarme en el extranjero, con lo que en total serían tres años y medio aproximadamente.

– *¿En qué ciudades has estado?*

Mi primer postdoc fue en Santiago de Chile, y mi retorno a Granada, aunque actualmente me encuentro realizando una estancia de varios meses en Roma. Durante la tesis realicé también estancias en Pittsburgh y en Berlín.

– *¿Qué es lo mejor de trabajar fuera?*

La experiencia de vivir en otro lugar, conocer otra cultura, otro idioma, nuevas personas... A nivel investigador creo que es muy enriquecedor salir de tu zona de confort y tener que trabajar en un grupo nuevo y probablemente en un tema que no dominas, me parece que es un aspecto fundamental de nuestra formación. A nivel comparativo con España, casi todo es más fácil fuera. En general hay más dinero, tanto en cuanto a salarios se refiere como para otras tareas investigadoras (viajes, proyectos, estudiantes, etc.), y la figura está mucho más valorada. En España hay una desconfianza muy grande hacia la utilidad de la investigación que se traduce en unas condiciones de trabajo muy precarias y una burocratización extrema (todo el sistema está construido asumiendo que vas a estafar, por lo que debes gastar una gran energía y tiempo en demostrar que no).

– *¿Qué es lo peor de trabajar fuera?*

Estar fuera como tal. Aunque pienso que la experiencia es enriquecedora a nivel investigador, puede ser muy dura a nivel personal si no es lo que quieres para tu futuro o si te ves obligada a alargarla mucho tiempo. Estar lejos de tu familia y amigos, condicionar tu relación de pareja si es que la tienes, etc. Y también la duda constante de si volverás, o cuándo y cómo podrás hacerlo.

En cuanto al sistema, una cosa que he observado es que en España la docencia universitaria se basa en una relación profesor-alumno más cercana que en otros países, más de igual a igual, y creo que es una cosa que repercute positivamente en la calidad de la enseñanza y en las expectativas que los estudiantes puedan tener de seguir una carrera académica.

– *¿Te gustaría volver?*

Sí, por motivos sobre todo personales, mi deseo es volver a Madrid.

#### 4. La carrera investigadora en matemáticas

– *Después de llevar todo este tiempo fuera, ¿crees que las matemáticas (o la investigación en matemáticas) se entiende de forma distinta "desde fuera"?*

No, en general no. Las matemáticas tienen una característica que no tienen la mayoría de las disciplinas que es su objetividad. Un teorema es bueno o malo, pero no interpretable. Por ello como área es bastante universal.

– *¿Qué cambiarías de la manera de enfocar la carrera investigadora en matemáticas en España?*

Cambiaría la manera de enfocar la carrera investigadora en general, nada particular de las matemáticas. Más recursos, menos temporalidad y menor jerarquización en el acceso a financiación, es decir, más proyectos al alcance de la gente joven. También le daría más importancia a la divulgación.

– *¿Animarías a los jóvenes españoles a iniciar su carrera investigadora en matemáticas?*

Los animaría a realizar un doctorado, ya que creo que es una experiencia dura y exigente

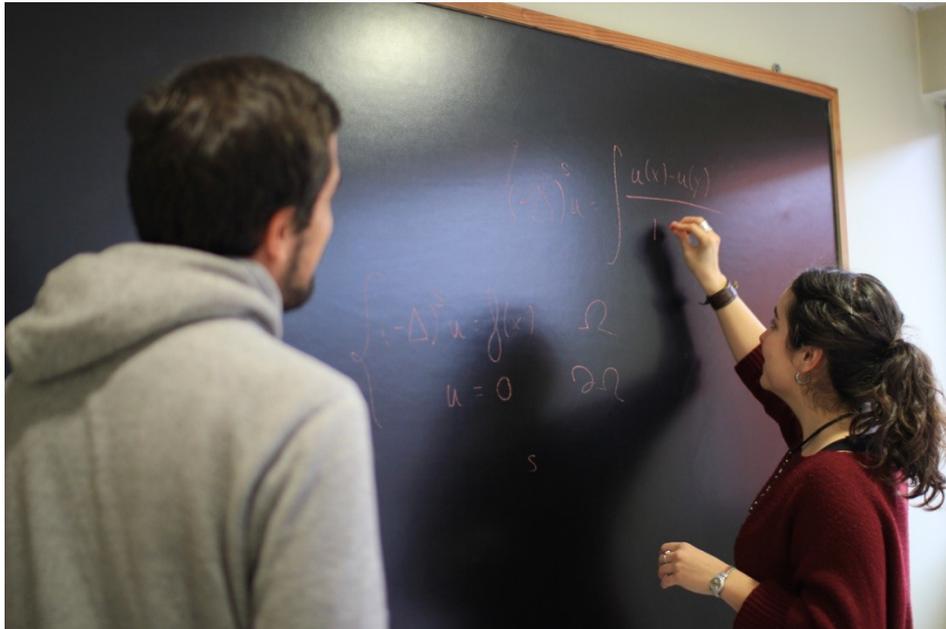


Figura 2. María Medina.

pero bonita a la vez, pero le daría más peso a la posibilidad de incorporarse a una empresa al terminar. La situación de la investigación ahora mismo en España es muy dura con la gente joven, requiere un gran número de sacrificios y, aun haciéndolos, nadie te asegura que vayas a poder vivir de ello, por lo que me parece irresponsable animar sin más a los estudiantes a seguir este camino.

## 5. La parte favorita del trabajo

– ¿Qué es lo que más te gusta de tu trabajo?

Me gusta mucho la docencia y el contacto con los estudiantes en general. Es una cosa que no esperaba a priori y que sin embargo tiene una gran importancia para mí. En cuanto a la parte investigadora, para mí la mejor parte es trabajar con mis colaboradores y discutir en la pizarra durante horas hasta dar con la solución. Investigar en matemáticas supone un reto intelectual constante y muy exigente y por ello, cuando consigues resolver un problema, la satisfacción es muy grande.

### Sobre la autora:

Nombre: Susana Merchán Rubira

Correo electrónico: susana.merchan@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

**Tu eres libre de:**

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

**Bajo la siguientes condiciones:**

**Atribución** Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

**No Comercial** No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

**Licenciar Igual** Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



GLE

*Pensament  
Matemàtic*



MAIC

