Regresión lineal ortogonal

Linear orthogonal regression

José Manuel Recio-López

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XI, Número 1, pp. 005–015, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Jul'20; Aceptación: 09 Ene'21

1 de abril de 2021

Resumen

En este artículo se presenta un método de regresión lineal que minimiza el error residual para un conjunto de puntos x_i, y_i con $i = 1, 2, ..., N$, entendido este error como la distancia mínima del punto a la recta de regresión.

Además, se compara este método con los métodos tradicionales unilaterales de regresión lineal de X sobre Y y de Y sobre X.

Palabras Clave: mínimos cuadrados, regresión lineal, estadística, componentes principales.

Abstract

This article presents a linear regression method that minimizes the residual error for a set of points xi, yi with $i = 1, 2, ..., N$, understood this error as the minimum distance from the point to the regression line.

Furthermore, this method is compared with the traditional unilateral linear regression methods of X over Y and Y over X.

Keywords: least squares, linear regression, statistics, principal components.

1. Introducción

El problema tradicional de obtención de la recta de regresión lineal, de un conjunto de N puntos de coordenadas (x_i, y_i), mediante mínimos cuadrados presenta el inconveniente de que existen dos rectas de regresión, la recta de regresión r_Y de Y sobre X y la recta de regresión r_X de X sobre Y.

Las ecuaciones de las rectas de regresión se pueden obtener, o bien por mínimos cuadrados, o bien mediante el método matricial de las ecuaciones normales de Gauss, y su obtención aparece en cualquier texto adecuado de álgebra lineal o cálculo numérico [2, 4, 5, 6, 7]. A continuación, se exponen los valores de los coeficientes de dichas rectas:

$$m_y = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$n_y = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \bar{y} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \bar{x}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{s_x^2\bar{y} - s_{xy}\bar{x}}{s_x^2} \tag{1}$$

$$m_x = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}$$

$$n_x = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \bar{x} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \bar{y}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2} = \frac{s_y^2\bar{x} - s_{xy}\bar{y}}{s_y^2} \tag{2}$$

en donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \tag{3}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2$$

siendo $\bar{x}$ el valor medio de la variable X, $\bar{y}$ el valor medio de la variable Y, s_x^2 la varianza de la variable X, s_y^2 la varianza de la variable Y e s_{xy} la covarianza.

En este artículo se obtienen las ecuaciones que determinan los dos coeficientes de una única recta de regresión, que es aquella que verifica que la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos a la misma es mínima, entendiendo por distancia, la norma euclidiana del vector que une el punto con la recta según la dirección perpendicular a la misma.

2. Enunciado del método de regresión lineal ortogonal

Dados N puntos en el plano de coordenadas (x_i, y_i), la recta de regresión ortogonal tiene por ecuación $y = mx + n$, cuyos coeficientes son:

$$m = \frac{-s_x^2 + s_y^2 + \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}} \tag{4}$$

y

$$n = \bar{y} - m\bar{x} \tag{5}$$

en donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{6}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2$$

siempre y cuando la covarianza del conjunto de puntos sea no nula, es decir: $s_{xy} \neq 0$.

3. Demostración

La distancia de un punto P de coordenadas (x_P, y_P) a una recta r de ecuación general $ax + by + c = 0$ viene dada por la expresión:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

Sea r la recta de regresión de ecuación explícita $y = mx + n$, que se corresponde con la ecuación implícita $mx - y + n = 0$.

Por tanto, la distancia a dicha recta de un punto P_i del conjunto de puntos dados, con coordenadas (x_i, y_i), será:

$$d(P_i, r) = \frac{|mx_i - y_i + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} \tag{8}$$

Esta distancia se corresponde con el residuo del punto P_i:

$$e_i = \frac{|mx_i - y_i + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} \tag{9}$$

La función $f(m,n)$, cuyo valor mínimo se desea calcular, es la suma de los cuadrados de los residuos de todos los puntos del conjunto. Por tanto:

$$f(m,n) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2+1}} \right)^2 \tag{10}$$

Para obtener el valor mínimo, aplicamos la teoría de optimización de funciones de dos variables [3]. En el valor mínimo, el vector gradiente de la función debe ser nulo, luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} &= 2\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2+1}} \right) \frac{x_i\sqrt{m^2+1} - (mx_i - y_i + n)\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}}{m^2+1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= 2\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Operando, se llega al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} (mx_i - y_i + n)(x_i + my_i - mn) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{N} (mx_i - y_i + n) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Definiendo los valores medios de las coordenadas del conjunto de puntos como:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned} \tag{13}$$

el sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} \left(mx_i^2 - my_i^2 + (m^2-1)x_iy_i + (1-m^2)nx_i + 2mny_i - mn^2 \right) = 0 \\ &m\bar{x} - \bar{y} + n = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Desarrollando la primera ecuación, teniendo en cuenta la definición de los valores medios:

$$m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - m\sum_{i=1}^{N} y_i^2 + (m^2-1)\sum_{i=1}^{N} x_iy_i + (1-m^2)n\bar{x}N + 2mn\bar{y}N - mn^2N = 0 \tag{15}$$

De la segunda ecuación de (14) se puede despejar el valor de n en función de m:

$$n = \bar{y} - m\bar{x} \tag{16}$$

Si ahora se sustituye el valor de n en la primera:

$$\begin{aligned} &m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - m\sum_{i=1}^{N} y_i^2 + (m^2-1)\sum_{i=1}^{N} x_iy_i + \\ &+(1-m^2)(\bar{y} - m\bar{x})\bar{x}N + 2m(\bar{y} - m\bar{x})\bar{y}N - m(\bar{y} - m\bar{x})^2N = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Desarrollando y dividiendo por N:

$$m\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - m\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i^2 + m^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i + \bar{x}\bar{y} - m^2\bar{x}\bar{y} - m\bar{x}^2 + m^3\bar{x}^2 +$$
$$+2m\bar{y}^2 - 2m^2\bar{x}\bar{y} - m\bar{y}^2 + 2m^2\bar{x}\bar{y} - m^3\bar{x}^2 = 0 \tag{18}$$

Agrupando términos en la ecuación anterior, resulta:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{x}\bar{y}\right)m^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \bar{x}^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i^2 + \bar{y}^2\right)m - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{x}\bar{y}\right) = 0 \tag{19}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de la covarianza s_{xy} y las varianzas s_x^2 y s_y^2:

$$s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$
$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \tag{20}$$
$$s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2$$

resulta:

$$s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy} = 0 \tag{21}$$

que es una ecuación de segundo grado para la incógnita m.

Dicha ecuación tiene dos soluciones reales:

$$m_1 = \frac{-s_x^2 + s_y^2 + \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}$$
$$m_2 = \frac{-s_x^2 + s_y^2 - \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}} \tag{22}$$

Para determinar cuál de los dos valores de la pendiente (m_1,m_2) minimiza a la función $f(m,n)$, se debe determinar el hessiano de dicha función (10). Pero debido a que se conoce el valor de n para el que se obtiene el extremo de la función f, se puede construir la función de una variable $F(m) = f(m,n(m))$, que resulta ser:

$$F(m) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m(x_i-\bar{x}) - y_i + \bar{y}}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 \tag{23}$$

Esta función $F(m)$ es el resultado de la intersección de la superficie definida por la función $f(m,n)$ con el plano representado por la relación (16), y se ha determinado que los extremos de la función $f(m,n)$ están en ese plano, es decir, cumplen la relación (16); por tanto, los extremos de $F(m)$ coinciden con los extremos de $f(m,n)$.

Para determinar cuál de los extremos es el mínimo, se recurre a la derivada de esta función $F(m)$:

$$\frac{dF}{dm} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})m^2 + ((x_i-\bar{x})^2-(y_i-\bar{y})^2)m - (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(m^2+1)^2} \tag{24}$$

que puede expresarse en función de la covarianza y las varianzas como:

$$\frac{dF}{dm} = \frac{2N}{(m^2+1)^2}(s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy}) \tag{25}$$

Igualando a cero se determinan los extremos de $F(m)$:

$$\frac{2N}{(m^2+1)^2}(s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy}) = 0 \tag{26}$$

Por tanto, el valor de la pendiente m debe cumplir la relación (26) para que sea un extremo de la función $F(m)$. Esta ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación (21), por lo que $F(m)$ y $f(m,n)$ tienen los mismos extremos.

Calculando la derivada segunda, se comprueba si el extremo es máximo o mínimo:

$$\frac{d^2F}{dm^2} = \frac{2N(2s_{xy}m + s_x^2 - s_y^2)(m^2+1) - 8Nm(s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy})}{(m^2+1)^3} \tag{27}$$

Evaluando la segunda derivada en m_1 se tiene:

$$\frac{d^2F(m_1)}{dm^2} = \frac{2Ns_{xy}}{m_1(m_1^2+1)} = \frac{8Ns_{xy}^4}{(\sqrt{(s_x^2-s_y^2)^2+4s_{xy}^2})(\sqrt{(s_x^2-s_y^2)^2+4s_{xy}^2} - s_x^2 + s_y^2)^2} > 0 \tag{28}$$

por consiguiente, el valor de m_1 se corresponde con el valor mínimo de la función.
Evaluando la segunda derivada en m_2 se tiene:

$$\frac{d^2F(m_2)}{dm^2} = \frac{2Ns_{xy}}{m_2(m_2^2+1)} = \frac{-8Ns_{xy}^4}{(\sqrt{(s_x^2-s_y^2)^2+4s_{xy}^2})(\sqrt{(s_x^2-s_y^2)^2+4s_{xy}^2} + s_x^2 - s_y^2)^2} < 0 \tag{29}$$

por consiguiente, el valor de m_2 se corresponde con el valor máximo de la función.

Además, ambos valores, m_1 y m_2 cumplen la siguiente condición:

$$m_1 m_2 = -1 \tag{30}$$

por lo que se corresponden con las pendientes de dos rectas perpendiculares.

4. Definición de residuo y de coeficiente de correlación

Sea r, la recta de regresión ortogonal de ecuación $y = mx + n$. Considérese el punto P_i de coordenadas (x_i, y_i) y su estimación $\hat{P}_i$ de coordenadas $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, que está en la intersección de la recta perpendicular a la recta de regresión, que pasa por el punto P_i, con dicha recta, tal como se muestra en la figura 1:

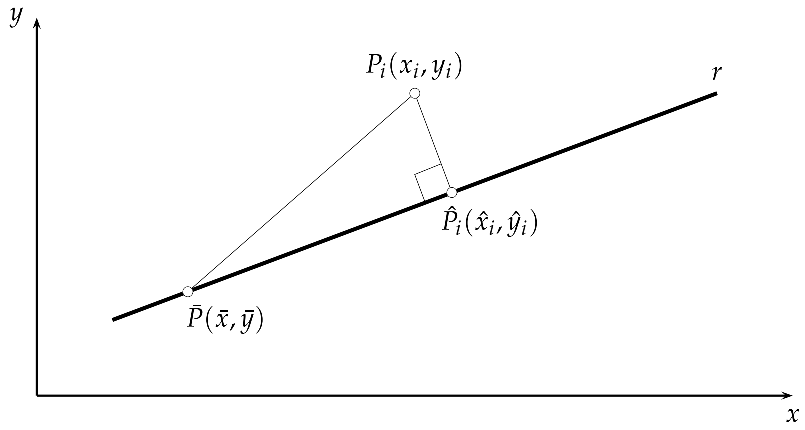

Figura 1. Representación de la recta de regresión ortogonal r

Denotando $d(P_i, \bar{P})$ a la distancia entre el punto P_i y el punto $\bar{P}$, $d(P_i, \hat{P}_i)$ a la distancia entre el punto P_i y el punto $\hat{P}_i$ y $d(\hat{P}_i, \bar{P})$ a la distancia entre el punto $\hat{P}_i$ y el punto $\bar{P}$, aplicando el teorema de Pitágoras, resulta:

$$d(P_i, \bar{P})^2 = d(P_i, \hat{P}_i)^2 + d(\hat{P}_i, \bar{P})^2 \tag{31}$$

Sumando para todos los puntos:

$$\sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \hat{P}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_i, \bar{P})^2 \tag{32}$$

La distancia $d(P_i, \hat{P}_i)$ representa el residuo e_i. Despejando, por tanto, la suma de los cuadrados de los residuos, resulta:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \hat{P}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2 - \sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_i, \bar{P})^2 \tag{33}$$

Teniendo en cuenta que:

$$d(P_i, \bar{P})^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \tag{34}$$

$$d(\hat{P}_i, \bar{P})^2 = (\hat{x}_i - \bar{x})^2 + (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{35}$$

se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{N} (\hat{x}_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{36}$$

Ahora bien, el punto $\hat{P}_i$ pertenece a la recta perpendicular a la recta de regresión ortogonal que pasa por el punto P_i, por tanto:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i + my_i + m(m\bar{x} - \bar{y}))}{1+m^2} \tag{37}$$

$$\hat{y}_i = \frac{m(x_i + my_i) + \bar{y} - m\bar{x}}{1+m^2} \tag{38}$$

y además, se ha definido previamente:

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{39}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 \tag{40}$$

Definiendo el coeficiente de correlación R^2 como:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_i, \bar{P})^2}{\sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{\sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2} \tag{41}$$

resulta:

$$R^2 = \frac{s_y^2 m^2 + 2s_{xy}m + s_x^2}{(s_x^2 + s_y^2)(1+m^2)} \tag{42}$$

Mientras más próximo esté R^2 a la unidad, mayor será la correlación lineal entre las variables X e Y. Su raíz cuadrada R viene a ser el equivalente al coeficiente de correlación de Pearson de la regresión tradicional:

$$R = \sqrt{\frac{s_y^2 m^2 + 2s_{xy}m + s_x^2}{(s_x^2 + s_y^2)(1+m^2)}} \tag{43}$$

Las rectas de regresión tradicionales de X sobre Y, recta r_X, y de Y sobre X, recta r_Y, son fácilmente calculables en función de $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_{xy}, s_x^2 y s_y^2:

$$r_Y: \quad y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x}) \tag{44}$$

$$r_X: \quad y - \overline{y} = \frac{s_y^2}{s_{xy}}(x - \overline{x}) \tag{45}$$

Y el coeficiente de correlación de Pearson r_P, igual para ambas, toma la expresión:

$$r_P = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}} \tag{46}$$

5. Resolución de un caso particular y comparación con la regresión tradicional

Considérese el siguiente conjunto de puntos P_i, con $i = 1, ..., 10$, definidos por sus coordenadas (x_i, y_i), que aparece en la tabla 1.

Tabla 1. Coordenadas de los puntos a correlacionar linealmente

i	x_i	y_i
1	0	2.10
2	1	3.55
3	2	3.22
4	3	4.56
5	4	3.58
6	5	4.85
7	6	5.92
8	7	5.71
9	8	7.35
10	9	6.59

Para este conjunto de puntos, en la tabla 2, se muestran los valores de $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_{xy}, s_x^2 y s_y^2:

Tabla 2. Coeficientes del ejemplo

$\overline{x}$	$\overline{y}$	s_{xy}	s_x^2	s_y^2
4.5000	4.7430	42.4050	82.5000	24.6540

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos para las rectas de regresión de Y sobre X, r_Y, de X sobre Y, r_X, y para la recta de regresión ortogonal r:

Tabla 3. Resultados del ejemplo y comparación

Recta	Pendiente	Ordenada en el origen	Coeficiente de correlación
r	0.5284	2.3652	0.9895
r_Y	0.5140	2.4300	0.9403
r_X	0.5814	2.1267	0.9403

Se ha empleado el programa de cálculo MATLAB para implementar las ecuaciones que determinan las rectas de regresión así como los coeficientes de correlación.

En el gráfico de la figura 2 se representan los puntos P_i, mediante el símbolo $+$, las rectas de regresión tradicionales y la recta de regresión ortogonal para este ejemplo propuesto.

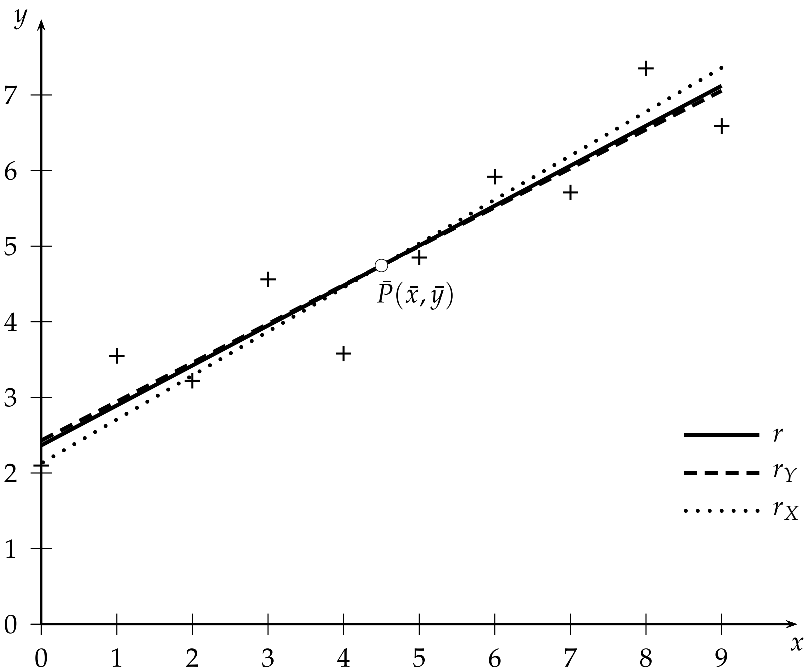

Figura 2. Representación de la recta de regresión ortogonal r y de las rectas de regresión r_X y r_Y

6. Conclusiones

Se observa gráficamente en la figura 2, que la recta de regresión ortogonal se sitúa entre las dos rectas de regresión tradicionales. Por tanto, queda reflejado que con la regresión ortogonal se obtiene un menor error residual (coeficiente de correlación de 0.9895) que con la regresión tradicional (coeficiente de correlación de 0.9403).

Como línea de investigación futura se propone demostrar analíticamente que, efectivamente, el coeficiente de correlación R^2, obtenido en la regresión ortogonal, es siempre mayor que el obtenido en la regresión tradicional, es decir:

$$\frac{s_y^2 m^2 + 2s_{xy}m + s_x^2}{(s_x^2 + s_y^2)(1+m^2)} > \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} \tag{47}$$

siendo m el valor m_1 dado en la ecuación (22).

Comentar, además, que las rectas de regresión ortogonales, que se obtienen mediante este método de cálculo, se corresponden con las que se obtienen mediante un análisis de componentes principales con dos variables.

7. Agradecimientos

El autor desea agradecer a Juan Antonio Ortiz Guerra la motivación transmitida para la finalización de este trabajo; así como al profesor Manuel Heredia Zapata, por poner la semilla del mismo.

Referencias

[1] CHAPRA, S. C., CANALE, R. P., *Métodos numéricos para ingenieros*, McGraw-Hill Interamericana, 2007.

[2] DE BURGOS, J., *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill Interamericana, 2000.

[3] DE BURGOS, J., *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGraw-Hill Interamericana, 2000.

[4] FAIRES, J. D., BURDEN, R., *Métodos numéricos*, Paraninfo, 2004.

[5] MATHEWS, J. H., FINK, K. D., *Métodos numéricos con Matlab*, Prentice-Hall, 1999.

[6] RODRÍGUEZ GÓMEZ, F. J., *Cálculo y métodos numéricos: Teoría, algoritmos y problemas resueltos*, Universidad Pontificia Comillas, 2003.

[7] SAMARSKI, A. A., *Introducción a los métodos numéricos*, Editorial Mir Moscú, 1986.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Recio-López
Correo electrónico: josreclop@alum.us.es
Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla.