Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
ISSN 2174-0410 Volumen V, Número 2, Octubre 2015

G.I.E. Pensamiento Matemático

MAIC

EXPERIENCIAS DOCENTES

LA HABITACIÓN DE FERMAT: MÁS QUE UN JUEGO...

UN MODELO PARA COMPRENDER LA ENTROPÍA

INVESTIGACIÓN

PREVISIONES DE CRECIMIENTO Y NECESIDADES DE INFRAESTRUCTURAS EN TERMINALES PORTUARIAS MEDIANTE REDES NEURONALES ARTIFICIALES

REPRESENTACIONES HIPERGEOMÉTRICAS DE LA FUNCIÓN ZETA DE HURWITZ

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN GEOMÉTRICA

UN ENFOQUE PROBABILÍSTICO PARA LAS COINCIDENCIAS: LA PARADOJA DEL CUMPLEAÑOS

CONTRAEJEMPLOS EN MATEMÁTICAS

CUENTOS MATEMÁTICOS

MISIÓN IMPOSIBLE

CRÍTICAS Y RESEÑAS

"RÍETE CON LAS MATES". VIÑETAS CÓMICAS MATEMÁTICAS

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

UNA DEL OESTE

CIENCIA DE CADA DÍA: EL HUNDIMIENTO DEL TITANIC

ENTREVISTA A:

JOSÉ FERREIROS: "FILÓSOFO DE LA MATEMÁTICA"

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen V, Número 2, Octubre 2015

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Foto de portada / Reloj Matemático
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohibe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid

Volumen V, Número 2, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial
Mariló López González
Sagrario Lantarón Sánchez
Javier Rodrigo Hitos
José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico
Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Rosa María Herrera, Fernando Chamizo Lorente, Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de octubre de 2015

Índice de Artículos

Editorial del Número 2 (Vol. V) 1

Experiencias Docentes

La habitación de Fermat: más que un juego 7
José María Gallego Alonso-Colmenares, María Filomena Lara Villagordo, María Azucena Leva López, Francisco Javier Martín Ortiz, Pilar del Pozo Manchado y Francisco Ramos Sánchez

Un modelo para comprender la entropía 19
Tommaso Castellani

Historias de Matemáticas

Algunos problemas de optimización geométrica 27
Federico Ruiz López

Un enfoque probabilístico para las coincidencias: la paradoja del cumpleaños 55
Carla Santos y Cristina Dias

Contraejemplos en matemáticas 61
Antonio Rosales Góngora

Cuentos Matemáticos

Misión Imposible 79
Humberto Nava y Mónica Martínez

Investigación

Previsiones de crecimiento y necesidades de infraestructuras en terminales portuarias mediante redes neuronales artificiales 87
Tomás Rodríguez García, Nicoletta González Cancelas y Francisco Soler-Flores

Representaciones hipergeométricas de la función zeta de Hurwitz 109
Anier Soria Lorente, Eduardo Renato Moreno Roque y Raúl Recio Avilés

Juegos y Rarezas Matemáticas

Una del Oeste 115
Dionisio Pérez

Ciencia de cada día: El hundimiento del Titanic 119
Franco Bagnoli y Rosa M. Herrera

Críticas y Reseñas

"Ríete con las Mates". Viñetas cómicas matemáticas 125
Equipo Editorial

Entrevistas

José Ferreirós: "Filósofo de la Matemática" 131
Rosa María Herrera

Editorial del Número 2 (Vol. V)

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 001–006, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'15; Aceptación: 14 Sep'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física.

Abstract

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal o theorical point view but Maths applied to different areas such as engineering or physics.

Introducción

Cerramos con este número nuestro quinto año de andadura, en el que destacamos trabajos relacionados con distintas áreas de las matemáticas. Nos gustaría anunciar con orgullo la publicación del libro "Ríete con las Mates. Viñetas Cómicas Matemáticas", de la Editorial Tébar Flores, cuyos autores son parte integrante de esta revista.

A continuación presentamos brevemente los artículos que componen el presente número en sus diferentes secciones.

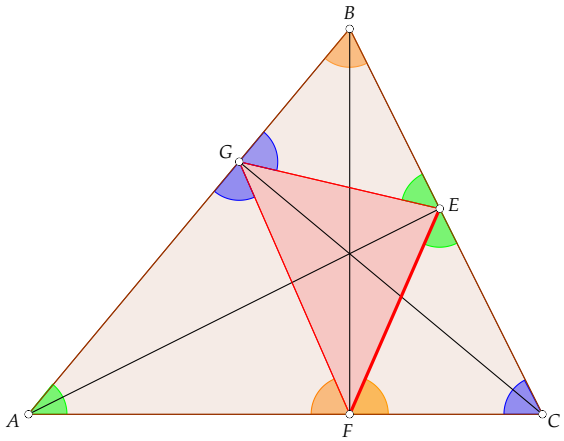
Experiencias Docentes

En el artículo *"La habitación de Fermat: más que un juego . . . "* los autores presentan un proyecto interdisciplinar basado en experiencias, investigación e historia de las matemáticas. Involucra muchos campos y nos lleva por muchos caminos. Nos divierte y nos motiva a nosotros y a nuestros alumnos. Lo que comenzó con la creación de un videojuego se ha convertido en un punto de encuentro para profesores y alumnos, abierto a la participación de todos.

En el artículo *"Un modelo para comprender la entropía"* se discute un modelo que hemos usado para presentar el concepto de entropía a estudiantes de la escuela secundaria. Se puede utilizar para discutir con los estudiantes la reversibilidad del tiempo, la tendencia hacia la homogeneidad y la relación entre la teoría de la probabilidad y la segunda ley de la termodinámica. El modelo es útil para presentar aspectos epistemológicos importantes y ayuda a los estudiantes a comprender la conexión profunda entre lo macroscópico y lo microscópico.

Historias de Matemáticas

En *"Algunos problemas de optimización geométrica"* se pone de manifiesto que los problemas de optimización han sido estudiados de forma recurrente desde la época de los griegos. En sus inicios estos problemas nacen de cuestiones puramente geométricas, como *el problema de la Reina Dido*. Las técnicas de demostración eran muy ingeniosas, pero particulares a cada caso. Con el nacimiento del cálculo diferencial e integral las herramientas para abordar este tipo de problemas adoptaron una carácter más general y analítico. No obstante, el pensamiento geométrico encierra resultados de indudable belleza y simplicidad. En este articulo vamos a abordar algunos problemas desde un punto de vista puramente geométrico, mostrando interesantes herramientas de demostración, hasta llegar a un curioso resultado relacionado con el triángulo órtico.



Propiedad de los ángulos del triángulo órtico.

En el artículo *"Un enfoque probabilístico para las coincidencias: la paradoja del cumpleaños"*, se realiza un estudio sobre la ocurrencia simultánea de eventos que consideramos muy poco probables, que llamamos coincidencia, todos quedamos sorprendidos. Sin embargo, la búsqueda de explicación para la ocurrencia de una coincidencia puede hacerse por diferentes enfoques. Desde el punto de vista de Diaconis y Mosteller, las coincidencias no son tan raras como creemos. La paradoja del cumpleaños ilustra la idea de que algo muy improbable desde el punto de vista individual, puedeocurrir un considerable número de veces, en general. Para ilustrar la validez de esta paradoja usaremos los cumpleaños de las listas de los escuadrones oficiales de la Copa del Mundo FIFA 2014.

En *"Contraejemplos en Matemáticas"*, se define contraejemplo como un ejemplo que prueba la falsedad de un enunciado. Cuando se quiere demostrar la falsedad de una afirmación es suficiente con encontrar un ejemplo que incumpla la afirmación. Un teorema necesita a menudo de varias hipótesis, para comprender como funcionan es importante estar convencido de la necesidad de cada una de ellas. En este artículo hacemos un recorrido por algunas propiedades y teoremas matemáticos viendo la necesidad de todas las hipótesis.

Cuentos Matemáticos

"Misión Imposible", es un relato fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al

agente 00π que gracias a sus conocimientos matemáticos logrará superar las dificultades de una difícil misión.

Investigación

En el artículo *"Previsiones de crecimiento y necesidades de infraestructuras en terminales portuarias mediante redes neuronales artificiales"*, se pone de manifiesto que una mala planificación, trasladaría a no emplear correctamente los recursos y medios disponibles en el entorno. Las redes neuronales artificiales pueden ser de gran ayuda a la planificación portuaria. La investigación se centra en el análisis del comportamiento de la red neuronal en la planificación portuaria, en el ámbito de las terminales de contenedores y en concreto en el estudio de posibles crecimientos del tráfico y las necesidades de equipos para poder mover los contenedores pronosticados. De este modo se puede evaluar, sin la necesidad de nuevas inversiones en infraestructuras o unas mínimas inversiones en equipos, que tráficos se pueden gestionar en dichas terminales o que grado mínimo de inversión sería necesario. En la metodología se indican las bases de aplicación en las redes neuronales artificiales (RNA) y las fases a considerar para su desarrollo en la planificación de terminales portuarias de contenedores, apoyado en las herramientas que proporciona el programa MATLAB sobre redes neuronales artificiales. Finalmente, se llega a la conclusión de que la herramienta y metodología propuesta se pueden considerar como aceptables para este tipo de pronósticos de planificación y su posible utilización a futuro.

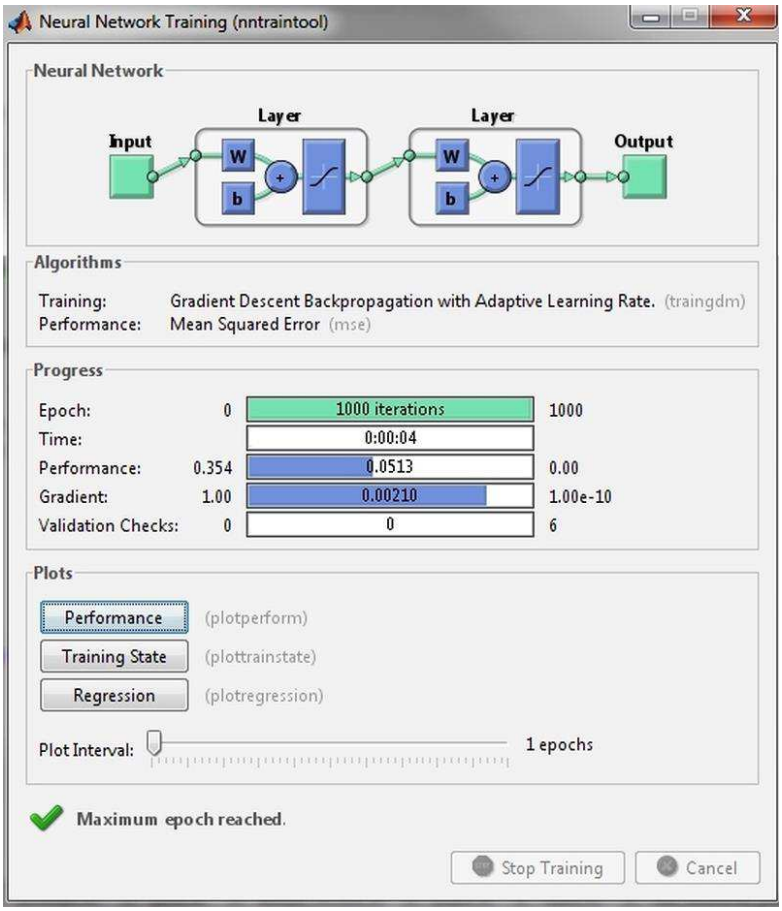


Imagen del módulo de entrenamiento de la red.

En el texto *"Representaciones hipergeométricas de la función zeta de Hurwitz"*, se presentan nuevas formas de representar la función zeta de Hurwitz en series hipergeométricas ordinarias.

Juegos y Rarezas Matemáticas

En *"Una del Oeste"*, con la excusa de un western típico, se lleva a cabo un estudio de las probabilidades asociadas a la elección al azar de n objetos por sus propietarios. La ley de Poisson se revela adecuada para describir la situación.

"Ciencia de cada día: el hundimiento del Titanic" describe un experimento que forma parte de un conjunto de lecciones desarrolladas por F. Bagnoli para introducir la física a un público muy heterogéneo y no experto. La idea es presentar los temas de física como una especie de espectáculo, conectándolos con los asuntos de la vida real, haciendo hincapié en los principios comunes, más allá de los ejemplos o casos particulares tratados. Este material también se puede usar en un curso estándar de física, como una manera de mostrar a los estudiantes que los temas que se trabajan en el curso forman parte de la vida diaria.

El Titanic hundiéndose, experimento preparado por Franco Bagnoli, de la serie "Fisica di tutti i giorni".

Críticas y Reseñas

En esta sección presentamos el libro *"Ríete con las Mates. Viñetas Cómicas Matemáticas"*. En el pasado Volumen III, Número 2 de Octubre 2013 de la revista se publicó el artículo Exposición "Ríete con las Mates" dentro de la sección de Experiencias Docentes. En Junio de 2015 la Editorial Tébar Flores dicho libro en el cual se recogen los contenidos de esta exposición ampliados con introducciones teóricas sobre los temas matemáticos tratados en la misma. Consideramos

dicha obra un texto ameno, divertido y adecuado para todos los amantes de las matemáticas y de los chistes gráficos.

Portada de libro

Entrevistas

En *"José Ferreirós: Filósofo de la Matemática"* hablamos con José Ferreirós, un reconocido experto en filosofía de la práctica matemática, y en sentido más amplio en la filosofía y la historia de las matemáticas. Estudioso y conocedor en profundidad de varios de los mejores nombres de la matemática de las últimas centurias (Riemann, Cantor, Poincaré ...). Sus investigaciones y reflexiones son siempre enriquecedoras e iluminan no pocas veces el camino en la comprensión del pensamiento matemático.

José Ferreirós

Catedrático de la Universidad de Sevilla, sus publicaciones no pasan desapercibidas para ningún interesado en los matemáticos y la matemática; siempre en análisis rigurosos, finos y delicados presenta al lector su visión, de modo tal que quien lee por propia iniciativa, o por consejo atinado, algún escrito suyo, repite.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

"Las matemáticas no mienten, lo que hay son muchos matemáticos mentirosos."

Henry David Thoreau

"Hizo asimismo un mar de fundición, de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo: su altura era de cinco codos, y ceñíalo alrededor un cordón de treinta codos."

Definición de π
Libro Primero de Reyes 7:23
Traducción: Reina Valera (1909)

El Comité Editorial

Experiencias Docentes

La habitación de Fermat: más que un juego ...

Fermat's room: more than a game ...

José María Gallego, María Filomena Lara, María Azucena Leva,
Francisco Javier Martín, Pilar del Pozo y Francisco Ramos

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 007–018, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Abr'15; Aceptación: 6 Ago'15

1 de octubre de 2015

Resumen

La habitación de Fermat es un proyecto interdisciplinar basado en experiencias, investigación e historia de las matemáticas. Involucra muchos campos y nos lleva por muchos caminos. Nos divierte y nos motiva a nosotros y a nuestros alumnos. Lo que comenzó con la creación de un videojuego se ha convertido en un punto de encuentro para profesores y alumnos, abierto a la participación de todos.

Palabras Clave: Videojuego, Competencias Básicas, Interdisciplinariedad.

Abstract

Fermat's room is an interdisciplinary project based on experience, investigation and history of mathematics. It involves a lot of fields and takes us down many paths. It entertains us and motivates us and our students. That was started with the creation of a videogame has converted into a meeting point for teachers and students and is open to the participation of everyone.

Keywords: Videogame, Basic skills, interdisciplinary.

1. Introducción

La idea original consistía en hacer una recreación real y/o virtual de la película homónima, en la que los personajes se ven atrapados en una habitación cuyas paredes se van cerrando si no aciertan determinados enigmas. Para ello pensamos en tres representaciones distintas que, sin ser excluyentes entre sí, podrían sustituirse o combinarse con nuevas propuestas:

1. Construcción de un prototipo de habitación de Fermat a pequeña escala.
2. Construcción de una habitación de Fermat a tamaño real, donde el visitante pueda experimentar las mismas sensaciones que los personajes de la película y estén sometidos a las mismas pruebas.

3. Creación de un videojuego de preguntas y respuestas que reproduzca la situación planteada en la película.

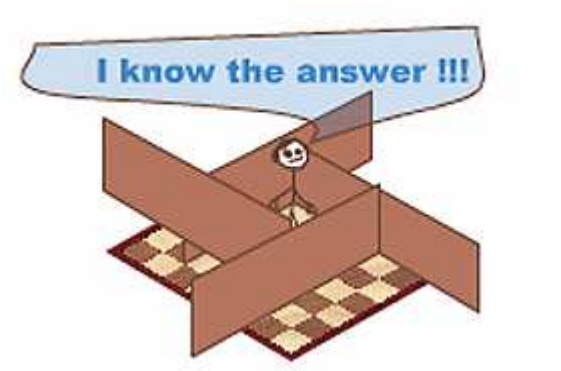


Figura 1. Animación creada para el proyecto eTwinning.

Contamos con la autorización de la productora de la película siempre que sea con fines educativos y sin ánimo de lucro.

Dadas las dificultades técnicas y presupuestarias, actualmente estamos centrados en la tercera opción. Siguiendo esta línea, el proyecto se sigue enriqueciendo con la creación de nuevos argumentos para los sucesivos niveles de juego, de bandas sonoras y grabaciones de voz para acompañar al jugador y de diseños que vamos incorporando. De forma paralela, estamos creando un banco de recursos educativos matemáticos (almacén de acertijos) con materiales que utilizamos día a día en el aula.

El proyecto forma parte de la plataforma eTwinning, donde ha obtenido los sellos de calidad nacional y europeo.

Figura 2. Alumnos de 2º de ESO del proyecto etwinning.

2. Objetivos de la experiencia

El proyecto pretendía en un principio potenciar el razonamiento matemático a través del juego y la resolución de problemas propuestos por los profesores. En una segunda fase, crear una recopilación de acertijos lógicos y matemáticos con las aportaciones de los alumnos de diversos centros.

Intentamos que los alumnos se encuentren en una situación en la que demuestren y desarrollen sus competencias, estimulen su imaginación y espíritu crítico ante el problema planteado y se involucren en procesos de toma de decisiones para hacerles partícipes de sus progresos, y

que todo ello les sirva como estímulo para seguir mejorando. Creemos que, cuanto más abierta sea la actividad, es más fácil que cada uno de ellos encuentre un papel en el que se sienta más identificado mientras otras situaciones le hagan tomar conciencia de sus propias limitaciones. Este último aspecto nos lleva a intentar buscar experiencias de aprendizaje colaborativo en la que cada uno sea consciente de lo que puede dar y recibir. Tenemos una predilección especial por los temas históricos y artísticos, y los medios tecnológicos nos parecen una magnífica herramienta para introducirse en ellos.

Durante su realización, nos hemos ido encontrando numerosas aportaciones. Comienzan siendo meras sugerencias que, con el tiempo se convierten en foros de discusión y actividades con entidad propia: creación de bandas sonoras, simulación de experiencias físicas, traducciones, ilustraciones históricas ...

De esta forma, nuestra experiencia se ha enriquecido para transformarse en una actividad abierta a cualquier tipo de propuesta tanto dentro como fuera de la comunidad educativa. Con el hilo conductor del videojuego, pretendemos establecer un ambiente de trabajo a partir del cual vamos estableciendo nuevas metas, teniendo en cuenta las necesidades y las preferencias del alumnado e integrando sus aportaciones.

Buscamos que el alumno se integre en un entorno de aprendizaje interdisciplinar artístico-humanístico. La actividad, que se inició con el objetivo de potenciar el razonamiento matemático a través del juego, actualmente sigue diversas líneas que confluyen en la idea inicial, el videojuego, con el objetivo de crear conexiones entre las diferentes disciplinas.

3. Principales actividades desarrolladas

3.1. Curso 2011-12

"La habitación de Fermat" surge en el Aula de Juegos del IES Humanes con la colaboración de los profesores José María Gallego y F. Javier Martín, a partir de una duda planteada por un alumno acerca de la posible existencia de una "habitación menguante". Por otra parte, dos alumnos de bachillerato (16-18 años) se interesaron por detalles de la película y escribieron a Luis Piedrahita, uno de los creadores de la película, con quien consiguieron entrevistarse.

Expusimos por primera vez el proyecto el Día Geogebra de Salamanca, en septiembre de 2010. Fue seleccionado en enero de 2011 para la convocatoria "Jugando con números" de Medialab-Prado, donde logramos construir un prototipo de videojuego conectado a una maqueta que interactuaba, con el que participamos en la exposición.

En esas mismas fechas abrimos un proyecto eTwinning con el mismo nombre. José María Gallego se inscribió desde su nuevo centro de destino en el IES Don Pelayo, y conseguimos dos centros colaboradores: Colegiul Tehnic de Comunicatii Augustin Maior Cluj-Napoca, Rumanía y Gimnazjum 1W, Zawiercie, Polonia.

En mayo, el proyecto obtuvo el reconocimiento del servicio nacional eTwinning como proyecto del mes.

Durante el curso 2011-12 utilizamos los recursos creados de forma esporádica en las clases, pues teníamos grandes problemas de compatibilidad con los programas utilizados, si bien seguimos ampliando el catálogo de acertijos. La participación del alumnado tuvo carácter voluntario; si bien, cuando surgía la oportunidad en el aula, utilizábamos los materiales elaborados. En mayo expusimos el proyecto en el simposio iTest de Aranjuez 2012 del CES "Felipe II".

3.2. Curso 2012-13

Formamos un equipo de centro en el IES Humanes, integrado por Filomena Lara (Música), Mª Azucena Leva (Física y Química) y F. Javier Martín (Matemáticas). También recibimos valiosas aportaciones de otros compañeros, en especial del Aula Arqueológica del instituto.

Comenzamos proponiendo la actividad al grupo de "Ampliación de Matemáticas" de 3º de ESO (14-15 años) con el propósito de trabajar la resolución de problemas. Utilizamos nuestro blog para publicar acertijos sueltos, dado que el videojuego tenía muchos problemas de compatibilidad con los ordenadores del centro. La herramienta fue bien aceptada pero la actividad quedó paralizada por un tiempo dado que nos superaban los problemas técnicos.

En enero, nuestra compañera Lucia Gutu del Colegio Augustin Maior de Cluj-Napoca (Rumanía) se puso en contacto para retomar el proyecto con la profesora Angela Oprisor y un grupo de siete alumnos de 16 a 17 años: pocos alumnos pero muy activos y motivados.

En todo momento participó José María Gallego, coordinando un grupo de alumnos del centro de personas adultas "El buen Gobernador" de Torrejón de Ardoz.

Las actividades con contenido matemático fueron:

- "Euro test": un recorrido por diferentes situaciones planteadas en relación con el euro, diseñada para familiarizarse con las herramientas del videojuego.
- "Second walk": introducción a la resolución de acertijos y a la dinámica de nuestro videojuego.
- "Another games": espacio para proponer juegos existentes en la red relacionados con las matemáticas.
- "Own Fermat room": el alumno diseña su propia "habitación de Fermat".
- "Samos tunnel": actividad de aplicación de la semejanza a un problema histórico contemporáneo a Thales de Mileto. El Aula Arqueológica nos asesora y aporta imágenes propias sobre técnicas de excavación antiguas. Con la colaboración de Bernat Ancochea.
- "Maths web game": ponemos a prueba el videojuego en dispositivos móviles y tabletas.

Figura 3. Hoja dinámica de la actividad "Samos tunnel".

El proyecto utilizaba como idioma vehicular el inglés, y la falta de confianza en esa lengua provocó en un principio que los alumnos del IES Humanes fueran reacios a participar. Con tres sesiones de chat se fueron sintiendo más cómodos. Además, pudimos resolver los problemas

técnicos anteriormente mencionados. Una vez en marcha nos dimos cuenta del enorme potencial del proyecto. No obstante, nos percatamos de la gran dificultad que entraña el hecho de utilizar otra lengua en una actividad tan diversa y compleja.

Los alumnos de 1º de ESO (12-13 años) de Música y un alumno de 4º de ESO (15-16 años) que además estudia en un conservatorio compusieron, interpretaron y grabaron varias bandas sonoras para el videojuego, y han hecho una presentación subtitulada de su obra artística. El proceso de su trabajo se dividió en tres partes:

- Búsqueda de timbres nuevos con el instrumental Orff y los instrumentos del mundo que disponíamos.
- Mezcla de timbres.
- Desarrollo compositivo por densificación para crear tensión y relajación en la composición con el fin de que la música ayudase a narrar la historia.

Asimismo, valoramos su exposición ante los demás y ante la cámara del trabajo realizado en clase.

Figura 4. Presentación de la banda sonora del videojuego.

Otro de los hilos abiertos en el twinspace fue "penfriends". A partir de las sesiones de chat con los alumnos rumanos, nuestros alumnos han intercambiado direcciones electrónicas con los de Humanes. Insistimos en la importancia del perder el miedo a expresarse en una lengua extranjera y en una forma sana de conocer iguales que viven en otros países.

La profesora Mª Azucena Leva utilizó en sus clases de Física la actividad "braquistócrona", sobre un problema clásico que se estudió en los inicios del cálculo infinitesimal. Tuvo una gran aceptación entre los alumnos como se puede ver reflejado en el twinspace. Sobre las diversas aportaciones hechas por los alumnos, destacamos:

- Las propuestas justificadas de diversas curvas como trayectorias óptimas.
- El uso justificado de balances de energías para cálculo de velocidades.
- El uso de la trigonometría para el cálculo de velocidades y pendientes.

También recibimos aportaciones de la auxiliar de conversación Audra MacIntyre en la traducción de la página web del proyecto; de algunas alumnas de bachillerato, en la traducción de acertijos; y de la profesora Mónica González, del departamento de Lengua extranjera, en la redacción de textos en inglés sobre Humanes, a modo de "información turística".

3.3. Curso 2013-14

Se incorpora al equipo de centro Pilar del Pozo (profesora de Lengua y Literatura) y seguimos buscando nuevas colaboraciones de compañeros que puedan unirse a nosotros. Se ha afianzado el uso de nuestro videojuego entre el alumnado. Destacamos el gran incremento de propuestas que hemos incorporado: guiones, vídeos y diseños realizados por nuestros alumnos.

Figura 5. Actividad "El Paraca".

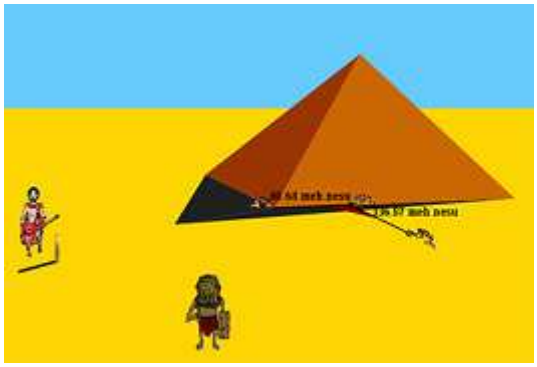


Figura 6. Actividad "Tales en Egipto".

Las actividades de contenido matemático siguen el guion descrito en el curso anterior, "Euro test", "Second walk", "Another games", "Our Fermat room" y "Samos tunnel" de forma adaptada a los nuevos alumnos y añadiendo otras:

- "Paraca": el alumno debe encontrar la solución a un problema de Física utilizando su intuición y los conocimientos de la materia que tiene, según su nivel. Dada la dificultad del problema, hemos incorporado una plantilla Excel para rellenar de forma colaborativa, para mejorar sus resultados a partir de su análisis. En colaboración con la profesora de Física, continúa la serie sobre tiro parabólico con las actividades interactivas "Moto 1" y "Moto 2".
- Tales en Egipto: pretende estudiar algunas de las técnicas de medida en la antigüedad. El Aula Arqueológica coordina la actividad con su asesoría, con diversas actividades manipulativas y con los dibujos que realizan los alumnos de 1º y 2º de ESO (12-14 años) para ilustrar los applets diseñados con Geogebra.
- "Mathmeninmad": creación de un canal Youtube para exponer los materiales creados.
- "Propuestas": página web en la que se exponen los materiales producidos para proponer cambios en el diseño, sonido y argumento del videojuego. Los alumnos, coordinados por la profesora de Lengua y Literatura, escriben guiones y hacen sus grabaciones en vídeo y audio. Han creado el argumento del nivel 2 del juego "Misión Virtual", en cuyo diseño seguimos trabajando. También está en fase de elaboración un cuaderno de bitácora digital.

Desde el área de Lengua se ha tratado de aunar pensamiento y herramientas matemáticas (números, operaciones, fórmulas...) con la expresión escrita y oral del alumno. Las Matemáticas han servido en multitud de ocasiones de base temática a la hora de elaborar su cuaderno de bitácora personal: la redacción de microrrelatos giraba en torno a temas como los números irracionales (relatos irracionales), las figuras geométricas ("El planeta cilindro"), la resolución de problemas ("Si inventé los números fue porque ...", "Por esa regla de tres") o citas de importantes científicos ("Dadme una palanca ..."). De igual forma se han trabajado las tipologías textuales de la narración, diálogo y descripción y reforzado la expresión oral y gestual en los distintos vídeos grabados por los propios alumnos para introducir el videojuego de La habitación de Fermat. El departamento de Música está elaborando la actividad "las Matemáticas en la

Figura 7. Fotograma del corto "Antes de que vuelva papá".

Música", una serie de estos ejercicios en los que los alumnos de 2º de ESO (13-14 años) tienen que averiguar el número de figuras que completarían determinados compases.

Por otra parte, los alumnos del 3º de ESO (14-15 años) están componiendo pequeñas formas binarias y ternarias. Inician su composición creando una frase musical a partir de una escala determinada y, posteriormente, se les propone que completen su obra siguiendo un esquema formal.

4. Atención a la Diversidad

El IES Humanes es un centro situado en la periferia sur de la Comunidad de Madrid. Es un centro bilingüe con un alumnado muy heterogéneo tanto desde el punto de vista económico-social como académico. Nuestras actividades están abiertas a todo tipo de alumno, para lo cual intentamos hacer a cada uno de ellos propuestas realistas que al mismo tiempo le puedan resultar motivadoras:

- Los guiones han sido creados por alumnos del grupo bilingüe de 2º de ESO (13-14 años). Tienen buen nivel y son muy participativos. Además, valoran positivamente la posibilidad de realizar actividades más creativas e informales.

- Las actividades de Física y Matemáticas más complejas han sido más trabajadas por alumnos de bachillerato y alumnos matriculados en la asignatura "Ampliación de Matemáticas: Resolución de Problemas" de 3º de ESO (14-15 años). No obstante, los alumnos de 2º de ESO (13-14 años) con buen nivel han participado muy activamente

- Una de las bandas sonoras del videojuego fue compuesta por un grupo de alumnos con problemas de absentismo, conductas disruptivas y falta de atención y concentración. Este trabajo nos ha servido para superar sus limitaciones individuales a través del apoyo entre los componentes del grupo.

- Las ilustraciones con temas históricos son realizadas por alumnos de 1º y 2º de ESO (14-16 años), que aprecian que su trabajo se integre en las actividades del centro.

- José María Gallego tuvo una buena aceptación con sus alumnos de un centro de educación de personas adultas (mayores de 18 años), lo que confirma el interés por aprender a través del juego en todas las edades.

5. Integración de las competencias básicas

El planteamiento de cada una de las actividades propuestas tiene la finalidad de conducir al alumno a la aplicación los contenidos teóricos y a la búsqueda de nuevas estrategias para la ejecución de una tarea con objeto de que adquiera conocimientos, destrezas, actitudes, motivaciones y emociones que son necesarios e imprescindibles. El alumno debe aprender a poner en uso, de manera integrada, aquellos aprendizajes que resultan más adecuados para resolver satisfactoriamente la actividad planteada y autoevaluar el resultado obtenido.

La diversidad de actividades permite una gran variedad de propuestas de refuerzo y de ampliación de las competencias adquiridas para responder a la diversidad del alumnado, y su aplicación en la resolución de tareas de diferente nivel de complejidad.

Se establecen la participación y la cooperación como herramientas primordiales para adquirir las diferentes competencias.

6. Integración de las TICs

Han sido numerosas las herramientas y recursos informáticos empleados para el desarrollo de este proyecto:

- Utilización de la plataforma eTwinning.
- Utilización de programas de edición de textos y creación de libros digitales.
- Presentaciones en Prezi y Powerpoint.
- Uso de hojas de cálculo.
- Búsqueda de recursos en internet.
- Correo electrónico, blogs y chat.
- Grabaciones de músicas y vídeos.
- Programa Geogebra, como simulador de problemas matemáticos y físicos de difícil resolución teórica.
- Foros de discusiones aplicados a la resolución conjunta de problemas por parte de los alumnos de distintas nacionalidades.
- La programación del videojuego está basada en HTML5 y Javascript y el movimiento de la maqueta se ha realizado con Arduino utilizando un servidor Ruby y un motor por pasos.

Estamos abiertos al uso de cualquier otra herramienta informática, pero tenemos claro que el uso de las tecnologías es un medio antes que un fin.

7. Recursos generados

Los tres primeros enlaces corresponden a la web del proyecto creado por José María Gallego y F. Javier Martín. Son accesibles de forma libre y gratuita. Contamos con visitas de más de 70 países. En las tres últimas se encuentran algunos de los materiales producidos durante los tres últimos años.

Figura 8. Versión del juego para móvil y tableta.

- Web del proyecto
- Web del juego
- Almacén de Acertijos
- Presentaciones en los Días Geogebra de Salamanca y de Segovia y para la SMPM
- Canal de Youtube
- Materiales del curso 2013-14
- Proyecto eTwinning

8. Procedimiento de implementación

A nivel interno de centro, la metodología empleada es similar en todas las actividades: se plantea, hay un periodo de experimentación, búsqueda de información y tanteo del alumnado a partir del cual se proponen actividades que se adapten al interés detectado. No solemos darlas por concluidas, pues siempre han dado lugar a nuevas ideas como: construcción de maquetas, traducciones, mejora de los diseños ...

En cuanto a la colaboración entre centros, comenzamos con actividades dirigidas al conocimiento mutuo: sesiones de chat, presentaciones sobre nosotros y nuestro entorno ... Posteriormente proponemos actividades para que los alumnos se familiaricen con las herramientas que utilizamos y, por último, después de analizar las posibilidades y las preferencias de los alumnos, enfocamos en cada grupo una serie de actividades más complejas.

En el apartado 3.2 de este trabajo hay una relación de propuestas realizadas durante un curso académico que nos ha servido de referencia para el presente curso.

Creemos que el material creado es suficientemente atractivo, la metodología lo suficientemente abierta y el abanico de actividades suficientemente amplio como para poder ser transferirlo a cualquier centro educativo del mundo con altas probabilidades de éxito.

9. Personal implicado

Actualmente, colaboran en el proyecto los siguientes profesores del IES Humanes: Filomena Lara, Mª Azucena Leva, F. Javier Martín, Pilar del Pozo y Paco Ramos, aunque hemos recibido

numerosas aportaciones y sugerencias de compañeros.

El proyecto está integrado en la programación general anual y el plan de atención a la diversidad del centro.

Colaboraciones anteriores:

Juegos romanos: tesserae, orca … en colaboración con el Aula de juegos matemáticos y el departamento de Tecnología.

Proyecto Metro Cúbico del Departamento de Matemáticas: diseño y construcción de un metro cúbico –el espacio excavado en una tumba del Aula- con tetrabriks. El proyecto es expuesto por los alumnos y profesores al resto del IES y a los centros visitantes del Aula. Se expone en el Centro Sociocultural de Humanes junto a una muestra de fotografías matemáticas. Por último, los alumnos texturan y pintan el metro cúbico, que queda expuesto en el Aula arqueológica. El proyecto consigue un premio al mejor cartel en el IV concurso de experiencias didácticas convocado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas y a la mejor experiencia educativa en la categoría Innovación en la campaña "Tu experiencia crea escuela" de la Plataforma de la Infancia.

Contribuciones al proyecto:

Aula arqueológica del IES Humanes:

En un espacio vallado en un ángulo del instituto se ha creado un lugar para la arqueología. Alrededor de un dolmen de corredor de granito de ocho toneladas se organiza una necrópolis de incineración de la Edad del Hierro. Todo ello acompañado de restos óseos, ajuar cerámico, lítico, metalúrgico … A través de siete estratos se reconstruye la historia de Humanes desde el Mioceno, cuando era un mar interior endorreico hasta, por ahora, la romanización. Se ha habilitado, en colaboración con el Departamento de Ciencias Naturales, un laboratorio de arqueobiología, donde se desarrollan exposiciones y talleres sobre arqueología y se realiza el trabajo de gabinete por los alumnos. Pretende, a través de un proyecto abierto y flexible, abrir nuevos tipos de motivaciones y formas de transmisión de procedimientos, técnicas de trabajo y estudio para los alumnos. Premiada en 2007 como "Proyecto de Innovación Pedagógica", la Fundación Atapuerca, reclamó la confección y desarrollo de la exposición. La firma de un convenio con el Ayuntamiento ha posibilitado la construcción y conservación anual del yacimiento simulado: dolmen, hoyos de necrópolis, techado y remociones de tierra para la renovación de estratos. La experiencia está descrita en la publicación de J. Martínez Maganto

Figura 9. Imagen de medidor realizada por un alumno del Aula Arqueológica.

«La arqueología como experiencia didáctica en Secundaria». GazSEHA. Nº 4 (2007) de la Sociedad española de Historia de la Arqueología.

El Aula arqueológica colabora gestando las referencias históricas que envuelven el proyecto tales como el material minero del túnel de Samos, las ilustraciones de pobladores de la Edad Antigua –Egipto y Grecia-, y la recreación de materiales históricos.

Además participa desde el comienzo el profesor José María Gallego, que se encuentra en expectativa de destino, motivo por el que lleva trabajando con nosotros desde distintos centros de la Comunidad de Madrid:

Durante los cursos 2011-2012 y 2012-2013 me ha sido posible participar con mis alumnos del CEPA "El Buen Gobernador" en la experiencia didáctica La habitación de Fermat.

Los recursos del CEPA para el funcionamiento del proyecto eran bastante reducidos. El aula de informática tenía una tecnología obsoleta y era complicado utilizarla de la forma que me hubiese gustado. No obstante, conseguí realizar algunas experiencias con los alumnos del nivel 1 de secundaria de adultos: resolución de acertijos, experimentos con la curva braquistócrona, participación de una sesión de chat con alumnos del proyecto e incluso que participaran en los foros del proyecto.

En mi caso, como funcionario en expectativa de destino, la implantación de un método a largo plazo para trabajar con los alumnos se hace complicada y desalentadora. Aún así consigo todos los años que los alumnos utilicen los recursos que hemos generado para incentivar su razonamiento matemático y crítico. Aunque la manera de trabajar a día de hoy (Curso 2013/2014) con los alumnos de secundaria del centro IES ARQUITECTO PERIDIS no es ni mucho menos sistemática, he conseguido que algunos de ellos resuelvan acertijos y participen en el proyecto aunque sea de una manera más autónoma. Mi experiencia en tales condiciones demuestra la transferibilidad de nuestra propuesta.

10. Seguimiento y evaluación

Desde cada una de las materias que impartimos, consideramos que es demasiado pronto para detectar una evolución en los resultados de aprendizaje. Podemos constatar un incremento de la participación y el interés en las actividades diarias, tanto en el alumnado con mayor motivación y nivel académico como en los grupos menos favorecidos. Sus aportaciones mejoran su autoestima, y les hace sentir partícipes del proyecto.

Para los profesores, este proyecto interdisciplinar rompe con nuestra rutina de clases y supone el reto de investigar en nuestra materia y de buscar conexiones con otras, así como nuevos recursos tecnológicos con los que podamos enfocar las diferentes materias de forma más atractiva.

A nivel técnico tenemos pendiente hacer una versión del videojuego en la que puedan jugar varios alumnos al mismo tiempo. Creemos que, combinado con un chat, sería mucho más dinámico, sustituiría el carácter competitivo del que suelen adolecer muchos juegos por otro más colaborativo y mejoraría la comunicación entre los miembros del proyecto. Lamentablemente, nuestros conocimientos de programación son muy limitados, de ahí que, de momento, estemos buscando alguna colaboración externa.

Referencias

[1] BURGOS TEJERO, Javier y MARTÍN ORTIZ, Fco. Javier. *Proyecto Metro Cúbico*, http://www.ieshumanes.com/nw/Metro_Cubicodef.pdf.com

[2] GALLEGO ALONSO-COLMENARES, José María y MARTÍN ORTIZ, Fco. Javier. *Proyecto interdisciplinar*, http://fermatroom.com/index_eng.html

[3] GALLEGO ALONSO-COLMENARES, José María y MARTÍN ORTIZ, Fco. Javier. *Colaboración*, http://instrumentales.webcindario.com/imagenes/PDHAbitFermatligero.pdf

[4] GALLEGO ALONSO-COLMENARES, José María y MARTÍN ORTIZ, Fco. Javier. *Simposio iTest Aranjuez 2012*, http://dosi.itis.cesfelipesegundo.com/heol/lib/exe/fetch.php?media=iiisimposio_josemaria_gallego.pdf

Sobre los autores:

Nombre: José María Gallego Alonso-Colmenares
Correo electrónico: jgallegoalonso@gmail.com
Institución: IES Arquitecto Peridis de Leganés, Madrid, España.

Nombre: María Filomena Lara Villagordo
Correo electrónico: filo_laravil@yahoo.es
Institución: IES Humanes de Humanes de Madrid, España.

Nombre: María Azucena Leva López
Correo electrónico: mazuleva@yahoo.es
Institución: IES Humanes de Humanes de Madrid, España.

Nombre: Francisco Javier Martín Ortiz
Correo electrónico: poko61@gmail.com
Institución: IES Humanes de Humanes de Madrid, España.

Nombre: Pilar del Pozo Manchado
Correo electrónico: pilar@pilardelpozo.jazztel.es
Institución: IES Humanes de Humanes de Madrid, España.

Nombre: Francisco Ramos Sánchez
Correo electrónico: parapacoramos@gmail.com
Institución: IES Humanes de Humanes de Madrid, España.

Experiencias Docentes

Un modelo para comprender la entropía

A model to understand entropy

Tommaso Castellani

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 019–026, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Abr'15; Aceptación: 29 Jul'15

1 de octubre de 2015

Resumen

En este artículo se discute un modelo que hemos usado para presentar el concepto de entropía a estudiantes de la escuela secundaria. Se puede utilizar para discutir con los estudiantes la reversibilidad del tiempo, la tendencia hacia la homogeneidad y la relación entre la teoría de la probabilidad y la segunda ley de la termodinámica. El modelo es útil para presentar aspectos epistemológicos importantes y ayuda a los estudiantes a comprender la conexión profunda entre lo macroscópico y lo microscópico.

Palabras Clave: Entropía, Probabilidad, Estadística.

Abstract

In this article we discuss a model used to introduce the concept of entropy with secondary school students. It can be used to discuss with students the reversibility of time, the tendency towards homogeneity and the link between probability theory and second law of thermodynamics. The model is useful to introduce crucial epistemological issues and helps students to understand the deep connection between the macroscopic and the microscopic.

Keywords: Entropy, Probability, Statistics.

1. Introduction

Entropy is a fascinating concept, as well as one of the hardest to grasp for a secondary school student. A deep understanding of this concept involves physics, mathematics, as well as philosophy and history of science. Whereas the claim that "the entropy of an isolated system never decreases" is an elegant and apparently student-friendly formulation of the Second Law of Thermodynamics, the deep understanding of what this statement actually means is not at all straightforward.

In this paper we propose a model to discuss with students the concept of entropy by the point of view of statistics. This approach not only clarifies the connection from the macroscopic

to the microscopic, one of the core issues of thermodynamics, but gives also occasion to discuss the key concepts of probability and statistics, a concrete and useful branch of mathematics, as well as to deal with more general and fascinating questions as the reversibility of time.

For secondary school students, thermodynamics is challenging also because it entails a change of paradigm with respect to the newtonian physics. Whereas the latter is characterized by prescriptive laws as "a system in this condition will do this", thermodynamics laws have the form of "prohibitions", as "a system in this condition will *not* do this". The model presented in this paper helps students to understand the origin and the meaning of this crucial epistemological issue.

Before introducing the model, we present some preliminary experiences that can be simply set up and discussed in the classroom, in order to introduce the topic and discuss the emerging questions. The teacher can start from the questions of the students, following an inquiry-based approach, and encouraging the production of students' own hypothesis and explanations.

2. Preliminary experiences

2.1. Time reversibility

The following experiment is usually introduced to demonstrate the microscopic motion of the matter and the relationship between the temperature and the average speed of the molecules. We propose a further discussion starting from the same experience.

In two glasses of water at different temperatures we throw a drop of coloured ink. The experience shows that the drop undergoes a process of diffusion, until the water is uniformly coloured. In the hottest glass the diffusions happens more rapidly, and this demonstrates that the temperature corresponds to molecules moving faster in average.

For our purpose, we can use this experience asking students another question: is it possible that, at a certain point, the motion of the molecules makes the original ink drop to recreate? I.e. is the process *reversible*?

Generally students agree it is not, since "it never happens that a homogeneously coloured liquid is transformed into an isolated coloured drop". We can ask students to make examples of other irreversible phenomena, and to think to instances of reversible ones. Since the characterization of some phenomena can lead to disputes, we can discuss how to define reversibility. At this stage it is not important to be rigorous, since we aim to stimulate students to elaborate their own ideas.

We gradually lead the students to ask themselves what are the possible reasons for time irreversibility.

2.2. Homogeneity

Together with the problem of reversibility, it came out the notion of "homogeneity". From the ink drop experiment it seems that homogeneity is a sort of "final state" which is not going to evolve any more.

In order to discuss this problem, we can introduce a further experiment. Two balls of plasticine of different colours are given to two students, who are asked to exchange some small quantity of plasticine with each other. The exchange is made about every minute, but the time is not fixed (i.e. it is not measured in any way), nor is the quantity of plasticine to be exchanged, which can vary time by time. This is actually a random process. The question is: what happens

after a long time? Usually students agree that the colours of each ball will be both intermediate colours between the two initial ones, but they are divided on two hypothesis:

1. if we wait enough time, the two balls will take a perfectly identical colour;
2. also after a long time, the two colours will never be perfectly identical.

The supporters of hypothesis 2 usually argue that, being the time of mixing and the quantity of matter exchanged not fixed, there is not any reason for the colours not to be different. The discussion can be carried forward while the two students continue to exchange plasticine from their balls. After about half an hour, everybody can observe that the colours are perfectly identical. This is also rather shocking for the supporters of hypothesis 2.

The question is: why randomness produced homogeneity?

3. The model

The two previous experiments raised two questions that are immediately understandable and engaging for the students, while at the same time very difficult to solve. Both questions are central in the introduction of entropy, and stimulate students to think to the main issues of second law of thermodynamics.

In order to introduce our model, we make an example that encompasses the two previous experiences. Imagine to have a glass half-filled with wine in the lower half and half-filled with water in the upper part, with a thin film that separates the two parts. What happens when the film is removed? Is this process reversible?

This experiment—which is actually a mental experiment, since it is very difficult to realize in practice a removable film which divides the glass perfectly in two halves—can be represented with a model. It is very important to discuss the meaning of the word "model", so crucial in science and so little addressed in school curricula. We must focus the attention on the fact that the model, which can be a material model (e.g. a molecule made by plastic balls) or an abstract model (e.g. a mathematical model), is a construction which aims to isolate and study *some specific aspects* of a phenomenon.

Our model aims to reproduce the probabilistic aspects of the mental experiment of the glass. We want to represent a sample of $N = 40$ molecules of the liquids of our glass, 20 of liquid A and 20 of liquid B (we can continue to speak of water and wine if we prefer, provided we explain students that we will call "molecules of wine" the "particles" of wine, whatever they are—this may seem not at all rigorous, but is not after all so different from the way physicists speak of "spins" in magnetic materials). We should specify that the two liquids have the same density, so that there are no physical reasons for them to separate.

We represent the 40 molecules with cardboard disks of different colours. The model aims to focus on the position of the molecules inside the glass, and in particular in what half of the glass the molecule is, whether in the upper half or in the lower half. In order to represent this feature, we assign to the two sides of the cardboard disks the two halves of the glass, distinguishing them by marking with different colours (see Fig. 1). We will therefore have:

- Liquid A molecules:
  - Side 1 (blue): liquid A molecules in the upper half of the glass
  - Side 2 (cyan): liquid A molecules in the lower half of the glass
- Liquid B molecules:

- Side 1 (red): liquid B molecules in the upper half of the glass
- Side 2 (magenta): liquid B molecules in the lower half of the glass

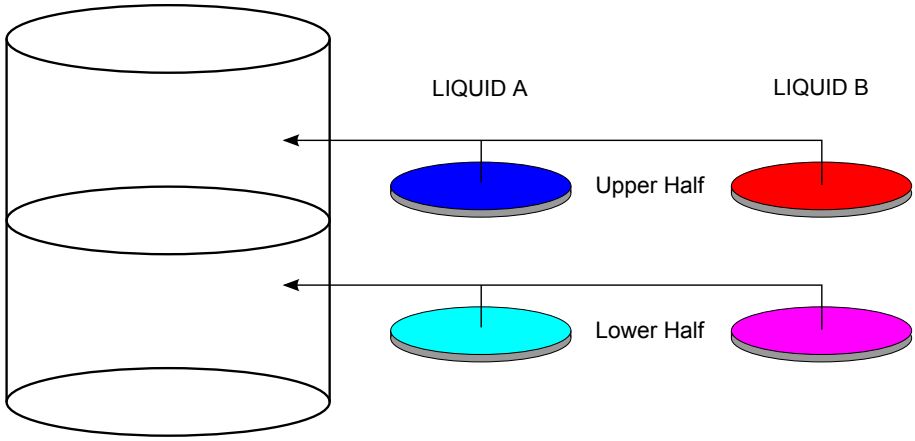


Figura 1. The model: each cardboard disk represents a molecule. The colours represent both the different liquid and the different half of the glass in which the molecule is.

The molecules are put on the bottom of a box, that must be large enough to contain all the 40 cardboard disks on its bottom surface. Each disk will show a side. Depending on the colour, we know what molecule and in what half of the glass each disk represents.

Let's see now how the model is used to simulate the time evolution of the system. We want to fix the initial state with all liquid A molecules in the upper half of the glass and all liquid B molecules in the lower half. That corresponds, in our model, to putting all the A molecules on the blue side and all the B molecules on the magenta side. We open the box and, on the bottom of it, we put all the 40 molecules according to this condition. This represents the initial state of our previous mental experiment: a glass in which water and wine are well separated.

At this point we close the box and we shuffle it for a certain amount of time. This represent the thermal motion inside the glass after the removal of the film. We ask students how do they expect to find the molecules after, say, ten seconds of shuffling. Almost everybody say that the molecules will be "mixed". We open the box, the students count the molecules and see that for each liquid they are divided almost in half between the two colours, i.e. the two halves of the glass.

3.1. Question 1: the reversibility of time

We ask students: if we shuffle the box some other times, will the model come back to the initial condition—with separated liquids—sooner or later? Some students answer "yes", some are undecided, some others say that it is "actually impossible".

The discussion on the word "impossible" generates a cognitive conflict—how an event can be impossible if there is no physical law preventing it? We will use this conflict to introduce the topic of statistical improbability. With some basic mathematics it is easy to calculate the probability of utter separation of the two liquids of our model, which is:

$$P_{separation} = \left(\frac{1}{2}\right)^{40}$$

How much is it? We can estimate with the students that if each shuffling takes 10 seconds and we shuffle all day and night, we will see the separation in average one time every 350,000 years. This is quite shocking!

This discussion answers the question of the origin of irreversibility in the examples of ink drop and plasticine: the irreversibility is due to the extreme improbability of the "reverse" phenomenon. Although there is no physical reason for the 40 molecules of our model not to be again in the initial setting (20 of liquid A on blue side-upper half and 20 of liquid B on magenta side-lower half), this condition is extremely unlikely, so unlikely that we will actually never see it.

We must remark to students that our example involved a sample of 40 molecules. What if we extend the model to a larger number of the molecules, which in the entire glass may reach the order of magnitude of Avogadro constant? With 10^{23} molecules, the probability of getting back to the initial state is so small that we can call this event "impossible", though not in the traditional (logical or mathematical) meaning.

At the end of the discussion, it is useful to stress once more to students that the proposed model is not a realistic description of the real glass, but it deals with the same probabilistic problems, shown very easily and in an immediate way. It shows as well the origin of the epistemological difference of thermodynamic laws, which appear as "prohibitions" rather than "prescriptions", as for instance is the dynamics laws. The students should see how the evolution of the system at microscopical level is driven by probabilistic laws, and this changes the nature of the statements at the macroscopic level.

3.2. Question 2: macroscopic and microscopic states

The distinction between "macroscopic state" and "microscopic state" is another very important concept that can be introduced by means of our model. We can define macroscopic state as the appearance of the glass/box at the human scale: e.g. "a glass with a homogeneous mixture of water and wine", or in our model "both type of disks are on both sides with no prevalent colours". The microscopic state is the description of the individual positions of each molecule: in our model, that means to label the molecules and say "No. 1 is in the blue side, no. 2 is in the red, etc".

An interesting way to introduce macroscopic and microscopic states is to use dice. We take two dice, and we call "macroscopic state" the sum of the values of the two dice, while we call "microscopic state" the couple of numbers describing each dice. For each sum, we count the number of combinations of the two dice which produce that sum. The sum 2, for example, is only obtained when both dices show a 1. The sum 7 is the one with the largest number of possible combinations, since it can be obtained in 6 ways (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1). The macroscopic states (i.e. sums) with the largest number of corresponding microscopic states (i.e. single dice values) are the most likely. We can draw a histogram of the number of microscopic states corresponding to each macroscopic state (see Fig. 2): students can clearly see that there are macroscopic states more likely than others. We can draw the same histogram increasing the number of dice: we note that the "tails" of the histogram remains small, while the central part increases a lot (this is the way towards the Gaussian curve) (Fig. 2).

It is straightforward for students to understand that, for a number of dice that approximates to 10^{23}, we will have very very unlike macroscopic states and a tiny central zone with macroscopic states which are corresponding with a very large number of microscopic states.

Coming back to our model, we can make analogue considerations. The macroscopic state "all liquid A molecules in the upper half, all liquid B molecules in the lower half" corresponds to only 1 single microscopic state, in which all the A molecules are on blue side and all the B molecules on magenta side. As we did for dices, we can order the macroscopic states and proceed

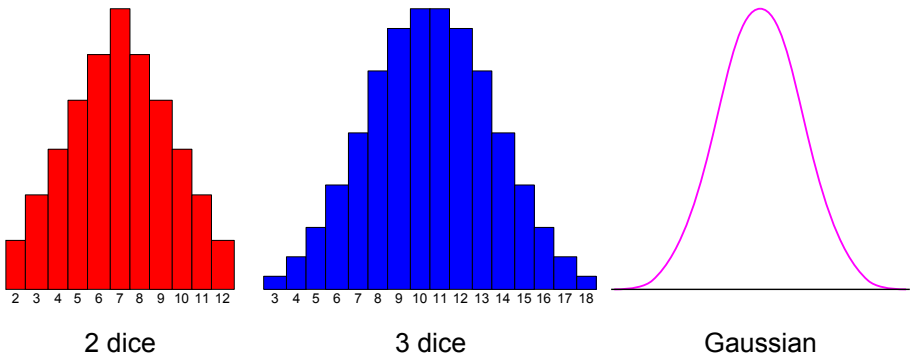


Figura 2. The correspondence between "macroscopic states" (sum of dice values, on x axis) and number of "microscopic states" (number of combinations producing that given sum, on y axis). In the picture, different scales of y axis are used in order to keep students' attention on the transformation of the shape and not on the numeric values.

to consider the macroscopic state "all except one liquid A molecules in the upper half, all liquid B molecules in the lower half". The microscopic state corresponding to this macroscopic state can be obtained by turning on the cyan side one of the liquid A molecules. Nevertheless, having 20 water molecules, we can indifferently chose one of the 20: so we have 20 possibilities for making this state. The macroscopic state "all except one liquid A molecules in the upper half, all except one liquid B molecules in the lower half" has 20 corresponding microscopic states. Going on, the macroscopic state all except one liquid A molecules in the upper half, all liquid B molecules in the lower half" has 400 (20×20) corresponding microscopic states, and so on. Each of this macroscopic states has its symmetric if we invert A and B.

Students can see that the more we approach the "homogeneous" state, the more microscopic states correspond to a single macroscopic state, and that their number increases exponentially. It must be said what we call "homogeneous" state is actually a number of different macroscopic states, i.e. all the states in which the number of molecules in the two sides is *almost* the same (this is what students actually see when they count the molecules of the mixed state of the model, which do not need to be divided *exactly* in half). As in the case of dice, we have "tails" of very unlikely events, and a central part of a histogram which contains the majority of microscopic states. This central part if what we actually call "homogeneous state".

This discussion explains why the homogeneous condition is the natural outcome of the evolution of the process: it is much more likely than all the other conditions.

3.3. Question 3: defining entropy

We can finally define *entropy* of a macroscopic state as the number of microscopic states associated to it. Depending on the mathematical background of the students, we can or can not define it rigorously as the logarithm of this number. We may as well multiply by the Boltzmann constant K and give the precise definition.

In any case, the experience with the box model has given to the students an immediate and easy to understand overview of the physical and mathematical questions behind the notion of entropy. The formulation of the second law of thermodynamics as a non-increasing of entropy in an isolated system is now more easily understandable as a consequence of probability of macroscopic states.

Sometimes, books use to say that entropy is a "measure of disorder". It may be useful to clarify what disorder means: is the homogeneity considered disorder by students? We can ask them to say if it is more ordered a ball of plasticine of a perfectly homogeneous colour or anot-

her one with some random stripes of two colours still not well mixed. Considering the common language, many students will probably answer that the first one is more ordered, while physicists considered homogeneity more "disordered". We suggest not to use this term as it can be misleading, but if used, it must be stressed that its sense may be different from the sense it has in the common language, as—by the way—for most physical terms that have a common meaning.

4. Conclusions

We presented a model to discuss the notion of entropy from a statistical point of view with secondary school students. The model offers the opportunity of discussing the key concepts of statistics, as well as the epistemological features of thermodynamics. Epistemological aspects has long been considered crucial in science education [1, 2]: this model allows to deal with them in a comprehensible and stimulating way. The model can be used together with the experiences proposed in this paper, as well as with other models for related phenomena, like Atkins models on heat diffusion [3], or other more complex educational pathways related to the second law of thermodynamics [4, 5, 6]. We also suggest to start from this approach to discuss the many common students' misconceptions on microscopic motion of the matter and kinetic theory [7], often present also in textbooks [8].

Our model has been proved to be successful in many different contexts, from the curricular lesson to specific laboratories on modern mathematics and physics themes. We always experienced a great involvement of the students and a stimulating debate.

References

[1] CINI, M. *"Epistemology in science education"*, in Bernardini, C., Tarsitani, C., Vicentini, M. (eds.). Thinking Physics for Teaching, New York: Plenum Press, 1995.

[2] OSBORNE, J., COLLINS, S., RATCLIFFE, M., MILLAR, R., and DUSCHL, R. *What "Ideas-about-Science" Should Be Taught in School Science? A Delphi Study of the Expert Community*, Journal of Research in Science Teaching 40(7), pp. 692–720, 2003. Physics Education 43(1), 2003.

[3] ATKINS, P. W. *The Second Law*, New York: W H Freeman, Scientific American Books, ISBN 10: 071675004X, ISBN 13: 9780716750048, 1984.

[4] KINCANON, E. *"How I teach the Second Law of Thermodynamics"*, Physics Education 48(4), 2013.

[5] CASTELLANI, T. *Equilibrio. Storia curiosa di un concetto fisico*, Bari: Dedalo, ISBN 9788822068422, 2013.

[6] CASTELLANI, T. *Risolvere i problemi difficili, Bologna: Zanichelli*, 2013.

[7] PATHARE, S. R. and PRADHAN, H. C. *"Students' misconceptions about heat transfer mechanisms and elementary kinetic theory"*, Physics Education 45(6), 2010.

[8] TARSITANI, C. and VICENTINI, M. *Scientific Mental Representations of Thermodynamics*, Science & Education 5(1), 1996.

Sobre el autor:
Nombre: Tommaso Castellani
Correo electrónico: tcastellani@gmail.com
Institución: COMeSE (Estudios de Comunicación de la Ciencia y Educación), CNR, Roma, Italia.

Historias de Matemáticas

Algunos problemas de optimización geométrica

On some geometric optimization problems

Federico Ruiz López

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 027–054, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Feb'15; Aceptación: 10 Jul'15

1 de Octubre de 2015

Resumen

Los problemas de optimización han sido estudiados de forma recurrente desde la época de los griegos. En sus inicios estos problemas nacen de cuestiones puramente geométricas, como *el problema de la Reina Dido*. Las técnicas de demostración eran muy ingeniosas, pero particulares a cada caso. Con el nacimiento del cálculo diferencial e integral las herramientas para abordar este tipo de problemas adoptaron una carácter más general y analítico. No obstante, el pensamiento geométrico encierra resultados de indudable belleza y simplicidad. En este artículo vamos a abordar algunos problemas desde un punto de vista puramente geométrico, mostrando interesantes herramientas de demostración, hasta llegar a un curioso resultado relacionado con el triángulo órtico.

Palabras Clave: Geometria Euclídea, optimización, polígonos, simetrías, triángulo órtico.

Abstract

Optimization problems have been studied recurrently since the time of the Greeks. In the beginning these problems arise from purely geometric issues such as *the problem of Queen Dido*. The demonstration techniques were very ingenious, but specific to each case. With the birth of differential and integral calculus tools to address such problems adopted a more general and analytical nature. However, geometrical thinking encloses results of unquestionable beauty and simplicity. In this article we will address some problems from a purely geometrical point of view, showing interesting demonstration tools, until a curious result related to the orthic triangle.

Keywords: Euclidean geometry, optimization, polygons, simetry, orthic triangle.

1. Algunos problemas de máximos

Desde muy antiguo, los científicos han pensado (y en muchos casos probado) que las leyes que gobiernan la Naturaleza operan de forma óptima para realizar sus propósitos. Un buen ejemplo lo tenemos en el comportamiento de la luz, que siempre sigue una trayectoria de tiempo

mínimo *(Principio de Fermat)*, la forma que adopta una cadena colgante, minimizando tensiones, o la que adopta una gota de lluvia, en su descenso en caída libre. Un análisis detallado de estos problemas nos revela en muchos casos la existencia de simetrías. Y es que la Naturaleza obra, generalmente, buscando las configuraciones más simétricas posibles. En este trabajo vamos a tratar de mostrar que ambos conceptos *optimización-simetría* están íntimamente relacionados.

1.1. Rectángulos isoperimétricos

Comencemos con un problema sencillo. Dibujemos en un plano diferentes rectángulos, todos ellos con el mismo perímetro y comparemos sus áreas.

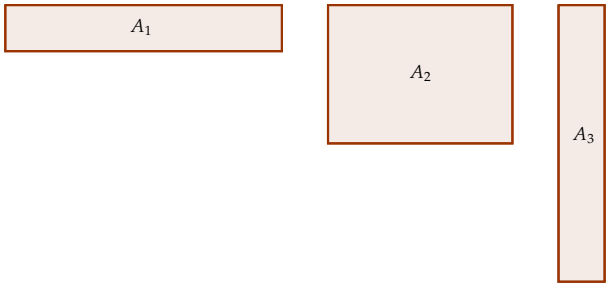


Figura 1. Rectángulos con el mismo perímetro.

Observamos que cuanto menor sea la altura mayor deberá ser la base, y el área disminuirá hasta hacerse despreciable. De igual modo, cuanto mayor sea la altura menor sera la longitud de la base, y de igual modo el área del rectángulo ira disminuyendo. Los rectángulos intermedios tiene un área mayor que estos casos extremos, y cabe preguntarse cuál de ellos posee el área más extensa. El problema consiste en trazar, mediante un procedimiento geométrico, los lados de ese rectángulo de área máxima.

Este es un problema de máximos que ya aparece en el Libro VI de Euclides, teorema 27. Nuestra demostración empleará los mismos principios que la de Euclides pero diferirá de ella en el planteamiento exclusivamente y en la notación empleada.

El rectángulo $ABCD$ de la figura 2 representa supuestamente cualquier rectángulo con un perímetro dado P. Los lados del cuadrado $BEFG$ tiene cada uno $\frac{1}{4}P$, luego su perímetro es también P. Afirmamos que el cuadrado es la solución de nuestro problema y que su área es mayor que la de cualquier rectángulo (no cuadrado) $ABCD$ con el mismo perímetro.

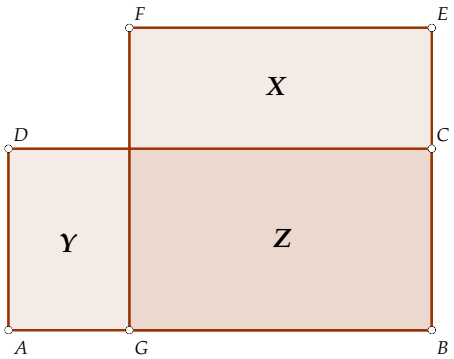


Figura 2. ABCD es un rectángulo de área inferior a GBEF.

En efecto, en la figura se observa que el rectángulo rayado Z forma parte del rectángulo

original y del cuadrado. El área de cada figura será por tanto,

$$Area(ABCD) = Y + Z$$

$$Area(GBEF) = X + Z$$

Ahora bien, $AB + BC = GB + BE$, valor que coincide con el semiperímetro de las figuras. Para expresarlo de otro modo

$$AG + GB + BC = BG + BC + CE$$

de lo cual se deduce que $AG = CE$. Esto es, la altura del rectángulo X es igual a la longitud de la base de Y. Sin embargo la longitud de la base de X constituye uno de los lados del cuadrado, mientras que la altura de Y es una parte del lado, y por tanto menor. Resulta claro entonces que X es mayor que Y. En consecuencia,

$$X + Z > Y + Z$$

y el cuadrado encierra mayor área que el rectángulo. La altura de Y dejaría de ser solamente una parte del cuadrado, sólo si $ABCD$ fuera un cuadrado, y entonces $BEFG$ sería el mismo rectángulo inicial $ABCD$. Por consiguiente queda probado que *el cuadrado es la figura que encierra mayor área con el mismo perímetro.*

Este resultado ha sido expresado de la forma que lo hubieran hecho los griegos. Pero también podríamos hacer uso de notación algebraica, como se haría en la actualidad. Si denotamos por x e y las dimensiones del rectángulo, su perímetro será

$$P = 2(x + y)$$

El lado del cuadrado sería $l = \frac{x+y}{2}$, y su área

$$A = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Los razonamientos anteriores demuestran que

$$x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

o bien

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Esto es, *la media geométrica de dos números reales siempre es menor que su media aritmética, dándose la igualdad si y sólo si x e y son iguales.*

De lo anterior se deduce que la solución óptima al problema se obtiene en el caso de la figura con mayor número de simetrías, $x = y$, es decir, el polígono regular de cuatro lados.

1.2. Un resultado sobre paralelogramos

En la obra de Euclides también encontramos el siguiente problema:

Problema: *Dado un triángulo ABC, ¿cuál es el paralelogramo $ADEF$ inscrito en el triángulo que encierra área máxima?*

La respuesta la ofrece el propio Euclides. Los puntos D, E y F deben ser los puntos medios de los respectivos lados.

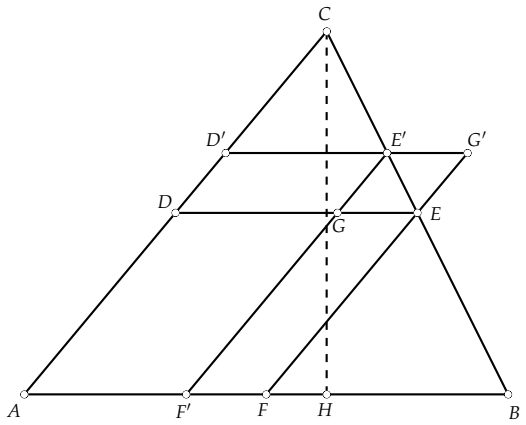


Figura 3. $ADEF$ es el paralelogramo de área máxima en ABC.

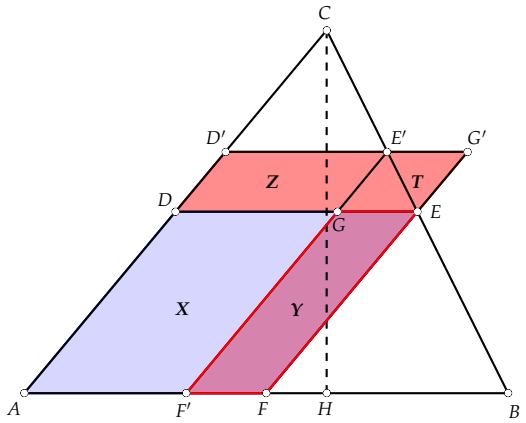


Figura 4. Los paralelogramos $DD'G'E$ y $EGFF'$ son iguales.

Es interesante analizar la demostración de este hecho. Consideremos $AD'E'F'$ un paralelogramo inscrito en el triángulo ABC, distinto del paralelogramo $ADEF$ (sobre los puntos medios). Sea G' el punto de intersección de las rectas $D'E'$ y FE, y G el punto de intersección de las rectas DE y $F'E'$ (figura 3).

Probaremos que el área del paralelogramo $ADEF$ es mayor que la de $AD'E'F'$.

De la figura 4 se observa que

$$Area(ADEF) = X + Y$$

$$Area(AD'E'F') = X + Z$$

Afirmamos que $DD'G'E$ y $EGFF'$ son iguales, esto es, $Z + T = Y$. En tal caso,

$$Area(ADEF) = X + Y = X + Z + T = Area(AD'E'F') + T > Area(AD'E'F')$$

obtendríamos nuestro resultado. Todo se centra en probar que los paralelogramos $DD'G'E$ y $EGFF'$ son iguales. Para ello recordemos que el área de un paralelogramo es base por altura. Denotemos por H el punto pie de la perpendicular a $|AB| = c$ trazada desde C, de suerte que $|CH| = h$, y por h_1 la altura del triángulo GEE' trazada desde E'. Puesto que los triángulo ABC, GEE' son semejantes, se tiene:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{|AB|}{|GE|} = \frac{c}{|GE|}$$

En consecuencia

$$|GE| \cdot \frac{h}{2} = \frac{c}{2} \cdot h_1$$

esto es, el área del paralelogramo de base $|GE| = |FF'|$ y altura $\frac{h}{2}$, coincide con la del paralelogramo de base $|DE| = \frac{c}{2}$ y altura h_1, por lo que $EGFF'$ y $DD'G'E$ son iguales.

1.3. Triángulos en la circunferencia

En la sección anterior hemos visto cual era el modo de proceder de en la geometría griega. Para un problema de máximos se proponía una figura y luego se demostraba que ésta era la solución óptima. En esta sección vamos a considerar triángulos inscritos en una circunferencia. Nos preguntamos cuál de ellos es el que encierra mayor área. Siguiendo la filosofía de trabajo griega e intuyendo algún tipo de simetría como en el caso del cuadrado, trataremos de probar, que de todos los triángulos inscritos en una circunferencia, el triángulo equilátero es el que encierra mayor área.

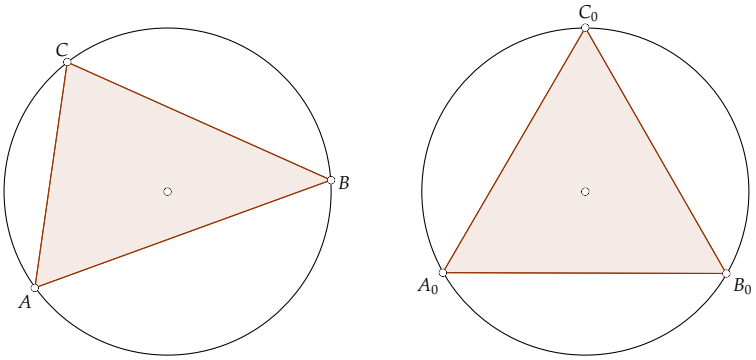


Figura 5. Triángulos inscritos en una circunferencia.

Es muy probable que este problema fuera estudiado, si no resuelto, en tiempos de Platón, un siglo antes de Euclides. No obstante, ni Euclides, ni libros más modernos dan la siguiente solución, que pudo muy bien ser entendida y descubierta por los griegos.

Lo primero que observamos es que al inscribir cualquier triángulo en nuestro círculo, la circunferencia queda dividida en tres arcos iguales en el caso del triángulo equilátero y desiguales en un caso más genérico. En este segundo caso, uno de los arcos debe ser mayor que un tercio de la circunferencia. De la misma forma uno de los arcos debe ser menor que un tercio de la circunferencia. El tercer arco puede ser mayor o menor que un tercio del total. No podemos concluir si es lo primero o lo segundo, pero esto no afecta a nuestro razonamiento.

Supongamos que el triángulo considerado cumple que el arco AB es menor que la tercera parte de la circunferencia y el arco BC mayor. Dejando el segmento AB fijo y moviendo el punto C sobre la circunferencia, podemos observar que las áreas de estos triángulos varían con la distancia al segmento base, y por tanto será máxima cuando dicha distancia lo sea. Esto sólo sucede cuando el punto C se encuentra precisamente en la recta mediatriz del segmento AB, esto es, cuando el triángulo sea isósceles.

Es claro que podemos encontrar un punto C' de suerte que el arco AC' sea exactamente un tercio de la circunferencia. Este nuevo triángulo tiene área mayor que el triángulo original, y además uno de sus lados es exactamente igual al de un triangulo equilátero inscrito.

Si el triángulo ABC' no fuera equilátero, hacemos un razonamiento similar al anterior, pero tomando como base ahora el lado AC'. Desplazando el punto B, encontraríamos un nuevo

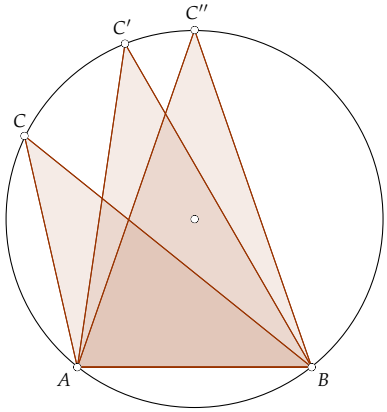


Figura 6. La mayor área se obtiene cuando ABC es isósceles.

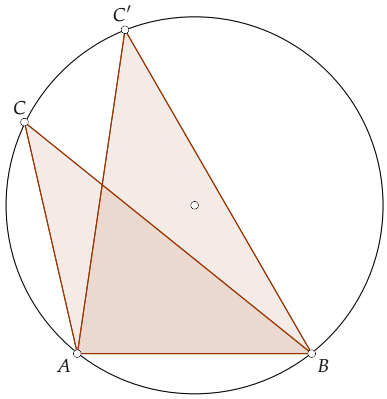


Figura 7. El arco AC' es un tercio de la circunferencia.

punto B' que divide al arco AC' por la mitad, de manera que cada arco mediría un tercio de la circunferencia. Esto sólo es posible si el triángulo es equilátero.

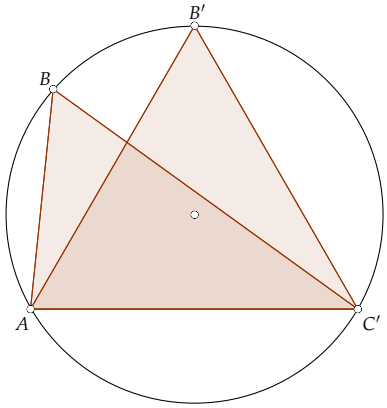


Figura 8. El triángulo $AC'B'$ es equilátero y encierra área máxima.

Todo esto dota de sentido a la siguiente línea de razonamiento: supongamos que exista un triángulo inscrito en la circunferencia cuya área sea mayor que la de cualquier otro inscrito que podamos dibujar. Llamémosle T. De lo anteriormente expuesto, resulta claro que T no puede

ser escaleno, puesto que desplazando uno de los puntos, como antes, obtendríamos un nuevo triángulo T' de área mayor. De igual modo T no pude ser isósceles, porque fijando los vértices de uno de los lados iguales y moviendo el tercero adecuadamente, podríamos encontrar otro triángulo isósceles de área mayor. Por tanto si dicho triángulo maximal T existe debe ser equilátero. En este caso cualquier variación de los vértices crea un triángulo de área menor. Con esto se concluye la demostración.

Observar que si dejamos los vértices moverse libremente por la circunferencia, dándoles la libertad que abarquen la mayor superficie, la configuración geométrica que adoptarían es la que encierra mayores simetrías. Este resultado también lo podríamos analizar de un modo sencillo mediante el uso del calculo diferencial moderno.

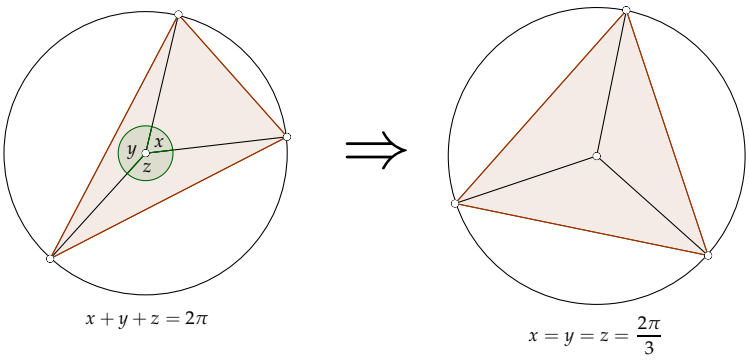


Figura 9. La solución al problema es la figura con mayores simetrías.

Denotemos por R el radio de la circunferencia y x, y, z la amplitud en radianes de los arcos determinados por los vértices. Resulta claro que $x + y + z = 2\pi$. Puesto que el área de cada triángulo viene determinado por dicha amplitud, de acuerdo con la expresión $A = \frac{1}{2}R^2 sen(\theta)$, el área cubierta por nuestro triángulo en una configuración aleatoria será

$$A(x, y, z) = \frac{R^2}{2} \cdot (sen(x) + sen(y) + sen(z))$$

con $x + y + z = 2\pi$. Despejando z de esta ecuación y sustituyendo arriba, construimos una función en dos variables

$$A(x, y) = \frac{R^2}{2} \cdot (sen(x) + sen(y) - sen(x + y))$$

Haciendo uso de la técnicas del calculo diferencial, obtenemos el gradiente de esta función e igualamos a cero para obtener los extremos relativos.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{R^2}{2} \cdot (cos(x) - cos(x + y)) = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{R^2}{2} \cdot (cos(y) - cos(x + y)) = 0$$

Esto nos lleva a que en los puntos críticos (x, y) se debe verificar que

$$cos(x) = cos(y) = cos(x + y)$$

donde $x, y \in [0, 2\pi]$. De la primera igualdad se deduce que $x = y$, y por tanto nos queda la ecuación trigonométrica

$$cos(2x) = cos(x) \to 2cos^2(x) - 1 = cos(x) \to 2cos^2(x) - cos(x) - 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son dos: o bien $cos(x) = 1$, en cuyo caso $x = y = z = 0(mod 2\pi)$, que es la solución degenerada del problema (los tres vértices juntos no definen ninguna superficie plana). O bien $cos(x) = -\frac{1}{2}$, lo cual nos lleva a que $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$, como queríamos probar.

1.4. Polígonos inscritos en una circunferencia

El resultado anterior es un caso particular de un hecho mucho más general:

de todos los polígonos de n lados inscritos en un círculo dado, el polígono regular es el mayor de todos (encierra mayor área). Si $n = 3$, el polígono es un triángulo equilátero como hemos visto.

La primera demostración rigurosa de este hecho se debe al matemático griego Zenodoro que vivió aproximadamente en el año 180 a.C. Investigadores de la Historia de la Ciencia como J. Mongenet le atribuyen el haber desarrollado completamente la teoría de los isoperímetros en el siglo III a.C., en un tratado sobre figuras isoperimétricas hoy desaparecido. A Zenodoro lo situamos entre Arquímedes (m. 212 a.C) y Pappus, (320 d.C) dado que cita al primero y es citado por el segundo.

Theón de Alejandría (390 d.C) da prueba de este hecho haciendo alusión al libro de Zenodoro en uno de sus comentarios al primer libro del *Almagesto* diciendo:

> *...vamos a demostrarlo de modo algebraico siguiendo la demostración que dio Zenodoro en su tratado de figuras isoperimétricas.*

No vamos a entrar en los detalles de la prueba que tradicionalmente se le atribuye a Zenodoro. Pero sí notar que si distribuimos n puntos aleatoriamente sobre una circunferencia y los dotamos de vida y capacidad para generar un polígono de área máxima, la solución del problema la proporciona precisamente la figura geométrica con mayor número de simetrías, y donde los ángulos centrales son todos iguales entre sí.

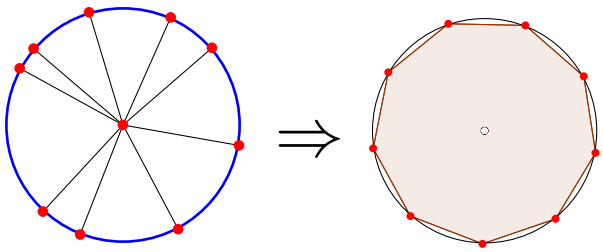


Figura 10. La disposición óptima es la más simétrica.

Esto es una cuestión de pura geometría. Y lo vamos a ilustrar con el siguiente ejemplo. Consideremos un ángulo central como en la figura de cierta amplitud θ, y un punto situado aleatoriamente en dicho arco. Nos planteamos determinar la posición del punto P que hace máxima la superficie del cuadrilátero $OAPB$ (figura 11).

Resulta claro que el área de nuestro cuadrilátero es suma de dos triángulos isósceles. Denotemos por M y N, los pies de las perpendiculares trazados desde el punto P sobre cada los lados OB y OA respectivamente, de suerte que $|PM| = h_1$ y $|PN| = h_2$. De igual modo denotemos por $c = |OA| = |OB|$, el radio del círculo.

El área de nuestro cuadrilátero es

$$Area(OAPB) = \frac{|OB| \cdot h_1}{2} + \frac{|OA| \cdot h_2}{2} = \frac{c}{2}(h_1 + h_2)$$

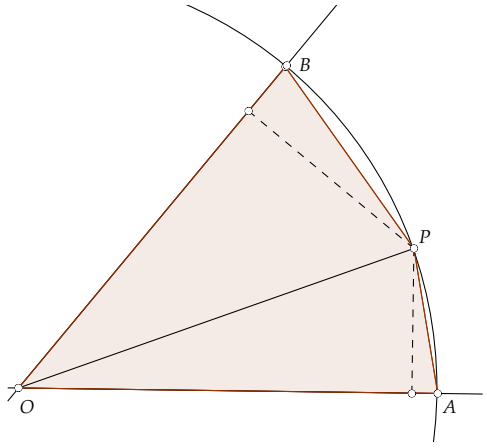


Figura 11. El punto P se mueve sobre el arco libremente.

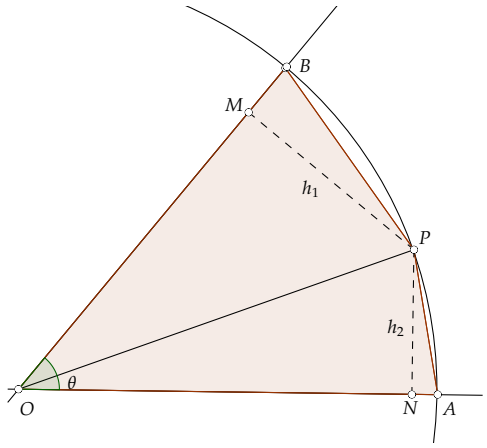


Figura 12. El cuadrilátero $OAPB$ es suma de dos triángulos isósceles.

Este área será máxima cuando lo sean la suma de las alturas lo que nos lleva a un problema equivalente en términos de distancias. Lo que vamos a demostrar es que la suma de alturas trazadas desde P sobre los lados del ángulo central es máxima cuando el punto P se encuentra sobre la bisectriz de dicho ángulo. Para ello observamos que podemos trazar las alturas desde A y B, sobre el segmento OP, de suerte que se tiene la siguiente configuración (figura 13):

Observar que la bisectriz del ángulo central coincide con la mediatriz del segmento AB, por tratarse de un triángulo isósceles. Si el punto P no se encuentra en dicha mediatriz, el segmento AB no corta perpendicularmente a la recta OP y por tanto se forman dos triángulos rectángulos donde las alturas son precisamente dos catetos. Si denotamos por $d_1 = |BC|$ y $d_2 = |AC|$, dichas distancias corresponden a las hipotenusas de dichos triángulos y por tanto tienen mayor longitud. De este modo

$$h_1 + h_2 < d_1 + d_2 = |AB|$$

Haciendo uso de la desigualdad anterior deducimos que

$$Area(OAPB) = \frac{c}{2}\,(h_1 + h_2) \leq \frac{|OA| \cdot |AB|}{2}$$

dándose la igualdad si y sólo si el punto P se encuentra sobre la bisectriz del ángulo θ.

Esta es la configuración más simétrica posible. La simetrías vuelven a resolver el problema.

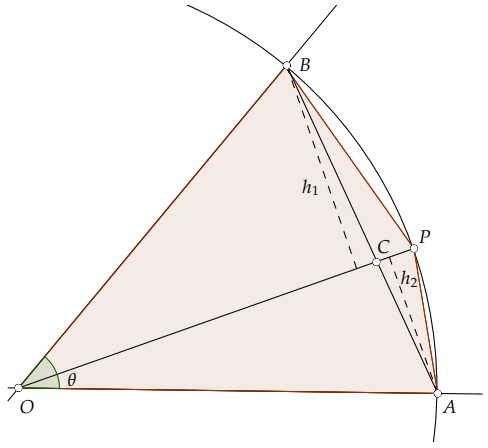


Figura 13. Buscamos el punto que maximice la suma de distancias.

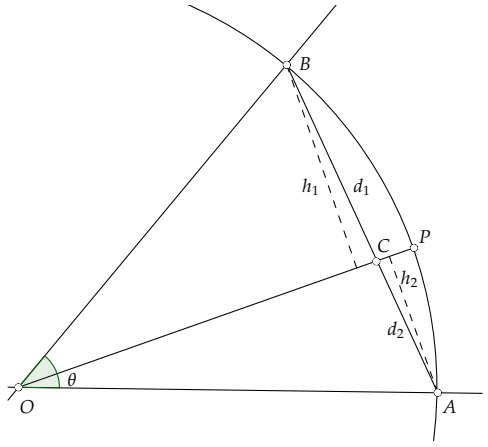


Figura 14. Si P no esta en la mediatriz de $|AB|$, se forman dos triángulos rectángulos.

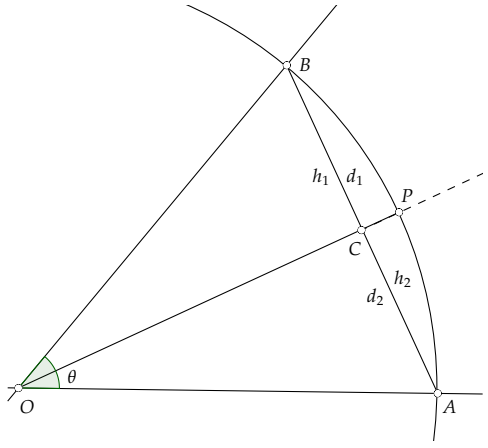


Figura 15. Si P divide al arco en dos partes iguales del área obtenida es máxima.

No es restrictivo suponer que el ángulo central sea mayor, igual o menor a un recto. De hecho, al mismo resultado anterior se puede llegar de un modo más simple, considerando directamente el segmento $|AB|$, tal y como se muestra en la figura 16:

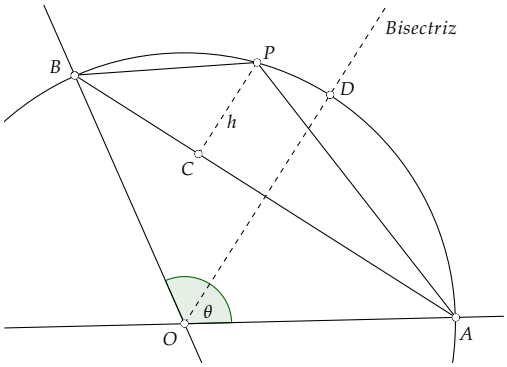


Figura 16. El cuadrilátero $OAPB$ es suma de dos triángulos.

El cuadrilátero $OAPB$ en este caso es descompuesto en suma de dos triángulos, uno isósceles OAB y otro APB escaleno, que va variando en función del punto P. Observamos, en consecuencia, que nuestro cuadrilátero encerrará área máxima cuando así lo haga APB, puesto que OAB no se ve alterado. Esto sólo se consigue cuando la altura h trazada desde P sobre el segmento AB, sea la máxima posible, esto es, cuando se encuentre sobre la bisectriz del triángulo OAB, y las distancia $|PA|$ y $|PB|$ sean las mismas.

En esta demostración, no obstante, no se aprecia el resultado sobre la suma de distancias del punto P a cada uno de los lados que determinan el ángulo. Sabemos que, en la situación óptima del problema, esta suma de distancias es máxima. Por lo que consideramos la primera prueba mucho mas interesante.

Este resultado nos va a ayudar a obtener una demostración alternativa al problema de Zenodoro sobre polígonos inscritos en una circunferencia. Imaginemos que disponemos de cuatro puntos aleatoriamente distribuidos y les pedimos que se redistribuyan para maximizar el área del polígono que generan. Los puntos buscarán establecer el mayor número de simetrías, lo cual sólo sucede si se sitúan en los vértices de un cuadrado. Y lo mismo sucede con configuraciones de cinco, seis o n vértices.

Como caso particular, acabamos de resolver un viejo problema: *De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia encontrar el que posee mayor perímetro.*

En efecto, de lo anterior se deduce (tomando un ángulo central de 90º) que la solución al problema viene determinada cuando el punto sobre el arco se encuentre en la bisectriz del primer cuadrante, y por tanto las distancias a los ejes de coordenadas sean las mismas, i.e , la figura debe ser un cuadrado. En este caso no solo se obtiene un máximo de perímetro sino también de superficie cubierta.

1.5. Un juego geométrico

En esta sección vamos a proponer un curioso procedimiento geométrico que nos va a ser de utilidad más adelante. Partimos de un segmento de longitud L dividido en tres partes no necesariamente iguales. Denotemos por a, b, c las longitudes respectivas de cada una de las partes, de suerte que $a \leq b \leq c$ con

$$a + b + c = L$$

A continuación procedemos del siguiente modo: unimos los segmentos de mayor longitud b, c y los transformamos en otros dos de idéntica longitud, calculando el punto medio del segmento concatenado que determinan, siendo ahora sus longitudes $\frac{b+c}{2}$.

Repetimos este proceso como se aprecia en la figura 18. Dejando invariante el primero de la

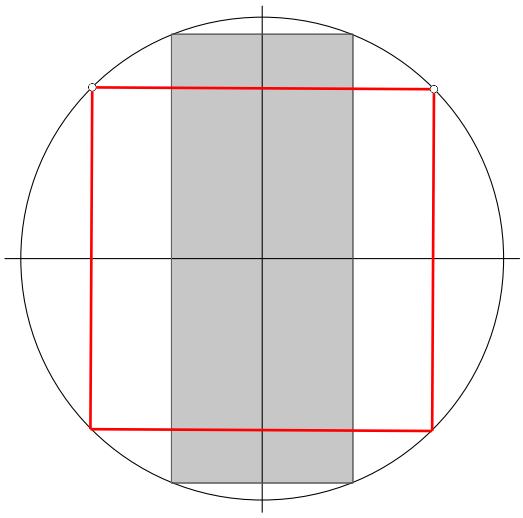


Figura 17. El cuadrado inscrito posee mayor área y perímetro que cualquier otro rectángulo.

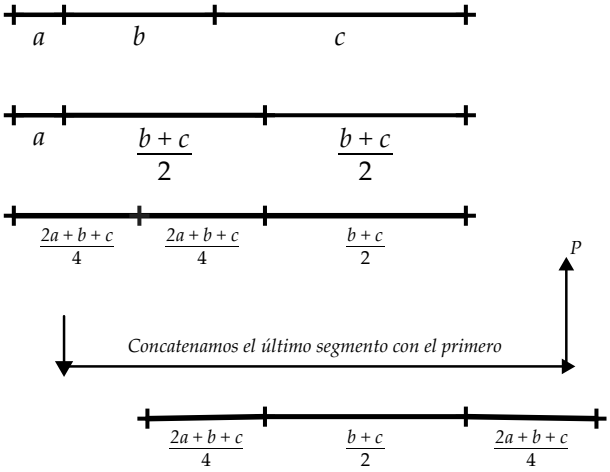


Figura 18. Proceso de construcción.

derecha, transformamos los otros dos en segmentos de igual longitud, determinando el punto medio del segmento concatenado que forman. Finalmente desplazamos este último segmento, transformado de a, delante del situado mas a la derecha, (hacemos un corta y pega) obteniendo tres nuevos subsegmentos concatenados de longitudes:

$$\frac{2a+b+c}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{2a+b+c}{4}$$

en ese orden. Volvemos a repetir este proceso innumerables veces. Si realizan el experimento observarán como los segmentos cada vez son más parecidos, esto es, adoptarán aproximadamente la misma longitud igual a $\frac{L}{3}$. Esto es un ejemplo claro de un proceso iterativo que termina en una configuración completamente simétrica.

Para fundamentar matemáticamente lo anterior necesitamos calcular como son exactamente estas longitudes que se van generando. Definamos l_n la sucesión de longitudes obtenidas del siguiente modo:

$$l_0 = a,\ l_1 = \frac{b+c}{2},\ l_2 = \frac{2a+b+c}{4},\ l_3 = \frac{2a+3b+3c}{8} \cdots$$

La ley de recurrencia está clara:

$$l_{n+1} = \frac{l_n + l_{n-1}}{2}$$

Esta relación guarda interesantes consecuencias. La primera de ellas es que la longitud entre dos intervalos consecutivos es

$$|l_{n+1} - l_n| = \frac{|l_n - l_{n-1}|}{2} = \cdots = \frac{l_1 - l_0}{2^n} = \frac{b + c - 2a}{2^{n+1}} = \frac{L - 3a}{2^{n+1}}$$

Si $a = \frac{L}{3}$ todas las longitudes son iguales y se produce el equilibrio del sistema. Si no es así, observamos que las distancias de longitudes consecutivas tiende a cero cuando el número de iteraciones aumenta. Por tanto esta sucesión de números reales tiene que converger a un cierto valor dentro del intervalo. Denotémosle por l. Como por otra parte

$$l_{n-1} + 2l_n = L$$

al tomar n un valor suficientemente grande, obtendremos que $3l = L$, esto es, las longitudes tienden al valor $l = \frac{L}{3}$.

Un modo más directo de probar todo esto, pasa por determinar exactamente una fórmula explícita de l_n. No es complicado encontrar que

$$l_n = \frac{a_n \cdot a + b_n \cdot b + c_n \cdot c}{2^n}$$

donde

$$a_n = \frac{2^n \pm 2}{3},\ b_n = c_n = \frac{2^n \pm 1}{3}$$

La distinción del signo en cada caso viene determinada por la paridad de n. Cuando n es par a_n toma la determinación positiva, y b_n, c_n, negativas, y cuando n es impar al contrario con el fin de que se cumpla la relación siempre cierta

$$a_n + b_n + c_n = 2^n$$

Esto permite definir la sucesión como una secuencia de coordenadas baricéntricas de la forma

$$l_n = \alpha_n a + \beta_n b + \gamma_n c$$

donde $\alpha_n = \frac{a_n}{2^n}$, $\beta_n = \frac{b_n}{2^n}$, $\gamma_n = \frac{c_n}{2^n}$ y se cumple

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

De la naturaleza de estas expresiones se comprueba nuevamente que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{1}{3}$$

Estos razonamientos se pueden generalizar a un número finito de segmentos concatenados. Si consideramos el caso de cuatro segmentos de diferente longitud, y denotamos por l_n la sucesión que, como antes, se va generando, la ley de formación se traduce en este caso en:

$$l_{n+1} = \frac{l_n + l_{n-2}}{2}$$

y se deberá cumplir que, en cualquier estado del sistema

$$2l_n + l_{n-1} + l_{n-2} = L$$

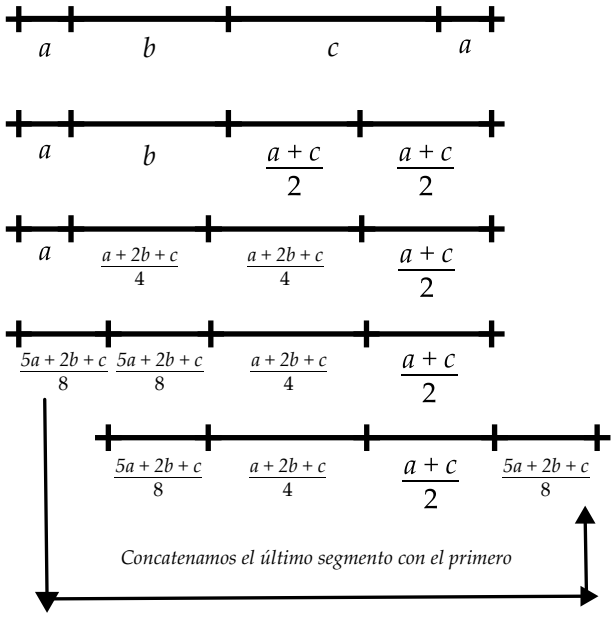


Figura 19. Proceso de construcción para cuatro intervalos.

De converger esta sucesión a algún valor, deberá serlo a $\frac{L}{4}$, que es una configuración estable. De momento no hemos encontrado ningún argumento consistente a favor de esta convergencia aunque el cálculo de la expresión para l_n en este caso es bastante clarificadora.

En efecto, si consideramos un segmento de longitud L, dividido en cuatro secciones a, b, c, a como se aprecia en la figura 19, (no es restrictivo suponer que hay dos iguales), y aplicamos el proceso iterativamente, llegamos a las siguientes expresiones para l_n

$$l_0 = a,\ l_1 = \frac{a+c}{2},\ l_2 = \frac{a+2b+c}{4},\ l_3 = \frac{5a+2b+c}{8}\cdots$$

$$l_4 = \frac{9a+2b+5c}{16},\ l_5 = \frac{13a+10b+9c}{32},\ l_6 = \frac{33a+18b+13c}{64}\cdots$$

con $2a+b+c = L$. Igual que antes,

$$l_n = \alpha_n a + \beta_n b + \gamma_n c$$

donde $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ De la naturaleza de estas expresiones se comprueba nuevamente que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{1}{4}$$

Como ejemplo práctico hemos calculado el valor

$$l_{12} = \frac{2015a + 1058b + 1013c}{4096}$$

Aquí

$$\alpha_{12} = \frac{2025}{4096} \approx \frac{1}{2}$$
$$\beta_{12} = \frac{1058}{4096} \approx \frac{1}{4}$$

y

$$\gamma_{12} = \frac{1013}{4096} \approx \frac{1}{4}$$

Es decir

$$l_{12} \approx \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c = \frac{2a+b+c}{4} = \frac{L}{4}$$

como buena aproximación.

1.6. A vueltas con el círculo

Uniendo los dos resultados de secciones anteriores, nos encontramos en condiciones de dar una prueba alternativa al problema de Zenodoro. En efecto, sean

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

los n vértices de un polígono inscrito en una circunferencia. Denotemos por s_i el arco de circunferencia entre P_i y P_{i+1}, con $i = 1, 2, \ldots n-1$. s_n será el arco P_nP_1. No es restrictivo suponer que los arcos están dispuestos en orden decreciente a sus longitudes, aunque no es algo realmente necesario. Si no es así siempre podemos encontrar un polígono regular de la misma área, con los arcos dispuestos de este modo. Sea s_1 es el arco con mayor longitud tal como se muestra en la figura 20.

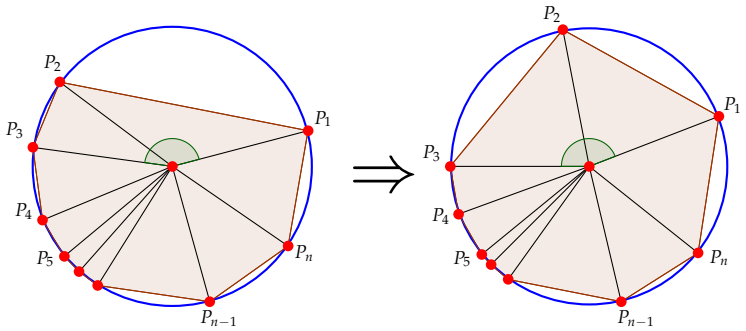


Figura 20. Se desplaza el punto P_2 a la bisectriz del arco P_1P_3 para mejorar la superficie del polígono.

Consideremos el arco P_1P_3. Desplazamos el punto P_2 que lo contiene, hasta hacerlo coincidir con la bisectriz del arco de longitud $s_1 + s_2$. Por los resultados anteriores sabemos que este nuevo polígono encierra un área mayor que el anterior. Pasamos al punto P_3 y lo situamos en la bisectriz del arco formado por el nuevo punto P_2 y P_4. Vamos pasando por cada punto, repitiendo el proceso sobre la nueva configuración obtenida.

De este modo creamos una nueva sucesión de segmentos de arco que cumplen la propiedad dada en la sección anterior. De hecho obedecen al mismo principio de construcción. En este caso

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = L = 2\pi$$

Sus amplitudes van aproximándose al valor

$$\frac{2\pi}{n}$$

esto es, los puntos P_i se van situando cada vez más cerca de los vértices de un polígono regular, que es la solución óptima del problema. Y esta figura será la que encierre mayor área, porque cada polígono aumenta la superficie del anterior y está acotada por el área del círculo.

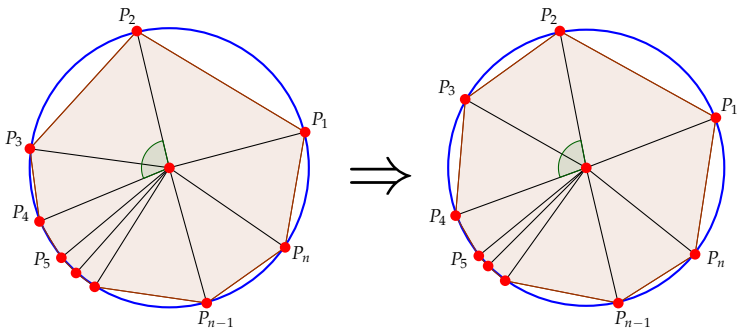


Figura 21. Movemos el punto P_3 hasta maximizar el área del cuadrilátero $OP_2P_3P_4$.

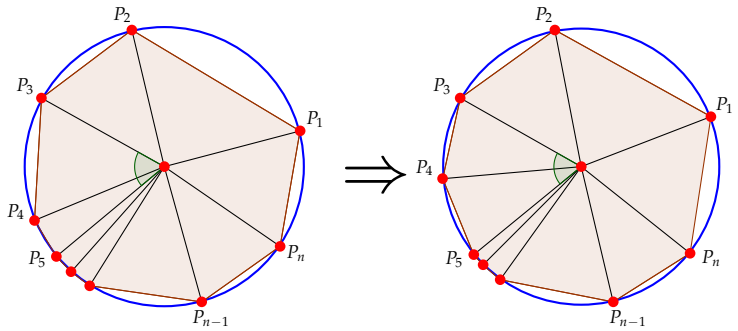


Figura 22. Repetimos el proceso moviendo P_4.

2. El triangulo órtico como un problema de mínimos

Antes de considerar nuestro principal teorema, veamos un problema muy sencillo que concierne a las leyes de reflexión de la luz. Es sabido que si un rayo de luz que parte de un punto A choca con un espejo, es reflejado en dirección B de forma que el ángulo de incidencia y de reflexión son iguales (figura 24).

En esencia, este fenómeno óptico es consecuencia del *principio del tiempo mínimo de Fermat*, que afirma que la luz siempre emplea el menor tiempo en viajar entre dos puntos (a velocidad constante, esto también implica el recorrido de menor distancia).

Vamos a demostrar que en efecto, la trayectoria ADB que sigue el rayo es la mas corta de todas las posibles trayectorias que, tocando el espejo, vayan de A a B. Este es el mismo camino que seguiría un barco que tuviera que ir del lugar A al B tocando un punto de la orilla en el trayecto. No entraremos ahora en la cuestión de por qué un rayo de luz tiene capacidad para escoger del mismo modo que lo haría el piloto del barco. Lo único que demostraremos es el hecho puramente matemático de que:

la trayectoria ADB con ángulos de reflexión e incidencia iguales es más corta que cualquier otra trayectoria ACB.

Este problema se conoce como el *problema de Herón*, llamado así en honor a *Herón de Alejandria* (siglo I a.C.). La demostración depende de un recurso que desde el punto de vista matemático parece muy artificial, pero muy natural desde el punto de vista de la óptica.

Consideremos A' el simétrico de A respecto de la recta que determina la superficie del espejo. Resulta claro que la longitud del camino ACB es el mismo que $A'CB$, por una cuestión de

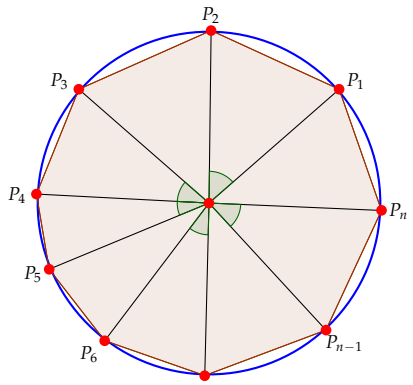


Figura 23. Cuando el número de iteraciones es elevado los puntos se distribuyen en los vértices de un polígono regular.

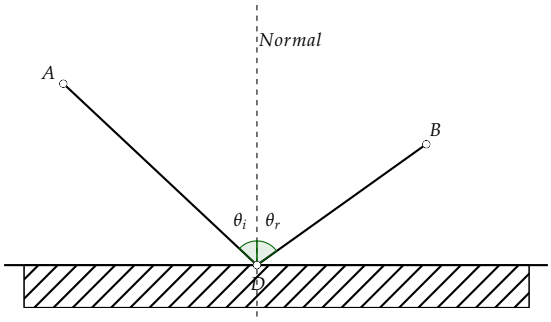


Figura 24. La ley de la reflexión es consecuencia del comportamiento geométrico de la luz.

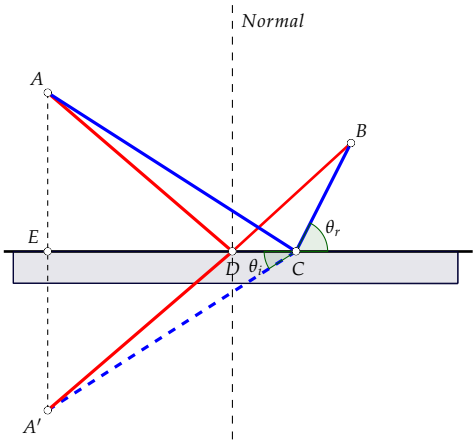


Figura 25. La trayectoria de ACB es una línea quebrada.

simetría: $|A'C| = |AC|$. Además

$$|A'D| = |AD|, \ |A'E| = |AE|$$

Por tanto los triángulos EDA y EDA' son iguales. Según nuestra hipótesis tenemos que el ángulo EDA es igual al ángulo CDB y consecuentemente los ángulos CDB y EDA' son iguales al ser opuestos por el vértice, es decir, que $A'DB$ es una línea recta.

Entonces la longitud de las trayectorias ADB y $A'DB$, así como ACB y $A'CB$ son iguales. Puesto que $A'DB$ es una línea recta es más corta que la trayectoria $A'CB$, ya que en geometría euclídea, la distancia más corta entre dos puntos es siempre la línea recta.

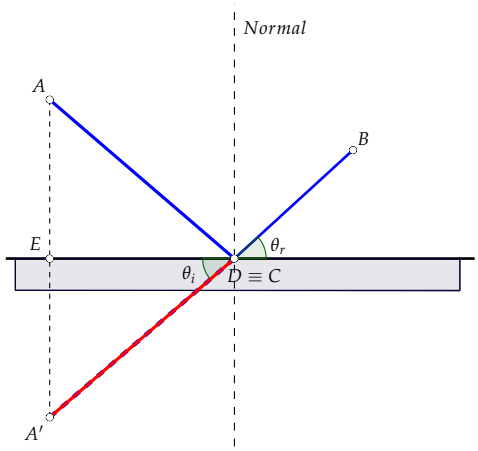


Figura 26. La trayectoria de ACB es una línea quebrada.

Una aplicación práctica de este resultado la podemos encontrar en el siguiente problema: imaginemos que dos ciudades A y B se encuentran situadas a un mismo lado de un río r. Se quiere construir una fuente a la orilla del río de manera que abastezca de agua a las dos ciudades. Por cuestiones de economía se debe procurar que la suma de distancias a los dos pueblos sea la mínima posible. ¿En qué punto sobre la orilla debemos situar dicha fuente?

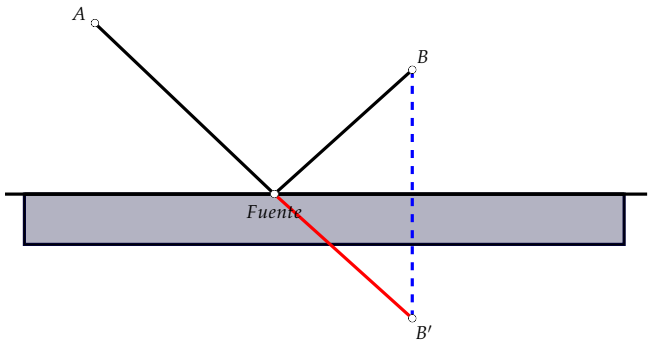


Figura 27. La trayectoria de ADB' debe ser una línea recta.

La respuesta la tenemos en las consideraciones previas. Basta con determinar B', el punto simétrico de B respecto de la línea del río, y determinar el punto de intersección de la recta AB' con dicha línea. Exactamente ese punto es el que minimiza la suma de distancias, ya que cualquier otro punto proporcionara una línea quebrada de longitud mayor.

2.1. El triángulo órtico

Dado un triangulo ABC se llama *triángulo órtico* aquel que tiene por vértices los pies de las alturas del triangulo.

Este triángulo tiene interesantes propiedades. La primera de ellas tiene que ver con los ángulos interiores que se forman. Podemos afirmar que los ángulos AFG y CFE son iguales (como ocurre en las leyes de reflexión). No solo éso. Todos los ángulos marcados en el mismo color en la figura 29 son iguales.

La demostración de este hecho se basa en tres teoremas básicos de geometría plana: El teorema de Tales, que afirma que todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto; que los ángulos

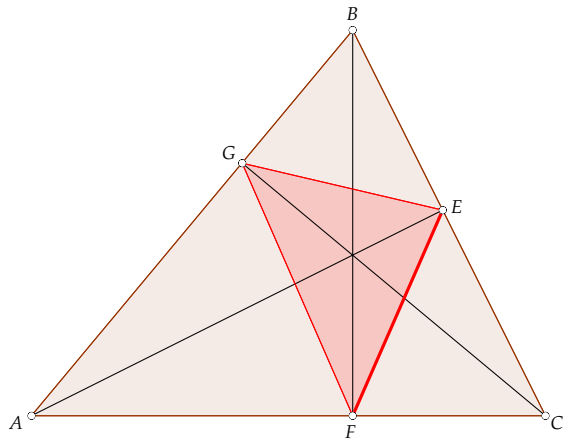


Figura 28. El triángulo órtico inscrito a ABC.

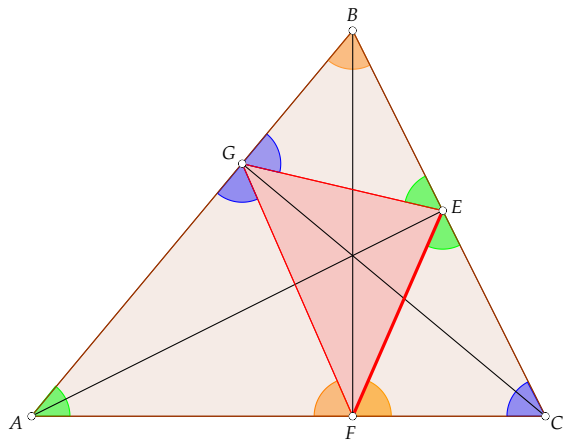


Figura 29. Propiedad de los ángulos del triángulo órtico.

que interceptan un mismo arco son iguales; que las alturas de un triángulo se encuentran en un punto (H). Empleando éstos, podemos observar lo siguiente:

Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Comprobamos que el círculo con diámetro AH pasa pasa por G y F, y que el circulo con diámetro CH pasa por los puntos E y F. Además, el ángulo AFG intercepta al arco AG, como también lo hace el ángulo AHG. Por consiguiente estos dos ángulos son iguales. De la misma manera vemos que los ángulos CFE Y CHE son también iguales. Pero los ángulos AHG y CHE son opuestos por el vértice y por tanto también son iguales. Tenemos entonces que el ángulo AFG = ángulo CFE.

En particular los triángulos EFC, FGA, GEB son semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC.

Otra consecuencia es que las alturas del triangulo $\triangle ABC$ son las bisectrices interiores de su triángulo órtico (y los lados de $\triangle ABC$ las exteriores) y por tanto el ortocentro del triángulo ABC es el incentro de su triángulo órtico. Esta propiedad fue descubierta por *Giovanni Francesco Fagnano*.

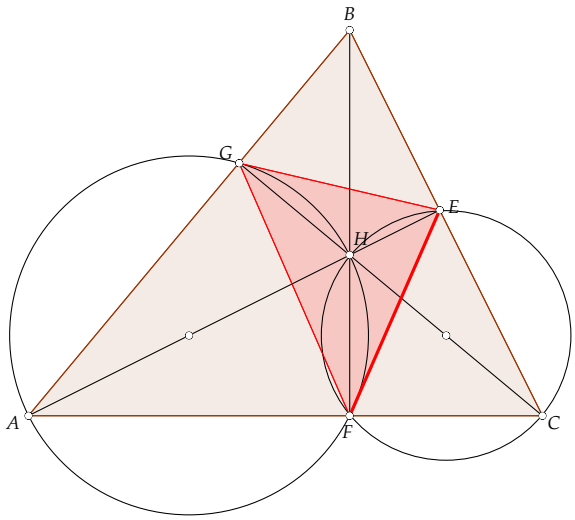


Figura 30. Demostración de la propiedad de ángulos.

2.2. El teorema de Fagnano

Podemos ahora comenzar con nuestro problema central:

Dado un triángulo acutángulo ABC, inscribir en él otro triángulo PQR con el menor perímetro posible.

Afirmamos que el triángulo órtico EFG, cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo ABC, tiene un perímetro menor que cualquier otro inscrito PQR.

La primera demostración que vamos a dar se debe a A.H. Schwarz. A pesar de ser un problema matemático de orden relativamente menor, nos muestra la forma en que el genio de este gran matemático se manifiesta en trabajos relativamente triviales o extremadamente importantes. La demostración hace un ingenioso uso del concepto de simetría. En efecto partimos del triángulo ABC, y realizamos su reflexión respecto de la recta BC.

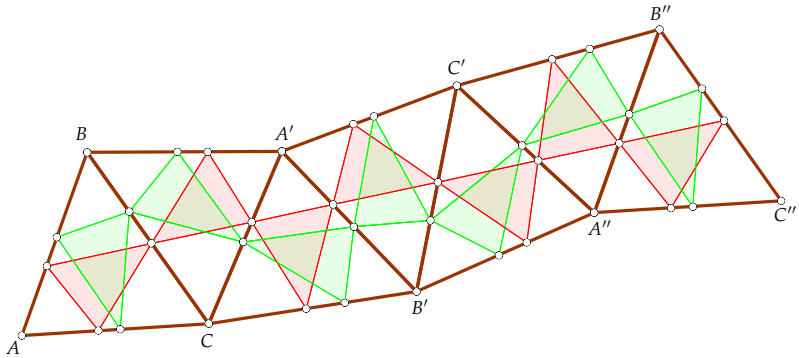


Figura 31. Realizamos seis simetrías consecutivas del triángulo ABC.

El triángulo reflejado $A'BC$ lo reflejamos en su lado CA'. Luego en $C'A''$, y así sucesivamente hasta llegar a $A''B''$ en un total de seis reflexiones. Primeramente demostraremos el hecho evidente de que la posición final $A''B''C''$ es la misma posición inicial ABC, trasladada paralelamente a si misma sin girar. Las dos primeras reflexiones llevan ABC a la tercera posición $A'B'C$. Este movimiento podría haberse efectuado sin reflejar el triángulo y sin levantarlo de su

plano, simplemente haciéndolo girar en un ángulo $2C$ alrededor del punto C en el sentido de las agujas del reloj. De la misma forma, el movimiento de la tercera a la quinta posición podría haberse efectuado por un giro en sentido de las agujas del reloj de ángulo $2B$, alrededor del punto B'. Finalmente, el giro en la misma dirección de un ángulo $2A$ alrededor de A'' proporcionaría la séptima o última posición. En total, el triángulo ha efectuado una rotación completa de un ángulo

$$2A + 2B + 2C = 2(A + B + C) = 2\pi$$

puesto que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano. Por tanto la posición final del triángulo que es reflejado el último tiene la misma orientación que el inicial, ha sido simplemente movido, pero queda paralelo a sí mismo. En consecuencia, *BC es paralelo a $B''C''$*.

Observemos ahora las distintas posiciones que asumen el triángulo órtico EFG (en rojo en el dibujo) y un triángulo inscrito cualquiera de vértices PQR (en verde en el dibujo). Esto se muestra en la figura 32. Según nuestro postulado sobre el triángulo órtico, observamos de inmediato que la segunda posición de EG forma una línea recta con la primera posición de FE. De la misma manera, un lado del triángulo órtico quedará siempre a continuación de esta línea en sucesivas posiciones. Luego la recta EE' está formada por seis segmentos 2 iguales a FG, 2 a GE y 2 a EF; *esto quiere decir que es igual al doble del perímetro del triángulo órtico.*

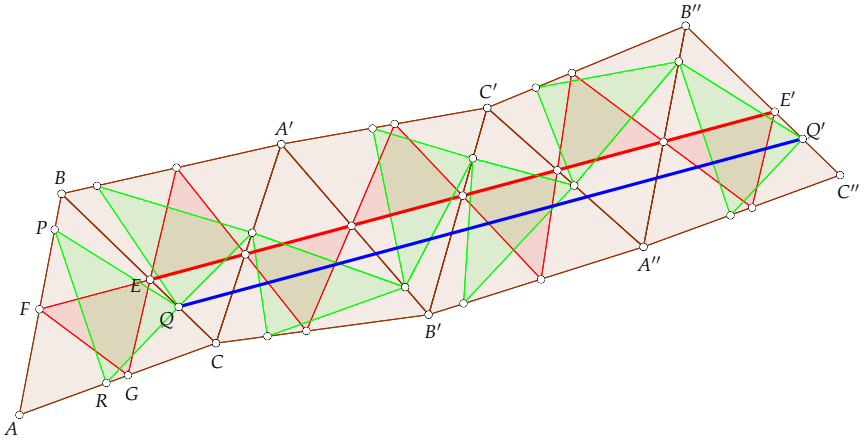


Figura 32. La línea roja EE' mide exactamente dos veces el perímetro del triángulo órtico EFG.

Trazando las posiciones asumidas por el triángulo arbitrario PQR de la misma forma, encontramos una línea poligonal (en verde en el dibujo) que une Q con Q', y por tanto también será igual al doble del perímetro del triángulo PQR. Los segmentos EQ y $E'Q'$ son paralelos por estar sobre BC y $B''C''$. Son también iguales por ser segmentos correspondientes en dos posiciones del triángulo ABC. Entonces por un teorema de geometría plana $EE'QQ'$ es un paralelogramo, y consecuentemente sus otros dos lados son iguales, esto es,

$$EE' = QQ'$$

Por consiguiente QQ' es también igual al doble del perímetro del triángulo órtico. La línea recta que une estos puntos es más corta que la línea en zig-zag, (en verde en el dibujo) que une los mismos puntos, siendo esta poligonal el doble del perímetro del triángulo arbitario PQR. Por tanto, el perímetro del triángulo órtico es menor que el perímetro de PQR, exactamente lo que queríamos demostrar.

Esta demostración es de este tipo de demostraciones matemáticas en las que la idea esencial de la prueba puede reconocerse en una ojeada. Sencillamente genial.

2.3. La prueba de Féjer

La demostración realizada previamente, depende básicamente del hecho de ser la línea recta la distancia más corta entre dos puntos, y emplea la idea de reflexión (simetria axial) de una figura respecto de una recta. Estos dos principios son también la base de una segunda demostración, quizás más conocida, y que muestra la elegancia de los razonamientos geométricos. La prueba que ofrecemos a continuación fue formulada por L. Féjer, que la descubrió siendo estudiante y ganó por ello una consideración especial por parte de H.A.Schwarz.

Consideremos un triángulo acutángulo ABC y un triángulo arbitrario PQR inscrito. Supongamos que P se encuentra sobre el lado BC (figura 33). Reflejamos este punto respecto de los otros dos lados del triángulo, AC y AB, y denominemos P' y P'' a las dos imágenes. Por simetría los segmentos PQ y QP' son iguales, y del mismo modo PR y RP''. El perímetro del triángulo PQR es por tanto igual a la longitud de la trayectoria $P'QRP''$.

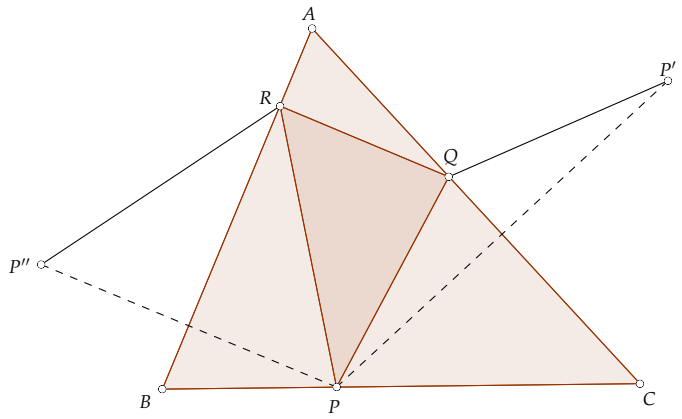


Figura 33. El perímetro del triángulo PQR es igual a la longitud de la trayectoria $P'QRP''$.

Si fijamos un punto P y movemos los otros dos puntos Q y R, los puntos reflejados de P tampoco varían de posición. La longitud de la línea poligonal $P'QRP''$ es siempre igual al perímetro del triángulo inscrito. El camino más corto entre P' y P'' es la línea recta. Por tanto, el segmento de recta $P'P''$ es el menor perímetro posible para un triángulo inscrito con un vértice fijo en P. Este triángulo mínimo lo llamaremos T, tal y como se muestra en la figura 34.

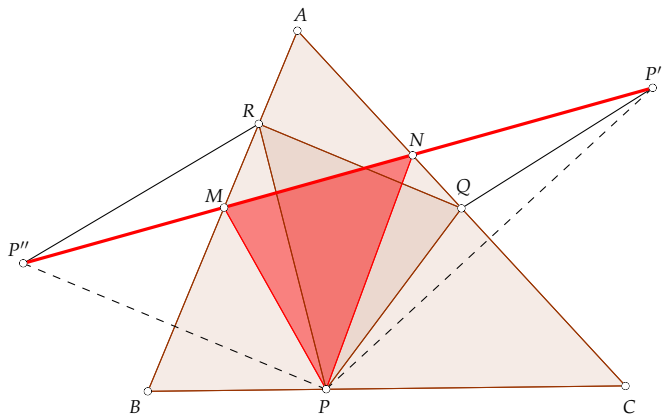


Figura 34. El triángulo T es un triángulo de perímetro mínimo.

Una vez hallado el triángulo T de mínimo perímetro, con vértice en P, necesitamos comparar

los distintos triángulos mínimos que se obtienen al mover el punto P sobre el segmento BC, y tomar aquel como solución a nuestro problema. Determinaremos la posición de P para que el segmento $P'P''$ sea lo más pequeño posible. Para ello primero observamos que el triángulo $AP'P''$ es isósceles, con $AP' = AP''$.

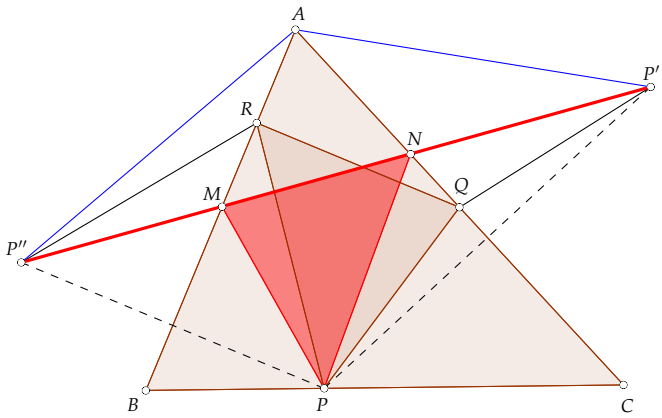


Figura 35. El triángulo $AP'P''$ es isósceles y $AP = AP' = AP''$.

De hecho estos segmentos son imágenes simétricas del mismo segmento AP y por tanto son iguales a éste. Aunque la longitud de estos lados depende de la posición de P sobre el segmento BC, el valor del ángulo $P''AP'$ no depende de la posición de P. Este ángulo está completamente determinado por el triángulo original ABC, y nada mas ya que, debido a las simetrías, tenemos las siguientes relaciones para los ángulos de la figura:

$$PAB = P''AB,\ PAC = P'AC$$

De donde se sigue que

$$P''AP = 2PAB,\ P'AP = 2PAC$$

Por tanto

$$P''AP' = P''AP + P'AP = 2(PAB + PAC) = 2BAC$$

lo cual demuestra nuestra afirmación en relación al ángulo $P''AP'$. En el triángulo isósceles $AP'P''$ queremos hacer la base $P'P''$ lo menor posible. Puesto que el ángulo en A no depende de P, todos estos triángulos, para diferentes posiciones de P, tienen el mismo ángulo en el vértice. De todos ellos el que tenga la base menor también tendrá menores lados, y menor perímetro. O de igual modo los que tengan los menores lados, tendrán menor perímetro. Sabemos que los lados $AP' = AP'' = AP$, por consiguiente debemos buscar P para que la distancia AP sea la menor posible. Sabemos que esto sucede cuando P es el pie de la perpendicular al segmento trazado desde A, donde se alcanza la menor distancia de un punto a una recta. Consecuentemente debemos disponer el punto P de manera que AP sea la altura del triángulo ABC trazado desde A.

Construyamos ahora el triángulo EFG de menor perímetro (figura 36). Sea E el pie de la perpendicular trazada desde A sobre el lado BC. Si E' y E'' son las imágenes simétricas de E respecto de los lados AC y AB, entonces $E'E''$ es la longitud del perímetro menor de un triángulo inscrito. Los puntos F y G, puntos de corte de esta línea con los lados AC y AB, son los otros dos vértices de este triángulo mínimo.

Si reflexionamos un poco sobre lo que hemos hecho, vemos que todo triángulo inscrito PQR, distinto de EFG, debe tener un perímetro mayor. Por que si P es distinto de E, el segmento $P'P''$ es mayor que $E'E''$, y el perímetro de PQR es mayor o igual a $E'E''$. Si P y E coinciden, en tal caso o bien sólo el punto Q, o éste y el punto R difieren de los puntos F y G, y la trayectoria

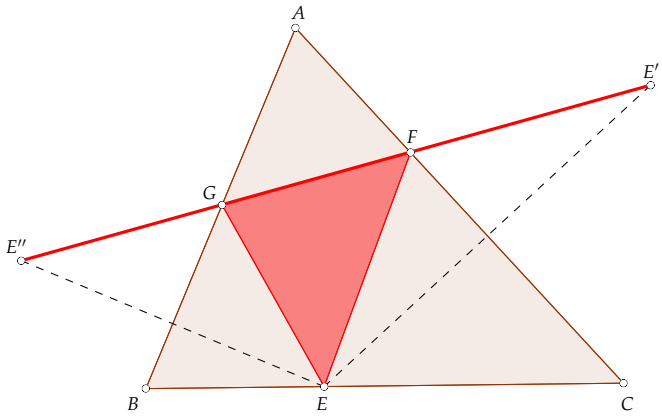


Figura 36. El triángulo EFG es el triángulo de perímetro mínimo.

$E'QRE''$ diferirá de la recta $E'FGE''$. En ambos casos, entonces, el perímetro de PQR será mayor que el perímetro de EFG.

Estas consideraciones prueban que el problema de encontrar un triángulo inscrito con el menor perímetro posible tiene una sola solución. Nos serviremos del carácter único de esta solución. Al construir un triángulo mínimo no aplicamos el mismo método a los tres vértices. El vértice E es el pie de la altura trazada desde A, pero obtuvimos los otros dos por medios que nada tienen que ver con las alturas relativas a los otros dos puntos. De hecho podríamos haber llevado nuestro razonamiento comenzando con el vértice B en lugar de A. Habríamos obtenido en tal caso un triángulo mínimo cuyo vértice F sería el pie de la altura trazada desde B. Análogo tratamiento podríamos argumentar con el punto C. Considerando que sólo hay un triángulo mínimo, estas construcciones, comenzadas a partir de cualquier otro vértice tiene que coincidir exactamente con el mismo triángulo EFG obtenido. Y por tanto los tres vértices de nuestro triángulo minimal son precisamente los pies de las perpendiculares trazadas desde el vértice opuesto. Esto es, se trata del triángulo órtico.

La demostración proporcionada por Schwarz necesitaba utilizar la propiedad de ángulos del triángulo órtico, junto con otras consideraciones, mientras que en este caso solo hemos utilizado ciertos teoremas relacionados con el círculo. La ventaja de la demostración de Fejér frente a la de Schwarz es que no emplea otros principios que los relacionados con la distancia más corta y la reflexión. Además esta demostración se caracteriza por no utilizar más que dos reflexiones, mientras que la de Schwarz emplea seis.

Vamos a finalizar esta sección con un ejemplo más que ilustra la estrecha relación entre un problemas de óptimos y las simetrías. Es una especie de recíproco del teorema de Fagnano, que dice asi:

En todo triángulo acutángulo hay un único punto en que la suma de distancias a los tres vértices es un mínimo. Este punto está situado de forma que las líneas que lo unen a los tres vértices forman entre sí ángulos de 120º.

Este teorema fue demostrado por L. Schruttka por un método que fue sugerido por analogía con la demostración de Schwarz sobre el triángulo órtico. Nosotros veremos una demostración mucho más breve, debida a Bückner.

Sea P un punto arbitrario tomado en el triángulo acutángulo ABC. Hacemos girar el triángulo ACP 60º alrededor del unto A hasta tomar la posición $AC'P'$. Este giro debe realizarse de forma que AC gire fuera del triángulo de manera que quede finalmente la línea AC entre AB y AC' (figura 38).

Tenemos entonces que $C'P' = CP$ y $PP' = AP$, porque el triángulo APP' no sólo es isósceles

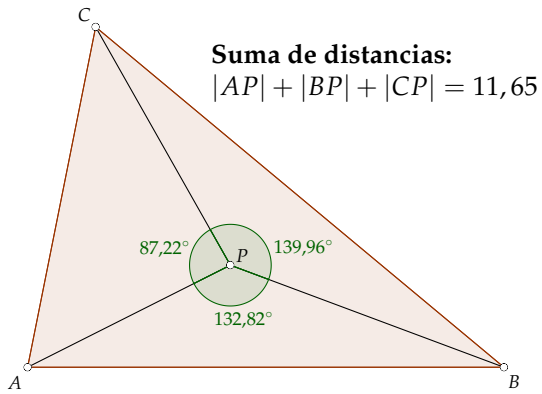


Figura 37. En este ejemplo la suma de distancias del punto P a los vértices no es un mínimo.

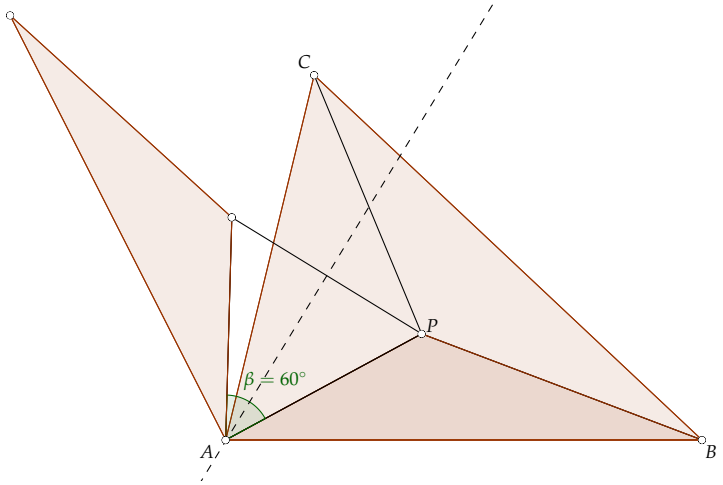


Figura 38. El triángulo APP' es equilátero.

sino equilátero. Por consiguiente *la trayectoria $BPP'C$ representa la suma de distancias desde P a los tres vértices A,B,C.* El punto C' es independiente de la posición de P. Todas las trayectorias correspondientes a las varias posiciones de P unen los puntos B y C'. La más corta de éstas es una vez más la línea recta que une a estos puntos (figura 39). Por tanto para que el camino sea mínimo el punto P_0 debe estar en la línea BC', y su posición queda totalmente determinada por el hecho de ser el ángulo AP_0C' de 60º.

El ángulo suplementario AP_0B es por esta razón de 120º. La construcción demuestra que puede existir un único punto de mínimo en P_0. Consecuentemente, la misma contrucción, sustituyendo A por cualquiera de los otros dos vértices conducirá al mismo punto P_0, y por consiguiente los ángulos BP_0C, CP_0A, serán también de 120º.

3. Consideraciones finales

Los resultados anteriores dan muestra fiel que los problemas geométricos de determinar máximos o mínimos utilizan frecuentemente dos postulados básicos en geometría: la existencia de la línea recta como distancia más corta entre dos puntos, y la noción de simetría axial. Observar que cualquier rotación es producto de simetrías. Incluso el problema isoperimétrico,

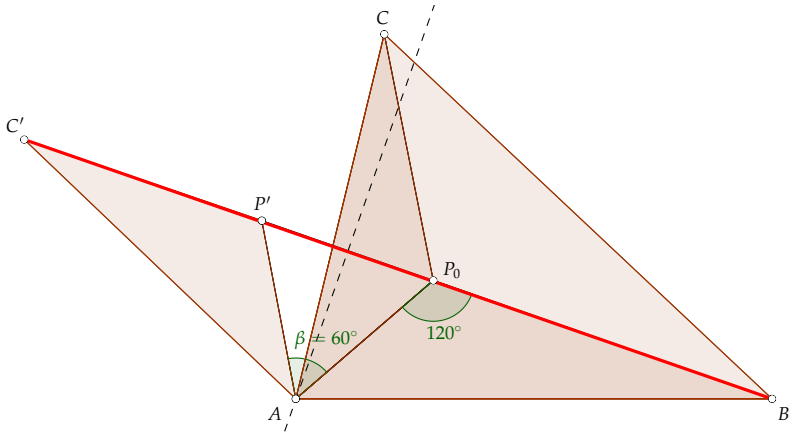


Figura 39. El punto P_0 buscado esta en la línea BC'.

que no hemos abordado aquí en toda su extensión, requiere en su demostración propiedades ciertamente relacionadas con la simetría de figuras convexas.

Un análisis más profundo de estos problemas, nos permite reflexionar sobre cómo es el comportamiento de los fenómenos naturales. En Física, existe el principio de mínima acción, según el cual, los sistemas evolucionan siempre hacia un estado de máxima estabilidad o mínima energía. Esto explica muchísimos fenómenos físicos. En cambio, llegando un poco más allá, nos preguntamos si realmente el *principio de mínima acción*, no sea sino una consecuencia de otro principio, si cabe más natural, y de naturaleza puramente geométrica. De este modo podríamos aventuarnos a establecer el siguiente principio, que llamaremos ***principio de simetría natural***

De todas las configuraciones posibles de un sistema físico, la Naturaleza escoge aquella que encierra mayor número de simetrías.

Bajo los principios de homegeneidad e isotropía del espacio, resulta claro que, si no hay direcciones privilegiadas, la configuración evoluciona del modo más simétrico. De ahí que la forma que adopta una estrella, un planeta, o un sistema de partículas libre, sea aquel que encierre el mayor número de simetrías. La figura plana con mayor simetrías es el círculo, en el espacio la esfera y en dimensiones superiores esferas n-dimensionales, cuyas propiedades son bien conocidas por los matemáticos.

Figura 40. El principio cosmológico del Universo dota a sus puntos de homogeneidad e isotropía.

Referencias

[1] RADEMACHER, H. y OTTO, T. *Números y figuras*, Alianza Editorial S.A, Madrid 1970.

Sobre el autor:
Nombre: Federico Ruiz López
Correo electrónico: federico.ruiz2011@gmail.com
Institución: Instituto de Educación Secundaria Jaime II, Alicante (España).

Historias de Matemáticas

A probabilistic approach to coincidences: the birthday paradox

Un enfoque probabilístico para las coincidencias: la paradoja del cumpleaños

Carla Santos y Cristina Dias

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 055–060, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 May'15; Aceptación: 18 Sep'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Ante la ocurrencia simultánea de eventos que consideramos muy poco probables, que llamamos coincidencia, todos quedamos sorprendidos. Sin embargo, la búsqueda de explicación para la ocurrencia de una coincidencia puede hacerse por diferentes enfoques. Desde el punto de vista de Diaconis y Mosteller, las coincidencias no son tan raras como creemos. La paradoja del cumpleaños ilustra la idea de que algo muy improbable desde el punto de vista individual, puedeocurrir un considerable número de veces, en general. Para ilustrar la validez de esta paradoja usaremos los cumpleaños de las listas de los escuadrones oficiales de la Copa del Mundo FIFA 2014.

Palabras Clave: Coincidencias, paradoja del cumpleaños, probabilidad, Copa del Mundo de la FIFA de 2014.

Abstract

Considering the simultaneous occurrence of events that we consider highly improbable, the so called coincidences, we all get surprised. However the search for the explanation of this occurrence can be made by different approaches. From the standpoint of Diaconis and Mosteller, coincidences are not as unusual as we think. The birthday paradox illustrates the idea that something highly improbable from the individual point of view may, however, occur a considerable amount of times in general. To illustrate the validity of this paradox we will use the birthdays from FIFA's official squad lists of 2014 World Cup.

Keywords: Coincidences, Birthday paradox, probability, 2014 FIFA World Cup.

1. Introduction

The perception that the simultaneous occurrence of certain events is almost impossible makes it be seen as something extraordinary, what we call coincidence. Before the surprise that the occurrence of this phenomenon creates and the difficulty in understanding it, there is a need to provide an explanation for it. This explanation may lie in mystical arguments, associated to some conspiracy theory, in synchronicity theory or using other approaches.

Although, for each one of us individually, a coincidence is seen as something extraordinary, considering a large number of events, extremely improbable coincidences will have high probability to occur (Diaconis and Mosteller, 1999). The probability theory allows us to determine the probability of these coincidences to occur.

If coincidences of birthday dates are much more common that we would think, then probably many of those other coincidences we are faced up, are much easier to happen than we suppose and aren't not that much extraordinary.

2. Coincidences

The small probability with which certain events happen simultaneously makes this occurrence to be seen as something extraordinary. We call it coincidence. Diaconis and Mosteller (1989) define coincidence as "a surprising concurrence of events, perceived as meaningfully related, with no apparent causal connection".

Nowadays, as always, the fascination for coincidences is high. Although there is not an accepted universal explanation, numerous scientists and researchers have suggested several theories.

Carl Jung, XX century, psychiatrist, tried to discover the reason for the existence of coincidences having created the synchronicity theory, in which the coincidence of facts in space and time was seen as something more than purely random, proposing the existence of a link between psychic and physical events.Despite the difficulty to prove this link, Jung's theory still has followers today. For example, Chopra, D. (2003), claim that "coincidences are not accidents but signals from the universe which can guide us toward our true destiny".

Amongst the ones that adopted a more skeptical vision, the attribution of meaning to coincidences is totally due to human nature itself. One of the explanations presented to the great relevance we attribute to coincidences is the apophenia, i.e., predisposal of our mind to try to identify connections and patterns in random data or meaningless. Another possible explanation, named egocentric bias, was given by Falk (1989), showing that the perception that something extraordinary occurred is highlighted when there is personal involvement in that event, having the predisposition to consider it subjectively less likely to occur than if it had happened to someone else.

In reality, events, that from an individual point of view are very slightly probable, occur with high frequency when a large number of people is involved. As Diaconis and Mosteller (1989) state in their law of truly large numbers:

> *"With a large enough sample, any outrageous thing is likely to happen."*

Let's suppose that an incredible coincidence happens per day to one person in a million. In a country like Portugal, with about 10.5 million people, in a year there will occur 3832 incredible coincidences. In the whole world, considering a population of 7 billion people, there will occur, annually, over two million and a half incredible coincidences.

The fact that we don't acknowledge the high number of opportunities for coincidences that day to day life provides, together with the incapacity of estimating the probability for the occurrence of these events, leads us to underestimate the probability for the occurrence of coincidences.

3. The Birthday Paradox

In contrast to what happens in some branches of Mathematics, the Probability Theory is fraught with problems that are easily understood by everyone, due to its close connection to everyday phenomena. This deceptive simplicity makes that, when facing a problem involving probabilities associated with a familiar phenomenon, the proposed solutions are supported only by common sense and intuition. However, these problems often mask a complex reasoning leading to counterintuitive results.

One of the most famous problems whose result has a difficult intuitive acceptance is the "birthday paradox". Although the "birthday paradox" is not a true mathematical paradox, often takes this designation (see Székely, 1986) because it gives a surprising response, contrary to what common sense would indicate.

Since it have been proposed by Richard von Mises, in 1939, the birthday paradox has occurred frequently in the literature under different perspectives considering, for example, non-uniform birth frequencies (see Joag-Dev and Proschan , 1992; Mase, 1992; Henze, 1998; Camarri and Pitman, 2000) or generalizations (see Székely, 1986; Nishimura and Sibuya, 1988; Flajolet et al., 1992; Polley, 2005; McDonald, 2008). Among the different applications of the birthday paradox we can detach cryptography (e.g. Suzuki et al. 2008; Galbraith and Holmes, 2010) and forensic sciences (e.g. Weir, 2007: Kaye, 2012; Obasogie, O.K., 2013).

In the statement of this problem is asked:

> *"How many people should be in a room so that the probability of two of them celebrate their birthday on the same day exceeds 50 %?"*

This is the simplest version, based on the assumptions that a year has 365 days (ignoring the existence of leap years), birthdays are independent from person to person and that the 365 possible birthdays are equally likely. (see Feller, 1968).

As there are 365 possible dates for birthdays, we have the (correct) perception, that is very unlikely to find someone with the same birthday as us. Whereas the distribution of birthdays is uniform, randomly choosing a person, the probability of that person celebrating the birthday on the same day that another person is $\frac{1}{365}$, this is, there is only one day, among 365 days of the year, in which the birthday dates may coincide. Therefore, the probability of two people have the same birthday is extremely low, $\frac{1}{365} = 0,0027 = 0,27\,\%$. Even if one person compare his birthday with 20 people, the probability of match remains relatively low, about 5 %.

As a matter of fact, the question is not about the probability of a certain person of the group having the same birthday date than one other person picked randomly, but the probability of some of the persons of the group having a common birthday date with any other person of that group. The detail that makes all the difference in this problem is the fact that in a group of people each one of them can check with each one of the others if their birthdays coincide.

4. Solving the Birthday Paradox

Trying to find, in a group of k persons, at least one person with the same birthday as another can be seen as a case of sampling without replacement, Parzen (1960).

Let p_k be the probability that, in a group of k persons, at least one person have the same birthday date than another, and $q_k = 1 - p_k$ the probability that all k persons have different birthdays.

Let us suppose the group has only two persons, this is, $k = 2$. The first person can have his birthday on any of the 365 days of the year and the second one can have his birthday on any of the remaining 364 days. The probability that these two persons do not have the same birthday is

$$q_2 = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365} = 0,997$$

If we add one more person to the group, this third person cannot share the birthday with any of the other two, in order to, all three, have different birthdays. For the third person there are 363 available days, so the probability that three persons do not have the same birthday is

$$q_a = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) = \left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right) = 0,992$$

Generalizing this for a group of k persons, the probability that all k persons have different birthdays is

$$q_k = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{365}\right) = \left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-k+1}{365}\right) =$$
$$= \frac{364!}{365^{k-1}(365-k)!} = \frac{365!}{365^k(365-k)!}$$

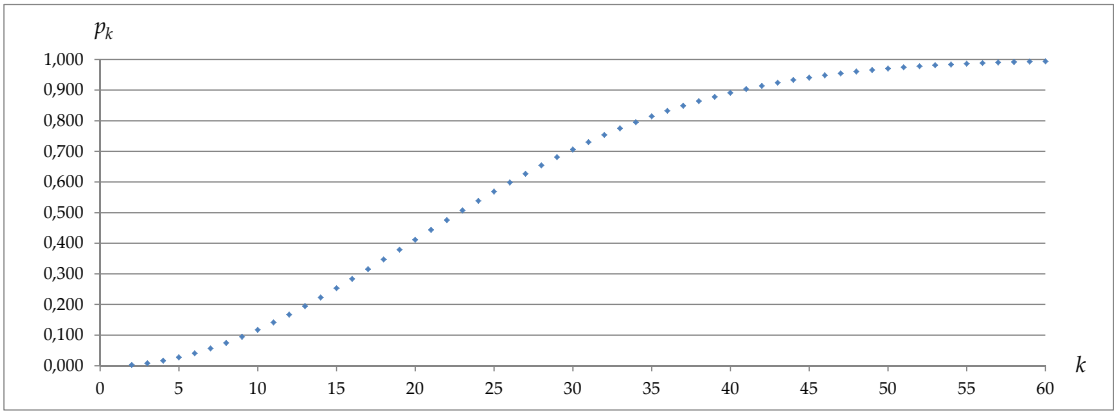
To have p_k larger than 50 %, q_k must be less than 50 %. Then, we have to find the value of k, for which the probability, q_k, that all k persons have different birthdays, is less than 50 %. Using Microsoft Excel (or any other similar program), to calculate the corresponding probability for $k = 2, 3, 4, \ldots$ onwards until you can get a value for p_k larger than $0,5$, we find $k = 23$ (see Table 1).

Table 1. q_k and p_k values.

k	q_k	p_k		k	q_k	p_k
2	0,997	0,003		21	0,556	0,444
3	0,992	0,008		22	0,524	0,476
4	0,984	0,016		23	0,493	0,507
5	0,973	0,027		30	0,294	0,706
10	0,883	0,117		50	0,030	0,97
20	0,589	0,411		57	0,010	0,99

As we can see on Table 1 or in Graph 1, the first value for which the probability p_k is larger than $0,5$ is 23.

So, if there are 23 persons in a room, the probability of, at least, two of them share the birthday is a little more than 50 %. With 50 persons this probability increases to 97 %, and with "only" 57 persons the probability is 99 %.



Graph 1. p_k *values for* $2 \leq k \leq 60$.

5. A curious illustration: The birthday paradox in 2014 FIFA's world cup

To test the birthday paradox we used the birthdays from FIFA's official squad lists of 2014 World Cup.

In this World Cup, 32 squads were in competition, each team with 23 players. The birthday paradox states that a group of 23 people the probability of two of them celebrate their birthday on the same day is approximately 50 %. Then, we expect that about half of these teams have at least a couple of players to celebrate their birthday on the same day.

Based on the biographical data of the players available on the FIFA website, we found that there are 11 squads(Australia, United States of America, Cameroon, Bosnia and Herzegovina, Russia, Nigeria, Spain, Colombia, Netherlands, Brazil and Honduras) with one pair of players celebrating the birthday on the same day, and 5 teams (Iran, France, Argentina, South Korea and Switzerland) with two pairs of players with the same birthday.

Since 16 of the 32 teams have shared birthdays, the Birthday Paradox is confirmed!

References

[1] CAMARRI, M. and PITMAN, J., *"Limit distributions and random trees derived from the birthday problem with unequal probabilities"*, Electron. J. Probab. 5, 1–18, 2000.

[2] CHOPRA, D., *The Spontaneous Fulfillment of Desire Harmony Books*, New York, 2003.

[3] COPPERSMITH, D., *Another birthday attack*, Advances in Cryptology, Proc. of Crypto'85, LNCS, vol. 218, Springer- Verlag pp. 14–17, 1986.

[4] DIACONIS, P. and MOSTELLER, F., *"Methods of Studying Coincidences"*, Journal of the American Statistical Association, vol 84, No 408, 1989.

[5] FALK, R., *"The Judgment of Coincidences: Mine Versus Yours"*, Amer. J. Psych. 102, 477–493,1989.

[6] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3rd ed., John Wiley, New York, 1968.

[7] FLAJOLET, P., GARDY, D., and THIMONIER, L., *"Birthday paradox, coupon collectors,caching algorithms, and self-organizing search"*, Discrete Applied Mathematics 39, 1992.

[8] GALBRAITH, S. D. and HOLMES, M. *"A non-uniform birthday problem with applications to discrete logarithm"*, IACR Cryptology ePrint Archive 2010: 616, 2010.

[9] JOAG-DEV, K. and PROSCHAN, F. *"Birthday problem with unlike probabilities"*, American Mathematical monthly 99: 10–12, 1992.

[10] KAYE, D. H., *"Beyond Uniqueness: The Birthday Paradox, Source Attribution, and Individualization in Forensic Science Testimony Law"*, Probability & Risk, 2012.

[11] MASE, *"Approximations to the birthday problem with unequal occurrence probabilities and their application to the surname problem in Japan"*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 44, 479–499, 1992.

[12] MATTHEWS, R. A. J. and BLACKMORE, S. I., *"Why are coincidences so impressive?"*, Perceptual and Motor Skills, 80,

[13] MCDONALD, M. P. and JUSTIN LEVITT, J., *"Seeing double voting: An extension of the birthday problem"*. Election Law Journal, 7(2): 111–122, 2008.

[14] MERKUR, D., *Mystical Moments and Unitive Thinking*. State University of New York Press, Albany, NY, 1999.

[15] NISHIMURA, K. and SIBUYA, M., *"Occupancy with two types of balls"*, Ann. Inst. Statist. Math., 40, 77–91, 1988.

[16] OBASOGIE, O. K., *"High-Tech, High-Risk Forensics"*, N.Y. Times, July 25, 2013.

[17] PARZEN, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, 1960.

[18] PIPES, D., *Conspiracy: How the Paranoid Style Flourishes and Where It Comes From*, New York: Touchstone, 1997.

[19] POLLEY, W. J., *"A Revolving Door Birthday Problem"*, UMAP Journal, Vol. 26 Issue 4, p. 413, 2005.

[20] SU, C. and SRIHARI, S. N., *"Generative Models and Probability Evaluation for Forensic Evidence"*, P. Wang (ed.), Pattern Recognition, Machine Intelligence and Biometrics, Springer, 2011.

[21] SUZUKI, K., TONIEN, D., KUROSAWA, K. and TOYOTA, K., *"Birthday paradox for multicollisions"*. E91-A(1):39–45, 2008.

[22] SZÉKELY, G. J., *"Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics"*. AkadémiaiKiado, Budapest, 1986.

[23] WEIR, B.S., *"Therarity of DNA profiles"*. Annals of Applied Statistics; 1: 358–370, 2007.

Sobre las autoras:

Nombre: Carla Santos
Correo electrónico: carla.santos@ipbeja.pt
Institución: Instituto Politécnico de Beja. Portugal.

Nombre: Cristina Dias
Correo electrónico: cpsilvadias@gmail.com
Institución: Instituto Politécnico de Beja. Portugal.

Historias de Matemáticas

Contraejemplos en Matemáticas

Counterexamples in Mathematics

Antonio Rosales Góngora

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 061–078, ISSN 2174-0410
Recepción: 13 Feb'15; Aceptación: 10 Jul'15

1 de Octubre de 2015

Resumen

Un contraejemplo es un ejemplo que prueba la falsedad de un enunciado. Cuando se quiere demostrar la falsedad de una afirmación es suficiente con encontrar un ejemplo que incumpla la afirmación.

Un teorema necesita a menudo de varias hipótesis, para comprender como funcionan es importante estar convencido de la necesidad de cada una de ellas. En este artículo hacemos un recorrido por algunas propiedades y teoremas matemáticos viendo la necesidad de todas las hipótesis.

Palabras Clave: contraejemplos, lógica, conjuntos, grupos, anillos, números reales, sucesiones, funciones, probabilidad.

Abstract

A counterexample is an example that proves the falsehood of a terms of reference. When the falsehood of an affirmation wants to be demonstrated it is sufficient in spite of finding an example that breaks the affirmation.

A theorem needs often from several hypotheses, to understand since they work it is important to be sure of the need of each one of them. In this article we do a tour for some properties and mathematical theorems seeing the need of all the hypotheses.

Keywords: counterexamples, logic, sets, groups, rings, royal numbers, successions, functions, probability.

1. Introducción

Un contraejemplo es la excepción que confirma la regla. Los contraejemplos juegan un papel clave para la comprensión de las matemáticas.

Un teorema es válido en todos los casos en que las hipótesis impuestas en el enunciado se verifican. La negación de un enunciado, es decir la afirmación que es falso, se demuestra por

la existencia de un caso en el que se verifican las hipótesis, son verdaderas, sin que lo sea la conclusión. La justificación matemática de la falsedad de un enunciado se consigue mediante un contraejemplo.

En la mayoría de los casos un teorema necesita varias hipótesis, para comprenderlo es importante estar convencido de la necesidad de cada una de ellas. Se debe tratar de demostrar que el enunciado obtenido suprimiendo una de las hipótesis es falso.

Algunos conceptos, cuando se estudian por primera vez, dan la impresión que un resultado debe ser verdadero, por ejemplo, toda función continua en cero es continua en un entorno de cero; si esto ocurre es porque la idea intuitiva es errónea, el dar algunos contraejemplos a esas ideas preconcebidas ayuda a rectificar esa mala intuición.

2. Lógica, conjuntos, aritmética

La lógica matemática comienza con la obra de George Boole *"The Mathematical Análisis of Logic"* (El Análisis Matemático de la Lógica) publicado en 1847. El libro es lo bastante diferente de lo hasta entonces realizado como para considerarlo el nacimiento de una nueva teoría (Teoría de la Lógica Matemática) y no como un paso más en el desarrollo de una antigua.

George Boole (1815 – 1864), de formación autodidacta, redactó su libro en solo unas semanas en la primavera de 1847, con 31 años. Es una obra que ofrece una lógica basada en la matemática, sobre todo en el álgebra, cuyas ideas capitales son la de clase, elemento de clase, y operaciones de selección de elementos de clase y su teoría está constituida por el uso de ecuaciones.

La validez de los procesos del Análisis Matemático no depende de la lectura o interpretación de los signos en él utilizados, sino solamente de las leyes que gobiernan los posibles modos de unión de esos signos.

El álgebra de Boole es una sola teoría pero tiene, al menos, dos sistemas de lectura, uno que lo pone en relación con clases y otro que lo pone en relación con enunciados.

La teoría de conjuntos formaliza, en torno a 1900 bajo el impulso de Cantor y Dedekind, la lógica matemática y la convierte en una rama más de la matemática.

Los matemáticos se apoyan en particular en la lógica de predicados de primer orden, construida con la ayuda de conectores proposicionales "no", "y", "o", "implica", "equivalente", de variables $x, y, z \ldots$, de proposiciones, de predicados $P(x)$, $Q(x,y)$ ... y de los cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$.

Si se usan cuantificadores en un texto, su manejo debe hacerse con cuidado. Así, la proposición $\forall x \exists y\, (P(x,y))$ puede ser verdadera mientras que $\exists y \forall x\, (P(x,y))$, obtenida intercambiando los cuantificadores, es falsa.

Así si $P(x,y)$ representa la afirmación: x es menor o igual que y, entonces, para todo número natural x, si se elige un natural y mayor o igual que x, la afirmación $P(x,y)$ es verdadera; la proposición $\forall x \exists y\, (P(x,y))$ es verdadera. En cambio, como en $\mathbb{N}$ no existe un elemento máximo, la afirmación $\exists y \forall x\, (P(x,y))$, es falsa.

Observemos que si $\exists y \forall x\, (P(x,y))$, es válida, entonces $\forall x \exists y\, (P(x,y))$ también lo es, es decir, la implicación $\exists y \forall x\, (P(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y\, (P(x,y))$, es universalmente valida. Intuitivamente podemos ver que en el término de la izquierda, y no depende de x mientras que en el de la derecha puede hacerlo; la condición es menos fuerte. Este es el motivo por el que hay que utilizar cuantificadores de distinta naturaleza para pasar de la continuidad a la continuidad uniforme.

Los conectores "y" y "o" se simbolizan respectivamente por $\wedge$ y $\vee$. De este modo las proposiciones $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ y $\forall x(P(x)) \wedge \forall x(Q(x))$ son equivalentes, de la misma forma que

$\exists x(P(x) \vee Q(x))$ y $\exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))$. No ocurre lo mismo con $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ y $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$ pues la primera puede ser verdadera y la segunda falsa.

Tomando $\mathbb{N}$ como conjunto de referencia y representamos por $P(x)$, para todo natural x, la afirmación: x es par, y por $Q(x)$ la proposición: x es impar. Entonces $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ expresa que todo número natural es par o impar, lo que es verdadero; por el contrario $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$ expresa que son todos los naturales pares o todos los naturales impares, lo cual es falso.

De la misma forma $\exists x(P(x) \wedge \exists x(Q(x))$ puede ser verdadera sin serlo $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$. En efecto, usando las mismas hipótesis anteriores, $\exists x(P(x) \wedge \exists x(Q(x))$ expresa que al menos existe un número natural par y al menos un natural impar, mientras que $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ expresa que existe simultáneamente un natural par e impar.

3. Teoría de Conjuntos

La Teoría de conjuntos, obra de los matemáticos alemanes George Cantor y Richard Dedekind, aparece a finales del XIX. En una primera aproximación, ahora calificada de ingenua, Cantor define conjunto como "una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto".

En 1903 Bertrand Russel demuestra la inconsistencia de la teoría y cuestiona la definición de conjunto en la teoría de Cantor. Pero pronto la teoría axiomática de Zermello (1908) y los refinamientos de esta debidos a Fraenkel (1908), Skolem (1923), Von Newman (1925) y otros sentaron las bases de la teoría actual.

Tras veinte años de trabajo, en 1902 Gottlob Frege había terminado el segundo volumen de sus *"Las leyes fundamentales de la aritmética"* con el que trataba de dar fundamentación lógica a las matemáticas a partir de la teoría de conjuntos, terminando de imprimir el libro, Frege recibió una nota de Russel en la que le explicaba que había encontrado una paradoja a la teoría de conjuntos. Frege, sin tiempo para más, insertó la siguiente nota al final del libro:

> *"Difícilmente puede haber algo más indeseable para un científico que ver el derrumbe de sus cimientos justamente cuando la obra está acabada. La carta del Sr. Bertrand Russell me ha puesto en esta situación ..."*

El matemático y filósofo inglés Bertrand Russel (1872 - 1970) contaba así su paradoja:

> *"Me parece que una clase a veces es, y a veces no es, un miembro de sí misma. La clase de las cucharitas de té, por ejemplo, no es otra cucharita de té, pero la clase de cosas que no son cucharitas de té es una de las cosas que no son cucharitas... [esto] me condujo a considerar las clases que no son miembros de sí mismas; y éstas, parecía, debían formar una clase. Me pregunté si esta clase es o no un miembro de sí misma. Si es un miembro de sí misma, debería poseer las propiedades que definen a dicha clase, que consisten en no ser miembros de sí mismas. Si no es un miembro de sí misma, no debe poseer la propiedad definitoria de la clase, y por tanto debe ser un miembro de sí misma. Así cada alternativa lleva a su opuesta y existe una contradicción."*

Si consideramos el conjunto $A = \{x \mid x \notin X\}$ entonces el objeto A pertenece o no pertenece al conjunto A.

Si A pertenece a A entonces, por definición de A, se tiene que A no pertenece a A; si A no pertenece a A, la misma definición permite afirmar que A pertenece a A. Así las dos afirmaciones son simultáneamente verdaderas.

En definitiva había descubierto que el conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos lleva a una contradicción.

Lo que Whitehead le dijo a Russell cuando este le contó su descubrimiento es bastante gráfico: *"nunca habrá otra vez una alegre y confiada mañana"*. Si E denota el conjunto de todos los conjuntos y $P(E)$ el conjunto de las partes de E, entonces $P(E)$ está incluido en E pero esto contradice el teorema de Cantor que afirma que *"si E es un conjunto, no existe inyección alguna de P(E) en E"*, es la conocida como *paradoja de Cantor*.

Para solucionar tales problemas se elaboró una nueva teoría de conjuntos. Es la teoría de Zermello – Fraenkel, ZF, llamada así porque fue concebida por el matemático y lógico alemán Ernest Zermello en 1908 – expuesta en sus Investigaciones sobre los fundamentos de la Teoría de conjuntos – y modificada por el matemático y lógico israelí Abrahan Fraenkel en 1921 y 1922. La teoría ZF sirve de fundamento a las matemáticas, pues permite una construcción rigurosa aunque su consistencia, es decir la ausencia de paradojas, no podrá probarse como demostró Kurt Gödell en 1931.

Especialmente con vistas a la noción de cardinal, Georg Cantor utiliza básicamente correspondencias biunívocas entre conjuntos, mientras que Richard Dedekind introduce la noción de aplicación entre conjuntos.

Sabemos que dada una aplicación f de un conjunto E en un conjunto F, la imagen directa de un subconjunto A de E por f es el subconjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ de F y, si M es un subconjunto de F, la imagen recíproca de M por F es el subconjunto $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$ de E.

Si A y B son dos subconjuntos de E, se tiene $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, pero en general se tiene sólo la inclusión $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Si f es inyectiva la inclusión se transforma en igualdad.

Considerando la aplicación $f : n \to f(n) = |n|$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ y los subconjuntos $A = \mathbb{N}$ y $B = -\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$. Tendremos $A \cap B = \{\emptyset\}$ y $f(A \cap B) = \{\emptyset\}$. Sin embargo, $f(A) = f(B) = \mathbb{N}$ luego $f(A) \cap f(B) = \mathbb{N}$, así $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Sabemos que dados dos subconjuntos A de E y B de F y una aplicación f de E en F se tienen las inclusiones $A \subset f^{-1}(f(A))$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. La primera será una igualdad si f es inyectiva y la segunda si f es sobreyectiva de E en F.

Considerando de nuevo la aplicación $f : n \to f(n) = |n|$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ y el subconjunto $A = \mathbb{N}$, tendremos $f(A) = \mathbb{N} = f(\mathbb{Z})$, por tanto $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$, por tanto $A \neq f^{-1}(f(A))$.

Intuitivamente dos conjuntos son equipolentes si tienen "el mismo número de elementos", lo que conduce a la noción de cardinal de un conjunto, desarrollada por Cantor paralelamente a la noción de ordinal (los cardinales sirven para contar el número de elementos y los ordinales para numerarlos).

Todos los conjuntos tienen un cardinal que permite establecer que dos conjuntos son equipolentes si y sólo si tienen el mismo cardinal.

Euclides estableció que "la parte es siempre más pequeña que el todo" que, como sabemos, sólo es cierto en conjuntos finitos. En un conjunto infinito existe una parte estricta con un mismo cardinal, es decir, equipolente a él.

Así, el conjunto P de los números naturales pares es una parte estricta de $\mathbb{N}$ y la aplicación $f : n \to f(n) = 2n$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre P, así pues $\mathbb{N}$ y P son equipolentes. De la misma forma la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in]-1, 1[; \ldots f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ define una aplicación biyectiva entre los números reales y una parte estricta suya: $]-1, 1[$.

El conjunto $\mathbb{N}$ parece tener "menos" elementos que $\mathbb{N}^2$. Sin embargo esta conjetura no es cierta, ya que ambos conjuntos son equipolentes pues la aplicación $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por

$f(p,q) = a_{p+q} + q$ siendo $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$ (cociente exacto) es biyectiva.

En una carta a Dedekind fechada el 29 de Junio de 1877 Cantor escribe: *"je le vois, mais je ne le crois pas"* ("lo veo pero no me lo creo"), refiriéndose a la equipolencia que había establecido entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$. Hoy sabemos que todo conjunto infinito es equipolente a su cuadrado.

Se demuestra que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números algebraicos son numerables, es decir, equipolentes a $\mathbb{N}$; podría pensarse que ocurre lo mismo para todos los conjuntos infinitos, pero no es así pues, por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es numerable.

4. Aritmética

Algunas conjeturas han necesitado varios siglos para demostrarlas. La más celebre es debida a Fermat demostrada en 1993 – 1994 por el matemático inglés Andrew Wiles y conocida hoy como Teorema de Fermat – Wiles: *"Para todo entero natural $p \geq 3$, la ecuación $x^p + y^p = z^p$ no admite soluciones (x, y, z) con x, y, z naturales no nulos"*.

Inspirándose en este futuro resultado, Leonhard Euler conjeturó más generalmente que una potencia $n-$ésima no puede escribirse como la suma de k potencias $n-$ésimas con $k < n$. Así, no se puede escribir $q^4 = a^4 + b^4 + c^4$ ni $q^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ con a, b, c, d, q números naturales no nulos, lo cual es falso pues $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$; resultado establecido por el norteamericano Noam Elkies en 1966, lo que puso fin a la conjetura de Euler.

Tenemos también la igualdad $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$. Se puede demostrar que todo natural se puede escribir como la suma de al menos nueve cubos de elementos de $\mathbb{N}^*$, pero no se puede reducir a ocho cubos.

Los números de Fermat, llamados así porque fueron introducidos por Fermat, son los naturales $F_n = 2^{2^n} + 1$ para n natural, se tiene $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$. Como vemos F_0, F_1, F_2, F_3 son primos. Fermat creyó demostrar en 1658 que F_n es un número primo para todo natural n, lo cual es falso pues el número de Fermat $F_5 = 2^{32} + 1$ es divisible por 641: $640 = 5 \times 2^7 \therefore 5 \times 2^7 \equiv -1(\text{mód}641)$, elevando a la cuarta se tiene: $5^4 \times 2^{28} \equiv 1(\text{mód}641)$, como $5^4 \equiv 625 \equiv -16(\text{mód}641)$; así multiplicando las congruencias se tiene: $-2^{32} = \left(-2^4\right) \times 2^{28} \equiv 1(\text{mód}641)$, así pues 641 divide a F_5 y como $641 \neq F_5$, entonces F_5 no es primo. De hecho F_5 es el producto de los dos número primos 641 y 6700417. Landry probó en 1880 que $F_6 = 274177 \times 67280421310721$. El entero F_4 es, al igual que F_0, F_1, F_2, F_3 primo pero no se ha podido encontrar algún n mayor o igual a 5 tal que F_n sea primo. La conjetura *"para todo entero natural n, F_n es un número primo"* de Fermat parece transformarse en *"para todo entero n mayor o igual que 5, F_n no es primo"*.

5. Grupos

Évariste Galois introdujo hacia 1830 la noción de grupo. Murió poco tiempo después en un duelo a los 21 años. Sus notas son confusas y se necesitaron una quincena de años para comprender su importancia.

Dos tipos de problemas llevan a la formalización de esta teoría. El estudio de las permutaciones, es decir, el estudio de las biyecciones de un conjunto finito en el mismo; y el estudio de los grupos de transformaciones en geometría, es decir, grupo de las biyecciones del plano o del espacio que conservan algunas propiedades (isometría, semejanza ...)

Matemáticos como Camile Jordan y Leopold Kronecker vieron la importancia de funda-

mentar esta teoría sobre axiomas para darle generalidad. La formalización definitiva no se hará hasta 1893.

Una ley de composición interna sobre un conjunto E es una aplicación de $E \times E$ en E. Entre las leyes de composición internas más frecuentemente utilizadas en los conjuntos numéricos, son raras las que no son asociativas, pero existen. Por ejemplo, la ley de composición interna $*$ sobre $\mathbb{N}$ dada por $a * b = a^b$ no es asociativa pues se tiene $(2 * 2) * 3 = 2^{2^3} = 4^3 = 64$, mientras que $2 * (2 * 3) = 2^{2^3} = 2^8 = 256$.

Tampoco es conmutativa pues $2 * 3 = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = 3 * 2$.

Sabemos que si una ley de composición interna posee un elemento neutro a derecha y un elemento neutro a izquierda entonces son iguales, lo que asegura la unicidad y existencia de elemento neutro. No obstante, una ley puede tener una infinidad de elementos neutros a un lado por lo que, según lo anterior, no posee ninguno al otro lado.

Así la ley de composición interna $*$ sobre $\mathbb{N}$ dada por $a * b = b$ es asociativa y todo natural es un elemento neutro a la izquierda.

La noción de grupo fue axiomatizada en 1893 por el matemático Walter Von Dyck (1856 – 1934). En 1882 ya había dado una axiomatización de grupos finitos en el número vigésimo de la revista *Mathematische Annalen*. En este mismo número, su compatriota Heinrich Weber (1842 – 1913) había dado una axiomatización diferente a la de Dyck. Aquí imponía la asociatividad de la ley y la regularidad a derecha e izquierda, es decir, que cualesquiera que sean los elementos a, b y c de G , $a * c = b * c$ implica $a = b$ y $c * a = c * b \Rightarrow a = b$.

En el caso de conjuntos infinitos estas propiedades son insuficientes para obtener un grupo.

Sabemos que un conjunto G con una ley de composición interna $*$ es un grupo si verifica los axiomas I) la ley $*$ es asociativa II) La ley $*$ posee elemento neutro III) Todo elemento de G posee simétrico. Estos tres axiomas son necesarios pues existen leyes de composición internas verificando dos de ellos que no tienen estructura de grupo. Por ejemplo, la ley de composición interna sobre $\mathbb{N}$ dada por $a * b = a + b$ es asociativa y regular a izquierda y derecha pero todo elemento no tiene simétrico.

La ley definida sobre el conjunto $E = \{e, a, b\}$ por $e * x = x * e = x$, para todo elemento x de E y $x * y = e \ \forall x, y \in E - \{e\}$, cumple los axiomas II y III pero no es asociativa pues $a * (a * b) = a * e = a$ y $(a * a) * b = e * b = b$.

6. Anillos y Cuerpos

La noción de anillo fue introducida, en la segunda mitad del siglo XIX, por los matemáticos alemanes Richard Dedekind (1836 – 1916) y David Hilbert (1862 – 1943) para generalizar los conjuntos de números $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dotados de la adición y el producto. La introducción de anillos no conmutativos viene justificada por su utilidad para estudiar las matrices y algunos espacios de funciones. En esta misma época Richard Dedekind introduce la noción de ideal según una idea de Ernst Kummer (1810 – 1893), para afinar la noción de divisibilidad. En los años 20 del siglo pasado, la teoría de anillos se enriquece con la introducción de diferentes tipos de anillos como los anillos factoriales, principales o noetherianos.

Como sabemos un anillo es una terna $(A, +, *)$ donde $(A, +)$ es un grupo abeliano aditivo y $*$ es una ley de composición interna sobre A, asociativa y distributiva respecto a $+$ en A y que posee elemento neutro. Evidentemente existen anillos no conmutativos, por ejemplo el anillo infinito $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 2 y coeficientes reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pese a que el teorema de Wedderburn, establecido independientemente en 1905 por el matemático escocés MacLogan Wedderburn (1882 – 1948) y el matemático norteamericano Leonard Dickson (1874 – 1954), establece que todo cuerpo finito es conmutativo, esto no es válido para los anillos.

En efecto el anillo $M_2(F_2)$ de matrices cuadradas de segundo orden con coeficientes en el cuerpo $F_2 = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$, de los enteros módulo 2, no es conmutativo y es finito pues su cardinal es $2^4 = 16$.

Por otra parte la condición de existencia de elemento neutro es fundamental. Si consideramos P el conjunto de los enteros relativos pares, sabemos que es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ estable para la multiplicación $\times$ de $\mathbb{Z}$. Así $(P, +)$ es un grupo abeliano aditivo, como x es asociativa y distributiva respecto de $+$ sobre P, entonces P es un pseudoanillo. Si P fuese un anillo, entonces $(P, \times)$ poseería un elemento neutro q tal que $2 \times q = 2$ de donde $q = 1$ en contradicción con la pertenencia de q a P. ¿Cuántas raíces tienen un polinomio?, estamos familiarizados con la respuesta en el caso general de polinomios con coeficientes en un cuerpo (o anillo integro), pero si consideramos por ejemplo el anillo $A[x]$ de polinomios con coeficientes en el anillo $A = {}^{\mathbb{Z}}/_{4\mathbb{Z}}$, enteros módulo 4, resulta que el polinomio $2x + 1$ no admite ninguna raíz en A mientras que el polinomio $2x$ admite dos raíces (0 y 2) en A.

En el anillo $A[x]$ de los polinomios con coeficientes en el anillo $A = {}^{\mathbb{Z}}/_{12\mathbb{Z}}$, enteros módulo 12, la ecuación $x^2 = 4$ posee cuatro soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, $x_4 = 10$, y la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ también admite como raíces $2, 7, 10, 11$. Así los polinomios $x^2 - 4$ y $x^2 + 3x + 2$ son de segundo grado y ambos admiten cuatro raíces en A.

Como vemos en el anillo $A[x]$ un polinomio puede tener distintas factorizaciones: $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x - 10) = (x - 4) \cdot (x - 8)$ o $x^2 + 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 7) = (x - 10) \cdot (x - 11)$.

Como es sabido un polinomio P con coeficientes en un cuerpo conmutativo K es irreducible sobre K (o en el anillo $K[x]$) si $gr(P) \geq 1$ y si todo divisor de P en $K[x]$ es un polinomio constante o del mismo grado que P. Además un polinomio de grado 2 ó 3 sobre un cuerpo conmutativo K es irreducible si no admite raíces en K. Esta propiedad no es válida para grado 4 pues existen polinomios de grado 4 sin raíces. Así $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ nos muestra que el polinomio $x^4 + 1$ es reducible sobre $\mathbb{R}$, sin embargo, $x^4 + 1$ no admite raíces reales pues $x^4 + 1 > 0$ para todo número real x.

En general, el producto de dos polinomios de grados dos con coeficientes reales de discriminante estrictamente negativo es un polinomio de grado cuatro sobre $\mathbb{R}$ sin raíces reales.

7. Espacios Vectoriales

La noción de espacio vectorial fue introducida en 1840 por Arthur Cayley (1821 – 1895) y Hermann Grassmann (1809 – 1877). Cayley consideró las $n-$uplas de reales como un elemento y definió operaciones sobre estos objetos.

Los espacios vectoriales fueron formalizados en 1888 por Giuseppe Peano, convirtiéndose en un elemento natural de la geometría, pero también de otras muchas ramas como el análisis funcional. El álgebra lineal permite utilizar la intuición geométrica en teorías matemáticas desprovistas, aparentemente, de soporte intuitivo.

Como sabemos un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo K, con elemento unidad 1, es un grupo abeliano $(E, +)$ con una ley de composición externa de dominio K: $K \times E \to E$ tal que $(\lambda, x) \to \lambda x$ verificando los cuatro axiomas siguientes:

I. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

II. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

III. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

IV. $1 \cdot x = x$

Estos cuatro axiomas son necesarios, es decir, ninguno de estos axiomas es consecuencia de los otros.

En efecto, consideremos un espacio vectorial E de dimensión finita $n \geq 2$ sobre el cuerpo de los complejos, un subespacio vectorial D de dimensión 1 de E y una ley de composición externa $*$ de $\mathbb{C} \times E \to E$ dada por $(\lambda, x) \to \lambda * x = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in D \\ \overline{\lambda} x & \text{si } x \notin D \end{cases}$

Podemos comprobar que se verifican los axiomas II, III y IV, sin embargo no se verifica el axioma I pues si consideramos un vector y_0 no nulo de D y un vector $z_0 \notin D$ (existe pues $h \geq 2$), entonces el vector $y_0 + z_0 \notin D$ pues eligiendo un complejo no real λ (por ejemplo i) se tiene: $\lambda * (y_0 + z_0) = \overline{\lambda}(y_0 + z_0) = \overline{\lambda} y_0 + \overline{\lambda} z_0$, en cambio: $\lambda * y_0 + \lambda * z_0 = \lambda y_0 + \overline{\lambda} z_0$, lo que muestra que $\lambda * (y_0 + z_0) \neq \lambda y_0 + \lambda z_0$. El axioma I no se verifica. No obstante, como $\overline{1} = 1$, y para cualesquiera escalares λ y μ, $\overline{\lambda + \mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$ y $\overline{\lambda\mu} = \overline{\lambda}\overline{\mu}$ es claro que se verifican los axiomas II, III y IV.

Si consideramos un espacio vectorial real E no nulo y definimos la ley de composición externa $*$ de $\mathbb{R}$ sobre E de la siguiente forma $\lambda * x = x, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Eligiendo un vector no nulo x_0 de E y haciendo $\lambda = \mu = 1$ tendremos: $(\lambda + \mu) * x_0 = x_0$. En cambio, $\lambda * x_0 + \mu * x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0$ por tanto no se cumple el axioma II.

Sin embargo, $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene $\lambda * (x + y) = x + y = \lambda * x + \lambda * y$; $\lambda * (\mu * x) = \mu * x = x = (\lambda\mu) * x$ y $1 * x = x$ por tanto se verifican los axiomas I, III y IV.

Considerando ahora un espacio vectorial complejo $E \neq \{\emptyset\}$ y definiendo la ley de composición externa de dominio $\mathbb{C}$ sobre $E : \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda * x = \mathrm{Re}(\lambda)x$ (siendo $\mathrm{Re}(\lambda)$ la parte real de λ). Para un vector no nulo x_0 de E se tiene: $i^2 * x_0 = (-1) * x_0 = -x_0$ y $i * (i * x_0) = i * 0 = 0$. Así pues no se verifica el tercer axioma. Claramente se verifica I, y como $\mathrm{Re}(1) = 1$ entonces $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) = \mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Re}(\mu)$, se verifican también II y IV.

Si ahora consideramos $E = \mathbb{R}^2$ y definimos la ley de composición externa de dominio $\mathbb{R}$ sobre $E : \forall z = (x, y) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda * z = (\lambda x, 0)$, no se verifica el axioma IV pues $1 * (0, 1) = (0, 0) \neq (0, 1)$; aunque es fácil verificar I, II y III.

8. Números Reales

Pese a que los números reales se han utilizado desde muy antiguo, no es hasta el siglo XIX cuando se definen de manera rigurosa. Durante mucho tiempo se contentaron con justificaciones intuitivas basadas en la "evidencia geométrica" .La necesidad de definir la noción de continuidad y límite aparece hacia 1820 con Bernhart Bolzano y Augustin Louis Cauchy, y se desarrolla con Karl Weierstrass hacia 1850. Precisamente Weierstrass propuso en 1863 la primera construcción de los números reales. No la publicó hasta 1872 cuando Charles Meray y George Cantor (sucesiones de Cauchy de números racionales) y Richard Dedekind (cortaduras de números racionales) publicaron otras.

En la antigüedad, la densidad de los números racionales en los reales llevó a pensar que cualquier punto (la abscisa de cualquier punto) era racional. La regla, el compás y el teorema de Pitágoras permitieron dibujar un punto de abscisa $\sqrt{2}$ que no es racional. Surgen así los irracionales.

Debido a la creencia de que los puntos de una recta eran racionales o irracionales expresables por radicales, hubo un intento en 1683 por parte de Tschirnhaus de expresar por radicales las raíces de un polinomio con coeficientes enteros. Seguramente debido a que eran muy pocos los números utilizados que careciesen de representación racional o radical. Uno era π y el otro e, introducido en 1614 por Navier, de los que no se sabían si eran racionales o irracionales.

En 1737 Euler prueba que e y e^2 son irracionales y establece la fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$ que liga el estudio de π y e.

Lambert, utilizando aproximaciones por fracciones continuas como Euler, prueba en 1761 la irracionalidad de π, de e y de $\tan x$ para todo racional no nulo.

Bezout continúa intentando expresar las raíces de un polinomio por radicales. Así en 1762 escribe una raíz de $P(x)$ en la forma $A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots + A_{n-1}\rho^{n-1}$ siendo ρ una raíz $n-$ésima de la unidad distinta de uno, verificando por tanto la relación $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = 0$.

El estudio de la resolución de ecuaciones de grado menor o igual que 4, aparecido en los trabajos de Waring, Lagrange y Vandermonde entre 1770 y 1772 lleva a las fórmulas de resolución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado con la introducción de la famosa resolvente de Lagrange. Para las de quinto grado, la resolvente le lleva a una ecuación de sexto grado lo que le hace dudar de la posibilidad de resolver por radicales una ecuación de grado mayor o igual que cinco.

La imposibilidad de resolver por radicales una ecuación de quinto grado la propuso P. Ruffini en cuatro artículos publicados de 1799 a 1813. Estos trabajos llevaron a Cauchy, en 1814, a introducir las sustituciones que preparan a Galois la noción de grupo y le permitirá obtener el criterio necesario de resolubilidad por radicales vislumbrado por Abel.

Otra consecuencia de los artículos de Ruffini es el descubrimiento de que existen números algebraicos, es decir, raíces de polinomios con coeficientes enteros que no son expresables por radicales.

El conjunto de los reales $\mathbb{R}$, era utilizado aunque no estuviese construido formalmente y así surge, tras los trabajos de Ruffini, la conjetura de Liouville de la existencia de irracionales no algebraicos.

Liouville, generalizando en 1844 un resultado de Lagrange, encuentra que hay número irracionales que no pueden ser algebraicos, se les llama trascendentes o irracionales trascendentes. El ejemplo clásico de irracional trascendente es $10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \ldots$

Durante todo el siglo XVIII los grandes progresos del análisis, en particular el estudio de las funciones desarrolladas en serie, se obtienen apoyándose en una noción intuitiva de límite y de convergencia de una sucesión (serie) a un límite. Muchos de los cálculos que se hacen se apoyan en cálculos sobre series formales. Además, los matemáticos de este siglo no llegan a desarrollar satisfactoriamente las bases del cálculo infinitesimal. Una bases rigurosa es la de Lagrange con su libro Teoría de funciones analíticas, en el que, como subtítulo, dice que contiene los principios del cálculo diferencial, quitando toda consideración de infinitésimos, evanescencias, límites y fluxiones y reduciendo el análisis algebraico de las cantidades finitas.

Se trata de un intento de algebraizar el análisis, apoyándose en los desarrollos de funciones en series de Taylor. El siglo XIX se caracterizó por una vuelta a las preocupaciones de rigor y de los fundamentos.

Una nueva época se abre a raíz del artículo de Gauss sobre el estudio de la convergencia de la serie hipergeométrica en 1813. Bolzano, muerto en 1848, se interesa en los fundamentos del análisis. Los progresos posteriores de rigor en análisis están motivados por la preocupación de los matemáticos por la enseñanza.

El primero de ellos es Cauchy cuyo Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, en 1821, es un modelo para sus contemporáneos; no obstante, no llega a hacer una clara distinción entre

nociones como convergencia y convergencia uniforme. El problema de la representación en series trigonométricas de funciones conocidas lleva a Fourier a dar una definición más general del concepto de función. Abel muestra la inexactitud de un teorema de Cauchy que afirmaba que si una serie de funciones continuas es convergente en el entorno de un punto, su suma es una función continua, publicando un contraejemplo. Weiertrass establece claramente el concepto de convergencia uniforme: es el autor de la definición de límite con los epsilón y delta utilizados hoy en día.

Para dar un curso de análisis, Richard Dedekind elabora en 1863 una teoría publicada en 1872 con el título Continuidad y números irracionales, donde define los números reales como cortaduras en el conjunto de los racionales.

Todo lo anterior nos permite ver como los matemáticos comprenden que la solución de los fundamentos del análisis pasaba por una definición de los números reales desprendida de cualquier recurso a la intuición geométrica.

Los primeros intentos de hacer una obra en análisis que represente lo mismo que los Elementos de Euclides en Geometría, fueron los de Martin Ohm en 1822 y Bolzano en 1830. Weiertrass, en 1863, expone, en su curso, una teoría de los números reales pero la construcción más acabada de los números reales aún se hace esperar 10 años.

En el desarrollo de las ideas que conducen a la aritmetización del análisis, Bolzano juega un papel importante. En un artículo publicado en 1817 titulado *"Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signo opuesto se encuentra al menos una raíz real de la ecuación"*, establece explícitamente la necesidad, para justificar el teorema, de no recurrir a evidencias geométricas, ni a las nociones de tiempo y movimiento. En el artículo dice que

> *"No hay nada que objetar ni contra la justificación ni contra la evidencia de este teorema geométrico. Pero es igualmente claro que hay una falta intolerable contra el "buen método" que consiste en tratar de deducir las verdades de las matemáticas puras o generales (es decir de la aritmética, del álgebra o del análisis) de resultados que pertenecen a una parte aplicada o particular (la geometría)".*

Se ve la diferencia con las matemáticas del siglo pasado. La geometría se vuelve una parte aplicada de las matemáticas. Bolzano critica las demostraciones propuestas con anterioridad, enuncia y demuestra el criterio de Cauchy para convergencia de series, explicita la noción de límite superior (cota superior) de un conjunto construyendo por dicotomía dos sucesiones adyacentes que convergen hacia este límite superior. La demostración del teorema de los valores intermedios resultara de eso, o más bien, la existencia de un límite común a las dos sucesiones. Bolzano demuestra la unicidad del límite, trata de establecer la existencia pero sólo demuestra que la hipótesis de una magnitud invariable teniendo la propiedad de aproximar los términos de nuestra serie no contiene nada imposible: esto se debe a que esta hipótesis permite determinar esta magnitud con la precisión deseada.

Hay que hacer notar que Bolzano es el único, en la primera mitad del siglo XIX, en considerar este problema. Cauchy se contentó con decir, en su curso de análisis de 1821, tras enunciar el criterio precedente, "Recíprocamente, cuando estas condiciones diversas se cumplen, la convergencia de la serie está asegurada".

Bolzano es un precursor para los matemáticos hasta tal punto que Weiertrass, Dedekind y Cantor completaron el trabajo de aritmetización del análisis entre 1860 y 1870.

El conjunto de los números racionales está estrictamente incluido en el de los números reales pues existen números reales que no son racionales, como probó Euler en 1737 al demostrar que e, base de los logaritmos neperianos, es irracional.

Entre los dos se sitúan en particular dos conjuntos de números, el conjunto de los números

algebraicos A (formado por los números que son raíces de un polinomio no nulo con coeficientes enteros) y el de los números construibles Γ (formado por los números reales que pueden construirse con regla y compás a partir de $(0,0)$ y $(1,0)$. Los conjuntos de los números racionales, números trascendentes y construibles son subcuerpos del cuerpo de los números reales y verifican las inclusiones estrictas: $\mathbb{Q} \subset \Gamma \subset A \subset \mathbb{R}$. Las desigualdades son estrictas pues existen números reales construibles que no son racionales como, por ejemplo, $\sqrt{2}$.

Existen números reales algebraicos no construibles como $\sqrt[3]{2}$ pues es raíz del polinomio $x^3 - 2$, irreducible sobre $\mathbb{Q}$, y no construible pues su grado no es potencia de dos.

Existen números reales que no son algebraicos como e que es trascendente como estableció en 1873 el matemático francés Charles Hermite (1822 – 1901). El matemático alemán Carl Lindemann (1852 – 1939) demostró en 1882 que pi es trascendente, lo que demostró la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

9. Sucesiones Numéricas

La noción de sucesión aparece muy pronto en matemáticas. El primer ejemplo celebre es la sucesión de Fibonacci introducida en el siglo XIII. La formalización precisa de la noción de convergencia data de principios del siglo XIX.

La importancia de las sucesiones en análisis procede del hecho que los problemas topológicos de $\mathbb{R}$, y más generalmente de un espacio métrico, pueden ser tratados con la ayuda de sucesiones.

En 1874 Karl Weierstrass estableció el teorema: *"De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente"*, aunque no publicó la demostración. Bernhard Bolzano lo había enunciado hacia 1830 pero su trabajo no fue descubierto hasta 1930.

El teorema no significa, evidentemente, que toda sucesión acotada sea convergente pues, por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de término general $x_n = (-1)^n$ está acotada en $\mathbb{R}$ pues $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| = 1 \leq 1$; sin embargo es divergente pues para un número real λ dado y $\forall \in N$ se tiene $|x_{n+1} - x_n| = 2$, $|x_n - \lambda| \geq 1$ o $|x_{n+1} - \lambda| \geq 1$.

Se sabe que una sucesión de números reales converge en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy. Bolzano utilizó esta propiedad de las sucesiones de números reales en 1817 en su demostración del teorema de los valores intermedios, pero es Cauchy quien introduce esta noción en su Curso de Análisis de 1821, para el estudio de series. Bolzano y Cauchy admiten esta propiedad sin demostración.

El interés de esta propiedad radica en que no es necesario el conocimiento previo del límite para mostrar que una sucesión converge.

Una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall p, q \geq N, \left|x_q - x_p\right| < \varepsilon$; haciendo $p = n$ y $q = n+1$ tenemos que, para una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$, la sucesión $(x_{n+1} - x_n) \to 0$.

Sin embargo el recíproco no es cierto. En efecto, si consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de término general $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, se tiene para todo natural mayor o igual que uno: $x_{2n} - x_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, luego no es de Cauchy, pero: $0 < x_{n+k} - x_n = \sum_{p=n+1}^{n+k} \frac{1}{p} \leq \frac{k}{n}$, así la sucesión $(x_{n+k} - x_n) \to 0$.

Como sabemos si λ es un número real y f una función definida en un entorno de λ y conti-

nua en λ, entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia λ, la sucesión de las imágenes $f(x_n)$ converge hacia $f(\lambda)$; sin embargo si la función no fuese continua en λ, podríamos encontrar una función , por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ y continua en su dominio, y una sucesión, por ejemplo $x_n = \frac{1}{n}$ convergente hacia 0 tal que la sucesión de sus imágenes diverge pues $f(x_n) = n$.

A menudo se piensa que una sucesión de límite nulo debe ser monótona o monótona a partir de un término, pero no hay motivo para ello. Por ejemplo, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de término general $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tiende hacia 0, $\forall n \geq 1, u_{2n} \geq u_{2n+1} \geq u_{2n-1}$ así la sucesión $\{u_n\}$ no es ni creciente ni decreciente a partir de un rango. En este caso, la sucesión se alterna alrededor de su límite 0. Esto no es necesario pues el término general de la sucesión puede ser de signo constante. En efecto, la sucesión $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$ da, para $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n}$ por tanto $u_n \to 0$. Además, $\forall n \geq 1$ es $u_{2n} = \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{2n+1} = u_{2n+1}$ y $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4n^2+8n+4} = u_{2n+2}$, como vemos la sucesión no es creciente ni decreciente a partir de un término dado.

10. Funciones de una variable real, continuidad y límites

La noción de continuidad fue planteada en el siglo XVII, hay que esperar hasta Bolzano en 1817 y Cauchy en 1821 para obtener una definición satisfactoria. La definición actual se debe a Karl Weierstrass hacia 1860.

Las múltiples relaciones y estructuras de las que se pueden dotar a $\mathbb{R}$ (orden, topología, estructura de cuerpo) interfieren las unas con las otras y dan a las funciones de una variable real, es decir, a las aplicaciones de un subconjunto de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, un cierto número de propiedades que, en general, no pueden, más que parcialmente, generalizarse a las funciones sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, como por ejemplo el teorema de los valores intermedios.

La continuidad es una propiedad de las funciones ligada a la Topología. En $\mathbb{R}$ la topología proviene de una métrica obtenida por la distancia canónica, lo que permite decir que una aplicación de A en $\mathbb{R}$ es continua en un punto a de A si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converge hacia a, la sucesión de sus imágenes $\{f(x_n)\}$ converge hacia $f(a)$.

En 1829 el matemático alemán Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) introdujo la función que lleva su nombre $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para demostrar que no todas las funciones son continuas en algún punto. En efecto, la función anterior no es continua en ningún punto pues, dado un número real a, si es racional (respectivamente, irracional) tomando $\varepsilon = 1$, como entre dos números reales distintos existe una infinidad de racionales e irracionales, existirá un irracional (respectivamente un racional) x tal que $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| = |0 - 1| = 1$ (respectivamente $|f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1$), luego $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ y por tanto f es discontinua en a, para cualquier a.

Durante mucho tiempo se utilizó el teorema de los valores intermedios "una función definida sobre un intervalo I verifica el teorema de los valores intermedios si $\forall a, b \in I$, el segmento $[f(a), f(b)]$ está contenido en $f([a, b])$", sin más justificación que invocar a la evidencia geométrica. El primer intento de prueba se debe a Bolzano en 1817.

En 1868 el matemático francés Ossian Bonnet demostró que la función derivada de una función definida y derivable sobre un intervalo verifica sobre este intervalo el teorema de los valores intermedios, incluso si no es continua. Este resultado se conoce como teorema de Darboux pues fue Gaston Darboux quien dio el primer ejemplo de función discontinua verificando el teorema de los valores intermedios.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, es continua en $a \neq 0$, y discontinua en $a = 0$ pues, $\forall n \in N^*$, la sucesión de término general $u_n = \frac{1}{n\pi}$ converge hacia 0 pero $f(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ no converge en $\mathbb{R}$ aunque verifica el teorema de los valores intermedios. En efecto, si a y b son dos números reales tales que $a < b$, es claro que $f([a,b]) \subset [-1,1]$.

Si $0 \notin [a,b]$ entonces es $a > 0$ o $b < 0$, así $[a,b]$ está contenido en $]0,\infty[$ o $]-\infty,0[$ de donde se deduce que f es continua sobre $[a,b]$; aplicando el teorema de los valores intermedios a la restricción de f al intervalo $[a,b]$, tendremos $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$.

Para el caso donde $0 \in [a,b]$ tenemos, suponiendo $b \neq 0$, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, de término general $u_n = \frac{1}{n\pi}$. Es estrictamente decreciente y converge hacia 0. Como $b > 0$ existen índices naturales $n \geq 1$ tal que $u_n < b$, así $a \leq 0 < u_{n+1} < u_n < b$. Elegimos uno de esos n, como $\cos[n\pi, (n+1)\pi] = [-1,1]$ entonces $f([u_{n+1}, u_n]) = [-1,1]$: $[-1,1] = f([u_{n+1}, u_n]) \subset f([a,b]) \subset [-1,1] \Rightarrow f([a,b]) = [-1,1]$.

Como $f(a)$ y $f(b)$ pertenecen a $[-1,1]$: $[f(a), f(b)] \subset [-1,1] \subset f([a,b])$.

Si $b = 0$ entonces $a < 0$ y cambiando b por a y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ por su opuesta, se demuestra, como en el caso anterior, que $[f(a), f(b)] \subset [-1,1] = f([a,b])$, por tanto la función verifica el teorema de los valores intermedios.

Sabemos que una función es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$ cuando la función admite a $f(a)$ como límite por la derecha y por la izquierda de a. Si no coinciden los limites laterales la función es discontinua, así en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, los limites laterales son nulos mientras que el valor numérico de la función en 0 es 1, por tanto la función es discontinua en $x = 0$.

No todas las funciones tienen límites, incluso existen funciones que no tienen limite a izquierda ni limite a la derecha de un punto. En efecto, la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no tiene límite a la derecha de 0.

En efecto, para un número real l consideramos $\varepsilon_0 = 1$ y sea $\eta > 0$ un número real. Elegimos un natural N tal que $\forall n \geq N, a_n < \eta$; en particular $a_N < \eta$, así $0 < a_N < \eta$ y $0 < b_N < \eta$. Tomando $c = \frac{f(b_N)+f(a_N)}{2}$ se tiene $f(b_N) < c < f(a_N)$, $c - f(b_N) = 1$ y $f(a_N) - c = 1$. Así tendremos, en los casos $l \leq c$ y $c < l$, $|f(a_N) - l| \geq 1$ o $|f(b_N) - l| \geq 1$. Hemos encontrado un número real x tal que $0 < x < \eta$ y $|f(x) - l| > \varepsilon_0$ luego la función no admite limite a la derecha de cero. Como la función es impar, ocurre lo mismo a la izquierda.

Incluso hay funciones que no tienen límite a la izquierda ni a la derecha de ningún punto. En efecto, si consideramos la función de Dirichlet, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya expresión ya hemos visto anteriormente, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, y sean a y l números reales. Para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ sea $\eta > 0$. Elegimos un racional r y un irracional α en $]a, a+\eta[$ entonces $f(r) - f(\alpha) = 1$. Tomando $c = \frac{f(b)+f(r)}{2}$ se tiene $f(\alpha) < c < f(r)$; $c - f(\alpha) = \frac{1}{2}$ y $f(r) - c = \frac{1}{2}$; así, razonando en los casos $l \leq c$ y $c < l$ se ve que $|f(r) - l| \geq \frac{1}{2}$ o $|f(\alpha) - l| \geq \frac{1}{2}$. Hemos encontrado un número real x tal que $a < x < a + \eta$ y $|f(x) - l| > \varepsilon_0$, por tanto la función no admite a l por límite a la derecha de a. Reemplazando $]a, a+\eta[$ por $]a-\eta, a[$ y operando de la misma forma, se obtiene que f no admite límite a la izquierda.

11. Derivabilidad

La noción de derivabilidad aparece a finales del siglo XVII, al mismo tiempo que el cálculo integral, bajo el impulso de Newton y Leibniz. Antes de ellos, Descartes se había interesado en el problema de las tangentes a una curva y Pierre de Fermat había introducido un concepto muy próximo al de derivada investigando los extremos.

En la segunda mitad del XIX nace el interés por las propiedades de las funciones derivadas, es entonces cuando se introducen los contraejemplos que desafían la intuición generalmente admitida.

La noción de derivabilidad en un punto a es un problema local, está ligada al comportamiento de la función en las proximidades de a. Nos podemos preguntar si ello conduce a propiedades para la función sobre todo un entorno de a (sobre todos los puntos del entorno). La respuesta es no, existen funciones derivables en cero y discontinuas en todo real distinto de cero.

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq x^2$, así, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$ luego $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tiene límite cero en cero, así f es derivable en cero y $f'(0) = 0$.

Sea a un número real no nulo. Consideremos $\{r_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de valores decimales aproximados por defecto de a e introducimos la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ de término general $\alpha_n = r_n - \left({}^{l}/_{10^n}\right)$. Ambas sucesiones convergen hacia a. $\forall n \in \mathbb{N}$, r_n es racional y α_n es irracional, así $f(r_n) = (r_n)^2$ y $f(\alpha_n) = 0$, lo que demuestra que la sucesión $\{f(r_n)\}$ converge hacia $a^2 > 0$ mientras que la sucesión $\{f(r_n)\}$ converge hacia cero. Así la función es discontinua en a.

Nos preguntamos sobre un problema parecido ¿una función puede ser derivable en todos los números reales salvo en uno?

Si la función es continua la respuesta es fácil, por ejemplo $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$ y no derivable en $a = 0$ pues $f'(a^+) = 1 \neq f'(a^-) = -1$.

El problema se complica si buscamos la función sin derivadas laterales en el punto.

Si consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tenemos que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $|f(x)| = |x| \left|\operatorname{sen}\left({}^{1}/_{x}\right)\right| \leq |x|$, desigualdad también válida para $x = 0$, de manera que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ lo que prueba que f es continua en cero.

Además si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces es derivable en a y por tanto continua en a, así la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en todo real no nulo, con $f'(x) = \operatorname{sen}\left({}^{1}/_{x}\right) - \frac{1}{x}\cos x$.

Tenemos así $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \operatorname{sen}\left({}^{1}/_{x}\right)$.

La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de término general $a_n = \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)+n\pi\right)}$ toma valores en $]0, \infty[$ y converge hacia 0; la sucesión $b_n = -a_n$, que toma valores en $]-\infty, 0[$, converge hacia 0. Entonces: $\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} = (-1)^n$ y $\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} = (-1)^{n+1}$ son términos generales de sucesiones divergentes, por tanto no existe la derivada de la función a derecha ni izquierda.

Como sabemos la derivabilidad en un punto implica la continuidad en ese punto, el reciproco es falso como hemos visto con $f(x) = |x|$. Hasta la mitad del siglo XIX se pensaba, generalmente, que una función continua era derivable salvo quizás en algún punto. Ampere creyó haberlo demostrado en 1806. Bolzano dio, hacia 1830, un ejemplo de función continua pero derivable en ningún punto pero sus escritos no se conocieron.

En 1854 Riemann propuso, sin demostración, la función $R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$. Karl Weiertrass se declara incapaz de demostrarlo. Es necesario esperar hasta 1871 para saber que $R(x)$ no es derivable salvo en algunos puntos. En 1872 Weiertrass demostró que si a y b son números reales tales que $a > 0$ y $b > 0$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, la función $f : x \to f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(a^n x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y no es derivable en punto alguno de $\mathbb{R}$. En 1903 el matemático japonés Teiji Takagi (1875 – 1960) propuso la función $f : x \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n g(a^n x)$ donde g es la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x \to g(x) = d(x, \mathbb{Z})$, siendo a y b números reales tales que $0 < b < 1$ y $a \geq 4$.

Sabemos que toda función f definida y continua sobre un intervalo I es la función derivada sobre I de una función definida y derivable sobre I, lo que significa que tiene primitivas sobre I. En efecto, eligiendo un punto a del intervalo I, la aplicación $F : x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt$ de I en $\mathbb{R}$ es derivable sobre I y $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. Esto no se generaliza para funciones discontinuas, por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ es continua en todo número real no nulo y discontinua en cero pues es constante en el entorno de todo real no nulo y, como la sucesión $\{{}^1/_n\}_{n\geq 1}$ converge hacia cero y $f({}^1/_n) = 0$ para todo natural $n \geq 1$, la sucesión $\{f({}^1/_n)\}$ converge hacia $0 \neq f(0)$.

Si suponemos que f admite una primitiva F sobre $\mathbb{R}$, entonces F será derivable en $\mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Para todo número positivo el teorema de los incrementos finitos aplicado a F sobre $[0, x]$ no da un $c \in]0, x[$ tal que $F(x) - F(0) = (x - 0)F'(c) = x\,f(c) = 0$, entonces $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0$, es decir $F'(0^+) = 0$, lo cual contradice el $f(0) = 1$ de la definición. En conclusión, la función f no admite primitiva sobre $\mathbb{R}$.

Una de las utilizaciones más frecuentes de la función derivada de una función definida y derivable sobre un intervalo, es el estudio de sus variaciones sobre ese intervalo.

Como sabemos una función f, definida y continua sobre un intervalo I y derivable en el interior I_0 de I, es creciente sobre I si, y sólo si, su función derivada f' es positiva o nula sobre I_0.

La importancia de establecer las hipótesis sobre un intervalo es crucial. En efecto, si consideramos $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{1}{x}$ está definida y es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, se tiene $f'(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$; sin embargo f no es creciente sobre $\mathbb{R} - \{0\}$ pues, por ejemplo, $1 > -1$ y $f(1) = -1 < f(-1) = 1$. Ello es debido a que $\mathbb{R} - \{0\}$ no es un intervalo con extremos finitos.

Se demuestra que si una función está definida y es continua sobre un intervalo I y derivable en el interior de I, y si su función derivada es estrictamente positiva en el interior de I, entonces la función es estrictamente creciente sobre I. Esto es una condición suficiente pero no necesaria como podemos ver si consideramos la aplicación $f : x \to f(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La función es derivable sobre $\mathbb{R}$ y, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, en particular, $f'(0) = 0$. Cero es el único punto donde se anula la derivada.

Por otra parte, para todo número real t: $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Así, si $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, la factorización por x^2 si x es no nulo, y por y^2 si y es no nulo, da la desigualdad estricta $y^2 + xy + x^2 > 0$. Entonces, $\forall x, y \in \mathbb{R} \,|\, x < y$, tenemos $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) > 0$, por tanto $f(x) < f(y)$, es decir, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente sobre $\mathbb{R}$.

Dada una función f definida sobre un intervalo I y dado un punto a del interior de I, si f es derivable en a y admite un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$. Sin embargo, el reciproco

no es cierto.

La función $f : x \to f(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es derivable sobre $\mathbb{R}$ y, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$, en particular, $f'(0) = 0$. Se tiene así que $\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x < 0 < y, f(x) < f(0) = 0 < f(y)$ por tanto no admite extremos relativos en cero. Tenemos así un ejemplo de una función derivable sobre $\mathbb{R}$ cuya derivada en cero es nula pero que no admite extremo relativo en cero.

12. Integración

El cálculo integral apareció en la antigüedad con Arquímedes, con ocasión del cálculo de áreas y volúmenes. La noción de integral de una función surge con Isaac Newton y Gottfried Leibniz a finales del siglo XVII. Agustin Louis Cauchy es el primero en construir la integral, limitándose a funciones continuas sobre un intervalo. Bernhard Riemann propuso una construcción más general basada en las particiones. En 1902 Henri Lebesque, partiendo del concepto de medida, definió una clase más amplia de funciones integrables.

Una función f definida sobre el segmento $[a, b]$ es integrable en el sentido de Riemann sobre $[a, b]$ si, para todo número real $\varepsilon > 0$, existen aplicaciones φ y ψ de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ en escalera sobre $[a, b]$ tales que $\varphi \leq f \leq \psi$ sobre $[a, b]$ e $I_{[a,b]}(\varphi - \psi) \leq \varepsilon$.

Si f es una función definida e integrable en el sentido de Riemann sobre el segmento $[a, b]$, f está acotada sobre $[a, b]$ y la cota superior de los $I_{[a,b]}(\varphi)$ para $\varphi \leq f$ es escalera sobre $[a, b]$ es igual a la cota inferior de los $I_{[a,b]}(\psi)$ para $\psi \geq f$ en escalera sobre $[a, b]$, el valor común es la integral de f sobre $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$.

En la práctica la casi totalidad de funciones usuales acotadas sobre un segmento son integrables en el sentido de Riemann. Sin embargo, se pueden encontrar ejemplos de funciones acotadas que no son integrables en el sentido de Riemann. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ está acotada sobre $\mathbb{R}$ sin embargo no es integrable en el sentido de Riemann. En efecto. Para $a < b$ sea φ una aplicación de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ en escalera sobre el segmento $[a, b]$ tal que $\varphi \leq f$ (resp. $\varphi \geq f$) sobre $[a, b]$. Elegimos una subdivisión $\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ adaptada a φ y notamos, para todo $i \in [0, n-1]$, α_i el valor constante de φ sobre $]x_i, x_{i+1}[$. Si i perteneciese a $[0, n-1]$, el intervalo abierto $]x_i, x_{i+1}[$ contiene al menos un irracional u, así se tiene $\alpha_i = \varphi(u) \leq f(u) = 0$. Por tanto $I_{[a,b]}(\varphi) \leq 0$. Así cualesquiera que sean las aplicaciones φ y ψ de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ en escalera sobre $[a, b]$ tales que $\varphi \leq f \leq \psi$ sobre $[a, b]$, se tiene $I_{[a,b]}(\psi - \varphi) = I_{[a,b]}(\psi) - I_{[a,b]}(\varphi) \geq b - a$. Como $b - a > 0$, f no es integrable en el sentido de Riemann sobre el segmento $[a, b]$.

Como f es nula salvo sobre un conjunto de medida nula, f es integrable en el sentido Lebesque sobre $[a, b]$ y su integral es nula.

Si una función es integrable en el sentido de Riemann sobre un segmento, su cuadrado lo es también. Sin embargo el reciproco no es cierto. En efecto, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$, al igual que en el ejemplo anterior, no es integrable en el sentido de Riemann sobre $[0, 1]$. Sin embargo, f^2 es constantemente igual a 1 sobre $[0, 1]$, por tanto integrable en el sentido de Riemann en $[0, 1]$.

13. Probabilidades

Se considera a menudo que el cálculo de probabilidades comienza hacia la mitad del siglo XVI con los intercambios epistolares entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal. Poco después, las obras de Christian Huygens, y después las de Jacques Bernoulli, establecen los primeros elementos de la teoría. Pierre Simeon Laplace publica en 1812 la teoría analítica de las probabilidades donde presenta la síntesis de esta teoría y en la que utiliza las nuevas herramientas matemáticas desarrolladas en el siglo XVIII. Las primeras teorías sobre los procesos estocásticos se desarrollan hacia 1900, en particular con Andreï Markov. Será necesario esperar hasta 1929 con los trabajos de Andreï Kolmogorov para asistir a la formalización de la teoría que usamos actualmente.

Sabemos que dos sucesos, A y B, son independientes si $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$ y, si n es un entero mayor o igual que 2, los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes en conjunto si $p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)\,p(A_2) \cdots p(A_n)$. Sin embargo existen sucesos independientes dos a dos que no lo son en su conjunto. Por ejemplo, si lanzamos un dado tetraédrico con cuatro caras numeradas de 1 a 4. Al considerar los sucesos A obtener 1 ó 2, B obtener 1 ó 3, C obtener 2 ó 3. Cada uno de estos sucesos tiene probabilidad de salir igual a $\frac{1}{2}$. Cada una de las intersecciones $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ corresponde respectivamente a obtener 1, 2, 3. Su probabilidad es $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, por tanto los sucesos son independientes dos a dos.

Sin embargo $A \cap B \cap C = \emptyset$ luego su probabilidad es cero: $0 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Si nos dejamos guiar por la intuición de la noción de independencia, se podría esperar que un suceso independiente de otros dos, independientes ellos mismos entre si, sea independiente su intersección. Sin embargo, con los mismos sucesos del experimento anterior, tenemos que el suceso A es independiente de B y de C, pero $B \cap C = \{3\}$ así $p(B \cap C) = \frac{1}{4}$ y $A \cap B \cap C = \emptyset$. Tendremos así que $p(A \cap (B \cap C)) = 0 \neq \frac{1}{8} = p(A)\,p(B \cap C)$.

A es independiente de los sucesos B y C, independientes entre sí pero no es independiente de su intersección.

Una experiencia aleatoria es en general interesante porque de ella se sigue un beneficio o una perdida, es decir, se asocia a cada resultado un número real. Esto lleva a las definiciones de variable aleatoria discreta y continua, función de densidad, variable aleatoria de densidad, ley de probabilidad. Asociada a las variables aleatorias puede venir la esperanza matemática pero ¿existe siempre?

No, por ejemplo si consideramos la variable aleatoria discreta x tomando sus valores en el conjunto $\{2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ y definida por $p(x = 2^n) = \frac{1}{2^n}$, es una ley de probabilidad pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, sin embargo $2^n p(x = 2^n) = 1, \forall n \geq 1$, así la serie $\sum_n 2^n p(x = 2^n)$ diverge, por tanto x no tiene esperanza matemática.

Este resultado es conocido como paradoja de San Petesburgo y fue enunciado por Nicolás Bernoulli (1685 – 1726) de la siguiente forma: Un jugador participa en el juego siguiente. Se lanza una moneda repetidamente hasta que aparezca la primera cara. Una vez aparece gana un centavo si la cara aparece en el primer lanzamiento, 2 centavos si aparece en el segundo, 4 si aparece en el tercero, ... doblando en premio en cada lanzamiento. Así ganaría 2^{k-1} centavos si la moneda debe lanzarse k veces, ¿ cuánto estaría dispuesto a poner para participar en el juego?

Como la esperanza matemática es infinita, no importa cuánto pague para entrar en el juego, saldría ganando a largo plazo.

La variable aleatoria también puede ser que tenga función de densidad e igualmente no tener esperanza matemática. Así, la variable aleatoria x con función de densidad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dada por $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$; como $f(t) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi} x \frac{1}{t^2}$ y es par, f es integrable sobre $\mathbb{R}$ por el criterio de Riemann.

La función $F(t) = \frac{1}{\pi}\arctan$ es una primitiva de f, así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{+\infty} \arctan - \lim_{-\infty} \arctan\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 1$$

luego f es una densidad de probabilidad. Sin embargo la esperanza de x no está definida pues tan $f(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\pi} x \frac{1}{t}$ no es integrable sobre $\mathbb{R}$.

La ley de probabilidad definida por la función f es conocida como ley de Cauchy.

Referencias

[1] APOSTOL, T. M. *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona, 1974.

[2] BOYER, C. B. *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[4] COLLETE, J. P. *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI Editorial, Madrid, 1985.

[5] KLINE, M. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[6] LORENZO (DE), J. *La matemática y el problema de su historia*, Editorial Technos, Madrid, 1977.

[7] NEWMAN, J. R. *El mundo de las matemáticas*, Editorial Grijalbo, Barcelona, 1985.

[8] QUEYSANNE, M. *Álgebra Básica*, Editorial Vicens Vives, Barcelona, 1973.

[9] SPIVAK, M. *Calculus*, Editorial Reverté, Barcelona, 1978.

[10] TATON, R. *Historia general de la ciencia*, VIII, Editorial Orbis, Barcelona, 1988.

Sobre el autor:
Nombre: Antonio Rosales Góngora
Correo electrónico: anrogo58@yahoo.es
Institución: Instituto de Educación Secundaria Bahía de Almería, Almería, España.

Cuentos Matemáticos

Misión Imposible

Mission: Impossible

Humberto Nava y Mónica Martínez

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 079–086, ISSN 2174-0410
Recepción: 27 Abr'15; Aceptación: 5 Ago'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Este relato es fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al agente 00π que gracias a sus conocimientos matemáticos logrará superar las dificultades de una difícil misión.

Palabras Clave: Matemáticas, Literatura, Experiencia en el aula, Innovación.

Abstract

This story is the result of an innovative experience carried out with first year students of Polytechnic University of Madrid (UPM) who were attending the course of Calculus. The story is starring a secret agent, 00π who will try to save the world with the help of Mathematics.

Keywords: Mathematics, Literature, Innovation.

1. Introducción

Los estudiantes de primer curso del grado de Fundamentos de la Arquitectura de la UPM, del curso 2012/13, participaron en una experiencia, dentro de la asignatura de Cálculo y enmarcada en el proyecto de Innovación Educativa del GIE Didáctica de las Matemáticas: "Experimentación de un nuevo enfoque de la enseñanza de las Matemáticas en la UPM", que consistió en escribir un relato. Desde entonces hemos puesto en práctica esta iniciativa en los sucesivos cursos.

El relato que viene a continuación es una muestra del trabajo desarrollado durante el curso académico 2013/14. En esta ocasión, se propuso a los alumnos confeccionar una historia partiendo de la misión encargada al agente secreto 00π. En su trama debían incluir problemas matemáticos relacionados con el contenido de la asignatura, cuya resolución resultase imprescindible para avanzar en el caso.

2. El relato

El despertador sonó.

Pausadamente el agente 00π se levantó de la cama y se dirigió a la cocina. Allí le esperaba el desayuno y el periódico del día anterior, como cada día. Se sentó sobre la mesa y contempló la ciudad que se extendía a sus pies, mientras la trémula luz del alba bañaba su ático.

Era imposible pensar que algo podría enturbiar el momento.

-Agente 00π, es una misión de máximo riesgo. La vida de muchas personas está en sus manos, su colaboración con nosotros será de una importancia transcendental para el curso de la paz en el mundo.

El inspector Cartesiano se levantó y cruzó la sala grandes zancadas. La sala se fue vaciando poco a poco hasta que sólo quedó el agente 00π acompañado por el murmullo del tráfico y sus insondables pensamientos. Preocupado por la tarea que le había sido encomendada.

En dos horas partía hacia Dubái, donde posiblemente se enfrentaría a la misión más importante y peligrosa de su vida. Un grupo terrorista, al que la compañía seguía el rastro desde hacía tiempo, había contratado diez de los mejores científicos, a través de la mafia rusa, para desarrollar un virus que haría desaparecer la población mundial. El cometido de 00π parecía simple: introducirse en las oficinas de Ox y robar los planos que indicaban la localización de del laboratorio en el cual se llevaba a cabo todo el proceso de desarrollo. Una vez allí, debería desactivar el virus y, por supuesto, destruir cualquier prueba o evidencia de que tal agente infeccioso había existido jamás, evitando así posibles intentos de volverlo a generar.

Después de cinco interminables horas de viaje, finalmente llegó a Dubai. Presuroso se dirigió a las oficinas de Ox. Primero tendría que estudiar los mecanismos de seguridad de las oficinas y más tarde elaborar un plan de ataque. Al llegar no podía creer lo que sus ojos le decían: las oficinas de Ox se encontraban en el Burj Khalifa, el edificio más alto del mundo, Ésta iba a ser una misión más ardua de lo que esperaba. Como un extranjero más, se unió a un grupo de turistas que visitaban el rascacielos. Comenzó a fijarse en los guardias y cámaras de seguridad. Había gran número de vigilantes armados y mucho movimiento, algo primordial se estaba llevando a cabo en las oficinas. Tras mucho meditar llegó a la conclusión de que los planos debían estar en los pisos inferiores, ahora debía descubrir la localización exacta. Habría que improvisar sobre la marcha.

Una vez recabada toda la información que necesitaba para poder llevar a cabo el plan elaborado, cogió la munición que se encontraba en la mesita del lujoso hotel donde se hospedaba y mecánicamente cargó la pistola.

Volvió por la noche a su objetivo, pero esta vez el número de guardias había disminuido con respecto a los que encontró en su excusión matutina. Parecía que la suerte estaba de su lado, sería más fácil dar con el escondite de los planos. El agente 00π estaba absolutamente convencido que los planos se hallarían en una caja fuerte o cámara acorazada. Empleó unas horas en buscar el sector de almacenamiento y conservación, deslizándose cual felino, evitando vigilantes y cámaras de seguridad. Tras infructuosas horas de búsqueda y a punto de posponer la misión para el día siguiente, descubrió una pequeña puerta metálica al fondo

de un largo pasillo. Estaba custodiada por dos guardias que no fueron ningún problema para 00π. Consiguió abrir la puerta, herméticamente cerrada, con una explosión controlada que hizo altar las alarmas. Diligente encontró y sustrajo los planos con el mayor cuidado que la situación le permitía. Rápidamente salió de la cámara y para su sorpresa se encontró rodeado de guardias. "Vaya… son rápidos, esperemos que también sepan defenderse en las distancias cortas", dijo para sí el agente 00π acostumbrado a este tipo de situaciones. Comenzó entonces una lucha que más bien parecía un entretenimiento para 00π, pues se deshizo de todos ellos en un abrir y cerrar de ojos. Salió al exterior sin mayor problema que unos guardias de los que se zafó con una gran agilidad. Ya lejos de las oficinas de *Ox* escudriñó los planos y acto seguido se encaminó al aeropuerto para ir al laboratorio donde en esos momentos se estaba desarrollando un virus mortal. Rezó por llegar a tiempo. Se dirigía al país más acaudalado del mundo. Qatar.

El agente 00π, se encontraba en lo alto de aquella torre majestuosa, desde dónde podía contemplar todo Doha. Incluso, a lo lejos, se apreciaba el inconfundible tono del desierto cuyo contraste con el intenso azul del cielo, hacía que la visión resultase onírica. Si no fuera porque su vida dependía de aquel cable, que por acción del fuerte viento que soplaba en la cornisa parecía que se iba a romper de un momento a otro, diría que estaba disfrutando de las vistas. El nombre de la torre le pareció entonces muy apropiado: Tornado.

Conocía a fondo el edificio en el que se encontraba. Había estudiado hasta el más pequeño detalle de los planos. Incluso era capaz de describir aquel enrejado de acero con una ecuación matemática.

Una vez más había puesto en peligro su vida por una operación secreta de cuyo éxito dependía la paz mundial. Los planos de la máquina, que había sustraído de las oficinas de *Ox* y que ahora permanecían en su poder, serían la solución al terrorismo internacional. No podía permitir que la misión fracasara.

El agente cruzó al edificio de enfrente utilizando el cable, pues según los planos robados, allí encontraría el virus letal. Siguiendo el plan trazado llegó al laboratorio que buscaba. Tan solo una mesa en el centro de la habitación es todo lo que encontró. Sabía que no se había equivocado al interpretar los planos, entonces, ¿qué había ocurrido? Alguien se había tomado muchas molestias para desmantelarlo todo, tal vez significara que la fase de experimentación y desarrollo había finalizado y el virus ya estaba preparado para matar.

La misión había dado un giro de 180 grados en una dirección incierta, el agente patógeno estaba preparado para ser liberado. "No es el lugar ni el momento para hacer conjeturas" se dijo a sí mismo y comenzó a inspeccionar minuciosamente cada rincón de la habitación. Encontró gran cantidad de documentos, gráficas, estudios y análisis, todo ello inútil para averiguar el paradero de lo que había venido a buscar.

Sus nervios se disparaban por momentos, tenía que encontrar algo que le fuera de utilidad, no permitiría un fallo más en tan importante cometido. Al borde de la ansiedad sus ladinos ojos se clavaron en un pequeño pedazo de papel cartografiado arrugado y casi carbonizado. Lo desplegó con extrema delicadeza. Entonces sus ojos se abrieron de par en par, lo que allí encontró no era un plano, en contra de toda esperanza, lo que allí había escrito era un dibujo acompañado de una leyenda:

> *"La trayectoria de las cápsulas virales será una curva que cumpla que la distancia de un punto genérico P al origen de coordenadas sea igual a la longitud del segmento de la recta normal comprendida entre dicho punto y el eje OY."*

Al agente 00π se le escapó, por primera vez en mucho tiempo, una pequeña sonrisa. Sabía lo que era aquello y lo que implicaba. Raudo, cogió un lapicero y se puso a escribir sobre aquel dibujo que le había devuelto la esperanza.

$$P=(x,y),\ \ A=\left(0,b\right),\ \ d(A,P)=d(P,O)\Rightarrow b=2y$$

$$AP=\left(x,-y\right),\ \ m_n=\frac{-y}{x}\Rightarrow y'(x)=\frac{x}{y(x)}$$

$$y^2-x^2=K$$

Para cuando terminó, sonreía ampliamente, tenía las coordenadas de hacia dónde se dirigía el mortífero microbio. En sus ojos apareció la posibilidad de alcanzarlo. Como alma que lleva el diablo, introdujo los datos en su móvil y al cabo de unos segundos le llego la ansiada respuesta, ya salía corriendo cuando de pronto sonó un disparo. El agente 00π, se quedó helado, pero un punzante dolor le devolvió a la realidad, el hombro le sangraba, no sentía el brazo. Abrió la mano y dejó caer el móvil. De forma casi inconsciente comenzó a correr. Oyó más disparos. Volvió la cabeza y se encontró con tres hombres persiguiéndole de cerca. El que iba en cabeza era el más fornido de todos. Todos llevaban un pañuelo tapándoles la boca, con el símbolo Φ. Logró alcanzar las escaleras, y saltando casi de tramo en tramo, bajó los treinta pisos que le separaban de la salvación. Exhausto salió a la calle y mezclándose con la multitud, logró escabullirse.

Mascullando insultos en su idioma, subieron los terroristas de nuevo a la habitación donde había comenzado la persecución. Al igual que el agente 00π hizo minutos antes, el trío se puso a buscar el virus, que meses antes había encargado a la mafia rusa. Su enfado iba en aumento hasta que uno de ellos encontró el teléfono que 00π había soltado al recibir el disparo. En seguida se lanzaron en su persecución.

Nuestro agente especial a la cabeza y los cabecillas del grupo terrorista a su zaga, se dirigían hacia una ciudad centenaria: Moscú.

Un hombre ya entrado en años, pelo canoso y mirada ausente, atravesaba con paso rápido y nervioso la Plaza Roja de Moscú, dirección el Kremlin. Sabía que lo que había hecho no estaba bien y que pagaría por ello, pero de momento intentaba remediar el daño causado y evitar una posible catástrofe mundial. Los diez que eran antes ya no estaban. Los habían encontrado y asesinado uno a uno. Su vida pendía de un hilo. Debía deshacerse, lo antes posible, del contenido del maletín que portaba en ese momento. Un rápido movimiento y el hombre cayó al suelo, el brutal puñetazo que le propinó un extraño, lo había dejado casi inconsciente. Temió por su vida. Cuando se recompuso vio que el desconocido ya no estaba,

se había fugado con el maletín. "La humanidad está condenada", pensó para sí. Había fracasado en su intento de redención, ahora estaba todo perdido no había nada que él ni nadie pudiera hacer. Asumió su destino, sólo podía esperar la muerte, y ésta por suerte o por desgracia, no tardaría demasiado en llegar, ya fuese de una forma u otra. No quiso esperar, nunca le había gustado esperar, se adelantaría a su fatal sino. Continuó su paseo, ahora más tranquilo, con paso relajado y lamente en blanco. Llegó a las orillas del gran río que surcaba, como arruga en su piel, la ciudad de Moscú. Con dificultad y los ojos rojos, ya sin brillo, el anciano subió a la barandilla del puente en el que se encontraba y sin pensárselo dos veces, se arrojó a las gélidas aguas del río Moscova…

Al agente 00π le latía el corazón con más fuerza que nunca, le dolía la mano, pero más el alma por haber tenido que pegar a un hombre tan mayor. Cargaba con un maletín de piel marrón, no muy pesado, en cuyo interior se encontraba un arma biológica con un gran poder de destrucción. Buscaba un sitio apartado para poder abrirlo y desactivar su contenido, cuando se percató que un grupo de tres hombres le seguían no muy disimuladamente. Llevaban el mismo pañuelo que vio días atrás en Qatar, y a juzgar por su aspecto, debían ser los mismos que entonces. Comenzó a pensar un plan para acabar con ellos lo más rápida y fácilmente posible. Descubrió un estrecho callejón sin salida y entró en él. En las caras de sus perseguidores se dibujó una vil sonrisa y le siguieron sin saber que lo angosto del callejón permitiría a 00π deshacerse de ellos uno a uno. Efectivamente, en la calle sólo cabía una persona y la movilidad era muy reducida. Nada más torcer para tomar el callejón, el primero recibió un puñetazo justo en la boca del estómago que le hizo tambalearse. El agente 00π aprovechó ese instante para propinarle otro golpe debajo del esternón y patearle la rodilla, haciendo que cayese al suelo boqueando, casi sin respiración. Librarse del segundo de ellos, tampoco fue mucho más complicado. Tras golpearle las costillas y el pecho, le sacudión un terrible cabezazo que hizo que se desplomara, inconsciente, a los pies del tercero. Éste era el más grande de todos ellos y parecía ser el jefe. Sus, cerca de dos metros de altura y su gran complexión apenas le permitían el acceso al callejón. Con un rápido movimiento y una agilidad fuera de lo común, para un hombre de su envergadura, agarró a 00π por la pechera y de un violento tirón lo sacó volando de la callejuela, haciéndole caer sobre el asfalto. Sin darle tiempo para incorporarse, le sacudió una patada en el hombro que llevaba vendado por la herida de bala. El agente 00π aulló de dolor, se incorporó a duras penas y se lanzo sobre el cabecilla que reía estridentemente. Le agarró fuertemente del cuello con la intención de hacerle perder el sentido, y aguantando la serie de puñetazos que le propinaba aquel energúmeno, lo consiguió. El agente 00π volvió corriendo al callejón para recuperar el maletín y con paso veloz se alejó de allí.

Nuestro valiente agente se dirigía de camino al aeropuerto con intención de regresar a Londres y poner en manos de los científicos de su organización el arma letal, con el fin de destruirla. Pero no iba a ser tan fácil, un grupo de hombres le rodeó. Eran el resto de los integrantes de la célula terrorista. Comenzó una carrera por su vida. Por el rabillo del ojo advirtió que llevaba algo de ventaja, aún así sería imposible despistarlos. Se precipitó hacia una fábrica abandonada. El grupo terrorista Φ le pisaba los talones y no tardaría demasiado en darle alcance.

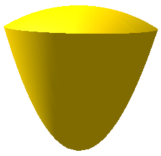
Al acceder al interior la presencia de más personas, le hizo retroceder instintivamente. La mafia rusa al completo, estaba allí reunida. No habían cumplido el pacto con los terroristas y no tenían el maletín. Los diez científicos que trabajaban en el proyecto les habían traicionado. Nueve estaban muertos y la búsqueda del décimo se estaba complicando.

A la llegada de 00π le siguió la irrupción de los terroristas. Durante unos segundos reinó el silencio. Las tres facciones enfrentadas sabían que aquello no acabaría bien. El primero que moviese ficha llevaría ventaja. Ese fue 00π. Corrió a esconderse tras una gran puerta de acero. Con cuidado sacó su pistola del bolsillo izquierdo de sus desgastados vaqueros. Estaba perdido, aquel iba a ser su fin, pero no era eso lo más le dolía en esos instantes, sino el no poder concluir la misión con éxito.

Comenzaron los disparos, una contienda acababa de estallar en la pequeña nave. Los rusos eran más numerosos, pero los disparos de los terroristas, más certeros. El agente 00π se extrañó al ver que nadie le perseguía y que los disparos no iban en su dirección, al parecer no estaba invitado a la particular batalla campal entre terroristas y mafiosos. Aprovechó el desconcierto para escapar de allí.

La contienda no se prolongaría demasiado, y seguramente la fábrica estaría rodeada de mafiosos que acudirían tras oír los disparos. No tenía demasiado tiempo, así que decidió buscar un lugar lo más tranquilo posible donde nadie le pudiese descubrir y se dispuso a neutralizar la carga viral.

Al abrir el maletín encontró una urna con una forma que bien podía ser un paraboloide elíptico y una semiesfera.



Las fórmulas que lo acompañaban, no dejaban duda

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 = z$$

Para abrirlo había que resolver un problema con esos datos. ¿Pero cuál?

Otra vez sus amplios conocimientos en Matemáticas, le iban a ayudar en su trabajo. "Comenzaré con el volumen", pensó.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{37}}{2}}} r\left(\sqrt{9-r^2} - r^2\right) dr\, d\alpha$$

Con una extremada facilidad y diligencia resolvió el problema, introdujo la solución y con mucha precaución abrió la urna. En su interior encontró una bolsita que contenía un líquido ámbar. Lentamente, la sustrajo de la urna. Decisión fatal. Lo que el agente 00π no sabía, era que la bolsa contenedora del virus, no tardaría más de un minuto en desvanecerse, pues el material del que estaba hecho, a temperatura ambiente reaccionaba con el oxígeno y se deshacía. El agente 00π observaba, impotente, con un gesto de verdadero horror, cómo la envoltura iba desapareciendo a gran velocidad. Sintió el frío contacto con el líquido anaranjado y acto seguido se desplomó. Su cuerpo inerte yacía ante la cápsula del agente viral más potente jamás creado. Nada podía detenerlo ya.

Nuestro agente había fracasado en su misión, pero nadie en su oficina estaría esperándole para echárselo en cara. En unas horas el virus se expandiría por todo el mundo y la raza humana desaparecería. O tal vez …

Sobre los autores:

Nombre: Humberto Nava
Correo Electrónico: jambe_r@hotmail.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mónica Martínez
Correo Electrónico: monicamarseg@gmail.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Grupo de Innovación Educativa Didáctica de las Matemáticas
Nombre: Ascensión Moratalla
Correo Electrónico: ascensión.moratalla.delahoz@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Juana María Sánchez
Correo Electrónico: juanamaria.sanchez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mª Agripina Sanz
Correo Electrónico: mariaagripina.sanz@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mª Carmen Ferreiro
Correo Electrónico: mariacarmen.ferreiro@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Previsiones de crecimiento y necesidades de infraestructuras en terminales portuarias mediante redes neuronales artificiales

Growth forecasts and port terminal facilities necessary through artificial neural networks

Tomás Rodríguez García, Nicoletta González Cancelas
y Francisco Soler-Flores

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 087–108, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Abr'15; Aceptación: 20 Ago'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Una mala planificación, trasladaría a no emplear correctamente los recursos y medios disponibles en el entorno. Las redes neuronales artificiales pueden ser de gran ayuda a la planificación portuaria.

La investigación se centra en el análisis del comportamiento de la red neuronal en la planificación portuaria, en el ámbito de las terminales de contenedores y en concreto en el estudio de posibles crecimientos del tráfico y las necesidades de equipos para poder mover los contenedores pronosticados. De este modo se puede evaluar, sin la necesidad de nuevas inversiones en infraestructuras o unas mínimas inversiones en equipos, que tráficos se pueden gestionar en dichas terminales o que grado mínimo de inversión sería necesario.

En la metodología se indican las bases de aplicación en las redes neuronales artificiales (RNA) y las fases a considerar para su desarrollo en la planificación de terminales portuarias de contenedores, apoyado en las herramientas que proporciona el programa MATLAB sobre redes neuronales artificiales.

Finalmente, se llega a la conclusión de que la herramienta y metodología propuesta se pueden considerar como aceptables para este tipo de pronósticos de planificación y su posible utilización a futuro.

Palabras Clave: Planificación, Pronosticar, RNA, Tráfico de contenedores, Terminal portuaria.

Abstract

Artificial Neural Networks, can be of great assistance to port planning. Poor planning, move to not use the resources and facilities available in the environment properly.

The research focuses on the analysis of neural network performance in port planning in container terminals and - in particular - in the study of potential traffic growth and needs of facilities needed to move containers forecasted.This can be assessed without the need for new investment in infrastructure or minimum investment in facilities, that traffic can be managed in such terminals or investment grade would be necessary.

The methodology indicates the grounds of the artificial neural networks (ANN) application, as well as the different steps for their use in a container terminal planning process, based on the ANN tools provided by the MATLAB software.

Finally, it concludes that the proposed methodology tool and can be considered acceptable for this type of planning and forecasting future possible use.

Keywords: Planning, Forecast, ANN, Containerized Traffic (Trade), Port terminal.

1. Introducción

El transporte de mercancías es una operación de gran importancia en la economía general a nivel mundial.

Dentro del transporte de mercancías en zona portuaria, el tráfico de carga en contenedores ha crecido en los últimos años, por lo que la gran mayoría de los puertos de todo el mundo han requerido la construcción de nuevas terminales, para responder a esta nueva situación.

El número de buques portacontenedores y la capacidad de estos, también ha crecido en paralelo con el aumento del tráfico de contenedores.

Ante estos hechos, surgen nuevas necesidades tanto de capacidad, como de adecuación de las instalaciones y no menos importante de optimización de los recursos e instalaciones disponibles existentes a fin de reducir al mínimo el tiempo de inactividad y optimizar dichos recursos e instalaciones disponibles (número de grúas, la longitud del muelle, áreas de almacenamiento, ...) .

Para estudiar y ver la posible aplicación de nuevas tecnologías en este tipo de planificación, en varios estudios se han empleado modelos cuantitativos de predicción para el transporte como ARIMA (Modelo autorregresivo integrado de media móvil), MLR (Modelo de regresión lineal múltiple) y ANN (Redes Neuronales Artificiales) entre los más destacados. Un resumen de los trabajos más representativos se puede ver la el trabajo de Rodríguez et al., 2013.

Hasta la fecha, los trabajos en planificación portuaria, se han basado principalmente en métodos empíricos, analíticos o de simulación. Los distintos autores a lo largo del tiempo, según se recoge en la publicación (Rodríguez et al., 2013), hacen estudios sobre planificación portuarias, pero no plantean su tratamiento o estimación a futuro con redes neuronales artificiales

En los métodos empíricos los planificadores portuarios deben proporcionar varios indicadores medios de productividad que relacionen las principales actividades del subsistema con la producción total por año, siendo muy útiles para planificación de nuevas

terminales y desarrollo de planes directores. Los indicadores de referencia han sido estudiados y actualizados constantemente por varios autores a lo largo del tiempo (BTRE, 2006; Drewry, 1997, Drewry, 2005, Fourgeaud, 2000; Rodríguez, 1985; Schreuder, 2005 y Soler, 1979) entre otros.

En los métodos analíticos se utilizan conceptos y formulaciones matemáticas, apoyándose en la teoría de colas requiriendo de amplias bases de datos. Estos métodos han sido ampliamente estudiados por varios autores (Rodríguez, 1985; UNCTAD, 1984 y Agerschou, 2004). Dragovic lo pone de manifiesto en su publicación "Port and container terminals modeling" (Dragovic et al, 2006). En dicha publicación se menciona varios estudios (Nicolaou, 1967; Nicolaou, 1969 y Plumlee, 1966 entre otros), que consideran diferentes aspectos de la planificación del sistema de línea de atraque tales como la tasa de ocupación, el porcentaje de congestión en el puerto, el tiempo mínimo de espera en puerto, los costes totales del sistema portuario, la determinación óptima del número de puestos de atraques y grúas en puerto, la combinación óptima de números de atraques/terminal y de grúas/atraque, etc.

En relación a los métodos de simulación tal y como indica la United Nations Conference on Trade and Development (UNCTAD, 1969) esta técnica representa por medio de un modelo un proceso complejo que de otro modo no sería susceptible de descripción matemática debido al comportamiento aleatorio y las características no lineales del proceso. Una descripción detallada del método y los resultados de aplicación al Puerto de Casablanca se recoge en una publicación de la UNCTAD (UNCTAD, 1984).

Fuera de España, en EEUU (Maloni et al., 2005), Maloni realiza un trabajo donde se hace una revisión de la literatura en relación a los factores de capacidad y en concreto con la planificación portuaria. Además de los citados por Maloni, existen otros trabajos en Singapur (Fan et al., 2000), donde se tratan temas relacionados con la planificación estratégica.

En España, las referencias bibliográficas, se remontan a 1977. (Rodríguez, 1977) recoge aspectos básicos de la planificación portuaria. Posteriormente (Soler, 1979) publica una comparación entre las condiciones de explotación de varios puertos españoles, mediante el uso de métodos empíricos. En fechas más recientes en una publicación (Camarero et al., 2009), se recogen los parámetros y procesos a tener en cuenta en la planificación de una terminal de contenedores. En 2007 (González, 2007), en su trabajo de tesis determina los parámetros y ratios característicos de la operativa portuaria, y obtiene los valores que éstos adoptan para cada una de las terminales portuarias de contenedores. Existen otros trabajos de planificación logística (Quijada-Alarcón et al., 2012) que podrían citarse.

Con la aparición de la inteligencia artificial y en concreto las redes neuronales artificiales, se espera una mejora significativa en la planificación portuaria. En relación a la literatura de aplicación de redes neuronales artificiales a la planificación de transportes, esta es prácticamente inexistente, principalmente, debido a la reciente aparición de la inteligencia artificial en nuestra sociedad.

Los orígenes de los primeros trabajos datan de 1943 (Warren et al., 1990) con unos comienzos un poco arduos y con poca aceptación desde la comunidad investigadora. No es hasta el año 1982, cuando (Hopfield, 1982) inventa el algoritmo Backpropagation, cuando se vuelve a generar interés por este tipo de inteligencia artificial.

Actualmente, existen numerosas universidades (Boston, Helsinki, Stanford, Carnegie-Mellon, California, Massacgussets, Madrid) que se encuentran desarrollando investigaciones referentes a las redes neuronales artificiales, así como algunas empresas con carácter privado en países como Japón, EEUU y en Europa.

En cuanto a trabajos relacionados con la planificación de transportes y las redes neuronales artificiales en España y que no sean de estos autores, existe el trabajo elaborado en la Universidad de Cádiz, sobre técnicas de predicción en el tráfico rodado (Moscoso et al., 2011).

A nivel internacional, existen estudios recientes como los de Gosasang y otros (Gosasang et al., 2010), donde realizan una predicción del tráfico de Contenedores en el Puerto de Bangkok aplicando Redes Neuronales, con el objetivo explorar el uso de las redes neuronales para predecir el movimiento de contenedores en el futuro con objeto de planificar las inversiones futuras en la ampliación de dicho puerto. En otros estudios estos autores también realizan comparaciones entre técnicas tradicionales y las técnicas de pronósticos de las redes neuronales en el movimiento de contenedores en el mismo puerto en su artículo del año 2011 (Gosasang et al., 2011).

En ese mismo año, Karlatis y Vlahogiaani (Karlatis y Vlahogianni, 2011) publican estudios donde se analizan las ventajas y/o diferencias que tienen los métodos estadísticos puros frente a las redes neuronales en cuanto a la investigación del transporte se refiere. En este estudio hacen referencia a la particularidad que tienen las redes neuronales para ajustarse a fenómenos no lineales y la capacidad de aprendizaje de estas.

Otros trabajos relacionados con las redes neuronales y su aplicación a planificaciones a corto plazo en el ámbito internacional, son los trabajos de pronósticos a corto plazo mediante redes neuronales (Vlahogianni et al., 2005) de los parámetros de tráfico, como el flujo y la ocupación, los relacionados con flujos de tráfico, la velocidad y la ocupación (Dougherty et al., 1994), estudios sobre problemas de transporte (Dougherty, 1995), (Clark et al., 1993) y otros relacionados con los pronósticos a corto plazo de la demanda de pasajeros de tren (Tsai et al., 2009), obteniendo en todos ellos respuestas prometedoras de cara a su uso en un futuro próximo y su aceptación por los resultados obtenidos.

Con el desarrollo de este trabajo se pretende, mediante la utilización de la inteligencia artificial, obtener resultados que ayuden a la toma de decisiones y optimización de medios y recursos en las terminales de contenedores en los puertos.

2. Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Dentro de las posibilidades de redes neuronales artificiales, existen más de 50 modelos y variantes, en función del modelo de la neurona, la arquitectura de la red, el tipo de conexión y el algoritmo de aprendizaje.

Se incluye en la tabla 1 una clasificación de los tipos de redes neuronales artificiales según el tipo de arquitectura y de aprendizaje, para poder analizar donde se encuentra el modelo de red utilizada.

Dentro de esta clasificación, la red con la que se ha realizado el estudio, se encontraría clasificada dentro de una red con aprendizaje supervisado y arquitectura unidireccional tal y como se puede observar en la siguiente tabla.

Tabla 1. Modelos de redes por tipo de aprendizaje y arquitectura

Aprendizaje	Arquitectura	
	Unidireccional	Realimentada
Supervisado	Perceptrón Adalina Madalina Perceptrón multicapa General Regression Neural Net. Learning Vector Quantization Máquina de Boltzmann	BSB Fuzzy Cog Map
No supervisado	Linear Associative Memory Optimal LAM Maps of Kohonen Neocongnitron	ART Hopfield BAM
Híbridas	Radial Base Function Contrapropagación	
Reforzados	Aprendizaje Reforzado	

2.1 Arquitectura unidireccional

Atendiendo al flujo de datos en la red neuronal, esta se puede clasificar como red unidireccional (feedforward) y red recurrente (feedback), en nuestro caso la red utilizada es del tipo feedforward.

Las redes neuronales feedforward corresponden a la clase de RNA más estudiada por el ámbito científico y la más utilizada en los diversos campos de aplicación.

Las diferentes clases de RNA se distinguen entre sí por los siguientes elementos:

- Las neuronas o nodos que constituye el elemento básico de procesamiento.
- La arquitectura de la red descrita por las conexiones ponderadas entre los nodos.
- El algoritmo de entrenamiento, usado para encontrar los parámetros de la red.

2.2 Aprendizaje supervisado

Las redes neuronales de entrenamiento supervisado son las más populares. Los datos para el entrenamiento están constituidos por varios pares de patrones de entrenamiento de entrada y de salida.

El aprendizaje supervisado, requiere el emparejamiento de cada vector de entrada con su correspondiente vector de salida. El entrenamiento consiste en presentar un vector de entrada a la red, calcular la salida de la red, compararla con la salida deseada, y el error o diferencia resultante se utiliza para realimentar la red y cambiar los pesos de acuerdo con un algoritmo que tiende a minimizar el error, con el fin de conseguir que la salida se aproxime a la deseada.

Las parejas de vectores del conjunto de entrenamiento se aplican secuencialmente y de forma cíclica. Se calcula el error y el ajuste de los pesos por cada pareja hasta que el error para el conjunto de entrenamiento entero sea un valor pequeño y aceptable.

El aprendizaje supervisado, puede llevarse a cabo mediante tres formas; Aprendizaje por corrección de error, aprendizaje por refuerzo y aprendizaje estocástico. En nuestro caso el aprendizaje utilizado es el primero de los tres, consistiendo en ajustar los pesos de las conexiones de la red en función de la diferencia entre los valores deseados y los obtenidos a la salida de la red, es decir, en función del error cometido en la salida.

El algoritmo utilizado en la red, es el algoritmo Backpropagation, este algoritmo, es un algoritmo de descenso por gradiente que retropropaga las señales desde la capa de salida hasta la de entrada, optimizando los valores de los pesos mediante un proceso de iteración, basándose en dos fases; Propagación hacia adelante y una vez se ha completado la fase de propagación hacia adelante se inicia la fase de corrección o fase de propagación hacia atrás.

3. Desarrollo metodológico

La metodología desarrollada en esta investigación nos permite determinar las necesidades de activos según los tráficos futuros en las terminales de contenedores en caso de no realizar inversión alguna, es decir, sin modificar los parámetros físicos de estudio (línea de atraque, superficie, grúas,...)

Este análisis se realiza mediante un esquema de comparación múltiple, generado de modo aleatorio a través de la herramienta de trabajo llamada NNtex (Li et al., 2013), basada en las redes neuronales artificiales RNA (Redes Neuronales Artificiales).

El modelo de una red neuronal artificial se compone de un conjunto de entradas ($x_j(t)$); unos pesos sinápticos (w_{ij}) que representan el grado de comunicación entre la neurona artificial j y la i; una regla de propagación $\sigma_i(w_{ij}, x_j(t))$ que determina el potencial de la interacción de la neurona i con las N neuronas vecinas; una función de activación $f_i[a_i(t-1), h_i(t)]$ sobre la neurona i, que determina el estado de activación de la neurona en base al potencial resultante h_i y al estado de activación anterior de la neurona $a_i(t-1)$; y una función de salida ($F_i(a_i(t))$) que representa la salida de la neurona i, que puede ser representada por la siguiente fórmula:

$$Y_i(t) = F_i(f_i(a_i(t-1), \sigma_i(w_{ij}, x_j(t))))$$

En consecuencia en las redes neuronales el aprendizaje puede ser visto como el proceso de ajuste de los parámetros libres de la red. Partiendo de un conjunto de pesos sinápticos

aleatorios, el proceso de aprendizaje busca un conjunto de pesos que permitan a la red desarrollar correctamente una determinada tarea. El proceso de aprendizaje es un proceso iterativo, en el cual se va refinando la solución hasta alcanzar un nivel de operación suficientemente bueno.

Se han desarrollado las siguientes fases en la metodología:

3.1 Fase I: Toma de datos, clasificación y discretización de los valores obtenidos de las terminales.

En esta primera fase se realiza un diagnóstico del estado actual de terminales de contenedores dentro de un ámbito geográfico de lo más variado y disperso en el entorno de las terminales de contenedores y se recopilan, clasifican y ordenan los datos a procesar.

Tabla 2. Esquema de la arquitectura de los datos tratados

Date	Cod_port	Cod_country	Long_berth	Term_surface	Cranes	TEU
2008	1	1	2.114	80,60	15	952.678
2008	2	2	3.974	158,33	50	2.492.107
2008	3	3	1.230	1,50	16	76.685
2008	4	3	2.528	5,38	4	334.326
2008	5	3	1.155	48,26	7	687.864
2008	6	3	985	16,00	16	946.847
2008	7	4	3.400	225,00	144	8.715.098
2008	8	4	9.142	812,00	515	28.006.000
2008	9	4	1.633	48,00	30	5.035.000
2008	10	4	3.472	129,24	65	7.103.000
2008	11	4	3.750	208,00	203	9.683.493
2008	12	5	12.610	441,25	192	10.294.589
2008	13	5	3.700	137,30	48	1.810.048
2008	14	6	555	21,60	3	874.955
2008	15	7	958	10,50	3	156.323
2008	16	8	400	47,80	4	305.414
2008	17	9	7.804	279,00	97	17.726.000
2008	18	9	3.000	65,00	27	2.200.000
2008	19	10	4.910	209,50	90	3.481.492
2008	20	11	300	14,42	7	121.418
2008	21	11	886	56,40	17	524.791
2008	22	11	2.205	31,80	24	1.409.782
...	...	...	...	...	...	...

El número de variables a considerar al tratarse de una red neuronal, puede ser casi infinito al poder trabajar con bases de datos de gran tamaño y número de campos.

Se procesan los valores de las terminales durante los años de los que se disponen datos.

Es este proceso se pueden generar bases de datos (tabla 2) donde relacionar variables del tipo número de puestos de atraque, capacidad de almacenamiento, tiempos de grúa, tiempos de espera, número y horas de atraque, longitud de muelle, la superficie de la terminal, el número total de grúas o equipos a utilizar, ocupaciones óptimas de las superficies de almacenamiento, la cantidad de contenedores movidos, capacidad de la terminal y sus distintos subsistemas,...

3.2 Fase II: Construcción de la red neuronal artificial.

La construcción de la red neuronal artificial, se genera utilizando la aplicación informática Matlab, donde se crea una red perceptron multicapa (figura 1) mediante un algoritmo de aprendizaje backpropagation con velocidad adaptativa de aprendizaje.

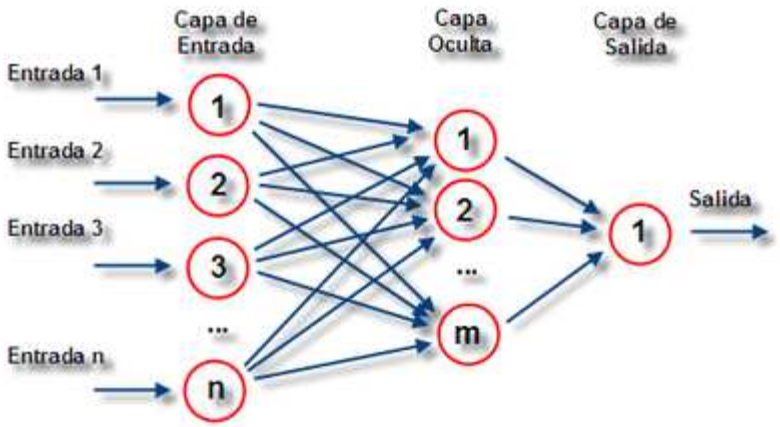


Figura 1. Esquema de la arquitectura de la red

El método de entrenamiento se trata de un gradiente descendente momentum. Una vez creada, tras un proceso previo de simulación, se entrena la red presentando unas entradas y salidas conocidas de los datos obtenidos de las terminales de contenedores, con objeto de que la red vaya reajustando su salida mediante la modificación de sus pesos y valores umbrales, de manera que el error de actuación de la red se minimice.

3.3 Fase III: Análisis del funcionamiento de la red y de los resultados obtenidos

Anterior a cualquier proceso, se debe definir el porcentaje de entrenamiento (figura 2) a considerar, es decir, se debe indicar que parte de los datos se consideran para el entrenamiento y cuales para el test, con objeto de comprobar la efectividad del modelo.

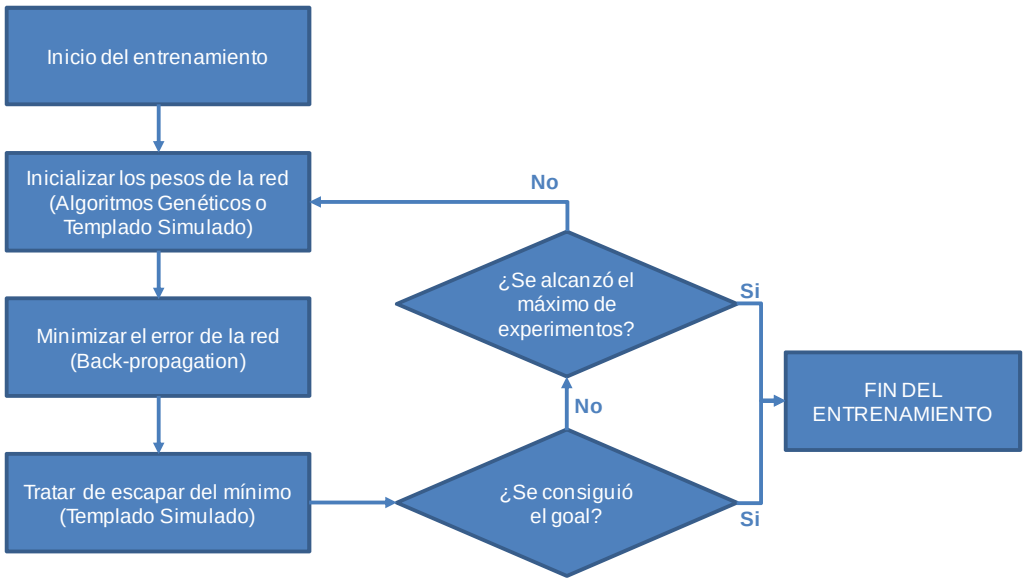


Figura 2. Diagrama de entrenamiento de la RNA

Durante este proceso, también se define el número de épocas o el número de veces que se han comparado los ejemplos con las salidas de la red para realizar los ajustes en los pesos de las conexiones (figura 3).

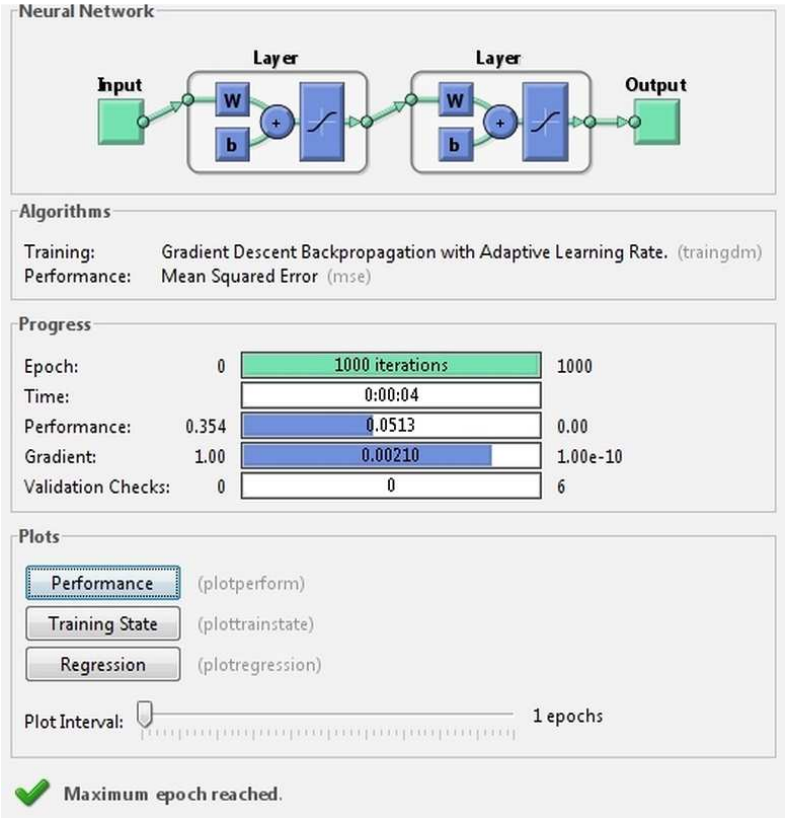


Figura 3. Imagen del módulo de entrenamiento de la red.

Para el análisis de funcionamiento de la red, se utilizan las siguientes variables obtenidas del entrenamiento de la red neuronal.

- Coeficiente de correlación (C), que nos permite comparar entre dos observaciones de la misma o diferentes variables y que cuantifica el grado de relación entre los datos reales y el pronóstico de la red. Esta variable se podría expresar del siguiente modo:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{N}(O_i - \overline{O})(P_i - \overline{P})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(O_i - \overline{O})^2 \sum_{i=1}^{N}(P_i - \overline{P})^2}}$$

  donde;

  O_i, es el valor real

  P_i, es el valor del pronóstico

  N, el nº de datos

- Error cuadrático medio (MSE), que mide el error cometido y viene definido por:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(O_i - \overline{P_i})^2$$

Durante la fase de entrenamiento, se comparan los valores de la variable de salida o reales, frente a los predichos o estimados por la red. Este proceso como se puede observar en la figura 4 nos permite comprobar cómo se aproxima la red con los datos de entrenamiento.

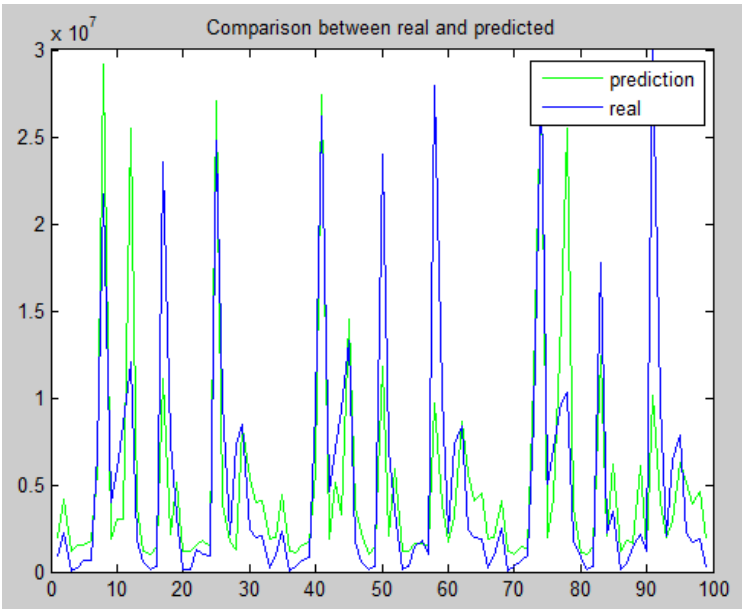


Figura 4. Comparativa de aproximación entre valores reales y de pronóstico

3.4 Fase IV: Validación de la red neuronal.

Una vez comprobado que las salidas de la red tras el entrenamiento, se encuentran dentro de los parámetros considerados como aceptables (Coeficiente de correlación, error cuadrático medio,...), se valida la red.

3.5 Fase V: Alcance del estudio.

En la última fase, una vez validada la red neuronal, se realiza un estudio pormenorizado de las distintas terminales de contenedores, evaluando el estado en que se encuentran en base a las instalaciones y equipos para movimiento de contenedores actuales en dichas terminales.

Este estudio se centra en un posible escenario de las necesidades de inversión a corto en el número de grúas necesarias, así como la limitación de inversiones en los puertos analizados debido a la situación económica actual. Este estudio, se traslada y amplia posteriormente a años futuros hasta su horizonte en el año 2015.

4. Resultado

Siguiendo las 5 fases comentadas en el apartado anterior, se procede a realizar el estudio sobre los datos recopilados de los puertos, obteniendo los siguientes resultados.

Se recopilan y analizan los tráficos de 33 puertos situados en 16 países tal y como se recoge en la tabla 3, entre los años 2003 a 2011 y se estructuran los datos con los campos que intervendrán en la red, estos campos incluyen la fecha del año, la denominación de la terminal de contenedores, el país de origen, la longitud del muelle, la superficie de la terminal, el número de grúas pórtico y la cantidad de contenedores movidos.

La sistemática anterior, se puede apreciar en el apartado 3.1. de este documento.

Tabla 3. Puertos analizados

Referencia	*Nombre*	*País*
1	Brisbane	Australia
2	Vancouver	Canadá
3	Antofagasta	Chile
4	Iquique	Chile
5	San Antonio	Chile
6	Valparaíso	Chile
7	Qingdao	China
8	Shanghái Total	China
9	Xiamén	China
10	Tianjin	China
11	Yantián	China
12	Busan	Corea
13	Kwangyang	Corea

Referencia	Nombre	País
14	Guayaquil	Ecuador
15	Acajutla	El Salvador
16	Puerto Quetzal	Guatemala
17	Hong Kong KCTY	Hong Kong
18	Hong Kong RTT	Hong Kong
19	Yokohama	Japón
20	Ensenada	México
21	Lázaro Cárdenas	México
22	Manzanillo	México
23	Balboa	Panamá
24	Callao	Perú
25	Singapur	Singapur
26	Kaohsiung	Taiwán
27	Keelung	Taiwán
28	Long Beach	USA
29	Los Ángeles	USA
30	Oakland	USA
31	Seattle	USA
32	Tacoma	USA
33	Portland	USA

Una vez analizados y estructurados los datos de los citados puertos, se procede a construir la estructura de la red neuronal.

Los algoritmos de la red considerada tal y como recoge la aplicación son los indicados en la figura 5.

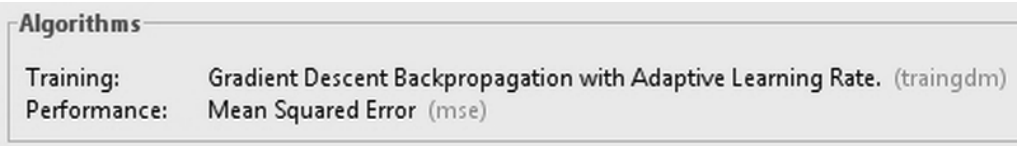


Figura 5. Algoritmos de la red considerada

Así mismo, los parámetros de la red serían los siguientes (tabla 4):

Tabla 4. Parámetros de la red

Input layers	Hidden layers	Output layers	Epoch	Learning rate	Momentum
3	5	1	1000	0,3	0,6

Posteriormente, se hace trabajar a la red con los datos recopilados tanto para estimar la situación actual como los años venideros a corto plazo hasta llegar al año 2015.

Con los datos originales desde los años 2003 hasta 2011, se ha entrenado la red, para así poder estimar el número de grúas necesarias entre los años 2012 a 2015 y ver así la progresión o necesidades a futuro en base a las tendencias entre los años 2003 y 2011.

4.1 Análisis por puertos

En la figura 6 se puede observar la comparación entre el número de grúas necesarias para el año 2013, con las existentes según los datos del último año de que se dispone. Asimismo en la figura 7 se representa el caso para el año horizonte, hasta el 2015.

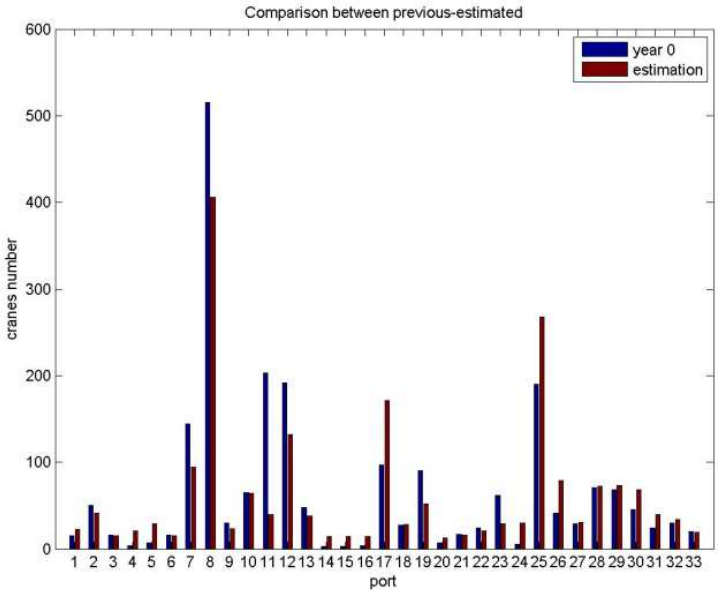


Figura 6. Comparación del número de grúas según la estimación hasta el año 2013

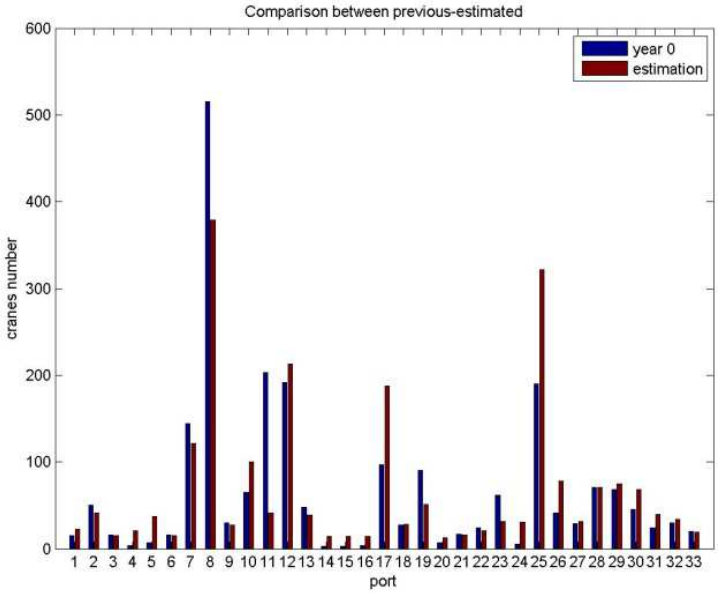


Figura 7. Comparación del número de grúas según la estimación hasta el año 2015

Como puede observarse en las gráficas del estudio existen puertos donde no es necesario realizar una mayor inversión en grúas, según los crecimientos previstos.

En la siguiente tabla 5 se representan los puertos donde no es necesario realizar nuevas inversiones de equipos al menos hasta el año 2015 según las previsiones de la RNA.

Tabla 5. Puertos que no requieren de una inversión en grúas hasta 2015 con las previsiones de tráfico

Referencia	Nombre	País
2	Vancouver	Canadá
3	Antofagasta	Chile
6	Valparaíso	Chile
7	Qingdao	China
8	Shanghái Total	China
9	Xiamén	China
11	Yantián	China
13	Kwangyang	Corea
19	Yokohama	Japón
21	Lázaro Cárdenas	México
22	Manzanillo	México
23	Balboa	Panamá
28	Long Beach	USA
33	Portland	USA

Cabe destacar que de entre los señalados anteriormente, alguno de los puertos citados, como Antofagasta, Valparaíso, Lázaro Cárdenas, Long Beach y Portland, se encuentran al límite de necesitar nuevas inversiones, ya que según las estimaciones las necesidades de grúas, se encontrarían alrededor de una nueva grúa respecto de las necesidades según la RNA a las reales.

Se puede observar que existen otros puertos, donde el descenso es significativo (Yantián, Yokohama y Balboa) por encima del 40%. Analizado el posible motivo del hecho, se aprecia que en los últimos años de registro de los datos, estas terminales han incrementado de modo muy significativo el número de grúas, no siendo así con el resto de parámetros como la longitud de muelle de atraque o superficie de la terminal. Con este hecho podemos observar como la red neuronal hace un ajuste de los recursos ante cambios en principio no justificados y en base a los parámetros utilizados para la estimación de necesidades, consecuencia que nos induce a pensar en que la red trabaja de modo acertado.

Por otro lado, los puertos, donde si es necesaria una inversión de cara a los tráficos previstos para el año 2015 son los que se recogen en la tabla 6.

Tabla 6. Puertos donde se requiere de una inversión en grúas de cara al año 2015.

Referencia	Nombre	País
1	Brisbane	Australia
4	Iquique	Chile
5	San Antonio	Chile
10	Tianjin	China

Referencia	*Nombre*	*País*
12	Busan	Corea
14	Guayaquil	Ecuador
15	Acajutla	El Salvador
16	Puerto Quetzal	Guatemala
17	Hong Kong KCTY	Hong Kong
18	Hong Kong RTT	Hong Kong
20	Ensenada	México
24	Callao	Perú
25	Singapur	Singapur
26	Kaohsiung	Taiwán
27	Keelung	Taiwán
29	Los Ángeles	USA
30	Oakland	USA
31	Seattle	USA
32	Tacoma	USA

Como sucedía en el caso anterior, algunos puertos como Hong Kong RTT y Keelung, donde únicamente la inversión necesaria según las estimaciones no supera las tres grúas, se debería separar del resto de casos, ya que quizás con una programación en la operativa del puerto podría evitar la necesidad de invertir e intentar buscar la máxima optimización de los recursos en caso de ser posible.

4.2 Análisis por países

El estudio se centra en 16 países dentro del ámbito internacional de la más variada y singular tipología. Aunque se puede observar que los países donde se encuentran los puertos del estudio, están localizados principalmente en la franja oeste de América y en la zona oriental del continente asiático.

En el análisis del trabajo, se observa que dentro de un mismo país, se dan ambos casos tanto de necesidades de incrementar los medios, así como de no tener que realizar nuevas inversiones. Este hecho, se ve reflejado en el siguiente gráfico (figura 8).

Por otro lado, podemos ver que en ciertos países como Australia, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Hong Kong, Perú, Singapur y Taiwán, sólo se observan necesidades de nuevas inversiones y por lo tanto serán zonas a nivel país con incremento de grúas en los puertos estudiados.

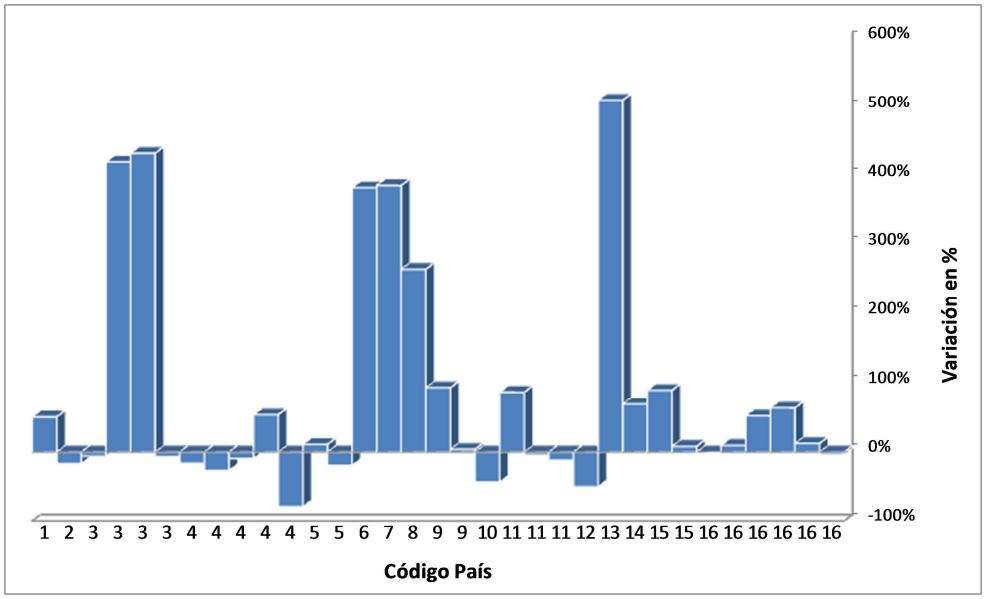


Figura 8. Variación porcentual de necesidades por paises

4.3 Análisis por continente

Al ser un estudio tan amplio, al realizar un análisis macro, observamos de nuevo variedad en los datos pero con matices ya que en los puertos del continente americano se producen las mayores necesidades de equipos, llegando a incrementos de más de 500% como sucede en el puerto de Callao. En este mismo continente se dan casos de sobredimensionamiento siendo el puerto más significativo el puerto de Balboa.

Por otro lado en el caso del continente asiático se estiman necesidades menores, siendo el puerto de Kaohsiung el de mayores necesidades con un incremento de 37 grúas, mientras que el puerto que necesitaría una inversión a mayor plazo sería el puerto de Yantián, ya que sus previsiones de grúas están por encima del 50% según el análisis de la red.

5. Conclusiones

Una vez analizados los resultados obtenidos podemos indicar que las redes neuronales artificiales pueden usarse para modelar cuestiones relativas a la planificación portuaria de transportes en las terminales de contenedores usando datos históricos.

De los resultados de la investigación se pueden hacer dos grandes grupos, aquellos que precisan de una inversión a corto plazo y otros que no requieren de dicha inversión y que con los recursos actuales podrían dar servicio al tráfico previsto con fecha horizonte el año 2015.

Estos dos grandes grupos se puede representar gráficamente como se recoge a continuación (figura 9).

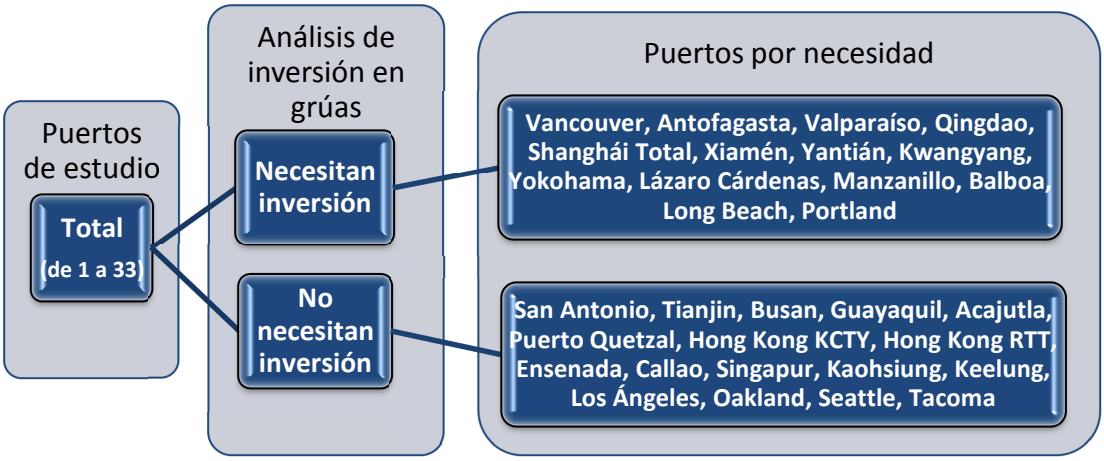


Figura 9. Resumen esquemático del estudio por puerto

De este mismo análisis, se obtiene la conclusión de que la red obtiene resultados verosímiles, dado que algunos puertos con grandes necesidades de ampliación según las estimaciones del estudio, como es el caso del puerto del Callao, se están acometiendo en la actualidad y por tanto las estimaciones de la red neuronal se pueden considerar acertadas en este caso. Si bien es cierto que se precisarían de más variables como son las políticas, sociales y económicas del periodo considerado, como para poder afirmar con toda certeza los resultados obtenidos.

Por tanto, para una mayor exactitud de los resultados, se deberían utilizar más variables como ampliaciones u obras que puedan condicionar los resultados obtenidos, ya que como se puede observar en las estimaciones el puerto de Balboa indica que no requiere inversiones hasta el 2015, hecho que puede ser real, pero a partir de esa fecha por la proximidad del mismo a la actual ampliación del canal de Panamá, sería conveniente estudiar este caso por separado. Por tanto, a mayor número de variables cuantificables que puedan influir en las estimaciones, el resultado podrá ser más próximo a la realidad.

En el caso de las conclusiones a nivel macro o de país/continente, podemos indicar que los localizados en el continente asiático, las necesidades de inversión a corto plazo son menores a las del continente americano.

En el estudio desarrollado, los parámetros fijos o variables de contorno considerados han sido, la longitud del muelle, la superficie de la terminal, el número de grúas pórtico y la cantidad de contenedores movidos.

Esta investigación deja la puerta abierta a realizar estudios con una misma red ampliando al resto de parámetros vinculantes a la explotación y planificación de la terminal y probar su validación y posible uso.

Referencias

[1] AGERSCHOU, Hans. "*Facilities Requirements In Planning and Design of Ports and Marine Terminals*", 2nd Ed., pp. 5-20, (H. Agerschou, eds), Thomas Telford Ltd, Londres, 2004.

[2] ABDELWAHAB, Walid. and SAYED, Tarek. "*Freight mode choice models using artificial neural networks*". vol. 16 nº4, pp. 267-286. Civil Engineering and Environmental Systems.

Malaysia, 2007. DOI: 10.1080/02630259908970267.

[3] AMIN, S. Massoud., RODIN, Ervin.Y., LIU, A.P., RINK, K. and GARCÍA-ORTÍZ, A., "*Traffic Prediction and Management via RBF Neural Nets and Semantic Control*". Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineedng, vol. 13 nº5, Malden (USA), pp.315-327. 1998. http://massoud-amin.umn.edu/publications/Traffic_Prediction.pdf.

[4] BTRE. Waterline issue nº 41 – December 2006. Department of Transport and Regional Services, Bureau of Transport and Regional Economics, Australia. 2006.

[5] CAMARERO, Alberto, GONZÁLEZ, Mª Nicoletta y PERY, Pascual. *"Optimización y estudio de la capacidad de las terminales portuarias mediante modelos de simulación y explotación"*. Determinación de los niveles de servicio. UPM, UPV, Cenit, Valencia Port, Cedex, España. 2009. Código PT-2066-004-14IAPM

[6] CLARCK, Samuel Delbert., DOUGHERTY, M. S. and KIRBY, Howard. R. *"The use of neural network and time series modes for short term forecasting: a comparative study"*, PTRC EDUCATION RESEARCH SERVICES LTD, London, pp. 151-62. 1993.

[7] DHARIA, Abhijit. and ADELI, Hojjat. *"Neural network model for rapid forecasting of freeway link travel time"*. Engineering Application of Artificial Intelligente, vol. 16 nº7, pp. 607-613. DOI: 10.1016/j.engappai.2003.09.011. 2003.

[8] DOUGHERTY, Mark. *"A review of neural networks applied to transport"*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, vol. 3 nº4, pp. 247-260. 1995. DOI: 10.1016/0968-090X(95)00009-8

[9] DOUGHERTY, Mark., KIRBY, Howard. and BOYLE, R. Artificial intelligence applications to traffic engineering. Using neural networks to recognize, predict and model traffic., Tokio, pp. 235-250. 1994.

[10] DRAGOVIC, B., ZRNIC, D. y RADMILOVIC, Z. *"Ports & Container Terminals Modeling"*. Research Monograph. Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade. 2006.

[11] DREWRY, World Container Terminals, Drewry Shipping Consultants, 1997.

[12] DREWRY, Global Port Congestion: No Quick Fix, Drewry Shipping Consultants, February 2005.

[13] FAGHRI, Ardeshir., ANEJA, Sasdeep. and VAZIRI, Manouchehr. *"Estimation of percentage of pass - by trips generated by a shopping center using artificial neural networks"*. Transportation Planning and Technology, vol. 22 nº4, Newark (USA), pp. 271-286. 1999. DOI: 10.1080/03081069908717632

[14] FAN, Henry .S.L. and CAO, Jia-Ming. *"Sea space capacity and operation strategy analysis system"*. Transportation Planning and Technology, vol. 24 nº1, pp. 49-63. 2000. DOI: 10.1080/03081060008717660

[15] FOURGEAUD, P. *"Measuring Port Performance"*, World Bank TWUTD, mimeo. 2000.

[16] GONZÁLEZ, Mª Nicoletta. *"Metodología para la determinación de parámetros de diseño de terminales portuarias de contenedores a partir de datos de tráfico marítimo"*, Tesis en Universidad Politécnica de Madrid. 2007.

[17] GOSASANG, Veerachai., CHANDRAPRAKAIKUL, Watcharavee. and KIATTSIN, Supaporn. *"A Comparison of Traditional and Neural Networks Forecasting Techniques for Container Throughput at Bangkok Port"*. The Asian Journal of Shipping and Logistics, vol. 27, nº3, pp. 463-482. 2011. DOI: 10.1016/S2092-5212(11)80022-2

[18] GOSASANG, Veerachai., CHANDRAPRAKAIKUL, Watcharavee. and KIATTSIN, Supaporn. *"An Application of Neural Networks for Forecasting Container Throughput at Bangkok Port"*, Proceedings of the World Congress on Engineering, London. 2010. http://www.iaeng.org/publication/WCE2010/WCE2010_pp137-141.pdf

[19] HOPFIELD, John.J. *"Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities"*. Proceedings of the national academy of sciences of the USA, vol. 79, nº8, pp. 2554-2558. 1982. http://www.pnas.org/content/79/8/2554.full.pdf+html

[20] HUISKEN, Giovanni. and VAN BERKUM, Eric. *"Short-Term travel time prediction using a Neural Network"*, 13th Meeting of the EURO Working Group on Transportation, Padua, Italy. 2009. http://www.iasi.cnr.it/ewgt/13conference/17_huisken.pdf

[21] KARLAFTIS, Matthew. and VLAHOGIANNI, Eleni. *"Statistical methods versus neural networks in transportation research: Differences, similarities and some insights"*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, vol. 19 nº3, pp. 387-399. 2011. DOI: 10.1016/j.trc.2010.10.004

[22] LI, Xuefei., CAMARERO ORIVE, Alberto., SOLER FLORES, Francisco. and GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoletta. *"NNtex: A toolbox to use the Neural Networks in an easy way"*. Pensamiento Matemático, vol. III, nº1, Madrid, Spain, pp. 149-154. 2013. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_III_num_1/inv_1_nntex.pdf

[23] LÓPEZ GONZÁLEZ, Alejandro. *"El contenedor, la terminal y métodos informáticos"*, Tesis en Facultad Náutica de Barcelona. Universitat Politécnica de Catalunya. 2009.

[24] MALONI, Michael. and JACKSON, Eric.C. *"North American Container Port Capacity. An Exploratory Analysis"*. Transportation Journal, vol. 44 nº2, pp. 16-36. 2005. http://www.jstor.org/discover/10.2307/20713603?uid=3737952&uid=2&uid=4&sid=21102948527551

[25] MARTÍN DEL BRÍO, Bonifacio. and Sanz Molina, Alfredo. *"Redes neuronales y sistemas difusos"*. 2ª ed. México D.F., México: Alfaomega. 2002.

[26] MITREA, C., LEE, C. and WU, Z. *"A Comparison between Neural Networks and Traditional Forecasting Methods: A Case Study"*. International Journal of Engineering Business Management, Wai Hung Ip (Ed). 2009. DOI: 10.5772/6777

[27] MOSCOSO LÓPEZ, José Antonio., RUÍZ AGUILAR, Juan Jesús. y CERBÁN JIMÉNEZ, María del Mar. *"Técnicas de predicción en el tráfico Ro-Ro en el nodo logístico del Estrecho de Gibraltar"*. Sesión Iberoamericana IAME 2011 Conference. Santiago de Chile, CHILE. 2011. http://www.cepal.org/transporte/noticias/noticias/3/45303/PANELA-5DOCUMENTO.pdf

[28] NICOLAOU, S. N. *"Berth Planning by Evaluation of Congestion and Cost"*, Journal of the Waterways and Harbors Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp. 93. 1967.

[29] NICOLAOU, S. N. *"Berth Planning by Evaluation of Congestion and Cost – Closure"*. Journal of the Waterways and Harbors Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 95 (WW3), pp. 419-425. 1969.

[30] PLUMLEE, C.H. *"Optimum Size Seaport"*, Journal of the Waterways and Harbors Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 92, 1-24. 1966.

[31] ORTEGA, Raimundo. *"Cómo se generó la catástrofe, y quiénes se enteraron y quiénes no"*. Revista de libros de la Fundación Caja Madrid, nº153, pp. 11-14. 2009. http://www.revistadelibros.com/articulo_imprimible_pdf.php?art=4417&t=articulos

[32] PAO, Hsiao-Tien. *"A comparison of neural network and multiple regression analysis in modeling capital structure"*. Expert Systems with Applications, vol. 35 nº3, pp. 720-727. 2008. DOI: 10.1016/j.eswa.2007.07.018

[33] PARK, Dongjoo. and RILLETT, Laurence R. *"Forecasting multiple-period freeway link travel times using modular neural networks"*. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, vol. 1617, pp. 163-170. 1998. DOI: 10.3141/1617-23

[34] QUIJADA-ALARCÓN, Jorge, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoletta, CAMARERO ORIVE, Alberto and SOLER FLORES, Francisco. *"Road network analysis using decision trees algorithm: A case of study of Panama"*. Advanced Research in Scientific Areas. 2012. http://www.arsa-conf.com/archive/?vid=1&aid=2&kid=60101-242

[35] RODRÍGUEZ GARCÍA, Tomás, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoletta and SOLER FLORES, Francisco. *"Setting the port planning parameters in container terminals through artificial neural networks"*, Global Virtual Conference. 2013. http://www.gv-conference.com/archive/?vid=1&aid=2&kid=30101-9

[36] RODRÍGUEZ GARCÍA, Tomás, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoletta and SOLER FLORES, Francisco. *"Forecasting models in ports transport systems"*, 2nd Electronic international Interdisciplinary Conference. 2013. http://www.eiic.cz/archive/?vid=1&aid=3&kid=20201-29&q=f1

[37] RODRÍGUEZ PÉREZ, Fernando. *"Dirección y explotación de puertos"*, Puerto Autónomo de Bilbao. 1985.

[38] SAYED, Tarek and RAZAVI, Abdolmehdi. *"Comparison of Neural and Conventional Approaches to Mode Choice Analysis"*. Journal of Computing in Civil Engineering. vol. 14 nº1, pp. 23-30. 2000. DOI: 10.1061/(ASCE)0887-3801(2000)14:1(23)

[39] SCHREUDER, M. *"Application of Approximate Performance Indicators for Master Planning of Large Ports"*. Port Technology International. Nº26, pp 19-22. 2005.

[40] SOLER, R. *"Índices Portuarios Españoles"*. Revista de Obras Públicas. Nº 3166. p 91-104. ISSN: 0034-8619. 1979.

[41] TSAI, Tsung-Hsien, LEE, Chi-Kang and WEI, Chien-Hung. *"Neural network based temporal feature models for short-term railway passenger demand forecasting"*. Expert Systems with Applications, vol. 36 nº2, pp. 3728-3736. 2009. DOI: 10.1016/j.eswa.2008.02.071

[42] UNCTAD. *"Desarrollo de los Puertos. Mejoramiento de las Operaciones Portuarias e Instalaciones Conexas"*. Naciones Unidas, Nueva York. 1969.

[43] UNCTAD. *"Desarrollo Portuario. Manual de Planificación Para Países en Desarrollo"*. Naciones Unidas, Nueva York. 1984.

[44] VLAHOGIANNI, Eleni I., KARLAFTIS, Matthew G. and GOLIAS, John C. *"Optimized and meta-optimized neural networks for short-term traffic flow prediction: A genetic approach"*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, vol. 13 nº3, pp. 211-234. 2005. DOI: 10.1016/j.trc.2005.04.007

[45] WARREN S., MCCULLOCH and WALTER, Pitts. *"A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity"*. Bulletin of Mathematical Biology, vol. 52 nº1-2, pp. 99-115. 1990. DOI:10.1016/S0092-8240(05)80006-0

[46] ZHANG, Guoqiang Peter. *"An investigation of neural networks for linear time-series forecasting"*. Computers & Operations Research, vol. 28, nº12, pp. 1183-1202. 2001. DOI: 10.1016/S0305-0548(00)00033-2

Sobre los autores:

Nombre: Tomás Rodríguez García
Correo Electrónico: t.rodriguez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, Departamento de Ingeniería Civil: Infr. del transporte. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Civiles, España.

Nombre: Nicoletta González Cancelas
Correo Electrónico: nicoleta.gcancelas@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, Departamento de Ingeniería Civil: Transportes. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, España.

Nombre: Francisco Soler-Flores
Correo Electrónico: fsoler@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, Departamento de Ingeniería Civil: Transportes. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, España.

Investigación

Representaciones hipergeométricas de la función zeta de Hurwitz

Hypergeometric representations of the Hurwitz zeta function

Anier Soria Lorente, Eduardo Renato Moreno Roque y Raúl Recio Avilés

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 109–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Abr'15; Aceptación: 20 Ago'15

15 de enero de 2014

Resumen

En este artículo se presentan nuevas formas de representar la función zeta de Hurwitz en series hipergeométricas ordinarias.

Palabras Clave: Función zeta de Hurwitz, función zeta generalizada, símbolo de Pochhammer, serie hipergeométrica ordinaria.

Abstract

In this paper new manners of representing the Hurwitz zeta function in ordinary hypergeometric series is presented.

Keywords: Hurwitz zeta function, generalized Zeta function, Pochhammer symbol, ordinary hypergeometric series.

1. Introducción

Aunque no esté definido con exactitud el término "Funciones Especiales", no obstante, al mencionarlo, se hace referencia a un conjunto de funciones que aparecen con frecuencia en diversos problemas prácticos y teóricos, y que, debido a ello, poseen un nombre propio. Actualmente, el número de elementos integrantes de este conjunto es muy grande, de hecho, hoy en día se hace referencia a más de un millar de funciones especiales, sobre las que existe una abundante literatura y sus propiedades se pueden encontrar en numerosas recopilaciones y monografías [1, 2, 4, 6, 8, 10, 13].

Dada su gran diversidad, resulta atractivo disponer, para su estudio, de criterios de unificación que permitan agruparlas en clases más amplias con alguna característica común. Naturalmente, esta característica debe elegirse de forma que, en base a ella, sea posible desarrollar

procedimientos generales para la obtención de sus propiedades, sin necesidad de tratar cada función individualmente. Desde luego, se pueden considerar criterios de unificación muy diversos que, en muchos casos, tengan carácter parcial en el sentido de que resultan útiles para obtener cierto tipo de propiedades, y no otras. A título de ejemplo se puede citar el carácter hipergeométrico generalizado de las funciones, entendiendo por tal el hecho de que la función admita una representación del estilo

$$ {}_rF_s\left(\left.\begin{array}{c} a_1,\ldots,a_r \\ \\ b_1,\ldots,b_s \end{array}\right| z\right) \equiv \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k\cdots(a_r)_k}{(b_1)_k\cdots(b_s)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{1} $$

siendo

$$ \begin{aligned} (z)_k &\equiv \prod_{0\leq j\leq k-1}(z+j), \quad k\geq 1, \\ (z)_0 &= 1, \quad (1)_k = k!, \end{aligned} $$

el símbolo de Pochhammer $(\cdot)_k$ [1, 3, 11, 12], también llamado en inglés "shifted factorial". Además, en (1), $\{a_i\}_{i=1}^r$ y $\{b_j\}_{j=1}^s$ son números complejos sujetos a la condición que $b_j \neq -n$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ para $j = 1, 2, \ldots, s$.

Se sabe que las funciones hipergeométricas aparecen formalmente en el trabajo pionero de C. F. Gauss [5], a inicios del siglo XIX, aunque algunos aspectos particulares ya eran conocidos anteriormente; L. Euler en su Institutiones calculi integralis (1768) ya utilizaba la ecuación hipergeométrica y el método de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de series de potencias, y los que hoy se conocen como polinomios de Legendre habían aparecido ya en conexión con problemas de mecánica newtoniana. Desde entonces las funciones hipergeométricas han sido objeto de amplio estudio tanto desde el punto de vista puramente matemático [3, 8, 13] como por el interés que revisten en las aplicaciones.

Como es conocido, Komano en [7] introdujo la siguiente función múltiple de zeta

$$ \zeta_r(\vec{s},\alpha) \equiv \sum_{\substack{k_n>\cdots>k_1>0 \\ k_j\in\mathbb{Z}^+,\, 1\leq j\leq r}} \prod_{1\leq j\leq r} (k_j+\alpha)^{-s_j}, $$

donde, $\vec{s} = (s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$ y $\alpha > 0$, la cual para el caso especial $r = 1$ se reduce a la función zeta de Hurwitz o función zeta generalizada [9, 13], dada mediante

$$ \zeta(s,\alpha) \equiv \sum_{n\geq 0}(n+\alpha)^{-s}, \quad 0<\alpha\leq 1,\ \mathrm{Re}\, s>1. \tag{2} $$

Además, para $s \in \mathbb{Z}^+$ con $s > 1$, la función (2) se puede representar de las siguientes maneras

$$ \zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s} = \alpha^{-s}\,{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c} 1,\alpha,\ldots,\alpha \\ \\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1 \end{array}\right| 1\right) \tag{3} $$

$$ = \alpha^{-s}\sum_{n\geq 0}\overbrace{{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,1 \\ \\ \alpha+1 \end{array}\right| 1\right)\cdots{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,1 \\ \\ \alpha+1 \end{array}\right| 1\right)}^{s\text{-veces}}, \tag{4} $$

Obsérvese que, la igualdad (4) se justifica a partir de la identidad de Chu-Vandermonde [4, 8], la cual aparece a menudo en la práctica, y la misma viene dada mediante

$$ {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,b \\ \\ c \end{array}\right| 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{5} $$

Nótese además que, teniendo en cuenta que la serie ${}_{s+1}F_s$ es llamada k-balanceada si

$$\sum_{1\leq j\leq s}\left(b_j-a_j\right)-a_{s+1}=k,$$

entonces, a partir (3) se deduce que $\zeta\left(s,\alpha\right)$ es el producto de α^{-s} por una serie hipergeométrica ordinaria ${}_{s+1}F_s$, $(s-1)$-balanceada.

En la sección, que a continuación se presenta, se darán los resultados fundamentales de esté artículo, relacionados con nuevas representaciones de la función zeta de Hurwitz (2) en series hipergeométricas ordinarias.

2. Resultados Fundamentales

Para mayor brevedad, denótese

$$\overbrace{{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)\cdots{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)}^{s\text{-veces}},$$

por

$${}_2F_1^s\left(\left.\begin{array}{c}-n,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right).$$

A continuación se presentará el resultado principal, dado mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea s un número entero, con $s>1$ y $0<\alpha\leq 1$. Entonces la función zeta de Hurwitz (2) admite las siguientes representaciones*

i.)

$$\zeta\left(s,\alpha\right)=\left(n+\alpha\right)^{-s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,n+\alpha,\ldots,n+\alpha\\ n+\alpha+1,\ldots,n+\alpha+1\end{array}\right|1\right)+\sum_{0\leq k\leq n-1}{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-k,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right),\quad n\in\mathbb{N},\tag{6}$$

ii.)

$$\zeta\left(s,2^{-1}\alpha\right)=\left(2^{-1}\alpha+2^{-1}\right)^{-s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,2^{-1}\alpha+2^{-1},\ldots,2^{-1}\alpha+2^{-1}\\ 2^{-1}\alpha+3/2,\ldots,2^{-1}\alpha+3/2\end{array}\right|1\right)+\left(2\alpha^{-1}\right)^{s}{}_{s+1}F_s\left(\left.\begin{array}{c}1,\alpha,\ldots,\alpha\\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1\end{array}\right|-1\right),\tag{7}$$

iii.)

$$\zeta\left(s,\alpha\right)=\alpha^{-s}\sum_{k\geq 0}\left(-1\right)^k{}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c}-k,\alpha\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right){}_2F_1^{s-1}\left(\left.\begin{array}{c}-k,1\\ \alpha+1\end{array}\right|1\right)\times{}_sF_{s-1}\left(\left.\begin{array}{c}k+1,k+\alpha,\ldots,k+\alpha\\ k+\alpha+1,\ldots,k+\alpha+1\end{array}\right|1\right),\tag{8}$$

iv.)

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}{}_sF_{s-1}\left(\begin{array}{c} 1,\alpha,\ldots,\alpha \\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1 \end{array}\middle|\, 1\right) - \alpha^{-1}(\alpha+1)^{-s}\,{}_{s+1}F_s\left(\begin{array}{c} 2,\alpha+1,\ldots,\alpha+1 \\ \alpha+2,\ldots,\alpha+2 \end{array}\middle|\, 1\right). \quad (9)$$

Demostración. En efecto, obsérvese que a partir de (2) se deduce fácilmente

$$\zeta(s,\alpha) = \zeta(s,n+\alpha) + \sum_{0\le k\le n-1}(k+\alpha)^{-s}, \quad n\in\mathbb{N},$$

y

$$\zeta\left(s,2^{-1}\alpha\right) = \zeta\left(s,2^{-1}\alpha+2^{-1}\right) + 2^s\sum_{n\ge 0}(-1)^n(n+\alpha)^{-s}.$$

Luego, teniendo en cuenta lo visto anteriormente, se consiguen los resultados correspondientes a (6) y (7) respectivamente.

A continuación, haciendo uso de la identidad de Chu-Vandermonde (5) y la propiedad $(-n)_k = 0$ cuando $k > n$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha+1)_n} &= {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n,1 \\ \alpha+1 \end{array}\middle|\, 1\right) \\ &= \sum_{k\ge 0}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} = \sum_{0\le k\le n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}. \end{aligned}$$

Como consecuencia se llega

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}\sum_{n\ge 0}\frac{(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}}\sum_{0\le k\le n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}.$$

Luego, debido a que

$$(-n)_k = (-1)^k\frac{(1)_n}{(1)_{n-k}}, \quad k\le n.$$

Entonces como resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta(s,\alpha) &= \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge k}\frac{(-1)^k(1)_n(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}(\alpha+1)_k(1)_{n-k}} \\ &= \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^k(1)_{n+k}(\alpha)_{n+k}^{s-1}}{(\alpha+1)_{n+k}^{s-1}(\alpha+1)_k(1)_n}. \end{aligned}$$

Y haciendo uso de la propiedad

$$(z)_{n+k} = (z)_k(z+k)_n, \quad (10)$$

se deduce lo siguiente

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\frac{(1)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{(\alpha)_k^{s-1}}{(\alpha+1)_k^{s-1}}\sum_{n\ge 0}\frac{(k+1)_n(k+\alpha)_n^{s-1}}{(k+\alpha+1)_n^{s-1}}\frac{1^n}{n!},$$

lo cual coincide con (8). Para probar el segundo apartado, se debe tener en cuenta la siguiente relación de recurrencia

$$(\alpha)_n = \alpha^{-1}\left[(\alpha)_{n+1} - n\,(\alpha)_n\right].$$

A partir de la cual se infiere lo siguiente

$$\zeta(s,\alpha) = \alpha^{-s-1}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_{n+1}\,(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^s} - \alpha^{-s-1}\sum_{n\geq 0}\frac{n\,(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s}. \tag{11}$$

Obsérvese además, que utilizando (10) se deduce

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_{n+1}\,(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^s} &= \alpha\sum_{n\geq 0}\frac{(1)_n\,(\alpha)_n^{s-1}}{(\alpha+1)_n^{s-1}}\frac{1^n}{n!}\\ &= \alpha\,{}_sF_{s-1}\left(\begin{array}{c}1,\alpha,\ldots,\alpha\\ \\ \alpha+1,\ldots,\alpha+1\end{array}\middle|\,1\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Así como

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n\,(\alpha)_n^s}{(\alpha+1)_n^s} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)\,(\alpha)_{n+1}^s}{(\alpha+1)_{n+1}^s}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)\,(\alpha+1)_n^s}{(\alpha+2)_n^s}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s\sum_{n\geq 0}\frac{(2)_n\,(\alpha+1)_n^s}{(\alpha+2)_n^s}\frac{1^n}{n!}\\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^s{}_{s+1}F_s\left(\begin{array}{c}2,\alpha+1,\ldots,\alpha+1\\ \\ \alpha+2,\ldots,\alpha+2\end{array}\middle|\,1\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Por consiguiente, a partir de (11)-(13) se consigue el resultado deseado correspondiente a (9). Obsérvese además, que la expresión (9) se representa mediante la combinación de dos series hipergeométricas $s-2$ y $s-1$-balanceadas, respectivamente. □

Agradecimientos: Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valoradas sugerencias. Agradecemos además, al proyecto ClaveMat, financiado por la unión Europea, www.clavemat.com.

Referencias

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1972.

[2] ANDREWS, G., ASKEY, R. and ROY, R., *Special functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Plublished by the press syndicate of the university of Cambridge, ISBN 0 521 78988 5, 2000.

[3] ARVESÚ, J. and SORIA-LORENTE, A., *First order non-homogeneous q-difference equation for Stieltjes function characterizing q-orthogonal polynomials*, J. Differ. Equ. Appl., DOI:10.1080/10236198.2012.693484, 2011.

[4] GASPER, L. and RAHMAN, M., *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] GAUSS, C., F., *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Comment. Götting, Vol. 2, pp. 123–162, 1876.

[6] GIL, A., SEGURA, J. and TEMME, N., *Numerical methods for special functions,* Copyright by the Society for Indrustrial and Applied Mathematics, University City Science Center, Philadelphia, 2007.

[7] KAMANO, K., *The multiple Hurwitz Zeta function and a generalization of Lerch's formula*, Tokyo J. Math., Vol. 29, pp. 61–73, 2006.

[8] KOEKOEK, R. and SWARTTOUW, R. F., *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.

[9] KREMINSKI, R., *Newton-Cotes integration for approximating Stieltjes (generalized Euler) constants*, Mathematics of computation, Vol. 72, Nº 243, pp. 1379–1397, 2002.

[10] NIKIFOROV, A. F., UVAROV, V. B., *Special Functions in Mathematical Physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[11] PETOJEVIC, A., *New formulae for $K_i(z)$ function*, Novi Sad J. Math., Vol. 35, Nº 2, pp. 123–132, 2005.

[12] SORIA-LORENTE, A., *Arithmetic of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments*, G.I.E, Pensamiento Matemático, accepted, 2013.

[13] SORIA-LORENTE, A., CUMBRERA, R., *q-Hypergeometric representations of the q-analogue of zeta function*, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5, Nº 2, pp. 1–8, 2014.

Sobre los autores:

Nombre: Anier Soria Lorente
Correo electrónico: asorial@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

Nombre: Eduardo Renato Moreno Roque
Correo electrónico: emorenor@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

Nombre: Raúl Recio Avilés
Correo electrónico: raquelsem@infomed.sld.cu
Institución: Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

Juegos y Rarezas Matemáticas

Una del Oeste

A tale of the Far West

Dionisio Pérez

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 115–118, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Jun'15; Aceptación: 17 Sep'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Con la excusa de un western típico, hacemos un estudio de las probabilidades asociadas a la elección al azar de n objetos por sus propietarios. La ley de Poisson se revela adecuada para describir la situación.

Palabras Clave: Probabilidad, Bernoulli, Poisson, Permutaciones, desarreglos.

Abstract

We study the probabilities associated to the random choice of n objects by their owners. Poisson's law shows its accuracy in the description of such a situation.

Keywords: Probability, Bernoulli, Poisson, permutations, derangements.

1. La cantina

La historia la hemos visto muchas veces: llega a la cantina un grupo de indeseables. Vienen a caballo, alborotando y disparando al aire; acaban de asaltar un rancho. Dejan los caballos en el establo y entran. Después de varias horas de puñetazos y whisky, oyen que llega el sheriff con sus hombres y salen apresuradamente: montan de nuevo en los caballos sin fijarse en cuál elige cada uno (ni la bebida ni las prisas se lo permiten) y se alejan galopando.

El sheriff se informa detalladamente y quedan claros los siguientes hechos: se trata de un grupo numeroso, de entre 15 y 20 hombres y otros tantos caballos; su huida ha sido precipitada, de modo que la elección de las monturas ha resultado totalmente aleatoria; van armados y bastantes bebidos. Llevan como una hora de ventaja a quienes salgan ahora en su persecución.

El sheriff, un hombre serio con cierto aire a Gary Cooper, cuenta con tres ayudantes eficaces pero no tan valientes como para enfrentarse a más de una docena de pistoleros siendo ellos apenas cuatro. Para convencerles y animarles, les hace estas reflexiones:

- Somos cuatro hombres armados y decididos, con la ley de nuestra parte, contra unos cuatreros medio borrachos que ni siquiera conocen al animal que montan. Con las prisas, es fácil

que a lo sumo tres o cuatro de ellos vayan en su propio caballo, pero los que van en animal ajeno no cuentan porque no serán capaces de dominarlo. Y tres o cuatro forajidos ebrios no son rival para nosotros.

- Aunque fueran seis o siete, somos hombres para arrestarles y meterles en prisión, pero no tendríamos nada que hacer frente a diez o más, dice uno de sus ayudantes.

- Tranquilos. Os aseguro que no tendremos que enfrentarnos a más de seis u ocho, y seguramente no lleguen a ser más de dos o tres. ¿Alguna vez has tenido un póker?; sin hacer trampa, quiero decir. Pues es más difícil que ellos sean tanta gente. Apuesto mi alazán a que no nos doblan en número.

¿En qué se basa el sheriff para decir eso? ¿Sólo intenta dar ánimos a sus hombres, o hay algo más sólido en sus palabras? ¿Va de farol? ¿Es acaso el sheriff un matemático con una estrella de hojalata? ¿Corre peligro serio de perder el caballo?

Es posible que usted quiera resolver esas cuestiones por sí mismo. Le animo a que lo haga: ¿cuántos jinetes es de esperar que hayan atinado con su propio caballo? ¿cuál es la probabilidad de que sean más de 8? ¿y de que sean todos? ¿ninguno? ¿sólo uno? A vuelta de párrafo abordamos estas preguntas.

2. Echando cuentas

Sabemos que el número de los cuatreros anda entre 15 y 20: vamos a decir que es n. Para estudiar el problema, conviene desmenuzarlo, y a tal efecto empezamos por introducir unas variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que fijen la atención en cada jinete concreto y nos digan si el caballo que montaba a la salida era el mismo que llevaba al llegar. Definimos, para ello, X_k así:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si el } k\text{-ésimo vaquero salió con su propio caballo} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Cada una de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ es de Bernoulli y tiene esperanza $E[X_k] = \frac{1}{n}$, puesto que ésa es la probabilidad que tiene el jinete en cuestión de haber acertado con su animal. El número de vaqueros que han salido a lomos de su propia montura viene dado por la suma

$$S = S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

Las preguntas que nos planteamos hace un rato se formulan cómodamente en términos de S: ¿cuál es la esperanza de S? ¿cuáles son las probabilidades de que S tome el valor 0, o 1, o sea menor que 8? Centramos, pues, nuestra atención en la variable aleatoria $S = S_n$.

Lo mismo que el sheriff y sus hombres no deben seguir pistas falsas, nosotros hemos de evitar la tentación de ver a S como una variable aleatoria binomial: aunque es suma de variables de Bernoulli, no son independientes. Esta observación, que nos ahorra un fracaso sonrojante, nos obliga a realizar los cálculos de las probabilidades sin acudir a las fórmulas bien conocidas de las variables binomiales, así que vamos a ello:

La esperanza de S es fácil de calcular:

$$E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = 1$$

gracias a la linealidad de la esperanza. Así que podemos esperar encontrar (como promedio) un solo vaquero subido en su caballo. Buenas noticias para los perseguidores.

La varianza de S es algo laboriosa de calcular. Como no es relevante para esta película, no la calcularemos (que lo haga el lector curioso); diremos solamente que es igual a 1. La gran cuestión es: cuál es la probabilidad de que S sea igual a 0, a 1 o a un valor dado, k. Por ejemplo, ¿qué probabilidad hay de que todos los cuatreros hayan acertado con sus caballos? ¿y de que no haya atinado ninguno?

La respuesta a la primera pregunta es obvia: como el número de opciones posibles es $n!$ y cada una de las permutaciones de los n caballos tiene la misma probabilidad de darse (pues los cogen al azar), deducimos que $P(S = n) = \frac{1}{n!}$

También es evidente que $P(S = n - 1) = 0$. Pero la probabilidad clave, que nos va a permitir calcular todas es $P(S = 0)$, que abreviamos como p_n, para recordar que depende del número de los asaltantes. ¿Qué valor tiene p_n?

Para valores bajos de n, se puede calcular directamente:

n	p_n
2	0'500
3	0'333
4	0'375
5	0'367

En general, el valor de p_n viene dado por

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

Esa expresión sale de dividir el número de casos favorables entre el de los posibles. El denominador está claro: $n!$; el numerador es el número de casos en que ningún vaquero lleva su propio caballo, es decir, el de las permutaciones de n elementos que no dejan ninguno fijo. Tales permutaciones se suelen conocer como 'desarreglos', pero yo prefiero el término 'desbarajustes', que no suena a desórdenes hormonales.

Para contarlos, nos fijamos en el conjunto A_1 formado por las permutaciones que fijan el primer elemento, $A_1 = \{\sigma : \sigma(1) = 1\}$, en el conjunto $A_2 = \{\sigma : \sigma(2) = 2\}$, etcétera. El conjunto en el que estamos interesados es precisamente el complementario de la unión $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. El cardinal de esa unión viene dado por la suma de los cardinales de los conjuntos A_i menos la suma de los cardinales de las intersecciones binarias $A_i \cap A_j$ más la suma de los cardinales de las intersecciones ternarias $A_i \cap A_j \cap A_k$ etcétera.

Si observamos que

$$|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!, \ldots$$

y que hay n conjuntos del primer tipo, $\frac{n(n-1)}{2}$ del segundo, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ del tercero, llegamos a la conclusión de que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{6} - \frac{n!}{24} + \ldots$$

Por tanto, la cantidad total de desbarajustes es

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{6} + \frac{n!}{24} + \ldots$$

y al dividir por $n!$ resulta el valor de p_n.

Se descubre ahí una suma parcial de la serie de Taylor de la función exponencial $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ para $x = -1$, de manera que los valores p_n convergen a $e^{-1} \approx 0'36788$, y además la convergencia es muy rápida: así, para $n = 7$ la diferencia es de apenas dos cienmilésimas. Se deduce de ahí que p_n no depende de n más que muy débilmente, en cuanto n supera el valor 4; desde un punto de vista práctico, podemos decir que $P(S = 0)$ es del $36'8\,\%$ sea cual sea n (superior a 5).

Por lo que hemos visto hasta ahora, el sheriff sabe de lo que habla, y su pequeño grupo lleva todas las de ganar: hay grandes probabilidades de que ni un solo forajido conserve su caballo, y el promedio esperado es de apenas uno de ellos. Vamos a rematar la faena calculando la probabilidad de que sean exactamente uno, dos o tres los vaqueros afortunados que montan sus respectivas caballerías.

S toma el valor 1 cuando una de las variables X_k vale 1 y las demás valen 0. Aprovechando la simetría de la situación, calculamos la probabilidad $P(S = 1)$ evaluando $P(X_1 = 1, X_2 = \ldots = X_n = 0)$ y multiplicando por n. Bien, esa probabilidad es sencilla:

$$P(X_1 = 1, X_2 = \ldots = X_n = 0) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = \ldots = X_n = 0 | X_1 = 1) = \frac{1}{n} \cdot p_{n-1}$$

Multiplicando por n, vemos que $P(S = 1) = p_{n-1}$ coincide (salvo por una miserable diferencia de $\pm\frac{1}{n!}$) con la probabilidad de que $S = 0$.

De manera análoga, $P(S = 2)$ es la suma de $\frac{n(n-1)}{2}$ casos equivalentes a $X_1 = X_2 = 1, X_3 = \ldots = X_n = 0$. La probabilidad de este caso típico es

$$P(X_1 = X_2 = 1) \cdot P(X_3 = \ldots = X_n = 0 | X_1 = X_2 = 1) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot p_{n-2}$$

Por tanto, $P(S = 2) = \frac{p_{n-2}}{2} \approx \frac{1}{2e} \approx 0'18394$

Ya no cuesta trabajo calcular $P(S = 3) = \frac{p_{n-3}}{6} \approx \frac{1}{6e} \approx 0'0613$, y en general $P(S = k) = \frac{p_{n-k}}{k!} \approx \frac{e^{-1}}{k!}$

Si echamos unas cuentas sencillas, vemos que la probabilidad de que haya a lo sumo 5 jinetes a la grupa de sus propios caballos es del $99'94\,\%$, y la de que haya 6 o menos es de un $99'99\,\%$. El sheriff no corre peligro serio de perder la apuesta.

3. Adagio finale: Poisson

Antes de que caiga el telón, quiero subrayar algo que ha aparecido en los cálculos anteriores. Si n es suficientemente grande para que la aproximación por e^{-1} sea válida (y desde luego, $n = 15$ lo es de largo), las probabilidades $P(S = k)$ coinciden con gran precisión con $\frac{e^{-1}}{k!}$, que es el valor que le correspondería si S fuese una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 1$. Así, el modelo de Poisson se revela adecuado para estudiar este problema de western clásico.

Y ahora sí. Contra un atardecer rojizo se recortan las figuras de los delincuentes esposados, conducidos por la ley ante el juez. Se oye una armónica: I was born under a wandering star.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Departamento de Matemáticas e Informática. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. España.

Juegos y Rarezas Matemáticas

Ciencia de cada día: El hundimiento del Titanic

Everyday Science: Sinking with the Titanic

Franco Bagnoli[1] & Rosa M. Herrera[2]

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 119–124, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 May'15; Aceptación: 20 Ago'15

1 de octubre de 2015

Este experimento forma parte de un conjunto de lecciones desarrolladas por F. Bagnoli para introducir la física a un público muy heterogéneo y no experto. La idea es presentar los temas de física como una especie de espectáculo, conectándolos con los asuntos de la vida real, haciendo hincapié en los principios comunes, más allá de los ejemplos o casos particulares tratados. Este material también se puede usar en un curso estándar de física, como una manera de mostrar a los estudiantes que los temas que se trabajan en el curso forman parte de la vida diaria.

Palabras Clave: Fluidos, hundimiento, flotación, principio de Arquímedes

Abstract

This experiment is part of a series of lessons for introducing physics to laymen. The idea is that of presenting topics in physics as a kind of show, connecting them to topics in real life, trying to focus on the common principles that are beyond the variety of possible examples. This material can be also used in standard physics course as a way of convincing students that what they study in their course is actually acting in everyday life.

Keywords: Fluids, sinking, floating, Archimedes principle

1. Introducción

En la película "Titanic", cuando la parte inferior de la nave está a punto de hundirse, Jack Dawson (Leonardo DiCaprio) dice a Rose De Witt Bukater (Kate Winslet) que se prepare para nadar, porque el buque al hundirse los va a succionar arrastrándolos hacia el abismo. ¿Se producirá en la práctica el fenómeno de la succión aquí enunciado? Tanto, si la respuesta es afirmativa como si es negativa, analicemos la causa de que esto suceda así.

[1] Franco Bagnoli. Idea y versión original.
[2] Rosa María Herrera. Traducción y adaptación española.

Figura 1 a): Dibujo del Titanic hundiéndose, fuente http: //www.mediashow. ro / 339380.

Figura 1 b): El Titanic hundiéndose (Tubtanic [4]), experimento preparado por Franco Bagnoli, de la serie "Fisica di tutti i giorni".

2. Explicación del fenómeno

La aparición del fenómeno de succión es real. Este fenómeno es asimismo el tema de un episodio de *Mith Busters* [3] que niega que dicho efecto ocurra, si bien "los destructores de mitos" y los investigadores utilizan una barca pequeña.

Las fuentes consultadas en internet suelen proporcionar explicaciones de tres modalidades. La primera se refiere al aire contenido en la embarcación, al salir durante el hundimiento haría disminuir la densidad del agua(este es el mito investigado por *Mith*

Busters). La segunda es que el agua va rellenando los espacios "vacíos" del interior de la nave arrastrando a las personas de su interior. La tercera está relacionada con el efecto viscoso de arrastre que origina un vórtice tras un cuerpo que se mueve dentro de un fluido. Es el mismo tipo de efecto por el que en un descapotable, el cabello largo azota el rostro. Este efecto es fácil de visualizar sosteniendo una vela protegiéndola tras una mano y soplando hacia la mano por el otro lado, o moviendo una mano en el agua con pequeños objetos flotantes. Este efecto también depende de la velocidad del objeto en movimiento, al menos para velocidades pequeñas. Hay algunos ejemplos similares en la vida cotidiana que seguramente son familiares al lector. Para velocidades pequeñas, también se observa dependencia con la velocidad del cuerpo en movimiento. Otro ejemplo, recuerde el lector lo que ocurre cuando un coche circula por un lugar donde hay trozos de papel, se levantan tras la estela del vehículo por unos instantes. Hay otros muchos ejemplos parecidos, que se corresponden con el mismo concepto físico-matemático.

Sin embargo hay un efecto más conspicuo relacionado con el principio de Arquímedes y que suele pasar inadvertido, al menos en cierto sentido, como se ve en el apartado siguiente.

3. El experimento

Para presentar este experimento en forma de espectáculo para el público, sugeriría al profesor adquirir el tapón de bañera "Tubtanic" [4], y así iniciar la experiencia. Es preciso también disponer de un “iceberg” (que debe utilizarse en la introducción y en el desafío final), un becker o un cilindro transparente, y un vaso de diámetro alrededor de la mitad que el del cilindro y con un fondo grueso (para mejorar la estabilidad y para desplazar más agua).

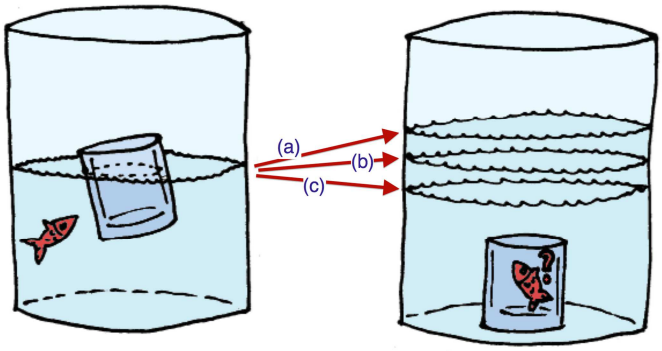


Figura 2: ¿Qué ocurrirá con el nivel del agua?

Llénese medio cilindro con agua y déjese el vaso (nuestro Titanic) flotando. Márquese en el vaso la altura que alcanza el agua con un marcador de uso corriente en clase y propóngase a la audiencia realizar una evaluación en la que vote eligiendo entre tres respuestas posibles a la pregunta siguiente. Dejamos que se hunda el vaso. ¿Cuál será la altura del agua, una vez producido el hundimiento (Fig.2)? (a) mayor que la altura inicial, (b) la misma altura inicial, (c) inferior a la altura inicial.

Sorprendentemente, la mayoría de las personas optan por la respuesta (a), pero la experiencia nos enseña que el "nivel del mar" comienza a bajar tras el hundimiento (el efecto es más visible si el vaso está desplazando una gran masa de agua y si el cilindro es angosto).

La explicación está asociada con el principio de Arquímedes: *el empuje vertical y hacia arriba ejercido sobre un cuerpo sumergido en un fluido es igual al peso del fluido que es desalojado por el cuerpo.* Esta fuerza es igual al peso del vaso. Pero dado que la densidad del vidrio es mayor que la densidad del agua, el vaso tiene que desplazar un volumen de agua mayor que su propio volumen, y este efecto, evidentemente, se produce debido a la existencia de una parte hueca (llena de aire). Tras el hundimiento, el vaso solo desplaza un volumen de agua igual a su propio volumen, y el nivel del agua desciende.

Refiriéndonos a una embarcación que se hunde, eso se traduce en que esta tiende a hacer un "agujero" en el océano, el cual se llena con el agua vecina. La importancia de este efecto, como el de arrastre, depende de la velocidad del hundimiento, por eso es difícil distinguir uno del otro.

4. Para acabar

Al finalizar este experimento, se puede sacar el vaso, poner el iceberg en el interior del cilindro, marcar el nivel del agua y proponer un reto: ¿qué pasará con el nivel del agua después de que el hielo se haya fundido?[3]

Debido a que esta experiencia tiene un desarrollo lento y por tanto hay que esperar a que transcurra un cierto tiempo, es conveniente comenzar a realizar el ejercicio al comienzo del espectáculo, recoger las respuestas y retomar el problema al final de la sesión.

Y por fin un último desafío: vamos a poner una pelota de golf en un vaso, añadiendo sal de manera que flote tocando apenas la superficie de la agua. ¿Qué ocurrirá con la pelota si se derrama algún líquido más ligero que el agua salada (aceite o jabón líquido) en el vaso [5]? El nivel de flotación de la pelota respecto a la superficie de la agua ¿(a) aumentará, (b) se mantendrá igual o (c) descenderá (hundirá)?[4]

Referencias

[1] BAGNOLI, Franco, "SinkingwiththeTitanic", Europhysicsnews, 2015.

[2] TAMEICHI, Hara,*JapaneseDestroyerCaptain*, BallantineBooks, New York & Toronto, 1961.

[3] http://www.discovery.com/tv-shows/mythbusters/videos/ sinking-titanic-minimyth.htm.

[4] http://www.amazon.co.uk/Paladone-PP0258-Tubtanic-Bath-Plug/ dp/B003Y3Q1GW.

[3] Una vez descongelado se verá perfectamente que el nivel del agua no varía, ya que el hielo desplaza una masa de agua igual a su masa, que al convertirse en agua líquida llena totalmente el "agujero".

[4] Se elevará, ya que, desde el punto de vista de la pelota, el líquido flotante que remplaza el aire es más denso que este último, y entonces empujará la parte de la pelota que estaba emergida hacia arriba más que antes, elevándola.

[5] Cuestionario extraído de Veritasium https://www.youtube.com/watch

Sobre los autores:

Nombre: Franco Bagnoli
Correo Electrónico: franco.bagnoli@unifi.it
Institución: Department of Physics and Astronomy& CSDC (University of Florence).

Nombre: Rosa M. Herrera
Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: Grupo de Investigación en Mecánica Celeste (SEAC).

Críticas y Reseñas

Informe sobre el libro: "Ríete con las Mates". Viñetas Cómicas Matemáticas

A book report: "Laugh with Maths". Math Comic Strips

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 125–130, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Jul'15; Aceptación: 6 Ago'15

1 de octubre de 2015

Resumen

En el pasado Volumen III, Número 2 de Octubre 2013 de la revista se publicó el artículo Exposición "Ríete con las Mates" dentro de la sección de Experiencias Docentes. En Junio de 2015 se ha publicado en la Editorial Tébar Flores el libro "Ríete con las Mates", Viñetas Cómicas Matemáticas, que recoge los contenidos de esta exposición ampliados con introducciones teóricas sobre los temas matemáticos tratados en la misma.

Este artículo hace una presentación de esta obra que consideramos resulta un texto ameno, divertido y adecuado para todos los amantes de las matemáticas y de los chistes gráficos.

Palabras Clave: Viñetas Matemáticas, Libros de Divulgación Matemática, Exposiciones Matemáticas.

Abstract

In last Volume III, Number 2 in October 2013, this magazine published the article "Laugh with Maths" Exhibition in the Teaching Experiences section. In June 2015 it has been published the book "Laugh with Maths", Math Comic Strips, which includes the contents of this exhibition extended with theoretical introductions on mathematical topics covered in it.

This article makes a presentation of this work which we consider an entertaining, fun and suitable text for all lovers of mathematics and graphics text jokes.

Keywords: Math Strips, Mathematics Books Disclosure, Maths Exhibitions.

1. Ficha Técnica

Título: "Ríete con las Mates". Viñetas Cómicas Matemáticas

Autores: Mariló López, Javier Rodrigo y José Manuel Sánchez

Ilustradores: Noelia Esteban, Álvaro Llera y Araceli Martín

Encuadernación: Tapa Blanda

Nº Páginas: 160

Editorial: Tébar Flores Editorial

ISBN: 978-84-7360-525-0

Fecha de Publicación: 01-06-2015

Número de páginas: 160

Tamaño: 190 × 260 mm

2. El Libro

La obra que se presenta recoge las viñetas cómicas que forman la exposición "Ríete con las Mates": Viñetas Cómicas Matemáticas, que el Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático" de la Universidad Politécnica de Madrid ha confeccionado con ayuda de alumnos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos que han colaborado en la parte artística de la ilustración de los chistes. Dicha exposición recopila, por un lado "bromas" matemáticas conocidas a las que se les ha dado un toque personal, así como chistes la cosecha de los autores. La finalidad de la misma ha sido el acercamiento de los estudiantes a la matemática a la vez que demostrar el interés que puede tener el empleo del humor como arma didáctica en la enseñanza y el acercamiento a una ciencia que, en muchos casos, despierta el rechazo de los estudiantes.

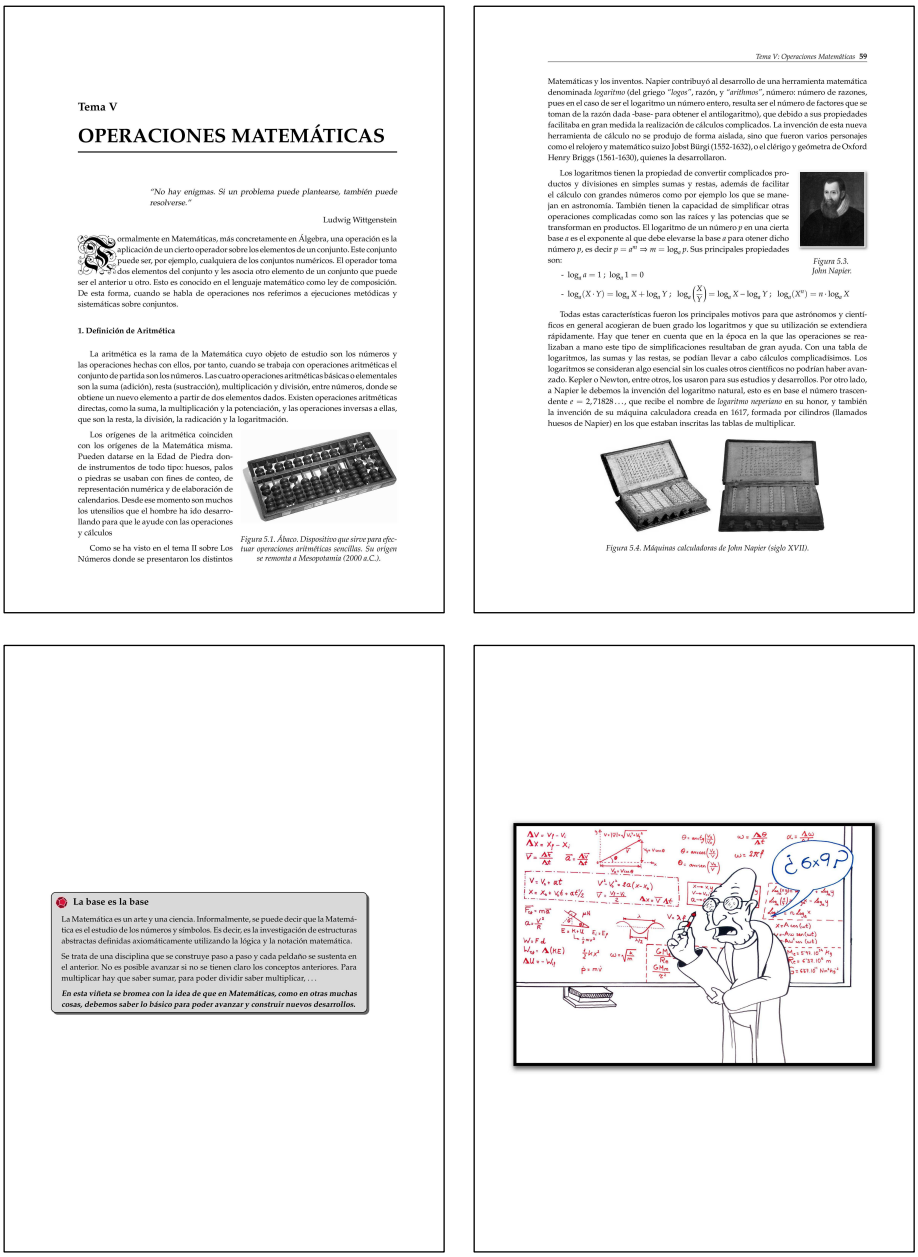
Figura 1. Portada de libro[1]

Sin duda el humor puede emplearse como recurso para amenizar y atraer la atención y, si éste va unido a la imagen que es la manera más segura de llegar a una generación de jóvenes dominada por la tecnología y los avances audio visuales, se consigue un éxito casi seguro.

2.1. Estructura de la obra

El libro se ha estructurado combinando las viñetas cómicas y sus carteles explicativos con breves introducciones teóricas que hacen referencias a las matemáticas que se tratan en los chistes. De esta forma, las viñetas que se incluyen en el texto tratan diversos aspectos y temas de la matemática y se han clasificado así según estos temas constituyendo los diversos apartados del libro.

[1] http://www.tebarflores.com/riete-con-las-mates-vinetas-comicas-matematicas/12/249



Tema V

OPERACIONES MATEMÁTICAS

"No hay enigmas. Si un problema puede plantearse, también puede resolverse."

Ludwig Wittgenstein

Formalmente en Matemáticas, más concretamente en Álgebra, una operación es la aplicación de un cierto operador sobre los elementos de un conjunto. Este conjunto puede ser, por ejemplo, cualquiera de los conjuntos numéricos. El operador toma dos elementos del conjunto y les asocia otro elemento de un conjunto que puede ser el anterior u otro. Esto es conocido en el lenguaje matemático como ley de composición. De esta forma, cuando se habla de operaciones nos referimos a ejecuciones metódicas y sistemáticas sobre conjuntos.

1. Definición de Aritmética

La aritmética es la rama de la Matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones hechas con ellos, por tanto, cuando se trabaja con operaciones aritméticas el conjunto de partida son los números. Las cuatro operaciones aritméticas básicas o elementales son la suma (adición), resta (sustracción), multiplicación y división, entre números, donde se obtiene un nuevo elemento a partir de dos elementos dados. Existen operaciones aritméticas directas, como la suma, la multiplicación y la potenciación, y las operaciones inversas a ellas, que son la resta, la división, la radicación y la logaritmación.

Los orígenes de la aritmética coinciden con los orígenes de la Matemática misma. Pueden datarse en la Edad de Piedra donde instrumentos de todo tipo: huesos, palos o piedras se usaban con fines de conteo, de representación numérica y de elaboración de calendarios. Desde ese momento son muchos los utensilios que el hombre ha ido desarrollando para que le ayude con las operaciones y cálculos

Como se ha visto en el tema II sobre Los Números donde se presentaron los distintos

Figura 5.1. Ábaco. Dispositivo que sirve para efectuar operaciones aritméticas sencillas. Su origen se remonta a Mesopotamia (2000 a.C.).

Tema V: Operaciones Matemáticas 59

Matemáticas y los inventos. Napier contribuyó al desarrollo de una herramienta matemática denominada *logaritmo* (del griego *"logos"*, razón, y *"arítmos"*, número: número de razones, pues en el caso de ser el logaritmo un número entero, resulta ser el número de factores que se toman de la razón dada -base- para obtener el antilogaritmo), que debido a sus propiedades facilitaba en gran medida la realización de cálculos complicados. La invención de esta nueva herramienta de cálculo no se produjo de forma aislada, sino que fueron varios personajes como el relojero y matemático suizo Jobst Bürgi (1552-1632), o el clérigo y geómetra de Oxford Henry Briggs (1561-1630), quienes la desarrollaron.

Los logaritmos tienen la propiedad de convertir complicados productos y divisiones en simples sumas y restas, además de facilitar el cálculo con grandes números como por ejemplo los que se manejan en astronomía. También tienen la capacidad de simplificar otras operaciones complicadas como son las raíces y las potencias que se transforman en productos. El logaritmo de un número p en una cierta base a es el exponente al que debe elevarse la base a para otener dicho número p, es decir $p = a^m \Rightarrow m = \log_a p$. Sus principales propiedades son:

Figura 5.3. John Napier.

- $\log_a a = 1\,;\ \log_a 1 = 0$
- $\log_a(X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y\,;\ \log_a\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_a X - \log_a Y\,;\ \log_a(X^m) = m \cdot \log_a X$

Todas estas características fueron los principales motivos para que astrónomos y científicos en general acogieran de buen grado los logaritmos y que su utilización se extendiera rápidamente. Hay que tener en cuenta que en la época en la que las operaciones se realizaban a mano este tipo de simplificaciones resultaban de gran ayuda. Con una tabla de logaritmos, las sumas y las restas, se podían llevar a cabo cálculos complicadísimos. Los logaritmos se consideran algo esencial sin los cuales otros científicos no podrían haber avanzado. Kepler o Newton, entre otros, los usaron para sus estudios y desarrollos. Por otro lado, a Napier le debemos la invención del logaritmo natural, esto es en base el número trascendente $e = 2{,}71828\ldots$, que recibe el nombre de *logaritmo neperiano* en su honor, y también la invención de su máquina calculadora creada en 1617, formada por cilindros (llamados huesos de Napier) en los que estaban inscritas las tablas de multiplicar.

Figura 5.4. Máquinas calculadoras de John Napier (siglo XVII).

La base es la base

La Matemática es un arte y una ciencia. Informalmente, se puede decir que la Matemática es el estudio de los números y símbolos. Es decir, es la investigación de estructuras abstractas definidas axiomáticamente utilizando la lógica y la notación matemática.

Se trata de una disciplina que se construye paso a paso y cada peldaño se sustenta en el anterior. No es posible avanzar si no se tienen claro los conceptos anteriores. Para multiplicar hay que saber sumar, para poder dividir saber multiplicar, ...

En esta viñeta se bromea con la idea de que en Matemáticas, como en otras muchas cosas, debemos saber lo básico para poder avanzar y construir nuevos desarrollos.

¿6x9?

Figura 2. Muestra de algunas páginas del libro.

Cada apartado comienza con una pequeña reseña de los conceptos matemáticos relativos a esa parte de la ciencia. Se realiza en un lenguaje poco formal y accesible para cualquier lector. A continuación se presentan los chistes gráficos asociados a esa temática, acompañados de la explicación matemática de los mismos.

El libro termina con la propuesta de un ejercicio en el que se proponen diversas cuestiones relativas a las viñetas y su contenido matemático. Dicho ejercicio puede servir para que el lector evalúe los conocimientos matemáticos que se han presentado, así como su capacidad de observación.

Los temas tratados son:

- Teoría de conjuntos
- Los números
  - Números naturales y números enteros
  - Números racionales e irracionales
  - Números reales
  - Números complejos
- Sistemas de numeración
  - El concepto de base
  - De décima a binario o hexadecimal
- Constantes matemáticas
  - El número π
  - El número áureo
- Las funciones reales de variable real.
- Operaciones matemáticas
  - Definición de Aritmética
  - Adición y sustracción
  - Multiplicación y división
- El infinito
  - El infinito en las Matemáticas
  - Paradojas del Infinito
- Sucesiones y Series
- Funciones reales de variable real
  - Gráfica de una función
  - Funciones elementales
- Cálculo Diferencial e Integral
  - Límites
  - Cálculo Diferencial
  - Cálculo Integral
- Geometría
  - Geometría Clásica
  - Geometrías no Euclidianas
- Lógica
  - Fundamentación histórica
  - Proposiciones y operaciones lógicas
- Miscelánea
- Ejercicio práctico

3. Crítica y Opinión

Consideramos que este libro resulta un texto original y adecuado para todos los amantes de las matemáticas. Especialmente es interesante para los estudiantes de ESO y bachillerato así como para alumnos universitarios de carreras técnicas.

Estamos seguros que cualquier amante de las matemáticas puede pasar un rato divertido leyendo este texto a la vez que le permitirá refrescar y aprender algunos conceptos de esta ciencia tan interesante y aplicada.

Referencias

[1] LÓPEZ, MARILÓ, *Exposición "Ríete con las Mates"*, § Experiencias Docentes, Revista Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, Vol. III, Núm. 2, octubre, 2013.

Sobre los autores:

Nombre: Mariló López
Correo electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil. Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Javier Rodrigo
Correo electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingenieros Industriales. Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: José Manuel Sánchez
Correo electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Profesor de Educación Secundaria en Extremadura. Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Entrevista

José Ferreirós: Filósofo de la Matemática

José Ferreirós: Philosopher of Mathematics

Rosa M. Herrera

Revista de Investigación

Volumen V, Número 2, pp. 131–142, ISSN 2174-0410
Recepción: 27 Abr'15; Aceptación: 26 Jun'15

1 de octubre de 2015

Resumen

José Ferreirós es un reconocido experto en filosofía de la práctica matemática, y en sentido más amplio en la filosofía y la historia de las matemáticas. Estudioso y conocedor en profundidad de varios de los mejores nombres de la matemática de las últimas centurias (Riemann, Cantor, Poincaré…). Sus investigaciones y reflexiones son siempre enriquecedoras e iluminan no pocas veces el camino en la comprensión del pensamiento matemático.

Palabras Clave: filosofía de la matemática, filosofía de la práctica matemática, historia de la matemática.

Abstract

José Ferreirós is a recognized expert in philosophy of mathematical practice, and in a broader sense in Philosophy and History of Mathematics. Professor Ferreirós is expert in some of the best names in Mathematics in the last centuries, such as Riemann, Cantor, Poincaré... His research and reflections on the mathematical experience show us a way forward in our understanding of mathematical thinking.

Keywords: Philosophy of Mathematics, Philosophy of Mathematical Practice, History of Mathematics and Science.

1. Aproximación a José Ferreirós

La idea que motiva esta conversación con el profesor Ferreirós es transmitir al lector la sensación de conocimiento sosegado y apacible, liberado de toda carga de dogmatismo intelectual, que se tiene en una charla compartida con él.

Catedrático de la Universidad de Sevilla, sus publicaciones no pasan desapercibidas para ningún interesado en los matemáticos y la matemática; siempre en análisis rigurosos, finos y delicados presenta al lector su visión, de modo tal que quien lee por propia iniciativa, o por

consejo atinado, algún escrito suyo, repite. Me ocurrió a mí, lo conocí, me interesó su enfoque y visión y empecé a leer sus escritos, debo decir que aun no he dejado de hacerlo.

Figura 1. José Ferreirós y sus reflexiones.

2. Una mañana en Metz (el ambiente inicial)

Coincidimos en una excursión. Iba mediado julio y visitábamos Metz (en La Lorena) un grupo numeroso de congresistas instalados en Nancy (por cierto, ciudad natal de Henri Poincaré). Un fresquísimo día veraniego que a más de uno había hallado desprevenido (quien escribe esta nota estaba aterida de frío) y que a los propios organizadores del evento, acostumbrados a los avatares climáticos del norte francés, también descolocó, hasta el extremo de que la parte más lúdica del programa que había de desarrollarse al aire libre, hubo de ser cancelada.

En este contexto desconcertante entre grato y desangelado, a la orilla del río Mosela, un grupo de personas de habla española iniciamos una conversación. Rememoro la escena de comensales esparcidos afanándose en no demorarse demasiado en un picnic que estaba previsto para otra situación más cómoda y distendida. La idea que estaba en la mente de la mayor parte de nosotros, creo no equivocarme en la generalización, era poder continuar la visita en autocar y a cubierto, eludiendo una ruta que estaba prevista como fluvial; una alegre embarcación veraniega se quedó solitaria y a la espera de mejores momentos, que estos no estaban destinados a nosotros.

Comenzamos a hablar en este contexto hace ya algunos años, y a partir de ahí con cierta intermitente regularidad mantenemos la conversación; por mi parte esta charla se completa y enrique de una lectura bastante asidua de algunos de sus trabajos, que no dejo de recomendar a quienes interesados en estos asuntos de ir más allá en el mundo matemático se animen a ello.

3. El trabajo de un filósofo e historiador de la matemática

Comenzamos la conversación en la que, para que el lector se sitúe espacialmente, ubicamos a José en Berkeley. Se me ocurren muchas preguntas, no sé cuántas pueden ser pertinentes, pero ahí van algunas,

-¿Qué es lo que más te interesó de la filosofía de la matemática para lanzarte de lleno a su estudio?

Bueno, te diría que algunos filósofos se interesan más por cuestiones de la vida práctica (ética, política...), pero otros nos centramos en entender el conocimiento humano: es la epistemología. Y para los epistemólogos, las matemáticas han sido siempre un tema fascinante. La experiencia de demostrar algo y establecer así su verdad, el uso de las matemáticas en la física, etc., son asuntos que sorprenden y llevan a filosofar. Además muchos filósofos (racionalistas) han defendido que el conocimiento matemático nos pone en contacto con algo casi sobrenatural. A mí siempre me han interesado estas cosas, y siempre me han gustado las matemáticas. Para mí es un desafío además porque mi concepción de las matemáticas las pone de nuevo en tierra, por así decir, pero no es fácil ofrecer en detalle una concepción 'naturalista' de las matemáticas (no racionalista ni sobrenaturalista, no platónica): ése es el desafío.

-¿Crees que para un matemático, incluyo deliberadamente también en esta pregunta a un físico, es importante tener una buena panorámica de la historia de su disciplina y dotarse de una visión general de la filosofía de la matemática?

Bueno, esa pregunta me trae a la memoria frases de Poincaré y de Einstein. Los dos defendieron que era muy importante para el científico tener algo de conocimientos históricos y filosóficos. Esa idea no está nada de moda, y creo que esto es malo para la ciencia. Einstein decía que los científicos con un background histórico y filosófico se ponen a un nivel diferente, gracias a la madurez y sofisticación añadida que eso les da. Sin eso, es fácil ser un poco papanatas, porque -y perdóname que lo diga de manera tan fuerte- también se puede ser ingenuo siendo un buen super-especialista en un pequeño dominio científico...

Estupendo José, te escribo a Berkeley, pero desconozco dónde leerás esta nota y por tanto dónde continuará esta conversación (creo recordar que andas de viaje, que espero y deseo que sea agradable).

El interesante comentario de tu respuesta anterior, incluidas las acotaciones relativas a Einstein y Poincaré (quizá el lector se ubicará mejor en las referencias si conoce nuestro común interés en estos científicos cruciales) me lleva a la siguiente reflexión: yo creo que, en efecto, en determinado tipo de personalidades humano-científicas (desde los más modestos trabajadores de la ciencia de todos los días hasta las más mentes más brillantes) es imprescindible esta amplitud de visión que da la comprensión de la historia y la filosofía de la propia ciencia, para no quedarse en esa ingenuidad un poco bobalicona que tú refieres.

Sin embargo, he observado que existe otra modalidad de científicos[1] *dignos de consideración -al menos algunos-, cuya inteligencia manipulativa e instrumental es de un tipo radicalmente diferente, y que del propio manejo de las herramientas y máquinas extraen una suerte de conocimiento interesante (incluido el que podría proporcionar cierta clase de 'historia intrínseca' de los dispositivos). Para*

[1] Estoy pensando en algunos físicos con los que trato…

quienes somos más reflexivos (y quizá más torpes manualmente) es una aventura convivir y trabajar con estas personas 'de acción'.

- No sé si tú tendrías algo que añadir, tal vez hayas conocido entre los matemáticos con los que tratas algunos que 'piensen' a través del contacto de 'taller' o de 'laboratorio' con las cosas, o si como conocedor de la historia y la filosofía de la práctica matemática puedas decir algo más a través de los ejemplos humanos.

Ahora estoy en Newark, esperando a coger el avión de regreso... así que te escribo 'on the road'.

Tienes razón, hay matemáticos de varios tipos, y como mínimo es habitual distinguir entre los del yin y el yang (para decirlo con Grothendieck): los primeros se interesan más por el lado conceptual, por introducir nuevas formas de comprender, nuevas estructuras y métodos (un ejemplo claro que yo he estudiado mucho es Dedekind); los segundos van más a resolver problemas, a romper nueces con el martillo que sea, quizá son más competitivos (Erdös seguramente es buen ejemplo). Yo debo reconocer que, por deformación y gusto personal, me interesa mucho más el primer tipo.

Por lo demás, es verdad que no se debe generalizar demasiado. Se puede ser un gran científico sin saber de historia y filosofía, pero sí que diría que la salud de la empresa científica depende de tener una adecuada combinación de factores. O sea, hacen falta personas del tipo que decían Einstein y Poincaré para que la cosa marche bien. Y creo que esto no se está fomentando a nivel institucional: me parece un defecto serio. Aunque sin duda ese tipo de personas surgen también de manera espontánea.

Imagino desde Madrid que mientras leo y reflexiono un poco sobre lo que escribes, tú ya habrás cumplido con los ritos asociados a viajar en avión: pasar controles aduaneros, embarcar, y el resto; sin embargo, la lejanía se empequeñece y podemos continuar conversando. Tu respuesta quizá haya superado el jet lag cuando me alcance.

Convengo contigo en la idea de que la labor científica en general tiene que estar ubicada en un contexto de mirada amplia, como la que proporciona la filosofía y la historia, y en ese sentido:
-¿Por qué crees tú que institucionalmente no se propicia la interrelación: estrechez de miras, dejadez, falta de madurez intelectual o por otro tipo de razones menos confesables en voz alta?, y ¿qué podríamos hacer los que pensamos que así deberíamos funcionar para obrar mejor, dejando de lado la pura espontaneidad a la que aludes?

Pues creo que hay varias razones, a veces estrechez de miras, claro, y también las tendencias centrípetas que han caracterizado a las Facultades y Departamentos españoles desde los años 1980. Deberíamos aprender del modelo universitario norteamericano, que promueve una formación interdisciplinar (gracias a que su tradición de estudios 'liberales' lo hizo fácil). Y deberíamos liberarnos un poco de la obsesión finalista: toda la formación se encamina a 'fabricar' especialistas, con la idea de que solo serán buenos especialistas, por ejemplo, en física, si han estudiado muchas asignaturas de física. Esto es estrecho de miras e inmaduro, sí.

- Y por otra parte, ¿cómo ves la relación de la matemática con las otras ciencias (no me refiero a la física, que ya está bien contrastada) y con otras disciplinas, que parece que está adquiriendo músculo en parte gracias a la modelización y a la simulación computacional?

Estoy de acuerdo contigo, creo que está adquiriendo mucha fuerza e impulso gracias a la modelización, y está caminando por caminos distintos gracias al enfoque computacional. ¡Incluso hay quien piensa que la concepción básica del mundo físico debe cambiar por ese motivo!

Sin embargo, y retomando tu opinión, no estoy segura de que todas las personas con más gusto por lo filosófico de la matemática sean menos competitivos (al menos en cierto sentido), que los más aficionados a las minucias casi artesanales de resolver con más o menos ingenio casos muy concretos o encontrar técnicas poderosas. He visto toda combinación de caracteres humanos. En lo que creo que coincido contigo es en que resulta mucho más agradable hablar con personas afines, pues el hilo del pensamiento se puede seguir con más facilidad y suele resultar muy productivo. Sin embargo, también creo que hemos de reconocer que se puede aprender mucho sobre cómo estar en el mundo de personas con otras idiosincrasias o menos afines a nosotros mismos.

- Dejando un poco de lado las respectivas contribuciones de Erdös y de Dedekind a las matemáticas, y las afinidades o simpatías personales, ¿cuál de los dos estilos de pensamiento y trabajo es más fructuoso en el sentido de abrir nuevas vías de pensamiento y nuevos problemas?, tal vez la respuesta no sea absoluta, pero creo que al lector le interesará tu opinión y el razonamiento asociado.

Te voy a dar mi opinión: no sé si tengo razón, pero desde luego sí tengo una opinión firme. Si tengo que comparar a Erdös --que fue una auténtica máquina de convertir café (y más cosas) en teoremas-- con Dedekind --que publicó la décima parte, si acaso--, no me cabe duda de que Dedekind abrió vías de pensamiento enteramente nuevas, por las que se colaron en las matemáticas miles de nuevos problemas. ¡Basta ver lo que pudo hacer, sobre sus bases, Hilbert en la siguiente generación, y luego Emmy Noether o Artin!

Sí, desde luego creo que los 'pensadores', los 'deep thinkers' como Dedekind, Riemann o Grothendieck son absolutamente fundamentales. Pero debo reconocer que yo mismo nunca he tenido inclinación a ser un 'problem solver', ese aspecto de las matemáticas no logró atraerme... Para tener una visión más matizada, y seguramente más profunda que la mía, conviene por ejemplo leer a Tim Gowers: tiene un artículo sobre las 'dos culturas' en matemáticas.

4. Las "dos culturas" matemáticas. La filosofía de la práctica matemática

Tras esta 'provocación' (en sentido amable) tan directa, me lanzo a la búsqueda del artículo 'pdf' que citas en el párrafo anterior y encuentro *The Two Cultures of Mathematics* por el medalla Fields W. T. Gowers[2], de su lectura me gustaría señalar que durante muchas décadas de la segunda mitad del siglo pasado los profesores de matemáticas que formaban a los estudiantes de física (e imagino que también a los ingenieros) estaban más bien enmarcados en los "theory builders"; sin embargo, para los jóvenes que se interesaban por las matemáticas en contextos no estrictamente matemáticos quizá hubiese sido más útil un tipo

[2] En *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 65–78. Available online at http://www.dpmms.cam.ac.uk~wtg10/2cultures.

de personalidad matemática "problem solvers". También he decir que en la actualidad algunos matemáticos ciertamente brillantes con los que trato son más cercanos a la llamada 'matemática aplicada' que a otros enfoques, y en ciertos casos puedo afirmar que sus aportaciones al pensamiento profundo matemático no son irrelevantes.

Me gustaría preguntarte un poco volviendo al principio y enlazando con lo último, podrías hablar a nuestros lectores sobre la filosofía de la práctica matemática, y el pie te lo doy apoyándome en la siguiente cita[3]:

> *The Study of Mathematical Practice is an emerging interdisciplinary field which draws on philosophy and social science to understand how mathematics is produced.*

- Como el estudioso y experto en esta materia eres tú, corro el riesgo de que el comentario no sea acertado o de que no estés de acuerdo, te escucho.

Bueno, tienes una buena descripción de lo que es la filosofía de la práctica matemática en http://institucional.us.es/apmp/index_about.htm. Además de sus bases en la filosofía y las ciencias sociales, yo destacaría --y mucho-- el papel de la historia; por otro lado, también la biología y las ciencias cognitivas son relevantes en lo que tiene que ver con las bases cognitivas del hacer matemático.

Un colega mío decía hace poco que sería mejor hablar de *'practice-based' philosophy of mathematics*. Puede que tenga razón, en todo caso escribo PMP para referirme a ello. La idea básica es simple: la reflexión filosófica y epistemológica sobre las matemáticas se ha hecho normalmente partiendo de una idealización muy fuerte, como si hubiera un 'sistema' de matemáticas perfectamente unívoco y completo (por ejemplo, basado en la teoría de conjuntos, imaginando --de nuevo idealización-- que fuera una teoría completa en la medida en que resuelve todos los problemas principales planteados). Se han pensado las matemáticas como un cuerpo de teoría, un poco al modo platónico. Los partidarios de PMP insistimos en que es importante prestar atención a los detalles de cómo se **hacen** las matemáticas: pensar las matemáticas ante todo como una actividad, y las teorías como uno de sus resultados. Esto en realidad no es nuevo. Poincaré ya escribió en 1894:

> *"Veamos pues al geómetra en acción y tratemos de sorprender sus procesos."* (citado en De Lorenzo, 1974,p. 67)

El otro día me sorprendieron las primeras palabras de Einstein en su H. Spencer Lecture de 1933: si quieres conocer los métodos de la física teórica, no debes prestar atención a las palabras del físico, sino examinar sus logros. En nuestras tierras, Javier de Lorenzo lleva décadas, desde 1975 más o menos, insistiendo en el **hacer** matemático. Y en filosofía de la ciencia hay un movimiento desde hace un par de décadas que promueve este mismo punto de vista; un ejemplo son las conferencias de SPSP, ver http://www.philosophy-science-practice.org/.

Pero, ¿qué quiere decir todo esto en la práctica? Un ejemplo muy bonito son los nuevos estudios sobre Euclides que se han desarrollado a partir de trabajos de Ken Manders. Después

[3] "Mathematical Practice, Crowdsourcing, and Social Machines", by Ursula Martin & Alison.

de tanto tiempo (desde Lagrange) insistiendo en que los diagramas son solo una ayuda visual, y que la demostración "realmente" debe ser puramente simbólica, o lógico-simbólica, Manders y otros han realizado un análisis precioso de cómo es posible una práctica de **demostración diagramática** donde los diagramas son esenciales. Y donde su uso está regulado de tal modo que apenas deja espacio a posibles errores: de hecho, las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio no contienen errores (menos desde luego que las de Hilbert, aunque parezca mentira).

- Por otra parte creo que yo he hablado demasiado y que sin embargo tú has dicho muchas cosas, te paso la palabra para aquello que quieras añadir o comentar, por ejemplo tu relación con el IMUS o sobre algún asunto que desees completar…

Como ya hemos hablado alguna vez, Rosa, a veces me siento "entre dos aguas" por esto de ser un filósofo que está tan implicado con las matemáticas. A menudo me prestan más atención los matemáticos que los filósofos, pero por otro lado uno siente siempre en la mirada esa impresión de que uno es 'ajeno'. En fin, lo cierto es que he tenido mucha relación con los matemáticos a nivel institucional: dirigí la sección de Historia en la Gaceta de la RSME, y creo que fue una buena época, han quedado muy buenos artículos (por cierto, disponibles en internet a través de Divulgamat); por esos años, fui miembro del CEMat, el comité español de matemáticas.

Aquí en Sevilla tuvimos bastante actividad organizando Seminarios de Historia de las matemáticas, sobre todo con Antonio Durán, y luego más actividades con el IMUS. Y aunque eso quedó un tanto aparcado, últimamente lo estamos reactivando. Por ejemplo, con motivo de la Semana de la Ciencia próxima, en noviembre, organizo con el IMUS unas conferencias de divulgación. Una de ellas puede que sea muy interesante, será[4] el día 6, hemos invitado a la pintora Soledad Sevilla, que fue Premio Nacional de Artes Plásticas y que este año ha recibido el Premio Arte y Mecenazgo en la categoría de mejor artista de 2014 (curiosamente, dado su nombre, es una valenciana que vive en Barcelona). Te invito a mirar su página web, muy hermosa. Soledad empezó trabajando en el Seminario de Generación Automática de Formas Plásticas, del Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid, y los temas matemáticos siempre han tenido algún papel en su obra. Por eso nos pareció muy interesante pedirle que nos explique algo acerca de cómo mira las matemáticas una persona del mundo del arte: creatividad artística y creatividad matemática...

3. Producción literaria

- Me gustaría también en esta conversación que hablaras acerca de tu trabajo escrito, y sobre algunos de los buenos libros que has publicado y te han dado más satisfacción, tuya es la palabra.

Como sugerencia me atrevo a proponer quizá que podías empezar por Riemanniana Selecta, o comentar algo de The Architecture of Modern Mathematics (ed. with J. Gray) tal vez prefieras el orden cronológico, no sé…

Ya que me cuesta encontrar tiempo durante la semana para escribirte, he pensado en 'echar un rato' el domingo (por decirlo a la andaluza). Hasta la fecha, mi libro más relevante

[4] En el momento en que se publica esta conversación, la conferencia ha tenido lugar ya, y debo decir recogiendo los comentarios de José que ha resultado muy interesante y bonita, como por otra parte era de esperar.

sigue siendo *Labyrinth of Thought* (1999, 2ª ed. 2007). Fue un trabajo que me impuse escribir desde un punto de vista puramente histórico, y a la vez una revisión ambiciosa de la historia de la teoría de conjuntos: hacía un nuevo recorrido por los orígenes de la teoría --que no fue solo obra de Cantor--, insistía en el papel de Riemann, revisaba la interacción entre Cantor y Dedekind --el mayor impulsor de la matemática conjuntista-estructural en su época--, y analizaba también nuevos aspectos del período 1900 a 1940; por ejemplo la interacción entre teoría de tipos y teoría de conjuntos. No me entretengo en dar más detalles sobre el libro porque hay muy buenas reseñas disponibles por ahí, pero sí puedo añadir que ha sido un gran éxito y me ha abierto muchas puertas. Se sigue considerando una referencia esencial en su campo, de lo cual estoy muy orgulloso.

Otro libro importante es *Riemanniana Selecta* (2000). Lo escribí en poco tiempo, me sigue sorprendiendo cuán poco, pero mi parte --el estudio introductorio-- es un libro sobre Riemann centrado en el 'triángulo mágico' de filosofía, física y matemática. Pensar en las contribuciones de Riemann y escribir sobre ellas me transportó a un estado de inspiración poco común, la verdad es que Riemann siempre me causa asombro... Una mente maravillosa. ¡Y pensar que solo vivió hasta los 40!

En *Riemanniana Selecta* hay una edición bilingüe de una colección coherente de sus trabajos, y en este sentido el libro se encuadra en todo lo que he hecho por dar a conocer en castellano obras fundamentales de matemáticos alemanes. Ahí está el libro de Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, que por cierto acaba de ser reeditado en un formato más hermoso; y ahí está también el de Cantor, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (2006), que contiene tres artículos suyos importantes y muchas cartas; ambos van precedidos de una introducción mía bastante larga.

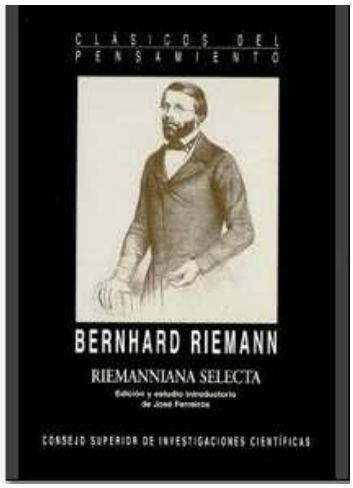


Figura 2. Portada "Riemanianna selecta"

Pero en fin, en orden de importancia, tras los dos libros citados arriba, mencionaría el libro colectivo que edité con mi amigo Jeremy Gray: *The architecture of modern mathematics* (2006). Es otra obra de la que estoy orgulloso, una colección creo que muy buena de trabajos donde se combina la historia y la filosofía de las matemáticas, con autores de la talla de Leo Corry, Paolo Mancosu, Jeremy Avigad, Colin McLarty, Erhard Scholz, Hourya Benis, Moritz Epple, Jean-Pierre Marquis... Quizá el resultado fue un libro profundo y no fácil, y tal vez por eso no

ha sido tan leído, pero en fin. Ah, por cierto, pusimos mucho empeño en que la introducción fuera detallada y profunda, es una presentación del campo de estudios llamado 'filosofía de la práctica matemática' sobre todo en lo que tiene de interacción con la historia, y creo que es uno de los mejores estudios introductorios al tema. Con la ventaja de que se encuentra libre en internet.

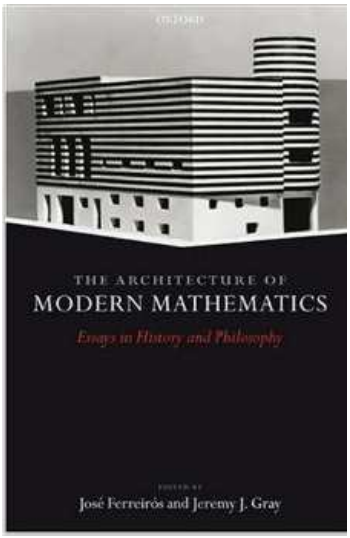


Figura 3. Portada de The Architecture of Modern Mathematics

Y es que por esas fechas, en realidad desde 2003, estábamos haciendo planes para crear la *Association for the Philosophy of Mathematical Practice*. El libro con Gray estuvo directamente asociado al proceso, y se gestó a la vez que el libro clásico sobre el tema editado por Paolo Mancosu en 2008. La APMP se creó por fin en 2009 y ahora mismo estamos preparando su tercer congreso internacional, que será en París en 2015. Es una asociación que ha puesto su grano de arena en estimular debates y nuevas ideas, aire fresco en el campo de la filosofía de las matemáticas. Yo personalmente he invertido mucho tiempo y esfuerzo en el empeño, ahora mismo soy miembro del steering committee y presidente, pero creo que ha valido la pena.

- ¿Cuéntanos, por favor, cómo va la publicación de ese libro que desde esta primavera sé que estaba a punto…? Seguramente a los lectores les gustará saber algo acerca de su contenido, háblanos de él.

Mi nuevo libro es en realidad --para mí-- un proyecto muy viejo: discutir cuestiones esenciales de la epistemología de las matemáticas, o sea, qué es el conocimiento matemático y cómo se elabora. Es un viejo proyecto, aunque en el año 2006 tuve uno de esos momentos 'ajá' y sentí que había encontrado mi voz en este tema. Todavía me costó bastante decidir cómo organizar el material y terminar de escribirlo, de hecho tengo la sensación de que me he vuelto muy ineficaz...

Una de las ideas clave es que el conocimiento matemático se genera en la conformación de ciertas prácticas teóricas, que solo son posibles al conectarse o 'anclarse' en otras prácticas. Esto está muy lejos de la idea habitual de que el conocimiento matemático es platónico o ultraterrestre, según la cual sería un profundo misterio por qué las matemáticas son tan eficaces en la comprensión de los fenómenos. En realidad, todo comienza con prácticas

'técnicas' muy básicas (contar, medir, diseñar figuras) y procede por la introducción de marcos conceptuales y semióticos que nos permiten elaborar conocimiento teórico. Además, en el proceso no dejan de intervenir otras prácticas: por ejemplo, la idea de función se gestó siempre en contacto con el estudio de los fenómenos naturales (astronomía, física).

Otra idea clave es que el resultado final de esos procesos no es un conocimiento a priori, las verdades matemáticas sofisticadas (por ejemplo las del análisis matemático) no son necesarias ni apodícticas (como decía Kant): en su base ponemos hipo-tesis o axiomas que es posible adoptar o rechazar. Por eso la epistemología de las matemáticas tiene que ser histórica, no puede dejar de tener en cuenta el desarrollo histórico.

Como es fácil ver, este tipo de enfoque plantea enseguida el problema de cómo hacer compatible esa visión (no apriorista, sino histórica) de las matemáticas, con la experiencia que todos hemos tenido de la extraordinaria objetividad de las matemáticas, el carácter inevitable de los resultados. A eso se dedica la parte central de mi libro: propongo una nueva teoría de la objetividad en matemáticas, que se elabora teniendo muy en cuenta la idea esbozada de que todo se construye a través del desarrollo de una *red de prácticas* que interaccionan. Esto explica el título, ya que el tema central es la construcción del conocimiento matemático a través de la interacción de toda una serie de prácticas ('técnicas', científicas, y propiamente matemáticas).

Todo esto me lleva también a defender que conocer la realidad al modo de la física matemática no es conocer la realidad misma. En fin, hay muchos hilos que se puede seguir elaborando a partir de esos comienzos. Pero lo verdaderamente importante es el detalle de la argumentación: the devil is in the details.

4. Otros intereses y talentos científicos

Lo cierto es que le física me ha interesado y he tenido muy buenos maestros en el tema. En realidad, yo nunca trabajé como discípulo de historiadores de las matemáticas, sino de la física. Mi tesis la hice con Javier Ordóñez, gran maestro para mí, que como sabes es físico y filósofo, un historiador de la ciencia con intereses amplísimos. Y mi posdoc lo hice con John Heilbron, físico también y discípulo directo de Kuhn. Con ellos he pasado mucho tiempo aprendiendo de historia de la física en los siglos XIX y XX.

Creo además que una de mis características se refleja poco en lo que he publicado, y es una amplitud de intereses bastante grande. He leído con mucho interés a varios nombres importantes de la biología, de la psicología, de la antropología, etc., y siempre me apasionan las relaciones interdisciplinares que uno se encuentra en la historia de la ciencia. Fruto de eso son por ejemplo --pese a su carácter especializado-- algunas de las cosas que he escrito sobre Cantor, como un artículo que se publicó en 2004 en *Science in Context*[5] o mi participación en el libro *Ciencia y Romanticismo*, en el que intervine a nivel editorial más de lo que se ve aparentemente. (Se puede ver en: http://www.fundacionorotava.org/web_fcohc/005_publicaciones/01_actas.htm)

[5] 'The motives behind Cantor's set theory: physical, biological, and philosophical questions'. http://journals.cambridge.org/action/displayFulltext?type=1&fid=229046&jid=SIC&volumeId=17&issueId=1-2&aid=229045

5. Comentarios finales

De lo mucho que cabría decir del profesor Ferreirós, me decanto por señalar la naturalidad con la que se aprende hablando con él o escuchándole hablar. La conversación fluida y llena de matices, entre los que no es el menor el ambiente que se genera a su alrededor y que propicia el pensamiento reflexivo y dispara la intuición intelectual.

La inteligente y laboriosa minuciosidad son cualidades de agradecer y que se suelen hallar siempre en su trabajo, se discrepe o no con su visión. Creo que puedo decir a estas alturas que he entablado y mantengo una cordial relación amistosa y colaborativa con él, e invito al lector a aproximarse a su obra.

Por último, quería agradecer a José haber dedicado tiempo a esta conversación que se ha realizado en varias etapas, en distintos lugares y ambientes[6], pero siempre con el ánimo de contribuir a que este camino que trazamos en la vida sea bonito. Y con voluntad placentera que diría Jorge Guillén.

¡Hasta pronto!

Referencias

[1] FERREIRÓS, José. *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics.* Birkhäuser, Basel/Boston, 1999. 2ª edic. 2007.

[2] FERREIRÓS, José. ed.: (Bernhard Riemann). *Riemanniana Selecta.* CSIC, Madrid, 2000.

[3] FERREIRÓS, José. ed.: (Georg Cantor). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos.* Crítica, Barcelona, 2005.

[4] FERREIRÓS, José & GRAY, Jeremy J. eds.: *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in history and philosophy.* Oxford University Press, 2006.

[5] FERREIRÓS, José. ed.: (Richard Dedekind) *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Alianza Editorial/ Publicaciones UAM, Madrid, 2014. Segunda edición.

[6] FERREIRÓS, José. *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton University Press, 2015 (en prensa).

[7] DE LORENZO, Javier. *La Filosofía de la Matemática de Poincaré.* Tecnos. Madrid, 1974.

Sobre la autora:
Nombre: Rosa M. Herrera
Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: Grupo de Investigación de Mecánica Celeste (SEAC).

[6] He mantenido los tiempos en que ha sido escrita, por lo cual al lector le resulta asincrónica, forzar en tan breve conversación la atemporalidad no aporta gran cosa, en mi opinión y quizá le resta viveza.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E
Pensamiento Matemático

MAIC