Juegos y Rarezas Matemáticas

¿Cuánta Matemática hay en los sudokus?

¿How much Mathematics is there in the sudokus?

Alberto Becerra Tomé, Juan Núñez Valdés y José María Perea González

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VI, Número 1, pp. 113–136, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Dic'15; Aceptación: 1 Mar'16

1 de abril de 2016

Resumen

Este artículo trata de realizar una descripción lo más completa posible del juego del sudoku. Se comentan sus principales características, las estrategias de resolución, sus niveles de dificultad, sus múltiples variantes y, sobre todo, el fundamento matemático que subyace en el mismo. El principal objetivo que se persigue es mostrar al ciudadano normal, sin preparación específica en Matemáticas, que este juego es muy interesante, divertido y apto para ser considerado por cualquiera, a pesar de tratarse de un juego en el que "se incluyen números", con las connotaciones negativas que ese hecho supone para la mayor parte de las personas.

Palabras Clave: Sudoku, Juegos, Pasatiempos, Cuadrados latinos.

Abstract

This article tries to make as complete description as possible of the sudoku game. Its main features, resolution strategies, levels of difficulty, multiple variants and above all, the mathematical foundation underlying it are discussed. The main objective pursued is to show the normal citizen, without specific training in mathematics, that this game is very interesting, fun and suitable for consideration by anyone, despite being a game in which "numbers are includes" with negative connotations that fact means for most people in general.

Keywords: Sudoku, games, puzzles, Latin squares.

1. Introducción

Puede decirse, sin temor a errar, que desde comienzos del primer lustro del siglo actual, la aparición de los sudokus en las páginas de pasatiempos de revistas y periódicos de prácticamente todo el mundo lleva un crecimiento exponencial. Ello no es extraño, por otra parte, dado que este juego, pasatiempo, puzzle o como queramos llamarlo es muy atractivo para personas de todas las edades y formación, dado que sus reglas son fácilmente comprensibles y no se necesitan conocimientos previos de ningún tipo para, al menos, intentar su resolución. Sin embargo, eso no quiere decir que la solución se consiga sencillamente, ya que no suele estar, por lo general, al alcance de todos los que lo intentan.

En este artículo, nuestro principal objetivo es dar a conocer un poco más este juego (nosotros lo consideraremos así), profundizando en sus orígenes, estudiando sus principales técnicas de resolución, los diferentes niveles de dificultad existentes, sus variantes e incluso su base matemática, que como todo tipo de juegos, éste también posee, y muy marcadamente además.

Se incluyen numerosos ejemplos de los conceptos explicados y se acompaña de una abundante biblio y webgrafía, que les facilite a los aún no iniciados o indecisos toda la información necesaria para su aprendizaje (véase (web1) para iniciación).

SUDOKU

Figura 1. Logo del Sudoku.

2. Evolución Histórica del juego del sudoku

Comenzamos, en primer lugar, dando una breve introducción histórica de la evolución seguida por este juego desde sus orígenes.

Una de las versiones más aceptadas sobre el nacimiento del sudoku, pasatiempo muy conocido y practicado en la actualidad, sostiene que fue el genial matemático suizo del siglo XVIII Leonhard Euler (1707-1783) la persona que creó este juego, si bien no directamente sino de una forma indirecta, al establecer las pautas para el cálculo de probabilidades con el objetivo de representar una serie de números sin repetir. De hecho, Euler llegó a describir los cuadrados latinos y actualmente está probado que la solución de un sudoku siempre es un cuadrado latino, aunque el recíproco en general no es cierto, ya que en el sudoku se establece la restricción añadida de que no se puede repetir un mismo número en una región (recuérdese que se denomina Cuadrado Greco-latino, o Cuadrado de Euler o Cuadrado Latino Ortogonal de orden n a un cuadrado de $n \times n$ casillas en las que figuran n elementos distintos, sin que éstos se repitan en cada fila ni en cada columna).

No obstante, otras fuentes indican que el origen del juego del sudoku puede situarse en Nueva York a finales de los años 1970, cuando una revista especializada en rompecabezas matemáticos y problemas lógicos, de nombre “Math Puzzles and Logic Problems” (puzzle es pasatiempo en inglés), asociada a la empresa editora Dell Magazines especializada en pasatiempos, creó un juego llamado “Number Place” (el lugar de los números), primera versión del sudoku. No se conoce el nombre del diseñador de ese juego, aunque se piensa que seguramente sería Walter Mackey, uno de los diseñadores de puzzles de Dell. No obstante, este juego se perdió en el olvido años más tarde.

Posteriormente, la empresa editora japonesa Nikoli, especializada en pasatiempos para prensa y revistas, exportó ese juego a Japón, publicándolo en el periódico “Monthly Nikolist” en abril de 1984 bajo el título "Sūji wa dokushin ni kagiru", que se puede traducir como "los números deben estar solos" (literalmente, dokushin = célibe, soltero). Ese nombre, que se lo puso Kaji Maki, presidente de la empresa, fue después abreviado hasta el actual sūdoku (sū = número, doku = solo: número solo); ya que es práctica común en japonés tomar el primer kanji (caracteres empleados en la ortografía japonesa) de palabras compuestas para abreviarlas.

En 1986, Nikoli introdujo dos innovaciones que hicieron aún más popular el sudoku. La primera, que el número de cifras que venían dadas como datos (dígitos que venían ya colocados en el sudoku) estaría restringido a un máximo de 30 y la segunda que los sudokus serían "rotacionalmente simétricos", es decir, que las casillas con cifras dadas estarían dispuestas de forma simétrica (nótese que esta última condición no siempre se cumple en muchos de los sudokus actuales). De esa forma y tras ligeras variaciones tomadas hasta dar con la fórmula que hoy es tan popular, el sudoku se extendió por la prensa japonesa y comenzó su salto al resto del mundo.

La primera versión para ordenador del sudoku se registró en 1989, a través de la empresa Loadstar Softdisk Publishing, con el nombre de DigitHunt, publicada en la revista Commodore 64.

En 1997, el neozelandés Wayne Gould, que fue abogado durante trece años en su país y se fue a trabajar a Hong Kong en 1982, llegando a ser juez de la Corte de esa ciudad al año siguiente, encontró una revista de sudokus durante unas vacaciones en Japón, lo que le llevó a tratar de popularizar y difundir ese juego fuera del país y principalmente en Gran Bretaña, motivado por la enorme aceptación del mismo entre los ciudadanos japoneses. Para ello, tras jubilarse en 1997, Gould desarrolló durante 6 años un programa de ordenador que producía sudokus en masa, lo que hizo que éstos apareciesen en periódicos de toda Europa y América. Gould empezó a vender sus sudokus en otoño de 2005, marcando con ello el comienzo de la llegada del sudoku a Europa y provocando así un enorme aumento de su popularidad en todo el mundo.

Así, Gould le envió varios sudokus al periódico inglés "The Times", en Londres, para que los publicara. Al principio, dicho periódico no pareció atender esa oferta pero finalmente publicó el primer sudoku, aunque bastante tiempo después, el 12 de noviembre de 2004. Tres días más tarde, otro periódico, el "The Daily Mail", copió el juego y lo publicó con el nombre de "Code Number" y a continuación fueron seguidos por la práctica totalidad de la prensa británica. De esa forma, Gould consiguió su propósito de popularización y difusión de este juego. Él mismo escribió varios libros sobre sudokus y fue también editor literario de una colección de obras sobre este juego.

Otra empresa editora de pasatiempos, Kappa, reimprimió los sudoku de Nikoli en la revista "Games Magazine" con el nombre Squared Hawai y actualmente, aparte de que la mayoría de periódicos de tirada nacional de todas las naciones publican sudokus en sus páginas de entretenimiento, hay muchísimas publicaciones dedicadas específicamente a este juego. De hecho, la propia compañía original Dell Magazines edita hoy en día 2 revistas especializadas: Original Sudoku y Extreme Sudoku.

El año 2005 puede considerarse un año especial para este juego. En verano de ese año el sudoku llegó a la televisión. La primera emisión fue realizada por el canal británico "Sky One". Participaban en el programa nueve equipos con nueve jugadores cada uno que tenían que completar sus respectivos sudokus, permitiéndose también la participación de los telespectadores de forma interactiva. Sin embargo, el programa no tuvo el éxito esperado, quizás por la enorme dificultad de adaptar este pasatiempo a una emisión televisiva. En ese mismo año también se consiguió hacer el sudoku más grande del mundo, en una colina cerca de Bristol (Inglaterra), con 84 metros de largo.

Una muy buena y completa historia de la evolución de este juego puede verse en el libro de Agustín Fonseca, titulado "Los mejores Sudokus: 200 enigmas orientales" (Fonseca, 2005).

3. Descripción del juego del sudoku

En esta sección introducimos la terminología que se usará cuando se expliquen a continuación algunos métodos de resolución de los sudokus (ver figura 2).

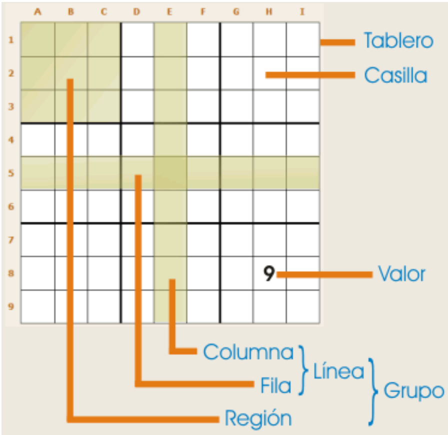


Figura 2. Tablero del sudoku.

- El tablero de juego está constituido por una cuadrícula de 9×9 casillas, es decir, por 81 casillas.
- Casilla: elemento individual del tablero de juego que contiene los números del 1 al 9. Cada casilla está en una fila, en una columna y en una región simultáneamente. Las casillas se suelen denominar también celdas o celdillas.
- Dígito o Valor: número contenido en una casilla.
- Dígitos iniciales: los dígitos ya colocados en las casillas para empezar el juego.
- Ubicar: colocar con seguridad un valor en una casilla.
- Fila: línea de 9 casillas de forma horizontal.
- Columna: línea de 9 casillas de forma vertical.
- Región: cuadrícula de 3×3 casillas (9 casillas).
- Línea: fila o columna. Hay 18 líneas en un sudoku, nueve filas y nueve columnas.
- Grupo: fila, columna o región. En un sudoku hay 27 grupos.

Así, el sudoku clásico consiste en un tablero o cuadrícula de 9×9 casillas, en algunas de las cuales ya hay colocado un dígito inicial del 1 al 9, de forma que el jugador deberá completar la totalidad de casillas vacías con los dígitos del 1 al 9, de manera que no se repita ningún dígito en una misma fila, columna o región de 3×3.

4. Métodos de resolución del juego del sudoku

En esta sección se describen los métodos más básicos de resolución de este juego, que son los que más se utilizan y con los que pueden resolverse prácticamente todos los sudokus (para mayor información puede consultarse (web2)).

En primer lugar, debemos encontrar los *candidatos* para cada casilla. Los candidatos son cada uno de los dígitos posibles que pueden encajar en una casilla. Para facilitar la resolución podemos anotar los candidatos en la parte superior de cada casilla.

1. Ubicación individual de candidatos:

Una vez determinados los candidatos para cada una de las casillas podemos ubicar algunos números en ellas con certeza.

1.1. Único desnudo

Si solo hay un candidato para una casilla concreta, es evidente que ése es el valor para esa casilla. Estos tipos de candidatos reciben el nombre de único desnudo.

1.2. Única posición o Único oculto

En este caso nos encontramos con que solo existe un candidato para un grupo (fila, columna o región). Este candidato se encuentra dentro de la misma casilla con otros candidatos, de ahí el nombre de oculto. Al ser el único dígito posible dentro del grupo, ese candidato es el valor para esa casilla.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	345	6	1	3	2	348	9	3578	34578
2	2	8	7	1	5	349	36	36	346
3	3459	359	349	369	3468	7	1	2	34568
4	6	239	3489	2379	347	349	5	1	3789
5	3459	2359	349	8	1	3459	2367	3679	3679
6	7	1	389	23569	36	359	2368	4	3689
7	1	4	2	357	378	6	378	35789	35789
8	389	379	6	357	378	1	4	35789	2
9	38	37	5	4	9	2	3678	3678	1

Figura 3. Ejemplo de único desnudo.

Vemos en la figura 3 que en la casilla D1 encontramos un ejemplo de único desnudo. La fila 2 contiene a la casilla F2 con los candidatos 3, 4 y 9. El 9 es el único candidato para este grupo. Por lo tanto, podremos afirmar que la casilla F2 tiene el 9 como valor.

1.3. Intersección Línea-Región

Lo indicado anteriormente nos permite ubicar valores de forma segura en las casillas. Cuando ya no podemos colocar más dígitos de forma segura hay que empezar a eliminar candidatos.

Para ello, si intersecamos dos grupos que tienen casillas en común, se dice que hay una intersección Línea-Región cuando un candidato debe obligatoriamente ser ubicado como valor en uno de los dos grupos. Por lo tanto ese candidato puede ser eliminado con total seguridad del resto de las casillas del otro grupo.

Esta intersección puede ser de dos tipos: Fila-Región o Columna-Región.

Figura 4. Ejemplo de intersección columna-región.

En la figura 4 se observa un ejemplo de intersección Columna-Región. En la región R1, el candidato 5 se encuentra en las casillas C1, C2 y C3. Como es obligatorio que esté en alguna de esas casillas, puede ser eliminado como candidato de las restantes casillas de la columna C. Por lo tanto, el candidato 5 se puede eliminar de las casillas C4 y C5.

2. Ubicación grupal de candidatos:

Hasta aquí se ha trabajado con un solo candidato. Los métodos que vamos a ver ahora trabajan con grupos de 2 o más candidatos.

2.1. Subconjuntos desnudos

Llamaremos subconjunto a un conjunto de casillas del mismo grupo que tienen tantos candidatos como número de casillas hay en el subconjunto. Diremos que un subconjunto es desnudo si todas las casillas que forman el subconjunto tienen los mismos candidatos.

2.2. Par desnudo o Doble Pareja

Veamos primero el caso de un par (subconjunto de 2 casillas) desnudo: si dos casillas de un grupo contienen a un par idéntico de candidatos y solo esos dos candidatos, ninguna otra casilla de ese grupo podría tener esos valores, ya que un candidato tendrá que ir como valor en una casilla y el otro candidato en la otra. Así podemos eliminar estos dos candidatos de las restantes casillas del grupo.

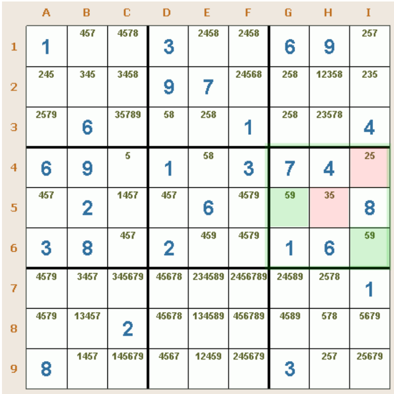


Figura 5. Ejemplo de un par desnudo en una región.

En la figura 5 tenemos un ejemplo de un par desnudo en una región. Podemos ver que en la región R6 las casillas G5 e I6 tienen un par de candidatos iguales, el 5 y el 9. Éstos forman un par desnudo así que podemos eliminar el candidato 5 de las casillas H5 e I4.

2.3. Trío desnudo

Es una generalización del par desnudo. Consiste en tres casillas de un grupo (fila, columna o región) que contienen los mismos tres candidatos. Los candidatos del trío que se encuentran en otras casillas del grupo pueden ser eliminados. Sin embargo, hay que hacer notar que las casillas que componen el trío no necesariamente deben tener a los tres candidatos del trío. Por ejemplo, si un trío está compuesto por los candidatos 1, 2 y 3, las combinaciones válidas para ese trío desnudo son:

Casilla A	123	123	123	123	123	123	123	12
Casilla B	123	123	123	123	12	12	13	13
Casilla C	123	12	13	23	13	23	23	23

Lógicamente, de igual forma que tenemos pares y tríos desnudos, también podremos encontrar cuartetos desnudos.

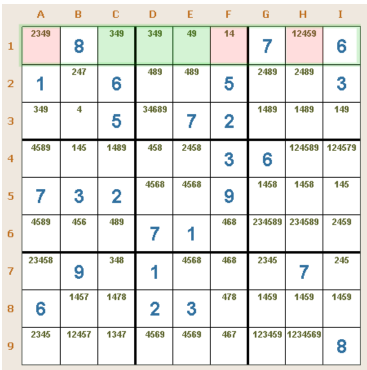


Figura 6. Ejemplo de trío desnudo en una fila.

La figura 6 muestra un ejemplo de trío desnudo en una fila. En las casillas C1, D1 y E1 de la fila 1, tenemos el trío formado por los candidatos 3, 4 y 9. Podemos rechazar los candidatos 3, 4 y 9 de A1, 4 de F1 y 4 y 9 de I1.

2.4. Subconjuntos ocultos

A diferencia de un subconjunto desnudo, en un subconjunto oculto las casillas que pertenecen al grupo tienen a los candidatos del subconjunto y a otros candidatos, pero los del subconjunto no pueden estar en otras casillas del grupo. Podemos distinguir entre pares ocultos, tríos ocultos, etc.

2.4.1. Par oculto o Pareja Escondida

Si dos casillas de un grupo tienen un par idéntico de candidatos que no aparecen en ninguna casilla de ese grupo, entonces los demás candidatos de esas dos casillas pueden ser eliminados con seguridad.

2.4.2. Trío oculto o Trío Escondido

Si tres candidatos están restringidos a tres casillas de un determinado grupo, entonces todos los demás candidatos de esas tres casillas pueden ser eliminados. Al igual que ocurría con los tríos desnudos, las casillas que componen el trío no deben tener necesariamente a los tres candidatos del trío.

Figura 7. Ejemplo de trío oculto en una columna

En la columna D de la figura 7 hay un trío oculto en casillas D3 (candidatos 1 y 2), D5 (candidatos 1 y 9) y D6 (candidatos 2 y 9), por lo tanto en estas casillas pueden eliminarse los candidatos restantes. En D3 eliminamos el 4, 5 y 7; en D5, el 5 y 7; y en D6, el 4.

Por razones de extensión, no se van a indicar aquí otras diversas técnicas existentes de resolución de sudokus. Entre ellas pueden citarse las técnicas maestras (cadenas forzadas, swordfish, X-wing,...) y las técnicas de adivinación (Nishio, por ejemplo). Para mayor información puede consultarse (web3, web4, y web5).

5. Niveles de Dificultad de los sudokus

Por lo general, se acepta que un sudoku está bien planteado si tiene solución y además ésta es única, es decir, si en cada celda existe una única entrada correcta entre todos los candidatos. La pregunta surge entonces de manera natural: ¿qué condiciones iniciales deben darse para que la solución de un sudoku sea única?

Actualmente, está demostrado que un sudoku debe comenzar con un mínimo de 17 dígitos iniciales dados para que pueda tener solución única (web23).

Éste era un problema abierto hasta que el 1 de enero de 2012 fue resuelto por Gary McGuire, Bastian Tugemann y Gilles Vivario (2013), de la School of Mathematical Sc (University College Dublin, Irlanda). En ese artículo, los autores demuestran que no hay sudokus con 16 dígitos iniciales que tengan solución única, basándose para ello en el estudio de todos los posibles resultados (al haber 6,7 × 1021 casos posibles, los autores se valieron de software informático para su demostración).

Aparte de este resultado, existe también otro resultado matemático referente a la solución única de un sudoku relacionado con el número máximo de dígitos iniciales: ¿Cuál es el máximo número de dígitos iniciales que un sudoku puede tener sin que éste tenga solución única? La respuesta es 77. Es sencillo darse cuenta de que si tienes setenta y ocho, setenta y nueve u ochenta dígitos iniciales entonces el sudoku puede ser resuelto de forma única. Sin embargo, un sudoku de dimensión n × n que tenga menos de n2 - 4 (n cuadrado menos 4) dígitos iniciales puede no tener solución única.

El número de dígitos iniciales en los sudokus parece tener una importancia fundamental a la hora de resolverlos. Es comúnmente aceptado que el número de éstos determina estrictamente la dificultad de un sudoku. Sin embargo, aunque resulte sorprendente, la cantidad de dígitos iniciales apenas afecta a la dificultad del sudoku, e incluso puede no afectar en absoluto.

Así, un sudoku con un mínimo de dígitos iniciales dados puede ser muy fácil de resolver y, sin embargo, uno que tenga más dígitos que el promedio puede ser extremadamente complicado de resolver. De hecho, la resolución de un sudoku está basada en la relevancia y posición de los dígitos más que en la cantidad de éstos.

Es por ello por lo que la configuración y distribución de los dígitos iniciales es lo que distingue un sudoku difícil de otro fácil. De hecho, en la mayoría de las ocasiones es así. Por ejemplo, uno podría poner dígitos iniciales en un sudoku de tal manera que éstos proporcionen información redundante, dando así menos acceso a la solución del que se podría esperar a simple vista.

Mostramos a continuación un par de ejemplos que ilustran estas ideas. Así, en la figura 8, el sudoku de la izquierda tiene solamente veinte dígitos iniciales pero su dificultad es de nivel 1. Sin embargo, el de la derecha tiene veintiocho, pero su dificultad es de nivel 5.

	6	7						4
		2			3			
				9	8	3		
	1				5			
			9				7	
		4	2	5				
			7			1		
1						6	8	

	4	3						1
6	2			1	8		3	
1			3				5	
			5			2		
		9				1		
		2			3			
	3				1			8
	1		2	6			4	5
2						6	1	

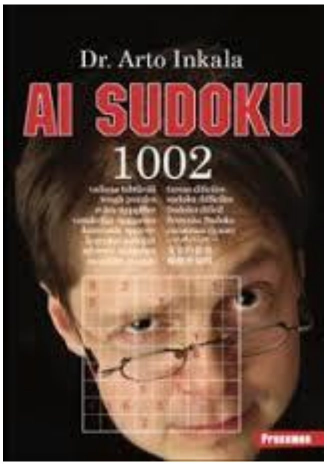
Figura 8. Sudokus de nivel 1 (izquierda) y 5 (derecha).

Nótese además que aunque el número y la configuración de los dígitos iniciales son fácilmente identificables, no se puede confiar únicamente en ellos para determinar la dificultad de un sudoku. Una medida más refinada de la dificultad se hace a partir del estudio de las técnicas de resolución de sudokus. Algunos métodos son más sencillos de aplicar que otros y se puede indicar, por tanto, que un sudoku es más difícil de resolver que otro si requiere un razonamiento más complejo para resolverlo.

No obstante, la técnica a emplear para la resolución de un sudoku es un aspecto totalmente subjetivo, pues personas diferentes pueden resolver un sudoku de maneras diferentes y encontrarse más cómodas resolviéndolo con unas técnicas que con otras.

Para los creadores de sudokus, una forma de determinar la dificultad del mismo es asignar una puntuación numérica a cada técnica, de modo que las más laboriosas o difíciles reciban una puntuación mayor. Esto es sencillo de hacer, ya que un ordenador puede realizar el seguimiento de cada una de las técnicas que utiliza, dándoles así una puntuación numérica en función de la dificultad. No obstante, en ocasiones, un promedio sobre un gran número de métodos de resolución es más preciso que un cálculo basado en un único camino predeterminado. Sin embargo, para sudokus cuya dificultad está en duda, no hay nada mejor como un equipo de personas que pueda evaluarlos manualmente, aunque es necesario tener en cuenta que la estimación de la dificultad de un sudoku no es, ni mucho menos, una ciencia exacta, debido a la enorme caga de subjetividad que ello conlleva.

La figura 9 muestra a continuación un sudoku de una gran dificultad, diseñado en 2010 por el matemático finlandés Arto Inkala, nacido en 1969 y experto en matemática aplicada, que es considerado el sudoku más difícil de resolver que se conoce hasta el momento.



8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

Figura 9. El sudoku de Arto Inkala.

Este sudoku tiene 21 dígitos iniciales, lo que muestra que no tiene por qué contener estrictamente 17 dígitos para tener una dificultad máxima. Requiere del método de ensayo y error para obtener una solución. Su autor, que tardó tres meses en diseñarlo, lo denominó "Everest" (un usuario de facebook, avimael_fuerzarayos, indica que él lo resolvió, aunque le costó mucho trabajo hacerlo, como unas 10 horas, si bien finalmente lo consiguió, aunque no le gustó que fuese un sudoku imperfecto, al tener dos soluciones diferentes. Véase (web20) para mayor información).

Aunque parece sencillo, la dificultad particular de este sudoku reside en el elevado número de deducciones a realizar para encajar un único dígito en cada casilla, ya que no es posible detectar qué dígitos van en cada casilla basándonos únicamente en las celdas que ya han sido rellenadas. La mayoría de intentos nos llevarán a enfrentarnos con situaciones en las que un mismo dígito puede pertenecer a dos o más celdas diferentes en las que encaja. Sólo una de ellas es correcta, pero para encontrarla hay que examinar todas las opciones posibles para su próximo movimiento y tal vez en el paso siguiente igual, continuando en la misma línea con todos menos uno de los resultados potenciales, pudiéndose llegar en cualquier momento a un callejón sin salida.

6. Las Matemáticas en los sudokus

Tal como se comentó en la Introducción, se estima que fue el matemático suizo Leonhard Euler, en el siglo XVIII, la persona que creó este juego indirectamente al establecer las pautas para el cálculo de probabilidades para representar una serie de números sin repetir. Este hecho ya haría que este juego estuviese bastante relacionado con las Matemáticas.

Más aún, esta relación puede verse más reforzada con el hecho de que aunque un sudoku, a simple vista, sea un sencillo juego de pura lógica, un estudio algo más profundo del mismo muestra un trasfondo claramente matemático, tanto en su planteamiento como en su resolución.

Como ya se ha anticipado, la estructura de los sudokus se basa en las estructuras conocidas como cuadrados latinos de Euler, a partir de los cuales se puede introducir la definición matemática de sudoku. Un ejemplo de uno estos cuadrados, de orden 5, sería el de la figura 10. Pues bien, un sudoku es un cuadrado latino de orden 9 (generalmente), dividido en 9 cuadrados (regiones) de lado 3, con la condición añadida de que tampoco en estas regiones se repita ninguna cifra.

1	4	2	5	3
5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4

Figura 10. Cuadrado latino de Euler de orden 5.

Para ver cómo aparecen las Matemáticas tanto en la resolución como en la modelización de un sudoku, vamos a tratar a continuación los métodos de resolución de estos juegos a partir de la abstracción y su identificación con objetos matemáticos pertenecientes a ramas específicas de la Matemáticas, como pueden ser la Matemática Discreta, la Matemática Aplicada o el Álgebra Lineal entre otros.

Para una modelización de los sudokus desde el punto de vista de la Matemática Aplicada recordamos, en primer lugar, que un grafo es un conjunto de vértices (puntos) unidos por aristas (líneas) y que dos vértices se dicen adyacentes si están unidos por una arista.

Un problema fundamental de la Teoría de Grafos es el de la coloración de un grafo. Dar una coloración a un grafo consiste en asignar etiquetas (colores) a cada uno de los vértices del mismo, de manera que dos vértices que sean adyacentes no tengan asignado el mismo color. El problema consiste en encontrar el mínimo número de colores que es necesario utilizar para dar una coloración a un grafo (véase la siguiente figura, en la que aparece una coloración de un grafo con 3 colores).

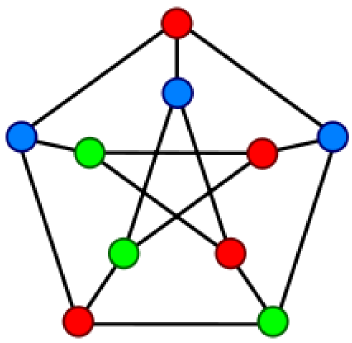


Figura 11. Coloración de un grafo con 3 colores.

Pues bien, usando estos conceptos, un sudoku se puede modelar matemáticamente como un grafo en el plano con tantos vértices como casillas, tales que dos de ellos son adyacentes si pertenecen a la misma fila, columna o región. Si a cada cifra le asignamos un color diferente, nuestro sudoku se convierte en un problema de coloración de vértices de un grafo, de manera que dos dígitos iguales no pueden pertenecer a casillas que se encuentran en la misma fila, columna o región. No obstante, el que los sudokus clásicos sean de tamaño 9×9 hace que la cantidad de vértices sea muy elevada, lo que dispara el coste de la operación de coloreado del grafo sin el uso de herramientas informáticas.

Otra manera de modelar un sudoku es a partir del Álgebra. Este método implica la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, es decir, ecuaciones polinómicas de grado mayor que 1. El coste de este método es realmente alto y nos hace comprobar la importancia de las condiciones iniciales del sudoku en la mayor o menor dificultad a la hora de obtener su solución.

A grandes rasgos, el método consiste en asignar a cada vértice una variable: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde n es el número de vértices. Supóngase que se quiere dar una coloración al grafo con 3 colores, que llamamos 1, 2 y 3. Entonces, como cada variable debe tener asignado un color, siempre se tendrán las ecuaciones $(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3) = 0$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora, a partir del hecho de que si x_1 y x_2 son adyacentes entonces tienen distinto color, y por tanto $x_1 - x_2 \neq 0$, se llega a otras ecuaciones del tipo $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 - 6x_i - 6x_j + 11 = 0$ con $i \neq j$. Estas ecuaciones se obtienen a partir de que se verifica

$$(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3) - (x_j - 1)(x_j - 2)(x_j - 3) = (x_i - x_j)\left(x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 - 6x_i - 6x_j + 11\right) = 0,$$

por lo que como $x_i - x_j \neq 0$, la única posibilidad es que $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 - 6x_i - 6x_j + 11 = 0$. Estas ecuaciones son casos particulares para el caso en el que tenemos 3 colores pero se puede extender a números mayores.

Finalmente, cada dato inicial nos proporciona una ecuación de la forma $x_k = m$, siendo m: 1, 2 ó 3. Por lo tanto, combinando todas las ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones no lineales cuya resolución nos dará el color de cada vértice y por tanto la solución del sudoku.

Las dos modelizaciones anteriores de los sudokus se pueden resumir en la siguiente tabla:

SUDOKU	**TEORÍA DE GRAFOS**	**ECUACIONES**
Sudoku	Grafo	Sistema de ecuaciones
Casilla de un sudoku	Vértice	Variable x_i
Colocar una cifra en una casilla	Colorear un vértice	$(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3) = 0$
Relación entre dos casillas de una misma fila, columna o región	Arista	$x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 - 6x_i - 6x_j + 11 = 0$
Dígitos iniciales	Vértices coloreados	$x_i = m$
Resolver sudokus	Colorear grafos	Resolver sistemas

7. Variantes del sudoku

Se indican a continuación algunas variantes del sudoku clásico, consistentes en nuevos tableros de juego basados en el mismo concepto del sudoku original, que combina dígitos, regiones y no-repeticiones, pero con ideas novedosas distintas. De todas ellas existen diferentes niveles de dificultad: fácil o sencillo, medio, difícil y experto (web1).

Estas variantes se encuentran desde el Shidoku, que es un “minisudoku” de 4×4, al White Knight Sudoku, que combina números y piezas de ajedrez. Incluso algunos poseen formas extrañas, como el Spherical 2-3-4 sudoku o el sudoku Exagon.

Por ejemplo, en el siguiente sudoku con cuadrados mágicos de la figura 12, para el que, de forma increíble, solo se necesitan dos dígitos iniciales para resolverlo, aparte de las reglas habituales, las zonas coloreadas son cuadrados mágicos, lo cual significa que la suma de sus filas, columnas y diagonales principales debe ser siempre la misma. Su solución es única y se puede resolver únicamente por lógica.

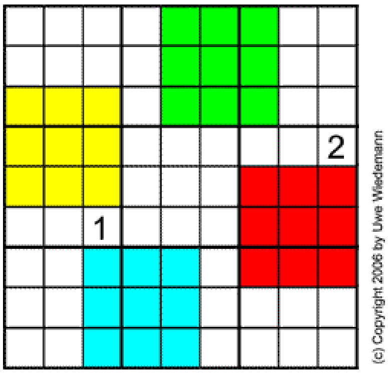


Figura 12. Sudoku con cuadrados mágicos.

7.1 Samurai sudoku

En esta variante se unen 5 sudokus en uno. Se trata de cinco sudokus entrelazados formando una equis. Los cuatro sudokus de los extremos comparten una región de 3×3 con el que se encuentra en el centro (web6).

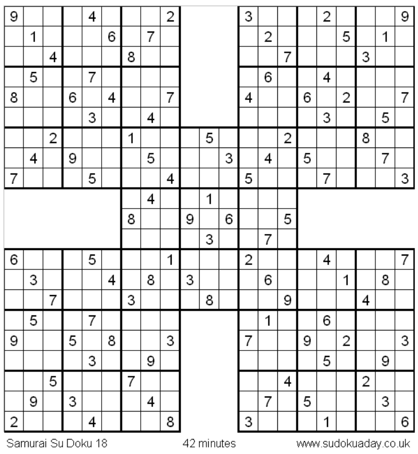


Figura 13. Samurai Sudoku

7.2 Supersudoku

Se compone de una cuadrícula de 16x16 casillas, dividida en 16 regiones de 4×4. Hay que colocar en ellas los dígitos del 1 al 9 y las letras de la A a la G, de manera similar al sudoku (web7).

		2		3	1	D						7	E	6	
8	E		9						D		6	B		A	
6						E	0		B		A				1
C	1		A			B		0		E		4		8	
	C	5					4		3						9
			7		5		E		A	B					0
	6	8		9	2			E				5	A		7
			1			7	D	9		F	2		B		
		6		0	9		2	F	4			1			
9		1	5				8			D	E		6	2	
3					F	1		2		8		9			
A						6		1					3	7	
	3		8		A		6		E			2		4	B
5				F		8		A	1						C
	A		B	1		9						8		5	D
	7	D	0						8	4	F		9		

Figura 14. Supersudoku.

7.3 Juuni sudoku

Similar al anterior aunque algo más reducido. Tiene una cuadrícula de 12×12 casillas, con doce regiones de 3×4. Se deben colocar en la forma clásica los dígitos del 1 al 9 y las letras de la A a la C, sin que se repitan en una misma fila, columna o región de 3×4 (véase web8).

C			3		6	9		1			4
			9	8	C	7	1	B			
8		2	1					9	7		6
	8			C	A	3	B			6	
	2				8	4				5	
4	6		A					8		3	C
		4		6	5	A	8		2		
2	A		6					4		8	7
	3			4			7			1	
		1		5	B	C	9		6		
3		6	B					5	1		9
		8		7			3		C		

Figura 15. Juuni Sudoku.

7.4 Killer sudoku

En lugar de los dígitos iniciales, tiene agrupaciones de casillas que forman bloques, con un número que indica su suma. Es similar al sudoku clásico, pero en lugar de tener dígitos iniciales, hay agrupaciones de casillas por medio de bloques punteados. Cada uno de ellos tiene un número pequeño de color rojo que indica la suma total de las casillas que componen el bloque. Cada bloque está formado por casillas contiguas. Se trata entonces de completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 9, sin que se repitan en una misma fila, columna, región de 3×3 y bloque punteado (web9).

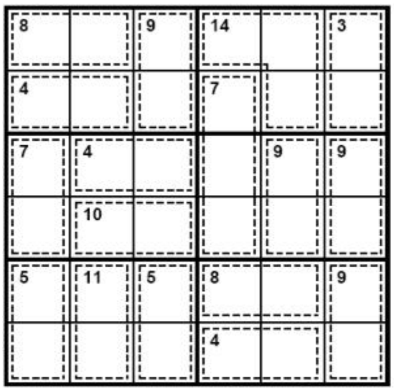


Figura 16. Killer Sudoku.

7.5 Sudoku Diagonal

Es un sudoku que incluye dos diagonales en las cuales no se deben repetir los dígitos. Está compuesto por una cuadrícula de 9×9 casillas, dividida en nueve regiones de 3×3, que contiene además 2 diagonales de colores. Como en el sudoku clásico, no se debe repetir ningún dígito del 1 al 9 en una misma fila, columna y región de 3×3 pero la diferencia reside en que tampoco puede hacerlo en las diagonales de color (web10).

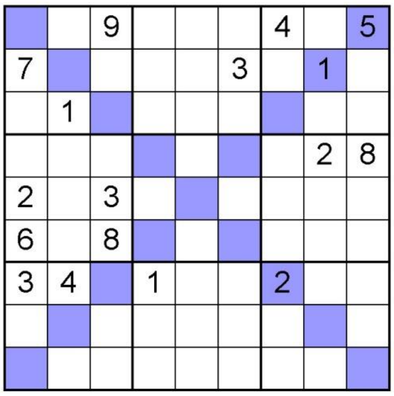


Figura 17. Sudoku Diagonal.

7.6 Kakuro sudoku

Esta variante está compuesta por una cuadrícula de 9×9 casillas. Hay que rellenar las casillas vacías (color blanco) con los dígitos de 1 al 9. Estas casillas se encuentran distribuidas en filas y columnas. Cada fila y columna contiene un número (en color blanco), llamado número clave. Este número indica la suma de la fila si se encuentra a la izquierda de ésta, o la suma de la columna si se encuentra encima de ella. Los dígitos en una misma suma no deben repetirse. Por ejemplo, si la suma de dos casillas es 16, en una casilla irá el 9 y en la otra irá el 7, ya que no podrán ir el 8 y el 8 (web11).

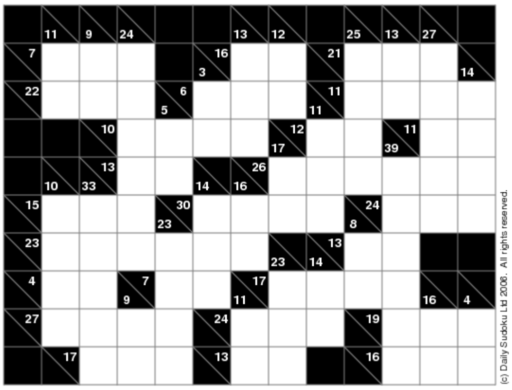


Figura 18. Kakuro Sudoku.

7.7 Sohei sudoku

Variante formada por 4 sudokus clásicos solapados formando una cruz (dejando un hueco central) y por tanto relacionados entre sí donde cada uno de ellos comparte dos regiones de 3×3 con los otros dos adyacentes. Anteriormente se llamaba Isis (web12).

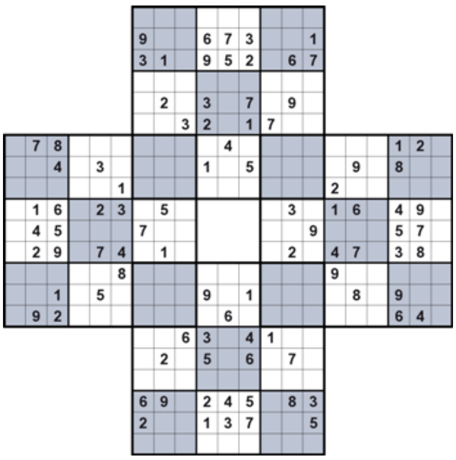


Figura 19. Sohei Sudoku.

7.8 Samurai X sudoku

Es muy parecido al Samurai, aunque con la dificultad añadida de tener dos diagonales por cuadrícula. Está formado por 5 cuadrículas de 9×9 entrelazadas formando una X. Las 4 de los extremos comparten una región de 3×3 con la que se encuentra en el centro (web13).

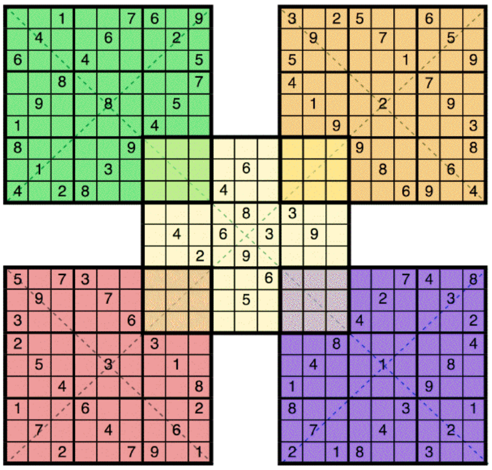


Figura 20. Samurai X Sudoku.

7.9 Win sudoku

Esta variante del sudoku clásico está compuesta por una cuadrícula de 9×9 casillas, dividida en regiones de 3×3. Además contiene 4 bloques de color de 3×3 casillas (web14). A partir de los dígitos ya dispuestos en algunas casillas, hay que completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 9, sin que éstos se repitan por fila, columna, región de 3×3 y bloques de color.

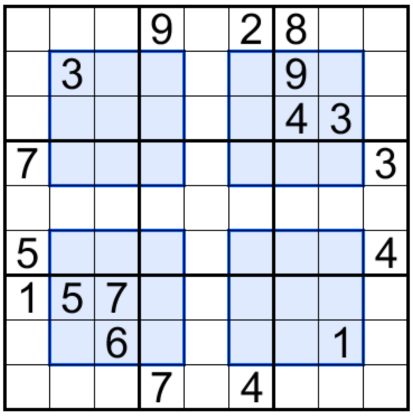


Figura 21. Win Sudoku.

7.10 Megasudoku

Con esta palabra se suelen designar bien a los sudokus habituales, aunque de cuadrículas 12×12 o 16×16, como a otra variante del sudoku en la que las regiones son asimétricas, debiéndose rellenar entonces todas las casillas vacías de una cuadrícula de 9×9 de forma que en cada columna, en cada fila y en cada una de esas regiones asimétricas se coloquen los dígitos el 1 al 9, sin repetir ninguno (web15). La segunda de las alternativas comentadas, muy usual en las páginas de entretenimiento de periódicos y revistas, no suele estar referenciada en Internet.

	11	14			5	15			3	16			4	9	
6	2		9	13		7			4		14	16		8	12
10			16	9							1	2			11
	3	15			6		2	10		11			14	5	
	13	5			15		1	8		4			3	11	
1			12	4					6 7 11		9	13			6
16	6				11									1	15
			3	2							10	4			
			15	3					14		8	12			
5	4						6		13					15	9
11			2	10							4	3			7
	10	9			4		14	12		2	5		6	16	
	15	10			16		3	5		8			12	7	
3			14	1							15	8			16
4	8		1	5		14			6		7	11		10	2
	7	2			8	10			16	12			13	14	

				7			2		12		6
			8		5	4		7	9		1
3	1			11		8					
	3				8	9	5			6	
5	10					11			8		7
9		4	11		12	3				5	
	4			2	6	12		10	1	7	
2		1				10					8
	6			8	4					12	9
			1		10		8		3	11	4
	11	10		4	1	6		9			
		6	2	5			3				

Sudoku - 12 x 12

Figura 22. Megasudokus de diferente número de casillas.

7.11 Hachi sudoku

La cuadrícula consta de 8x8 casillas y está dividida en ocho regiones de 2×4 casillas. Hay que completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 8, sin repetirse en una misma fila, columna o región de 2×4 (web16).

1		8	3				
4				1	3		5
				7	2	5	3
3	2	7	5				
				5		1	4
	4		1			7	
6	8	5	2				
				8	5		6

Figura 23. Hachi Sudoku.

7.12 Roku sudoku

Es un "minisudoku" con una cuadrícula de 6×6 dividida en seis regiones de 2×3 casillas. Hay que completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 6 sin que se repitan en una misma fila, columna o región de 2×3 (web17).

3	4				
			3	5	
1		2			5
5		4			3
			4	1	
4	1				

Figura 24. Roku Sudoku.

7.13 Shidoku o Kid sudoku

Ésta es la variante más sencilla, pensada para que practiquen los más pequeños. Tiene una cuadrícula de 4×4 casillas, dividida en cuatro regiones de 2×2 casillas. Hay que completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 4, sin que se repitan en una misma fila, columna o región de 2×2 (web18).

			3
3		4	2
	3	2	4
2			

Figura 25. Kid Sudoku.

7.14 ABCsudoku o Sudoku Grecolatino

Esta variante añade un elemento extra al sudoku: las celdas no van a contener únicamente un número sino que también contendrán una letra. Eso significa que hay el doble de información que averiguar en cada celda (web19).

Este tipo de variante raramente se encuentra en formato papel. La denominación de grecolatino se debe a los cuadrados grecolatinos propios de las matemáticas (también llamados cuadrados de Euler o cuadrados latinos ortogonales) de disposición similar a esta variante. Recordamos brevemente que un cuadrado grecolatino de orden n es una cuadrícula de $n \times n$ tal que en cada casilla hay un par ordenado de los dígitos 1, 2, 3, … n (u otros signos), de forma que los dos cuadrados formados solo por los primeros términos de cada par y solo por los segundos sean cuadrados latinos. Cada una de las n^2 posibles parejas de dígitos aparecen una y solo una vez en la cuadrícula. Estos sudokus se llaman así porque Euler los estudió utilizando, en vez de dígitos, caracteres latinos para los primeros términos y griegos para los segundos, aunque en realidad no fuese él quien los inventara, puesto que los primeros ejemplos conocidos se remontan a un manuscrito árabe del siglo XIII).

B2	C3	D4	A1
D3	A2	B1	C4
A4	D1	C2	B3
C1	B4	A3	D2

D	C		A	
C		A		
		2	4	
		B5	2	
	2	3		

Figura 26. Dos sudokus grecolatinos de diferente número de casillas.

En un sudoku grecolatino 4×4 (figura 26), el objetivo es colocar los dígitos del 1 al 4 una única vez en cada fila y columna tal como se haría en un sudoku clásico. Sin embargo, también hay que hacer lo mismo con las letras de la A a la D. Además, no solamente cada letra y cada número deben aparecer una única vez en cada fila y columna sino que las combinaciones de ambos (por ejemplo A1, D2, ...) tienen que aparecer una sola vez en todo el rompecabezas. En otras palabras, si una celda contiene D1 entonces ninguna otra celda debe contener D1.

A causa de que hay letras y dígitos y combinaciones de ambos a considerar, estos sudokus funcionan bien en el formato 4×4 o 5×5 ya que son más pequeños, aunque puede crearse de cualquier tamaño, salvo los 2×2 y 6×6, que no pueden existir (véase web 19).

7.15 Binario

Aunque en teoría este pasatiempo no puede considerarse una variante del sudoku clásico, está muy relacionado con él. Se compone de una cuadrícula 10×10 en la que únicamente pueden colocarse dos dígitos distintos, el 0 y el 1, de acuerdo con las siguientes tres reglas:

1ª) Tiene que haber el mismo número de 0 y 1 en las columnas y en las filas.

2ª) No puede haber más de dos dígitos iguales juntos o uno debajo del otro.

3ª) No pueden haber filas ni columnas, respectivamente, con la misma secuencia de dígitos (web20).

0		0		1			
					1	1	
0	0			1			
0						1	0
			1				
				1			
			1				0

Figura 27. Binario.

7.16 Sujico

Se trata de una variante del sudoku en la que se utilizan sumas. Consiste en un tablero, generalmente de 3×3 o de 5×2 casillas, en las que ya aparecen colocados algunos dígitos distintos, del 1 al 9 en el primero de los casos y del 1 al 10 en el segundo, en las que hay que colocar los restantes dígitos que faltan del 1 al 9 (o del 1 al 10), de modo que la suma total de los dígitos que se indiquen en cada cuatro casillas que rodean a un círculo coincida con el número que se sitúa en el centro de dicho círculo (web21).

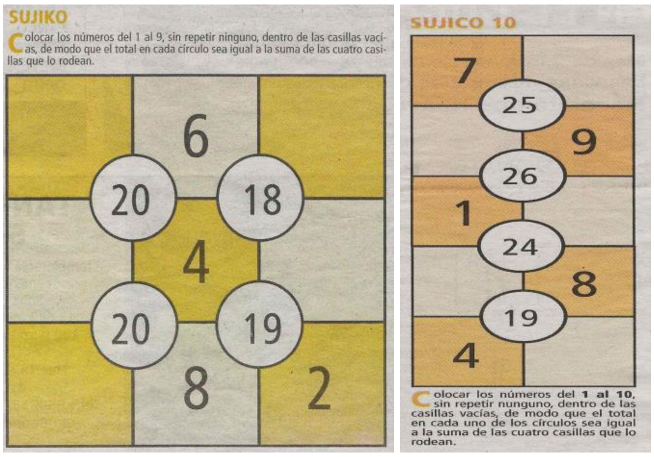


Figura 28. Dos sujicos de diferente número de casillas.

7.17 Cuboku o Sudokube

Se trata de una variante muy ingeniosa que consiste en la combinación de un sudoku con uno de los rompecabezas más populares que podemos encontrar: el cubo de Rubik (web22). El propósito de este juego es el mismo que el del cubo de Rubik pero con el objetivo adicional de resolver los sudokus que oculta (web23). Para poder resolver los 6 sudokus (uno por cada cara del cubo) que aparecen, es necesario que las caras del cubo estén ordenadas de una manera particular, de forma que todos los dígitos que aparecen en una cara miren hacia el mismo lado, lo cual sólo se consigue resolviendo el cubo de Rubik previamente a la resolución de los sudokus.

Figura29. Cuboku

Referencias

[1] FONSECA, A. *Los Mejores Sudokus: 200 Enigmas Orientales*, Editorial Aguilar, 2005.

[2] MC GUIRE, G., TUGEMANN, B., CIVARIO, G. *"There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem".* arXiv: *1201.0749.*

[web1] http://www.sudokumania.com.ar/juegos

[web2] http://www.microsiervos.com/archivo/puzzles-y-rubik/variantes-sudokus.html METODOS RESOLUCION

[web3] http://www.playsudoku.biz/forcing-chains.aspx Cadenas forzadas

[web4] http://www.sudokuwiki.org/sword_fish_strategy

[web5] https://www.brainbashers.com/sudokuxwing.asp

[web6] http://www.angelfire.com/games6/sudoku/samurai.html

[web7] http://www.easton.me.uk/sudoku/sizes.php

[web8] http://www.sudokumania.com.ar/imagenes/jugar-juuni?size=_original

[web9] http://www.puzzle-magazine.com/childrens-killer-sudoku-magazine.php

[web10] http://www.trysudoku.com/sudoku-x/10

[web11] http://www.dailysudoku.com/sudoku/examples.shtml

[web12] http://www.puzzlephil.com/puzzles/samuraisudoku/de/

[web13] http://penguinpoet.blogspot.com.es/2007/12/samurai-x-sudoku.html

[web14] http://tiosendene.blog.com/2014/03/02/download-solving-windoku/

[web15] http://www.sudoku-online.org/megasudoku

[web16] http://www.sudokumania.com.ar/juegos/hachi

[web17] http://www.sudokumania.com.ar/juegos/roku

[web18] http://www.sudokumania.com.ar/juegos/kid

[web19] http://www.clarity-media.co.uk/abcdoku.php

[web20] http://androjuegos.com/binary-sudoku-un-juego-de-sudokus-pero-con-0-y-1/

[web21] http://pasatiemposmatematicosdelaprensa.blogspot.com.es/2014/11/pmp-suko-sujiko-y-sujico-10.html

[web22] http://www.rubikaz.com/resolucion.php

[web23] https://es.wikipedia.org/wiki/Cuboku

Sobre los autores:

Nombre: Alberto Becerra Tomé
Correo Electrónico: alberto.becerra.tome@ gmail.com
Institución: Dpto. de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

Nombre: Juan Núñez Valdés
Correo Electrónico: jnvaldes@ us.es
Institución: Dpto. de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

Nombre: José María Perea González
Correo Electrónico: jmariamanfre@ono.com
Institución: Dpto. de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.