Cuentos Matemáticos

La postal de Dido

Dido's postcard

Franco Bagnoli

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VII, Número 1, pp. 193–198, ISSN 2174-0410
Recepción: 23 Abr'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

Resumen

Dido resolvió el primer problema isoperimétrico de la historia, cortando una piel de toro, anudando las tiras y rodeando una porción de tierra donde construir Cartago. Pero su resultado puede mejorarse, y se puede demostrar cortando una postal de tal manera que sea posible que una persona pase a su través.

Palabras Clave: Dido, problema isoperimétrico, postal

Abstract

Dido solved the first isoperimetric problem of the history, cutting an oxhide in strips, tying them and surrounding with the resulting rope the portion of land where Cartago was to be built. However, her exploit can be improved, and one can show how by cutting a postcard in such a way that a person is able to pass through it.

Keywords: Dido, isoperimetric problem, postcard

El problema de Dido [1] es un clásico de las matemáticas, e incluso de la literatura y de la historia, dado que de acuerdo con Virgilio [2] Dido se suicidó después de haber sido abandonada por Eneas y a este hecho se remonta el enfrentamiento entre los romanos y los cartagineses.

La princesa Dido huyó con algunos fieles de su ciudad natal, Tiro, tras descubrir que el rey Pigmalión (su hermano, nada que ver con el escultor griego del mismo nombre) había matado a su marido. Después de un largo viaje aterrizó en la costa norte de África (Libia). Allí se encontró con el rey Iarba para comprar una parcela de terreno sobre la que construir una nueva ciudad. El rey, en respuesta, le dijo que podría tomar tanta tierra como pudiera encerrar en la piel de un toro. Virgilio no describe cómo Dido resolvió el problema.

Sin embargo, la tradición dice que la princesa, sin perder el ánimo, ideó una estratagema astuta para abarcar la mayor extensión de terreno posible. Dido ordenó que se cortara la piel en tiras finas, que después uniría por los extremos para formar una cuerda larga.

Con esta cuerda, la princesa rodeó una colina (sobre la cual construir la fortaleza), colocando los extremos de la cuerda en el mar. También parece que Dido descubrió que poniendo la cuerda en la forma de un semicírculo (o de un arco de círculo si la costa no es plana) se abarcaba la mayor superficie posible.

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Figura 1

El problema de Dido en matemáticas consiste en encontrar la figura que tiene la mayor área de una superficie dado su perímetro, en el plano (la solución es un círculo) o en un semiplano (un semicírculo).

Aunque el problema puede parecer trivial, su solución requiere el conocimiento del cálculo de las variaciones [3] y conlleva una cierta complejidad técnica.

Ahora vamos a examinar el problema a través de los ojos de un físico. En primer lugar, podemos decir que la mejor manera de rodear la tierra con un perímetro determinado (la cuerda hecha de la piel), sin contar las costas, es... encontrar una península separada por un istmo de ancho igual al largo de la cuerda disponible. Así que no hay límite a la tierra que se puede abarcar. Por otra parte, no vivimos en un plano, sino en la Tierra, que es similar a una esfera. Si dibujamos una curva cerrada en una esfera, no está claro lo que es "interior" y lo que es "exterior". ¡Dido podría haber pedido toda la Tierra excepto la porción rodeada por su cuerda! Pero es probable que Iarba no estuviese de acuerdo.

El otro elemento muy importante en el que nadie se detiene es: ¿cuán larga puede ser una cuerda hecha de la piel de un toro?

Si aplicamos las leyes de la física, la cuerda más larga (dada una cierta masa) se puede hacer con una cadena polimérica, tipo un hidrocarburo o, también, una cadena de ADN o un microtúbulo proteínico o un nanotúbulo de carbono. Pero dudo que hace 3000 años la tecnología fuese capaz de convertir de este modo una piel de toro, por no mencionar que estos filamentos son invisibles y extremadamente frágiles.

Suponemos entonces que hay que cortar la piel sin hacer transformaciones físicas o químicas. Para simplificar, digamos que la piel cubre 1 metro cuadrado (probablemente será tres o cuatro, pero solo cambia un factor), que es perfectamente bidimensional (aunque en realidad tiene un cierto espesor) y que se puede cortar al máximo en tiras gruesas de 1 milímetro (empresa no trivial). Se obtienen así 1.000 metros de cuerda, que, sin embargo, aun debe ser anudada (¡1000 nudos!).

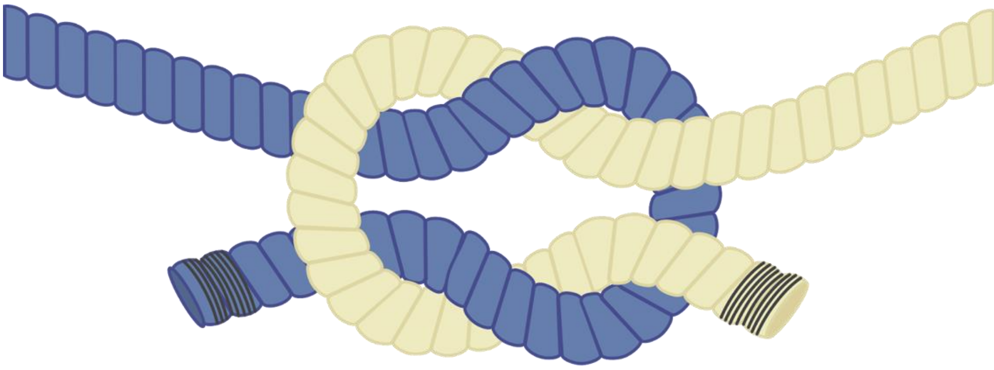

Figura 2

Usando simples nudos planos [4], he estimado que cada nudo "consuma" un trozo de hilo largo de más o menos 10 veces su diámetro. Por lo que se pierden en total 10 metros de cuerda, que no parece mucho, pero consideramos que con 1.000 metros de cuerda solamente se rodea un círculo de unos 160 metros de radio.

¿Podríamos ahorrarnos los nudos? Sí, cambiando la manera de cortar la piel de toro. Para demostrar esto de una manera práctica, desafiamos a unos amigos a pasar a través de una puerta dibujada en una pequeña hoja de papel.

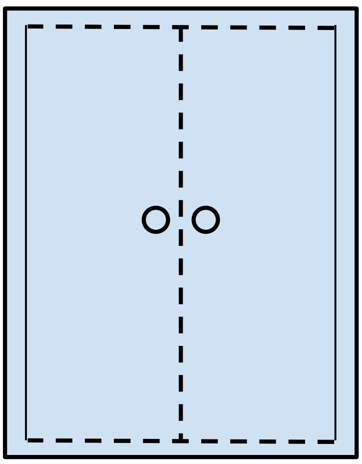

Figura 3

Dibujamos en 1/4 de una hoja A4 una puerta doble. Doblamos el papel por la mitad y cortamos a lo largo de las líneas de puntos (no cortar completamente a lo largo del pliegue, se deben dejar las dos extremidades intactas).

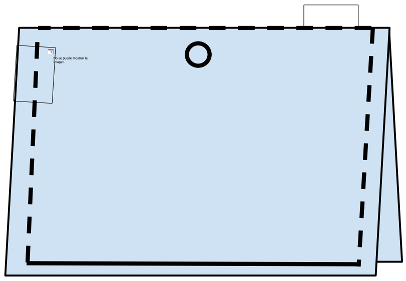

Figura 4

Desdoblando la hoja, la puerta ahora se puede abrir, pero será imposible pasar.

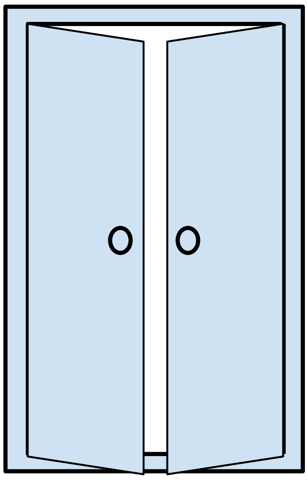

Figura 5

En este punto tenemos que doblar la hoja de nuevo y hacer más cortes de acuerdo con las nuevas líneas de puntos en la figura (las líneas parten de forma alternativa de la flexión y desde el borde).

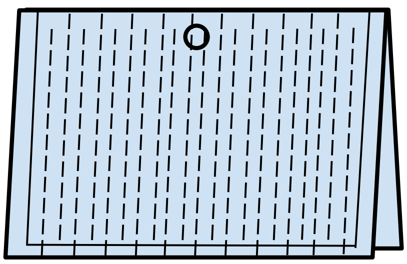

Figura 6

Esta vez la puerta se abrirá en forma de zig-zag y puede expandirse lo suficiente para pasar a través de ella.

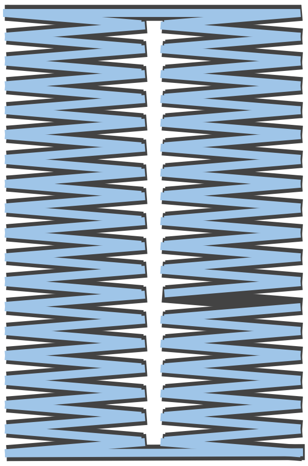

Figura 7

Acerca de alargar o acortar una cuerda: supongamos que tenemos una cuerda o una correa de 44.000 kilómetros de largo, es decir, la circunferencia de la Tierra, y que la hemos puesta alrededor del ecuador. Entonces alargamos la correa 1 metro, siempre manteniendo su forma circular. ¿Cuánto va a levantarse de la superficie de la Tierra?, ¿1 micra?, ¿1 mm?, ¿más?, ¿menos?

La relación entre la longitud de la circunferencia, C, y el radio, R, es $C = 2\ \pi\ R$ o $R = C\ /\ 2\ \pi$. Aumentando C 1 m, R se incrementa por 1 / 6,28 m o aproximadamente ¡16 cm! Dido, ahorrándose los nudos, podría haber ganado otro metro y medio de radio (para un círculo).

Agradecimientos Gracias a Rosa M. Herrera por su graciosa adaptación de mi "itañol" a un español correcto.

Referencias

[1] THOMSON, Sir William (Barón Kelvin), Popular Lectures and Addresses, Vol. II Geology and General Phisics, Nature Series MacMillan and Co. (London) 1894; http://math.arizona.edu/~dido/lord-kelvin1894.html http://www.math.uiuc.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf

[2] VIRGILIO, Eneida, Libro I, versos 365-369.

[3] https://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Reef_knot

Sobre el autor:
Nombre: Franco Bagnoli
Correo Electrónico: franco.bagnoli@unifi.it
Institución: Dpto. Física y Astronomía y CSDC, Universidad de Florencia (Italia). También INFN, sez. Firenze