Investigación

Toma de decisiones y el Lema de Sperner

Decision making and the Sperner's Lemma

Susana Merchán Rubira y José Samuel Rodríguez García

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 2, pp. 069–080, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Jun'18; Aceptación: 26 Jul'18

1 de octubre de 2018

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar aplicaciones de un resultado de matemática discreta. De esta forma, se pretende poner en práctica un resultado puramente técnico a una aplicación real. A lo largo del artículo se enuncia y se muestra una sencilla e intuitiva demostración del Lema de Sperner. La cantidad de aplicaciones en las que se puede usar este Lema es amplia y en este artículo nos centraremos en un ejemplo en el que se profundizará con datos reales. Además, se sentarán las bases para generalizar a más casos de la vida real y empresarial en los que este Lema puede utilizarse, reflejando así la versatilidad y potencial de este resultado matemático. La aplicación en la que nos centramos está relacionada con el reparto de habitaciones y la partición del coste total del alquiler en una casa, es decir, la división justa de la renta. A través del Lema de Sperner, se hallará de manera objetiva una solución al problema (la solución óptima dadas las circunstancias) a partir de los propios criterios de los inquilinos.

Palabras Clave: Lema de Sperner, matemática discreta, optimización, división de la renta, distribución de tareas, toma de decisiones, democratización.

Abstract

The main goal of this work is to show some applications of a discrete mathematics result. Through this paper a simple and intuitive proof of Sperner's Lemma is given. There are many different applications of this result; however, we are going to focus in a real experience of a concrete case. Moreover, we will set the bases in order to extend the use of this Lemma to other fields, as can be business management.

The example that we are analyzing in this paper involves fair rent division. In particular, how to assign prices to rooms and those to tenants with a fix rent price. Using Sperner's Lemma, we will find an objective solution based in the criteria of the tenants without negotiation involved.

Keywords: Sperner's Lemma, discrete mathematics, optimization, rent division, tasks allocation, decision-making, democratization.

1. Introducción

Los resultados matemáticos más potentes y profundos en muchas ocasiones son ignorados por la amplia mayoría de la sociedad, e incluso por los especialistas técnicos. Aunque éstos sí usan las matemáticas en su día a día, rara vez encuentran nuevas aplicaciones de los resultados ya conocidos.

De igual manera, muchos de los investigadores en matemática pura no consideran otra dimensión que la teórica y no extrapolan sus resultados a la puesta en práctica.

Esto, en ocasiones, ha supuesto una importante brecha entre los teóricos de las matemáticas y sus más activos "usuarios" prácticos (ingenieros, diseñadores, …).

Es indiscutible la enorme aportación de Leonard Euler tanto a la matemática teórica, como al desarrollo de las matemáticas aplicadas a ingeniería, las turbomáquinas,… De hecho, el primer trabajo por el que Euler fue reconocido fue acerca de la optimización de las velas de un velero.

Él mismo tuvo que enfrentarse a las críticas que recibió debido a la cantidad de tiempo que dedicaba a trabajos exclusivamente teóricos cuya aplicación parecía imposible, en particular, en teoría de números. La respuesta de Euler señalaba que sólo era cuestión de tiempo que se encontraran las aplicaciones a sus estudios teóricos, pues sus resultados estaban cargados de futuro.

Tres siglos después, la Historia dio la razón a Euler cuando sus resultados en teoría de números se convirtieron en fundamentales en el desarrollo de la criptografía.

La motivación de este artículo es la de recortar esta distancia entre la teoría matemática y sus aplicaciones prácticas modelizando un caso real donde un resultado de matemática discreta, el Lema de Sperner, se convierte en la llave fundamental que nos asegura la existencia de al menos una solución.

El principal interés es que esta solución se determina en base a las prioridades de varios sujetos, atendiendo a todos ellos y sin la necesidad de negociación, puede considerarse que el Lema de Sperner se convierte en un mecanismo valioso en la aproximación a la toma de decisiones objetiva.

Esta es una herramienta que no está limitada al caso principal que se propone en este artículo. Nuestra intención es la de ampliar el espectro de uso y dar al lector las herramientas y condiciones necesarias para extrapolar su aplicación a otros problemas de la realidad.

La obra de Francis Su sobre la división justa y, en particular, su artículo [7] son una pieza clave para este trabajo. Además, este artículo ha sido posible gracias al excelso trabajo realizado por distintos divulgadores científicos que nos permitieron conocer esta aplicación del Lema, entre ellos destacamos: Mathologer ([4]) y PBS: Infinite Series ([5]).

2. El Lema de Sperner

El Lema de Sperner es el análogo discreto del teorema del punto fijo de Brouwer, al que es equivalente, ver detalles en [2].

A continuación, vamos a enunciar el Lema de Sperner en el plano.

Lema de Sperner en el plano:

Dado un triángulo T subdividido en una cantidad arbitraria de subtriángulos, diremos que tiene una *coloración de Sperner* si los tres vértices de T (T_1, T_2 y T_3) son de tres colores distintos y todos los nodos que se encuentran en un lado comparten color con uno de sus dos vértices. El resto de nodos que conforman los vértices de los subtriángulos de T pueden tener cualquiera de los 3 colores.

Entonces, existe al menos un subtriángulo de T que tiene los tres vértices de colores distintos. En particular, el número de subtriángulos que cumplen esta característica es impar.

Demostración

Dado el triángulo T con la coloración de Sperner, sin pérdida de generalidad, elegimos dos de los tres colores (C_1 y C_2). El lado que une los vértices con estos dos colores (T_1-T_2) contendrá n nodos cuya coloración sólo puede ser C_1 o C_2.

Definimos como "portales" a los segmentos cuyos extremos sean C_1-C_2 ó C_2-C_1. Entonces el lado T_1-T_2 contiene un número impar de portales. Vamos a probarlo por inducción sobre los n nodos entre T_1 y T_2:

- *Caso n=1. El único nodo interior tendrá la coloración C_1 ó C_2, sin pérdida de generalidad, vamos a considerar que es C_2. El segmento que une ese nodo con el vértice de T que está coloreado con C_1 será el único portal en esa arista.*
- *Supongamos que es cierto para n. Veamos qué ocurre para el caso n+1. Esto es, incluir un nodo más en la arista T_1-T_2. Este nuevo nodo se ubicará en un subsegmento pudiendo ser éste un portal o no.*
  En el caso de que ese subsegmento no sea un portal, esto es, los extremos (nodos) sean del mismo color, si el nodo nuevo es de ese mismo color no se añade ningún portal nuevo. En el caso contrario, generará dos portales nuevos. En ambos casos se mantendrá la paridad para los n nodos (impar).
  Si el subsegmento es un portal, esto es, los extremos son de diferente color, al añadir un nodo de cualquiera de los dos colores, dividirá el subsegmento en dos, de forma que una mitad será un portal y la otra no. En cualquier caso, se mantendrá el número de portales.

Todo subtriángulo de T tendrá 0, 1 ó 2 portales. Si tiene 0 portales diremos que es "innacesible", si tiene 2 diremos que es "de paso" y si tiene 1 que es "final".

Todo subtriángulo "final" tiene sus tres vértices de colores distintos, ya que, al tener un portal, tiene dos vértices C_1, C_2 y el tercero, necesariamente, es C_3.

Cada portal del lado T_1-T_2 es lado de un triángulo de paso o final. Si es de paso, su otro portal da acceso a un nuevo triángulo que también será de paso o final. Esta cadena termina o bien en un triángulo final o saliendo por otro portal distinto de la arista T_1-T_2. En este último caso, se tendría un *número par de portales que no llevan a un triángulo final. Por lo tanto, como en el lado T_1-T_2 hay un número impar de portales, el número de triángulos finales en T es impar como queríamos demostrar, pues, de existir triángulos finales aislados (esto es, que no estén conectados mediante una cadena de portales al lado T_1-T_2) siempre habrá una cantidad par de ellos.*

Comprobemos esta última afirmación: Supongamos que existe un triángulo final aislado (Δ_0). Por ser final, tiene un portal, que compartirá con el triángulo adyacente por ese portal (Δ_1). Como Δ_1 tiene un portal es de paso o final, si es final la cadena está cerrada por dos triángulos aislados y el número de ellos en la cadena es par. Si por el contrario Δ_1 es de paso, su segundo portal nos conducirá a un nuevo triángulo Δ_2, que de nuevo puede ser de paso o final, donde repetimos el razonamiento aplicado previamente, si Δ_2 es final, hemos acabado, si por el contrario es de paso, iteramos de nuevo. Dado que el número de subtriángulos es finito, esta cadena debe acabar, o bien en un triángulo final aislado o bien en el lado T_1-T_2, lo que entraría en contradicción con que el triángulo inicial Δ_0 es aislado. Por tanto, los triángulos finales aislados están emparejados y su número es par.

Este resultado puede generalizarse para k dimensiones sustituyendo triángulos por *símplices k-dimensionales*. El enunciado y la demostración de este Lema puede encontrarse en la literatura, en concreto, proponemos las siguientes referencias: [3] y [6].

3. Aplicaciones

En esta sección vamos a presentar un ejemplo práctico y real en el cual este Lema nos otorga una solución en las condiciones deseadas. Además, veremos qué requisitos son necesarios para poder aplicar este resultado.

3.1. División justa de la renta

A continuación, vamos a mostrar un uso concreto del Lema de Sperner a través del ejemplo de la división justa de la renta visto con detalle en [6]. Además, vamos a aportar dos casos reales en los que la división justa se ha llevado a cabo.

En ambos casos se pretendía encontrar la solución al problema de la repartición de habitaciones en una casa de alquiler teniendo un precio fijo de alquiler por todo el inmueble. En los dos ejemplos, hay tres inquilinos que, a través de sus criterios para escoger habitación y ponerle un precio en cada caso, conforman los datos necesarios para poner en práctica el resultado matemático.

Veamos el proceso de búsqueda de solución, paso a paso. Para ello comenzamos con un triángulo T definido en el plano X+Y+Z=1 y con sus tres vértices en los puntos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1). Todos los puntos del triángulo y su interior tendrán las tres coordenadas (x,y,z) positivas o nulas y tal que x+y+z=1. A continuación, se subdivide el triángulo en un número determinado de subtriángulos. En ambos ejemplos hemos comenzado dividiendo cada lado en 10 segmentos, lo que genera 100 subtriángulos equiláteros iguales, como se muestra en la siguiente ilustración:

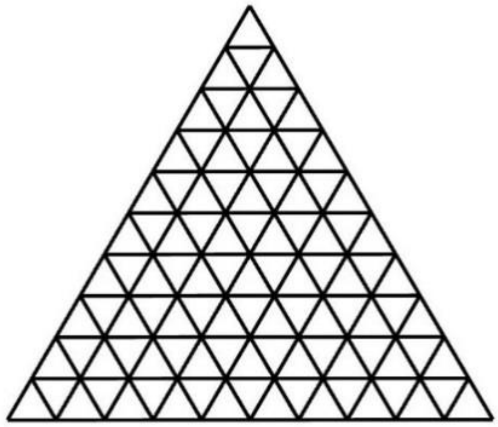

Figura I: Triángulo base subdividido.

El siguiente paso consiste en distribuir los nodos (66 en este caso) en tres categorías (○,✡ y ✧) que corresponderán a los tres electores, de manera que todos los subtriángulos tengan cada vértice de una categoría distinta.

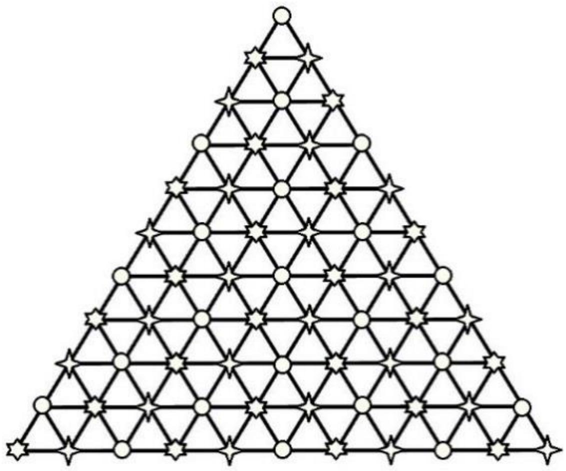

Figura II: Triángulo equilibrado con nodos en tres categorías.

Sobre esta base construiremos una coloración de Sperner que vendrá determinada por las elecciones de los tres electores. Para ello, cada elector elegirá en cada uno de sus nodos (los de su categoría) cuál es su opción favorita dentro de las opciones de ese nodo. Veamos esto más en detalle.

Cada uno de los nodos corresponde a una partición de la unidad (1=x+y+z, donde (x,y,z) son las coordenadas de ese nodo), que indicarían la proporción de renta que correspondería a cada habitación, lo que nos genera la siguiente tabla:

Tabla I: Tabla de nodos y sus particiones por categorías.

○	H1	H2	H3	✧	H1	H2	H3	✡	H1	H2	H3
	0	0	1		0	0,1	0,9		0	0,2	0,8
	0	0,3	0,7		0	0,4	0,6		0	0,5	0,5
	0	0,6	0,4		0	0,7	0,3		0	0,8	0,2
	0	0,9	0,1		0	1	0		0,1	0	0,9
	0,1	0,1	0,8		0,1	0,2	0,7		0,1	0,3	0,6
	0,1	0,4	0,5		0,1	0,5	0,4		0,1	0,6	0,3
	0,1	0,7	0,2		0,1	0,8	0,1		0,1	0,9	0
	0,2	0,2	0,6		0,2	0	0,8		0,2	0,1	0,7
	0,2	0,5	0,3		0,2	0,3	0,5		0,2	0,4	0,4
	0,2	0,8	0		0,2	0,6	0,2		0,2	0,7	0,1
	0,3	0	0,7		0,3	0,1	0,6		0,3	0,2	0,5
	0,3	0,3	0,4		0,3	0,4	0,3		0,3	0,5	0,2
	0,3	0,6	0,1		0,3	0,7	0		0,4	0	0,6
	0,4	0,1	0,5		0,4	0,2	0,4		0,4	0,3	0,3
	0,4	0,4	0,2		0,4	0,5	0,1		0,4	0,6	0
	0,5	0,2	0,3		0,5	0	0,5		0,5	0,1	0,4
	0,5	0,5	0		0,5	0,3	0,2		0,5	0,4	0,1
	0,6	0	0,4		0,6	0,1	0,3		0,6	0,2	0,2
	0,6	0,3	0,1		0,6	0,4	0		0,7	0	0,3
	0,7	0,1	0,2		0,7	0,2	0,1		0,7	0,3	0
	0,8	0,2	0		0,8	0	0,2		0,8	0,1	0,1
	0,9	0	0,1		0,9	0,1	0		1	0	0

No obstante, estas particiones de la unidad son demasiado extremas e incluyen muchos casos irrelevantes. Para que se cumplan las hipótesis del Lema, es necesario que tanto los vértices como los nodos de los lados del triángulo principal conformen una coloración de Sperner. Esto es:

- (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1), deben tener distinta coloración, C_2, C_3 y C_1 respectivamente (o C_3, C_1 y C_2).
- Todos los nodos pertenecientes al lado que une (1,0,0) con (0,1,0) serán de un color distinto a C_1 (o C_2).
- Todos los nodos pertenecientes al lado que une (1,0,0) con (0,0,1) serán de un color distinto a C_3 (o C_1).
- Todos los nodos pertenecientes al lado que une (0,1,0) con (0,0,1) serán de un color distinto a C_2 (o C_3).

Y, por lo tanto, solo se dará a elegir a los electores entre las opciones que corresponden a dichos colores.

En el desarrollo práctico que se muestra, se hizo una transformación lineal para ajustar las opciones con más precisión. Dadas las circunstancias, se asumió que nadie pagaría ni menos de una cuarta parte ni más de la mitad de la renta total. Por lo tanto, se hicieron dos transformaciones, la reparametrización: $[0,1] \rightarrow \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ y el escalamiento al precio total del alquiler (1300€) y se numeraron los nodos para mayor claridad. Además, se descartaron las opciones previamente indicadas:

Tabla II: Tabla reparametrizada y numerada.

○	H1	H2	H3	✧	H1	H2	H3	✡	H1	H2	H3
1	~~325~~	325	~~650~~	**23**	325	357,5	~~617,5~~	**45**	325	390	~~585~~
2	325	422,5	~~552,5~~	**24**	325	455	~~520~~	**46**	325	487,5	~~487,5~~
3	325	520	~~455~~	**25**	325	552,5	~~422,5~~	**47**	325	585	~~390~~
4	325	617,5	~~357,5~~	**26**	325	~~650~~	~~325~~	**48**	~~357,5~~	325	617,5
5	357,5	357,5	585	**27**	357,5	390	552,5	**49**	357,5	422,5	520
6	357,5	455	487,5	**28**	357,5	487,5	455	**50**	357,5	520	422,5
7	357,5	552,5	390	**29**	357,5	585	357,5	**51**	357,5	~~617,5~~	325
8	390	390	520	**30**	~~390~~	325	585	**52**	390	357,5	552,5
9	390	487,5	422,5	**31**	390	422,5	487,5	**53**	390	455	455
10	390	~~585~~	325	**32**	390	520	390	**54**	390	552,5	357,5
11	~~422,5~~	325	552,5	**33**	422,5	357,5	520	**55**	422,5	390	487,5
12	422,5	422,5	455	**34**	422,5	455	422,5	**56**	422,5	487,5	390
13	422,5	520	357,5	**35**	422,5	~~552,5~~	325	**57**	~~455~~	325	520
14	455	357,5	487,5	**36**	455	390	455	**58**	455	422,5	422,5
15	455	455	390	**37**	455	487,5	357,5	**59**	455	~~520~~	325
16	487,5	390	422,5	**38**	~~487,5~~	325	487,5	**60**	487,5	357,5	455
17	487,5	~~487,5~~	325	**39**	487,5	422,5	390	**61**	487,5	455	357,5
18	~~520~~	325	455	**40**	520	357,5	422,5	**62**	520	390	390
19	520	422,5	357,5	**41**	520	~~455~~	325	**63**	~~552,5~~	325	422,5
20	552,5	357,5	390	**42**	552,5	390	357,5	**64**	552,5	~~422,5~~	325
21	585	~~390~~	325	**43**	~~585~~	325	390	**65**	585	357,5	357,5
22	~~617,5~~	325	357,5	**44**	617,5	~~357,5~~	325	**66**	~~650~~	~~325~~	325

La tabla anterior se corresponde con la siguiente figura:

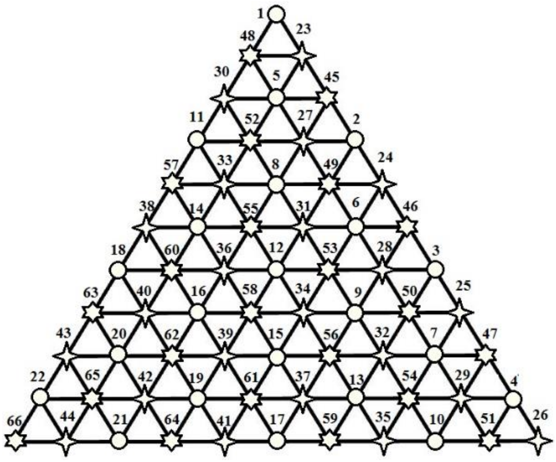

Figura III: Triángulo con nodos numerados.

A continuación, cada elector selecciona su opción favorita en cada uno de los nodos de su categoría, y éste se colorea con la coloración correspondiente a la habitación elegida siguiendo la siguiente correspondencia:

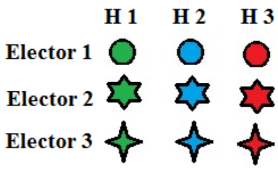

Figura IV: Coloraciones de las habitaciones

Obteniendo:

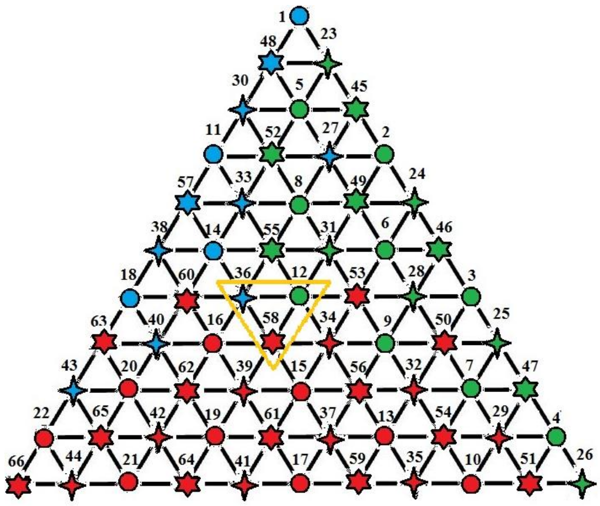

Figura V: Solución.

En relación a la solución, el Lema nos asegura que existe al menos un triángulo *final*, pero, aún hay que interpretarlo, pues el triángulo viene definido por sus tres nodos:

Tabla III: Información del triángulo solución.

Nodo	H 1	H 2	H 3
12	422,5	422,5	455
36	455	390	455
58	455	422,5	422,5
Media	**444,17**	**411,67**	**444,17**

Como se puede observar, se tiene que cada elector ha seleccionado una habitación distinta, pero los precios de cada distribución (nodo) no son iguales. Una posible solución es realizar el promedio de los tres nodos (que coincidirá con el baricentro del triángulo solución).

Otra solución más precisa consiste en tomar el subtriángulo solución como triángulo inicial (esto es, sus nodos serán (x, y, z) con $x, y, z \in [0,1]$ y tal que $x + y + z = 1$, a través de las transformaciones lineales que sean precisas) e iterar el proceso desde el principio, dependiendo del problema a tratar, con una sola iteración podría ser suficiente para llegar a la solución o se puede iterar tantas veces como sea necesario hasta aproximarse a un límite. Sin embargo, en este caso se consideró conveniente redondear (445 / 410 / 445).

3.2. Generalización

Como hemos visto en el ejemplo de la división justa de la renta, para poder aplicar el Lema de Sperner necesitamos las siguientes hipótesis:

- k+1 electores: $X_1,\ldots, X_{(k+1)}$
- k+1 elegibles: $Y_1,\ldots, Y_{(k+1)}$
- Una constante K que vendrá determinada por las condiciones del problema.

De esta manera, el Lema de Sperner nos devolverá:

- Una biyección entre los electores y los elegibles.
- Una distribución de P_i que estarán asociados a cada par (X, Y) de la biyección anterior y tal que $K=P_1+\ldots+P_{(k+1)}$.

Los electores son sujetos independientes, con criterios propios y activos en el proceso de selección. Los elegibles son elementos pasivos a los que se les debe asignar un valor o un peso que depende de los criterios de los electores. La constante K vendrá determinada por las condiciones particulares del problema y la solución se compondrá por la biyección y los pesos (P_i) asociados.

Veamos un ejemplo de gestión de organización, esencialmente distinto al de la renta:

Supongamos que se cuenta con un presupuesto K para contratar a un número k+1 de trabajadores que deben ocupar k+1 turnos de trabajo. El objetivo es encontrar una distribución de salarios y turnos teniendo en cuenta las prioridades y criterios de los k+1 trabajadores.

En particular, podría considerarse el problema para tres trabajadores en una empresa de seguridad que tienen que cubrir las 24 horas en tres turnos de 8 horas. La empresa ha destinado K miles de euros para pagar a estos tres trabajadores. El sueldo por el que cada trabajador haría cada turno queda al criterio de cada uno. El Lema de Sperner proporcionará una solución compuesta por selecciones aceptadas por cada uno de los trabajadores.

4. Discusión

En esta sección vamos a reflexionar sobre la aplicación de este resultado teórico, las limitaciones que surgen con su puesta en práctica, así como el potencial que puede desarrollar.

Vamos a profundizar más en el caso de la renta, que es para el que lo hemos aplicado en una experiencia real. Aquí se ha mostrado solamente una de las tres hipótesis que se consideraron. Esto se debe a que el domicilio sobre el que se estaba aplicando contaba con cuatro habitaciones, donde la elección del salón no estaba definida *a priori*, lo que abría tres posibles caminos puesto que una de las habitaciones se descartó como salón. La modelización mostrada fue la misma para los tres casos y por ello solo se han mostrado los datos de una de ellas.

En esta puesta en práctica nos hemos dado cuenta de que el Lema de Sperner ha ayudado a descartar dos de esas tres hipótesis (caso I y caso III en la figura VI) al devolver soluciones mucho menos atractivas para los implicados que la del caso II. A continuación, se muestran los tres grafos de las tres hipótesis que se consideraron (se descartó que el salón fuera la habitación amarilla) con las respectivas soluciones señaladas.

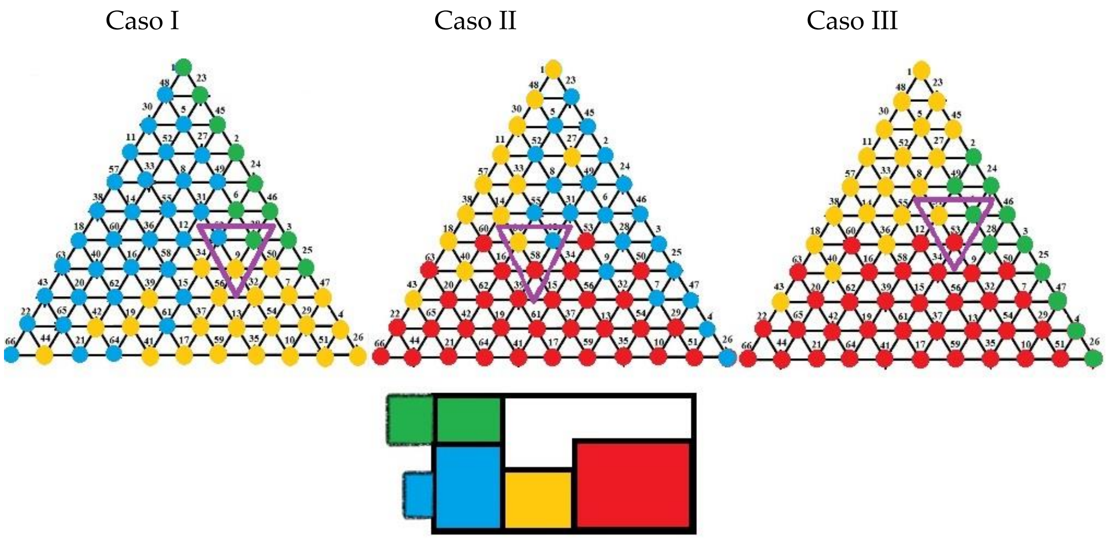

Figura VI: Soluciones de las tres hipótesis del caso práctico junto a un boceto de la casa.

La experiencia práctica indica que, aunque exista una solución teórica, esta puede ser insatisfactoria, pues si bien las tres hipótesis tienen solución, en los dos casos en los que la habitación verde entra en juego, esta es muy poco valorada. Esto lleva a una distribución muy desequilibrada que no satisfacía a ninguno de los electores. En la Figura VI se puede observar que el caso II (aquel que no considera la habitación verde como elegible) es el que tiene el subtriángulo solución más centrado, lo que se traduce en una distribución más equilibrada. El hecho de que al obtener una solución esta no sea aceptada por los interesados puede estar indicando que no hay una solución factible, es decir, el lema nos asegura que existirá una solución incluso cuando no haya ninguna que satisfaga a todos los electores.

Además, la propia coloración del grafo, en base a las selecciones de los electores, ofrece información sobre preferencias, prioridades y criterios en relación a los elegibles. Podemos observar, por ejemplo, cómo las habitaciones roja y azul son claramente dominantes si la otra no está disponible, así como la habitación verde es completamente indeseable. Lo interesante de esta información es que está creada a través de la opinión independiente de los electores, e integra los criterios particulares sin la necesidad de negociaciones.

Este último punto es clave en su potencial aplicación a la gestión de organizaciones. La posibilidad de obtener propuestas de soluciones ante problemas que afectan a distintos sujetos, teniendo en cuenta los criterios de todos y cada uno, pero excluyendo la negociación, tiene la capacidad de reducir los tiempos de decisión, así como los costes derivados de dicha gestión o la arbitrariedad que se puede desprender de las decisiones tomadas por un comité o un individuo.

Referencias

[1] ALKAN, A., DEMANGE, G., and GALE D. *Fair allocation of indivisible goods and criteria of justice*. Econometrica 59 (1991) 1023-1039.

[2] ALONSO LORENZO, A. *La topología de los problemas de división: Reparto libre de envidia y división consensuada*. Trabajo de fin de grado, junio 2016. Departamento de geometría y topología facultad de ciencias matemáticas, UCM. Dirigido por Jesús M. Ruiz.

[3] KNASTER, B., KURATOWSKI, C., MAZURKIEWICZ, S. *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*. Fund. Math. 14 (1929) 132-137.

[4] MATHOLOGER. NYT: *Sperner's lemma defeats the rental harmony problem* [Vídeo YouTube]. https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME&t=5s, 2017.

[5] PBS: INFINITE SERIES. *Splitting Rent with Triangles | Infinite Series* [Vídeo YouTube]. https://www.youtube.com/watch?v=48oBEvpdYSE&t=700s, 2017.

[6] SPERNER, E. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 6, (1928) 265-272.

[7] SU, F.E. *Rental Harmony: Sperner's Lemma in fair division*. Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 930-942.

Sobre los autores:

Nombre: Susana Merchán Rubira
Correo Electrónico: susana.merchan1@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Samuel Rodríguez García
Correo Electrónico: jsamuelrg@gmail.com
Institución: Kensington School.