Historias de Matemáticas

Teoría de Números: De Ciencia pura a Ciencia aplicada

Number Theory: From pure science to applied science

Jaime J. Gutiérrez G.

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 057–066, ISSN 2174-0410
Recepción: 28 Ago'17; Aceptación: 31 Ene'18

1 de abril de 2018

Resumen

El objetivo de este artículo de divulgación es presentar una reseña histórica de la evolución de la Teoría de Números y de su importancia actual para la Matemática y las Ciencias. Está dirigido a una amplia audiencia; en el caso de los matemáticos expertos esperamos que la información brindada sirva como un complemento a la formalidad: teorema - prueba y en el caso de los científicos una ilustración de la fascinación humana por los números.

Palabras Clave: Aplicaciones de la Teoría de Números, Historia de la Teoría de Números.

Abstract

The objective of this divulgation paper is to present a historical overview of the evolution of Number Theory and its current importance for Mathematics and Science. It is directed at a wide audience; in the case of the mathematical experts we hope that the information provided serves as a complement to the formality: theorem - proof and in the case of the scientis an illustration of human fascination with numbers.

Keywords: Applications of Number Theory, History of Number Theory.

1. Introducción

La utilidad de la Matemática se ha convertido en una exigencia social. Para muchos la Matemática sin aplicación es pérdida de tiempo. Sin embargo, un vistazo a la evolución de la Matemática deja en evidencia que la interrelación de ésta con las Ciencias no es tan simple como: Matemática creada-Matemática aplicada. En muchos casos los científicos no han contado con una teoría matemática que facilite y fundamente sus logros. De igual forma, muchos resultados matemáticos permanecen en el plano teórico sin ser de utilidad alguna para el desarrollo de las Ciencias. En este contexto contrastante, hay un ejemplo fascinante: La Teoría de Números. La Aritmética o Aritmética Superior como se le conocía antiguamente a la Teoría de Números, era el paradigma de la belleza y de la pureza de la Matemática. Aunque es posible distinguir acontecimientos aislados que ilustran la aplicabilidad de la Teoría de Números, es justo reconocer que la importancia de esta disciplina como una herramienta para las Ciencias se inicia a mediados del siglo XX y que los avances informáticos y tecnológicos son un catalizador determinante para esta transformación.

2. Orígenes de la Teoría de Números

Como toda actividad humana antigua, resulta imposible establecer con certeza los orígenes de la Teoría de Números. Las fuentes históricas sólo nos permiten formular algunas conjeturas que no necesariamente cuentan con una amplia aceptación. El hueso de Ishango, peroné fósil de un babuino descubierto por Jean de Henizelin en 1960 en una zona próxima a la naciente del río Nilo, data de 20 000 años y es la pieza más antigua con información de actividad humana de la que se tiene constancia [19]. En el hueso de Ishango aparecen unas series de muescas dispuestas en columna, que son prueba del desarrollo de las nociones de número y de conteo. Una de estas columnas muestra la sucesión de números 11, 13, 17 y 19, todos números primos. Para algunos, esto es una evidencia de que el hueso de Ishango no sólo era un registro o instrumento de conteo y que para entonces el hombre ya habría desarrollado la idea de divisibilidad, concepto fundamental de la Teoría de Números.

La tablilla Plimpton 322, atribuida a la civilización babilónica, fue hallada en el desierto de Irak y se supone que fue escrita alrededor del año 1800 antes de Cristo [16, 20]. La tablilla contiene un arreglo rectangular de quince filas y cuatro columnas. Salvo algunos errores, en cada fila el cuadrado del numero en la tercera columna menos el cuadrado del número en la segunda columna es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, se puede afirmar que se trata de una lista de quince ternas pitagóricas, once de ellas correctas. Se desconoce el método empleado para la generación de estas ternas, pero dada la cantidad y la magnitud de los valores es asumible el uso de un procedimiento que implica el conocimiento de relaciones numéricas más allá de las operaciones aritméticas básicas. Recientemente [16], se ha establecido que la tablilla Plimpton 322 es una poderosa tabla trigonométrica basada en razones exactas. En su obra *Los Elementos*, Euclides establece propiedades básicas de la Teoría de divisibilidad y con esto se inicia el estudio formal de las ideas teórico-numéricas. Podemos señalar los tres siguientes resultados como los grandes logros de Euclides en Teoría de Números [1, 17].

- Describir un algoritmo para determinar el máximo común divisor de dos números dados. Proposiciones 1 y 2 del Libro VII de Los Elementos.
- Demostrar la infinitud de los números primos. Proposición 20 del Libro IX.
- Establecer condiciones suficientes para que un número par sea perfecto. Proposición 36 del Libro IX.

Diofantos es otro de los matemáticos griegos con notables logros en la Teoría de Números [18]. Su obra Aritmética es de importancia trascendental en el desarrollo de la Matemática. Para Diofantos era de particular interés determinar las soluciones enteras de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y sus aportes en este tema son el origen de la Teoría de ecuaciones diofánticas, una de las ramas de investigación más activa de la Teoría de Números. Hay evidencias de que Diofanto conocía algunos resultados que hoy son considerados clásicos en la Teoría de Números como el Teorema de los cuatro cuadrados, demostrado por Lagrange en 1770, casi 2000 años después.

3. Desarrollo de la Teoría de Números

Después de Diofanto, la Teoría de Números no registra grandes avances. Aportes de las civilizaciones orientales resultan los más notables. Tal vez, lo más importante en este contexto es el llamado Teorema chino de los restos, encontrado por primera vez en un tratado matemático del Siglo III titulado Sun Zi Suan jing(Manual matemático de Sun Zi [11]). Se supone que propiedades de las congruencias lineales fueron empleadas para la elaboración de calendarios [13]. A finales del Siglo XII, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, se convierte en el pionero de la transferencia de conocimientos e ideas de Oriente a Occidente y además revive el interés en la Teoría de Números. Aunque la famosa sucesión de Fibonacci es tema relevante tanto en el sentido teórico como práctico, podemos considerar su *Liber Quadratorum* como un hito entre Diofantos y Pierre de Fermat. En *Liber Quadratorum*, Fibonacci desarrolla métodos originales para establecer identidades que involucran suma de cuadrados y resolver, para números racionales, ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas. En efecto, el problema de encontrar un número natural n tal que $n^2 + 5$ y $n^2 - 5$ sean ambos cuadrados fue propuesto a Fibonacci por Johannes Palermo para poner a prueba su talento matemático. La consideración de este problema, y otros relacionados, motivó a Fibonacci a escribir su *Liber Quadratorum* [15]. Luego de Fibonacci,la actividad teórico-numérica conocida decrece y se retoma al inicio de la era moderna con los aportes de Pierre de Fermat quien inspirado en la Aritmética de Diofantos estableció la corriente de investigación en Teoría de Números. Sus aportes son numerosos, para destacar algunos podemos citar: El método de descenso infinito y el llamado primer Teorema de Fermat. Ha sido ampliamente difundida la historia de las anotaciones hechas por Fermat al margen de su ejemplar de Aritmética de Diofantos, a través de las cuales se conocieron sus grandes ideas y logros. En una de esas anotaciones, Fermat declara la no existencia de enteros positivos x, y y z que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$ si n es un entero mayor que 2, y asegura tener una prueba maravillosa de esta afirmación, conocida desde Euler como el Último Teorema de Fermat. No se puede asegurar la existencia de la anunciada prueba de Fermat, y la elaboración de una prueba se convirtió en uno de los problemas más atrayentes de la Matemática [22]. En el año de 1995, más de 300 años después de Fermat, la comunidad matemática reconoce a Andrew Wiles el haber demostrado el Último Teorema de Fermat [27].

A pesar de la importancia de los resultados de Fermat, la Teoría de Números no atrajo la atención de los matemáticos. Esta apatía se extendió por casi un siglo y terminó con los aportes de Euler quien, motivado por Goldbach, se interesó intensamente en los trabajos de Fermat [26]. La profundidad y belleza de los resultados teórico-numéricos de Euler captaron la atención de destacados matemáticos como Lagrange, Legendre y Gauß.

Con *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauß, la Teoría de Números, la Reina de la Matemática, como la llamó el propio Gauß, se consolidó como un área de interés en la investigación matemática relacionada con Geometría, Álgebra y Análisis. A partir de entonces, la Teoría de Números es una de las áreas más activa, pero aún portaba su hábito de pureza y se mantenía ajena al "impuro mundo de las aplicaciones" [8]. Durante el Siglo XIX, se obtienen logros trascendentes. Dirichlet en 1835 demuestra el Teorema de números primos en progresiones aritméticas. Hadamard y de la Vallée-Poussin demuestran, independientemente, el Teorema de los Números Primos que había sido conjeturado por Gaußy Legendre [12]. El Siglo XX es una época de oro para la Teoría de Números, para muchos resultados fundamentales se obtuvieron grandes avances e incluso demostraciones definitivas. Hilbert demuestra la conjetura de Waring, Vinogradov prueba que todo número impar suficientemente grande es suma de tres primos y Chen prueba que todo número par suficientemente grande es suma de dos primos o suma de un número primo y un semiprimo (producto de dos primos), dos resultados estrechamente relacionados con las Conjeturas de Goldbach. Wiles prueba parcialmente la Conjetura de Shimura-Taniyama y con esto el Último Teorema de Fermat. Para el logro de estos y otros avances fue necesario el desarrollo de nuevos enfoques y nuevas teorías, así la Teoría de Números se ramifica, profundiza sus conexiones con otras disciplinas y se consolida como un área de intensa actividad investigativa. Durante los inicios del siglo XXI se producen resultados impactantes: Agrawal, Saxena, y Kayal presentan un algoritmo de primalidad incondicional, determinístico de tiempo polinomial, Preda Mihailescu prueba la conjetura de Catalan, Green y Tao demuestran que la sucesión de números primos contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud arbitraria, Zhang demuestra que existe una constante H tal que existen infinitas parejas de números primos cuya diferencia es a lo más H, el resultado más importante relacionado con la conjetura de los primos gemelos [28] y en enero de 2014, Helfgott anuncia una prueba de la conjetura ternaria de Goldbach: "Todo número impar mayor que 5 es suma de tres números primos" [10].

4. Las aplicaciones de la Teoría de Números

G.H. Hardy, uno de los más influyentes matemáticos ingleses, se opuso firmemente al uso de la Matemática con fines militares y bélicos, se declaraba un matemático puro y señalaba como ejemplo de pureza a la Teoría de Números y a la Teoría de la Relatividad [9]. Sin embargo en los tiempos actuales, la sentencia

> *No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda algún día aplicarse a los fenómenos del mundo real*

atribuida a Lobachevski se hace evidente y ubica en un nivel anecdótico la opinión de Leonard Dickson, prominente teórico-numérico del Siglo XX, quien afirmó:

> *Gracias a Dios, la Teoría de Números no está manchada por las aplicaciones.*

Aunque resultados teórico-numéricos hayan sido efectivamente aplicados antes [5, 14], podemos aceptar que el desarrollo de la Criptografía de clave pública en los años setenta del Siglo XX marca el inicio de la Teoría de Números como Ciencia Aplicada [7]. Las transformaciones tecnológicas han afectado en gran medida las formas de comunicación humana y modificado nuestros modos de vida. Uno de los aspectos más importantes en este contexto es la protección de la información y de datos, y la Teoría de Números ha sido aplicada en Criptografía y Teoría de Codificación, herramientas fundamentales para las comunicaciones modernas. El valor práctico de la Teoría de Números no se limita a estos ámbitos, y posiblemente esta sea la concepción generalizada. En la siguiente sección nos ocupamos de esta temática.

5. Otras aplicaciones

La Teoría de Números, de forma tal vez inesperada, ha sido relacionada con otras áreas de la Matemática y las ciencias y, ha encontrado aplicaciones en áreas como Física (mecánica cuántica, estado de la materia, difracción), Biología (morfología de plantas y animales, procesos evolutivos), Química (electronegatividad, estructura atómica, iteracción covalente, quiralidad molecular), Comunicación (codificación, criptografía), Acústica (arquitectura acústica y diseño de sonares y sintetizadores de voz), Música (variaciones rítmicas y sistemas de afinación), Diseño gráfico (imágenes computarizadas) [24]. A manera de ilustración, describimos una aplicación a la acústica y su relación con la mecánica cuántica.

5.1. Raíces primitivas y Acústica

En esta sección presentamos una aplicación del concepto teórico-numérico de primitiva a la Acústica, en particular al diseño de las salas de concierto. Para un tratamiento completo de este tema ver [24]. Sean un número primo p y un entero g. Decimos que g es una raíz primitiva módulo p, o simplemente una raíz primitiva de p, si $p-1$ es el menor entero positivo tal que

$$g^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$$

En lo sucesivo, g es una raíz primitiva de p. Si a es un entero no divisible por p, entonces existe un único entero k, $0 \leq k < p$ tal que

$$a \equiv g^k (mod\, p)$$

Consideramos, la sucesión de números complejos

$$a_n = e^{2\pi i g^n/p}$$

Esta sucesión es periódica con periodo $p-1$ y todos sus términos son de módulo 1. La sucesión $\{c_n\}$ de correlación periódica se define por:

$$c_n = \sum_{i=0}^{p-2} a_i \overline{a_{i+n}}$$

Resulta que

$$c_n = \begin{cases} p-1 & \text{si } n \equiv 0(mod\, p-1) \\ -1 & \text{si } n \not\equiv 0(mod\, p-1) \end{cases}$$

Si consideramos la Transformada discreta de Fourier de $\{a_n\}$

$$A_n = \sum_{k=0}^{p-2} a_k e^{-\frac{2\pi i k n}{p-1}}$$

y aplicamos lo obtenido para $\{c_n\}$ nos queda

$$|A_n|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0(mod\, p-1) \\ p & \text{si } n \not\equiv 0(mod\, p-1) \end{cases}$$

Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ tiene un espectro de potencia plano. Este tipo de sucesiones han encontrado importantes aplicaciones en Física y a continuación discutimos una aplicación en Acústica. Es conocido que las salas de conciertos en las que las ondas de sonido viajan lateralmente tienen un sonido superior que aquellas en las que el sonido sólo llega de la dirección frontal, como es el caso de las salas modernas con techos bajos. La alternativa para estas salas es modificar el diseño de los techos de manera que el sonido que viene desde el escenario se redirija en todas las direcciones, excepto en dirección especular. Este efecto se consigue en una superficie dura con 'entrantes" de diferentes profundidades d_n. Por reflexión , la fase de una onda normalmente incidente cambia por $4d_n\pi/\lambda$ donde λ es la longitud de onda. Si las profundidades cumplen $d_n = \frac{1}{2}\frac{\lambda g^n}{p}$ donde p es un número primo, g una raíz primitiva de p y g^n el menor residuo modulo p, entonces la onda reflejada tiene amplitudes complejas $e^{2\pi i g^n/p}$, justamente la sucesión de espectro de poder plano considerada anteriormente. Si la distribución espacial de las amplitudes de ondas a lo largo de superficies planas tiene espectro de potencia plano, entonces las intensidades de las ondas dispersadas en distintos órdenes de difracción serán iguales y con esto se mejora la acústica de las salas de concierto

5.2. La hipótesis de Riemann

A continuación presentamos, muy sucintamente algunas de las ideas fundamentales de la fórmulación de la hipótesis de Riemann.

Para gran parte de la comunidad matemática el mayor desafío actual es demostrar la hipótesis de Riemann, de la cual damos a continuación una breve descripción. Riemann, en 1859, en su histórica y única publicación sobre Teoría de Números, *Über der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [23], formula su conjetura, hoy llamada la hipótesis de Riemann, que permitiría explicar la distribución de los números primos. La parte central del referido articulo, es la llamada función zeta de Riemann, definida por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La función así definida es analítica en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ y Riemann probó que puede ser extendida a una función meromorfa en todo el plano complejo, con un polo de residuo 1 en s = 1. La extensión se obtiene a través de la ecuación funcional

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{s/2} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{1-s}{2}}$$

Riemann demuestra que con excepción de los ceros triviales: los pares negativos, los ceros de la función ζ están contenidos en la región $0 < Re(s) < 1$, que se distribuyen simétricamente en torno a la recta $Re(s) = 1/2$ y afirma que es muy probable que todo los ceros no triviales de ζ tengan parte real $1/2$. Hasta aquí, sólo Análisis complejo y nos preguntamos, ¿y la Teoría de Números? Veamos: Riemann considera $\pi(x)$ definida, para $x > 1$, como la cantidad de números primos menores o iguales que x y la función J, definida para $x \geq 1$, por

$$J(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \pi\left(\sqrt[n]{x}\right)$$

y prueba que

$$\pi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} J\left(\sqrt[n]{x}\right)$$

donde μ es la función de Möbius, definida por:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1. \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ es producto de } k \text{ primos distintos.} \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por un cuadrado.} \end{cases}$$

A partir de la relación establecida por Euler:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos, obtiene

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln(2) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln(t)}$$

donde la suma es sobre los ceros no triviales ρ de ζ y

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

De esta forma Riemann establece una relación entre la distribución de los números primos y los ceros no triviales de la función ζ en el plano complejo. Riemann reconoció la importancia de dar una prueba rigurosa a su conjetura, que hizo en vano ligeros esfuerzos por una prueba pero que dejó de lado pues no parecía relevante para el próximo objetivo de su investigación [23]. Si Riemann hubiese probado su hipótesis, hubiese hecho realidad el Teorema de los Números Primos :

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

El sueño de Gauß, su maestro [6].

5.3. La Hipótesis de Riemann y la Física

La importancia de dar una prueba o un contraejemplo a la Hipótesis de Riemann ha motivado a muchos matemáticos y no son pocos los que aseguran tener la solución pero actualmente se considera un problema abierto. Los intentos de demostración han generado sorprendentes conexiones con otras disciplinas, en particular la generada a partir de la conjetura de Hilbert-Pólya. Hilbert y Pólya de forma independiente, sugirieron que para demostrar la Hipótesis de Riemann bastaba mostrar que las partes imaginarias de los ceros no triviales de la función ζ son el espectro de un operador autoadjunto. Evidentemente, la construcción de un tal operador no parece inmediata, pero formula una propuesta que establece una conexión con la Mecánica cuántica[16]. Concretamente, el operador es de la forma $1/2 + iH$, donde H es el halmitoniano de una partícula que se mueve bajo la acción de un potencial V . La Hipótesis de Riemann es equivalente a cada una de las afirmaciones: H es hermitiano, V es real [21]. En marzo de 2017, Bender, Brady y Müller anunciaron la construcción de un operador hermitiano cuyo espectro, de darse ciertas condiciones, coincide con los ceros no triviales de la función zeta de Riemann [3]. Esto puede ser interpretado como un paso importante, no obstante no todo está dicho; falta probar que en efecto las supuestas condiciones se cumplen y que el operador es autoadjunto, además de considerar la polémica surgida en torno a los argumentos analíticos de este enfoque, [2, 4].

6. Conclusiones

La Teoría de Números es una de las disciplinas matemáticas más antiguas, que experimentó largos períodos de letargo. A partir de Fermat y gracias a los aportes de grandes matemáticos, la Teoría de Números es una de las áreas de mayor actividad. Por muchos años, era considerada el paradigma de la Matemática pura, ajena a cualquier relación con la cotidianeidad y los problemas reales. Durante los años setenta del Siglo XX se inicia un movimiento que muestra otra cara de la Teoría de Números. Los métodos modernos de la Criptografía y de la Teoría de Codificación, indispensable para las nuevas formas de comunicación e intercambio de información confidencial, se fundamentan en propiedades de los números naturales, y estas aplicaciones se extienden a otras áreas como Acústica, Biología, Química, Música entre otras. En particular es notable la relación existente entre la función ζ de Riemann y algunas áreas de la Física [25].

Referencias

[1] BACKHOUSE, R.,FERREIRA, J., *On Euclid's algorithm and elementary number theory*, Science of Computer Programming 76(3), pp. 160–180, march 2011.

[2] BELLISARD, V., *Comment on Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function* , arXiv: 1704.02644, april 2017.

[3] BENDER, C. M.,BRODY, D. C., MÜLLER, M. P., *Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function*, Physical Review Letters, 130201, march 2017.

[4] BENDER, C. M.,BRODY, D. C., MÜLLER, M. P., *Comment on "Comment on Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function"* , arXiv: 1705.06767, april 2017.

[5] COHN, H., *Some Applied Number Theory*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 4(3), pp. 152–167, september 1956.

[6] CUTRONE, J., *On Riemann's 1859 paper and its Consequences.*, Master thesis, New York University, september 2005.

[7] DIFFIE, W., HELLMAN, M., *New directions in cryptography*, IEEE Transactions on Information Theory 22(6), pp. 644–654, november 1976.

[8] GAUSS, C., *Disquisitiones Arithmeticae*, Traducción al español por Barrantes, H., et al. Academia colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1995.

[9] HARDY, G., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940.

[10] HELFGOTT, H.A., *The Ternary Goldbach Conjecture is True*, arXiv:1312.7748, january 2014.

[11] ING, L.H., *The History of the Chinese Remainder Theorem*, Mathematical Medley. 1(30): pp. 54–62. june 2002.

[12] JAMESON, G., *The Prime Number Theorem*, Cambridge University Press, London, 2003.

[13] KANGSHENG, S., *Historical Development of the Chinese Remainder Theorem*, Archiv for the History of Exact Science. 36(4), pp.285–305, september 1988.

[14] LAWTHER, H. Jr., *An application of Number Theory to the Splicing of Telephone Cables*, American Mathematical Monthly 42(2), pp. 81–91, april 1935.

[15] MCCLENON,, R., B., *Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum*, The American Mathematical Monthly. 6(1), pp. 1–8, january 1919.

[16] MANSFIELD, D., F., WILDBERGER, N., J., *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry*, Historia Mathematica, In press, august 2017.

[17] NARKIEWICZ, W., *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Verlag, Germany, 2000.

[18] ORE, O., *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, USA, 1948.

[19] , PLESTER, V.,HUYLEBROUCK, D., *The Ishango Artefact: the Missing Base 12 Link*, Forma, 14, pp. 339–346, december 1999.

[20] ROBSON, E., *Words and Pictures: New Light on Plimpton322*, American Mathematical Monthly, 109(2), pp. 105–120, february 2002.

[21] ROCKMORE, D., *Stalking the Riemann Hypothesis*, Pantheon Books, USA, 2005.

[22] SINGH, S., *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London, 1997.

[23] RIEMANN, B., *Über der Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grössen* , Monatsberichte der Berliner Akademie, november 1859.

[24] SCHROEDER, M., *Number Theory in Science and Communication*, Springer Verlag, Germany, 2009.

[25] SCHUMAYER , D., HUTCHINSON , D., *Physics of the Riemann Hypothesis*, Reviews of Modern Physics, 83, pp. 307—330, april 2011.

[26] VARADAJAN , V. S., *Euler Through Time: A New Look at Old Themes* , American Mathematical Society, USA, 2006.

[27] WILES , A., *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics Second 141(3), pp. 443-551, may 1995.

[28] ZHANG, Y., *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics Second 179(3), pp. 1121-1174, may 2014.

Sobre el autor:
Nombre: Jaime J. Gutiérrez G.
Correo electrónico: jaime.gutierrez@up.ac.pa
Institución: Universidad de Panamá.