Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
ISSN 2174-0410 Volumen IX, Número 2, Octubre 2019

G.I.E Pensamiento Matemático

MAIC

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA: ARMONÍAS

MARYAM MIRZAKHANI EN SURFER

ASPECTOS CIENTÍFICOS DEL VIAJE DEL DESCUBRIMIENTO

EXPERIENCIAS DOCENTES

INICIACIÓN A LA CRIPTOLOGÍA: UNA ACTIVIDAD EXTRACURRICULAR TRANSVERSAL

ESTRATEGIAS DE MOTIVACIÓN CON LA DECORACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS EN DISTINTOS NIVELES DE SECUNDARIA

INVESTIGACIÓN

FÓRMULA POLINÓMICA PARA LA SUMA DE POTENCIAS DE LOS PRIMEROS N ENTEROS POSITIVOS IMPARES

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

EL VALOR DE π COMO LÍMITE DE PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLIGONOS REGULARES

ECUACIÓN DE CLAIRAUT, UN DESARROLLO ALGEBRAICO

CUENTOS MATEMÁTICOS

LA APARICIÓN DE LOS NÚMEROS DE DOS CIFRAS

CRÍTICAS Y RESEÑAS

"LOS CRÍMENES DE ALICIA" - GUILLERMO MARTÍNEZ

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen IX, Número 2, Octubre 2019

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Ilustración de portada / Fotolia (https://es.fotolia.com)
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid

Volumen IX, Número 2, ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2019

Índice de Artículos

Editorial del Número 2 (Vol. IX)

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen IX, Número 2, pp. 001–006, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Sep'19; Aceptación: 20 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física. Algunos artículos pertenecen a trabajos presentados a las 5[as] Jornadas "Matemáticas Everywhere", celebradas en el CIEM de Castro Urdiales los días 18, 19 y 20 de junio de 2018.

Abstract

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal o theoretical point of view but Maths applied to different areas such as engineering or physics. Some articles were presented to the 55[th] "Matemáticas Everywhere" Congress, celebrated in the CIEM from Castro Urdiales on the 18th, 19th and 20th of june, 2018.

Investigación

En *"Fórmula polinómica para la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares"* se considera la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares, $T_k(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$, donde n y k son enteros no negativos, y se deriva una fórmula polinómica para $T_k(n)$ que es válida para todo $k \geq 0$, en contraste con otras representaciones polinómicas que solo se aplican para k impar o para k par.

Experiencias Docentes

En *"Iniciación a la Criptología: una actividad extracurricular transversal"* se presenta una experiencia extracurricular llevada a cabo en el I.E.S. Jaranda de Jarandilla de la Vera (Cáceres) donde se hace una exposición de una actividad de iniciación del alumnado a la encriptación y desencriptación de mensajes. La experiencia pone de manifiesto la importancia de la transversabilidad como herramienta metodológica de contenidos de distintas áreas pedagógicas, sin por ello menoscabar su atractivo para un alumnado completamente profano (figura 1).

El artículo *"Estrategias de motivación con la decoración en el aula de Matemáticas en distintos niveles de Secundaria"* pretende mostrar una colección de material que nos permita decorar el aula con contenidos matemáticos de distinta tipología. Tras una pequeña encuesta que nos permite sacar conclusiones sobre sus preferencias, se detallan las principales ventajas, las cuales ya han

Figura 1. Imágenes tomadas durante la realización de la actividad.

sido analizadas en distintos estudios metodológicos. Se finaliza con una batería de ejemplos y enlaces con los que comenzar a trabajar.

Figura 2. Arte moderno con el número uno.

Historias de Matemáticas

"Ingeniería y Matemática: armonías" trata sobre cómo la ingeniería y la matemática se han retroalimentado desde sus inicios. La ingeniería como la aplicación del conocimiento científico a la invención práctica y la matemática como el conocimiento científico en sí mismo. Este artículo se sitúa en el germen del desarrollo de la física-matemática como herramienta clave en la ingeniería, a través del problema de la cuerda vibrante, con un final envuelto en "armonías".

Figura 3. Armonías entre ingeniería y matemática.

"Maryam Mirzakhani en Surfer" es una breve biografía personal contextualizada de Maryam Mirzakhani y sucinta aproximación a los conceptos involucrados en su trabajo, acreedor de la primera Medalla Fields obtenida por una mujer. La contextualización se hace al hilo del film Persépolis, y la aproximación a su obra cuenta con el apoyo de objetos dinámicos construidos con el programa Surfer.

Figura 4. Con el atuendo impuesto por los ayatolás y la medalla de oro ganada en las olimpiadas.

"Aspectos científicos del viaje del Descubrimiento" trata sobre el viaje del Descubrimiento de octubre de 1492, que fue una de las hazañas históricas más importantes de la humanidad. Se considera que dio inicio al periodo histórico denominado Edad Moderna. No se trató de la aventura individual de un visionario, como algunos pretenden, sino que fueron necesarios hombres capaces, medios, conocimientos y preparación científico-técnica, imprescindibles para hacerlo posible. Se tratan en este artículo algunas consideraciones acerca del estado del conocimiento científico en el que se desarrolló dicho viaje.

Figura 5. Mapa del mundo incluido en la «Cosmographia» de Ptolomeo, realizada en Florencia entre 1460 y 1477, conocida como Codex valentinus.

Juegos y Rarezas Matemáticas

En *"El valor de π como límite de perímetros y áreas de polígonos regulares"* se utilizarán las propiedades de los polígonos inscritos y circunscritos, para obtener el valor aproximado de π como límite de una sucesión que involucra a la función $\text{sen}(x)$. Para ello se calculará el perímetro y área de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia en función de sus lados.

En el artículo *"Ecuación de Clairaut, un desarrollo algebraico"* se presenta una forma alternativa para encontrar la solución singular de la ecuación de Clairaut, usando para ello un razonamiento algebraico. Con este método se llega a la solución implícita, evitando resolver por eliminación el parámetro que aparece en el sistema de ecuaciones de ecuaciones paramétricas que resulta al resolver dicha ecuación por el método clásico.

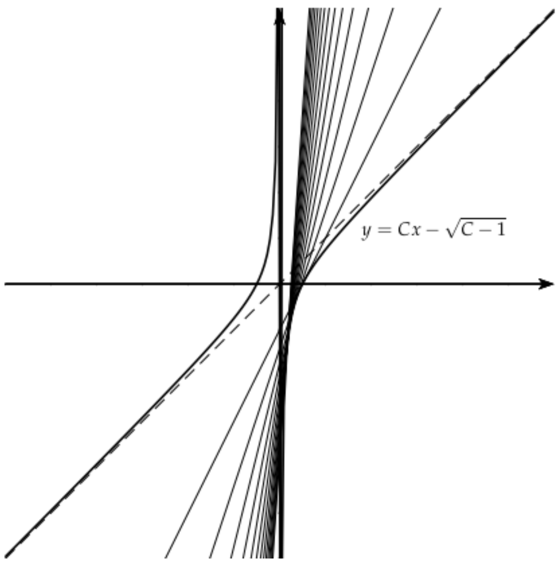


Figura 6. Algunas curvas solución de la ecuación diferencial de Clairaut $y = y'x - \sqrt{y'-1}$

Cuentos Matemáticos

"La aparición de los números de dos cifras" muestra uno de los cuentos presentados al concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE Pensamiento matemático en 2015 para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios. En él se introducen los números enteros de una forma divertida.

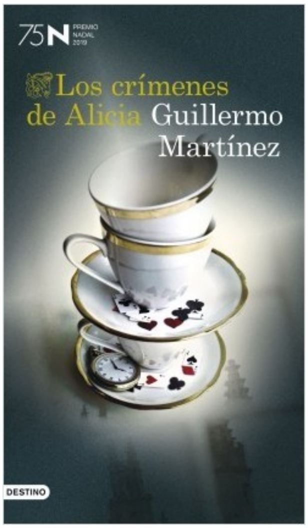


Figura 7. Portada del libro.

Críticas y Reseñas

Escribir una crítica de un libro es posiblemente una tarea inútil, porque no es probable que quien se sienta tentado a leerlo vaya a desistir ante la opinión contraria, ni quien no se sienta inclinado a abrir el libro lo haga impulsado por las alabanzas de un crítico al que no conoce. *"Crítica del libro 'Los Crímenes de Alicia' de Guillermo Martínez"* deja constancia de las impresiones sobre la obra citada en el título de un lector, y lo hace de buena gana, que leer y escribir son dos actividades placenteras.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

> *"Nuestra consoladora convicción de que el mundo tiene sentido descansa sobre un fundamento seguro: nuestra capacidad casi ilimitada para ignorar nuestra ignorancia."*
>
> Daniel Kahneman

El Comité Editorial

Investigación

Fórmula polinómica para la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares

Polynomial formula for the sum of powers of the first n positive odd integers

José Luis Cereceda Berdiel

Revista de Investigación

Volumen IX, Número 2, pp. 007–014, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Abr'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo consideramos la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares, $T_k(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$, donde n y k son enteros no negativos, y derivamos una fórmula polinómica para $T_k(n)$ que es válida para todo $k \geq 0$, en contraste con otras representaciones polinómicas que solo se aplican para k impar o para k par.

Palabras Clave: Número impar, suma de potencias de enteros, fórmula polinómica, coeficientes binomiales, números de Bernoulli.

Abstract

This paper presents a simple approach to obtaining a unified polynomial formula accounting for the sums of powers of the first n odd integers, $T_k(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$, where n and k are nonnegative integers. Our polynomial formula for $T_k(n)$ applies to any $k \geq 0$, in contrast with other polynomial representations specialized to the case where k is odd or even.

Keywords: Odd number, sums of powers, polynomial formula, binomial coefficients, Bernoulli numbers.

1. Introducción

En este artículo vamos a considerar la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares

$$T_k(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^k = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k,$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. (Por convención, tomamos $T_k(0) = 0$ para todo k). Una propiedad fundamental de $T_k(n)$ es que, para k impar, $k = 2p - 1$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$), $T_{2p-1}(n)$ puede expresarse mediante el polinomio par en n [12, Teorema V]:

$$T_{2p-1}(n) = \sum_{r=1}^{p} E_{p,r} n^{2r}, \tag{1}$$

mientras que, para k par, $k = 2p$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$), $T_{2p}(n)$ puede expresarse mediante el polinomio impar en n [12, Teorema VI]:

$$T_{2p}(n) = \sum_{r=0}^{p} F_{p,r} n^{2r+1}, \tag{2}$$

donde $E_{p,r}$ y $F_{p,r}$ son coeficientes racionales independientes de n. Dichos coeficientes vienen dados explícitamente por [3]

$$E_{p,r} = \frac{1}{2p}\binom{2p}{2r}\left(2^{2r} - 2^{2p-1}\right)B_{2p-2r}, \quad r = 1, 2, \ldots, p, \tag{3}$$

y

$$F_{p,r} = \frac{1}{2p+1}\binom{2p+1}{2r+1}\left(2^{2r+1} - 2^{2p}\right)B_{2p-2r}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{4}$$

En las ecuaciones (3) y (4), $\binom{m}{n}$ denota un coeficiente binomial, y los B_k's denotan los números de Bernoulli $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, etc., los cuales satisfacen que $B_{2k+1} = 0$ para todo $k \geq 1$ (véase, por ejemplo, [1, 4]). Los números de Bernoulli se pueden definir a través de la función generatriz exponencial

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \quad (|t| < 2\pi),$$

o, de manera equivalente, mediante la ecuación de recurrencia[1]

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j, \quad k \geq 1, \text{ con } B_0 = 1.$$

Nótese, incidentalmente que, para $p = 1$, de las ecuaciones (1) y (3) obtenemos la identidad bien conocida

$$T_1(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Añadimos, por otra parte, que $T_k(n)$ se puede expresar alternativamente en función de las sumas de potencias de enteros, $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, como

$$T_k(n) = S_k(2n) - 2^k S_k(n). \tag{5}$$

Desde un punto de vista teórico, lógico, e incluso estético, sería deseable el disponer de una fórmula unificada para $T_k(n)$, válida para todo k, y polinómica en n. En este artículo vamos a proporcionar una fórmula de esta naturaleza. Específicamente, en la sección 2 probaremos el siguiente teorema.

[1] Existen asimismo fórmulas explícitas para los números de Bernoulli. Véase, por ejemplo, el artículo de Gould en [6].

Teorema 1. *La suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares $T_k(n)$ admite la siguiente representación polinómica:*

$$T_k(n) = \sum_{r=1}^{k+1} T_{k,r} n^r, \quad k \geq 0, \tag{6}$$

donde los coeficientes $T_{k,r}$ vienen dados por

$$T_{k,r} = \sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r}, \quad r = 1, 2, \ldots, k+1. \tag{7}$$

En este punto es conveniente declarar lo siguiente con respecto al Teorema 1. En el curso del estudio y/o consulta de diversos artículos y otras fuentes bibliográficas sobre la suma de potencias de enteros, el presente autor no ha localizado ningún resultado análogo al Teorema 1 (es decir, un resultado que proporcione la fórmula polinómica (6) con los coeficientes $T_{k,r}$ dados por (7)). Por supuesto, esto no significa que dicho teorema no exista o que, en su caso, no haya sido publicado en la literatura con anterioridad. Además puede ocurrir que exista un resultado más general que incluya al Teorema 1 como caso particular. En cualquier caso, sea o no inédito, en la sección 2 ofrecemos una demostración independiente de dicho teorema.

Como quiera que las ecuaciones (1), (2), y (6) se refieren al mismo objeto matemático, $T_k(n)$, es evidente que la fórmula polinómica (6) es equivalente a la fórmula polinómica (1) [(2)] cuando k es impar [par]. En la sección 3 utilizaremos este hecho para establecer una identidad (presumiblemente nueva) que involucra a los números de Bernoulli (véase la ecuación (16)).

2. Fórmula polinómica para $T_k(n)$

Para probar el Teorema 1 nos apoyamos en el siguiente lema.

Lema 1. *$T_k(n)$ se puede expresar en la forma:*

$$T_k(n) = (2n+1)T_{k-1}(n) - 2\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j), \quad k \geq 1. \tag{8}$$

La manera más eficaz de probar el Lema 1 es expandiendo $(2n+1)T_{k-1}(n)$ como la suma de las siguientes $2n+1$ filas:

$$\left.\begin{array}{l}
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
\vdots \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}
\end{array}\right\} n$$

$$1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
\vdots \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}
\end{array}\right\} n$$

Claramente, sumando por columnas la porción marcada en rojo, obtenemos $T_k(n)$; mientras que sumando por filas los dos bloques simétricos restantes obtenemos $2\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j)$, con lo que el Lema 1 queda probado.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} T_{k-1}(1) &= 1^{k-1}, \\ T_{k-1}(2) &= 1^{k-1} + 3^{k-1}, \\ T_{k-1}(3) &= 1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1}, \\ &\vdots \\ T_{k-1}(n) &= 1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

De esta manera, sumando por columnas, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)(2i+1)^{k-1} = nT_{k-1}(n) - \sum_{i=0}^{n-1} i(2i+1)^{k-1}.$$

Sustituyendo ahora esta expresión en la ecuación (8) obtenemos que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} i(2i+1)^{k-1}.$$

Por el teorema del binomio, sabemos que

$$(2i+1)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (2i)^j,$$

lo que implica que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1} \binom{k-1}{j} \sum_{i=0}^{n-1} i^{j+1}.$$

Denotando por $S_j(n-1)$ a la suma de potencias

$$S_j(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^j = 0^j + 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + (n-1)^j,$$

tendremos entonces que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1} \binom{k-1}{j} S_{j+1}(n-1),$$

o, equivalentemente,

$$T_r(n) - T_{r-1}(n) = \sum_{j=1}^{r} 2^j \binom{r-1}{j-1} S_j(n-1), \tag{9}$$

donde hemos renombrado el índice k por r y hemos redefinido los límites de la sumación. Ahora evaluamos la suma telescópica

$$\sum_{r=1}^{k} \big(T_r(n) - T_{r-1}(n)\big) = T_k(n) - T_0(n) = T_k(n) - n.$$

Por tanto, de la ecuación (9) obtenemos que

$$T_k(n) = n + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} 2^j \binom{r-1}{j-1} S_j(n-1) = n + \sum_{j=1}^{k} 2^j \left[\sum_{r=j}^{k} \binom{r-1}{j-1}\right] S_j(n-1).$$

Utilizando la siguiente propiedad de los coeficientes binomiales (véase [2, Identidad 135]):

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad 0 \le k \le n,$$

podemos expresar la ecuación anterior como

$$T_k(n) = n + \sum_{j=1}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1).$$

Es importante observar que podemos incorporar el término n dentro del sumatorio si tomamos como límite inferior de dicho sumatorio $j = 0$ ya que, asumiendo la convención según la cual $0^0 = 1$, $S_0(n-1)$ es precisamente n. De esta manera $T_k(n)$ puede expresarse de manera compacta como

$$T_k(n) = \sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1). \tag{10}$$

Incidentalmente, podemos combinar las ecuaciones (5) y (10) para obtener

$$S_k(2n) = 2^k S_k(n) + \sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1). \tag{11}$$

El interés de la ecuación (11) radica en que nos permite calcular las sumas de potencias de los primeros $2n$ enteros positivos a partir de las sumas de potencias de los primeros n enteros positivos.

Por otra parte, es un resultado bien conocido que la suma $S_j(n-1) = 0^j + 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + (n-1)^j$ puede expresarse como un polinomio en n de grado $j+1$ sin término independiente de acuerdo a la fórmula (véase, por ejemplo, [9, 11, 13]):

$$S_j(n-1) = \frac{1}{j+1} \sum_{r=1}^{j+1} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r} n^r. \tag{12}$$

La fórmula (12) fue establecida por vez primera (aunque no en la forma actual (12)) por Jacob Bernoulli en su gran obra *Ars Conjectandi*, publicada póstumamente en 1713. Recomendamos la lectura del artículo [10], donde se detallan las ideas esenciales que llevaron a Bernoulli a descubrir tanto la fórmula (12) como los ahora denominados números de Bernoulli. Sustituyendo entonces la fórmula (12) en la ecuación (10) obtenemos

$$T_k(n) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=1}^{j+1} \frac{2^j}{j+1} \binom{k}{j} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r} n^r = \sum_{r=1}^{k+1} \left[\sum_{j=r-1}^{k} \frac{2^j}{j+1} \binom{k}{j} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r}\right] n^r,$$

o, equivalentemente,

$$T_k(n) = \sum_{r=1}^{k+1} \left[\sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r}\right] n^r, \tag{13}$$

con lo que el Teorema 1 queda probado.

Notamos, por completitud, que los coeficientes $T_{k,r}$ se pueden expresar igualmente como

$$T_{k,r} = 2^r \sum_{j=0}^{k+1-r} \frac{2^{j-1}}{r+j} \binom{k}{r+j-1} \binom{r+j}{r} B_j, \quad r = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Aplicando la fórmula polinómica (13) para $k = 1, 2, \ldots, 9$, obtenemos

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= n^2, \\
T_2(n) &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n, \\
T_3(n) &= 2n^4 - n^2, \\
T_4(n) &= \frac{16}{5}n^5 - \frac{8}{3}n^3 + \frac{7}{15}n, \\
T_5(n) &= \frac{16}{3}n^6 - \frac{20}{3}n^4 + \frac{7}{3}n^2, \\
T_6(n) &= \frac{64}{7}n^7 - 16n^5 + \frac{28}{3}n^3 - \frac{31}{21}n, \\
T_7(n) &= 16n^8 - \frac{112}{3}n^6 + \frac{98}{3}n^4 - \frac{31}{3}n^2, \\
T_8(n) &= \frac{256}{9}n^9 - \frac{256}{3}n^7 + \frac{1568}{15}n^5 - \frac{496}{9}n^3 + \frac{127}{15}n, \\
T_9(n) &= \frac{256}{5}n^{10} - 192n^8 + \frac{1568}{5}n^6 - 248n^4 + \frac{381}{5}n^2.
\end{aligned}$$

Por supuesto, las mismas expresiones se obtendrían aplicando las fórmulas correspondientes que aparecen en (1) y (2). Puede verse que, como anticipamos en la introducción, para k impar $T_k(n)$ es un polinomio par en n, mientras que para k par $T_k(n)$ es un polinomio impar en n. La ventaja de utilizar la fórmula (13) es que nos permite computar $T_k(n)$ para cualquier $k \geq 0$. Obsérvese también que el coeficiente de mayor grado (que está dado por $T_{k,k+1} = 2^k/(k+1)$) es siempre positivo y los siguientes coeficientes van alternando en signo sucesivamente desde mayor a menor grado. Por otra parte, como $T_k(1) = 1^k = 1$ para todo k, de la ecuación (13) deducimos directamente la identidad

$$\sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r} = 1, \quad k \geq 0.$$

Para concluir esta sección, y como información adicional, es pertinente señalar que, para k par, $k = 2p$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$), $T_{2p}(n)$ admite la representación polinómica [7]

$$T_{2p}(n) = n(2n-1)(2n+1) \sum_{k=1}^{p} D_{p,k} (2n-1)^{p-k} (2n+1)^{p-k}, \tag{14}$$

donde los coeficientes $D_{p,k}$ están dados por [3]

$$D_{p,k} = \sum_{m=1}^{p} \binom{2p}{2m} \binom{m}{p+1-k} \frac{2 - 2^{2p-2m}}{2m+1} B_{2p-2m}, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{15}$$

Obsérvese que el factor $n(2n-1)(2n+1)$ en la ecuación (14) es proporcional a $T_2(n)$. Como ejemplo, aplicando las ecuaciones (14) y (15) para $p = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} T_{20}(n) &= 1^{20} + 3^{20} + 5^{20} + \cdots + (2n-1)^{20} \\ &= nN\left(\frac{1}{21}N^9 - \frac{20}{7}N^8 + \frac{736}{7}N^7 - \frac{60160}{21}N^6 + \frac{176384}{3}N^5 \right. \\ &\qquad - \frac{29080576}{33}N^4 + \frac{6311800832}{693}N^3 - \frac{41095856128}{693}N^2 \\ &\qquad \left. + \frac{11443306496}{55}N - \frac{45773225984}{165}\right), \end{aligned}$$

donde N es la abreviatura de $(2n-1)(2n+1)$.

3. Consideraciones finales

Como hemos indicado con anterioridad, la fórmula polinómica (6) es equivalente a la fórmula polinómica (1) [(2)] cuando k es impar [par]. Esto significa que, para $k = 2p - 1$, los términos de mismo grado en los polinomios (6) y (1) deben ser idénticos; y, análogamente, para $k = 2p$, los términos de mismo grado en los polinomios (6) y (2) deben ser asimismo idénticos. Utilizando las ecuaciones (7), (3), y (4), puede verificarse que la equivalencia de dichos polinomios (6) y (1) [(6) y (2)] para k impar [par] implica en ambos casos que

$$\sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j}\binom{k}{j-1}\binom{j}{r}B_{j-r} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{r}(2^r - 2^k)B_{k+1-r}, \tag{16}$$

donde $k \geq 0$ y $1 \leq r \leq k+1$. La relación (16) nos permite expresar $T_k(n)$ de manera alternativa en la forma[2]

$$T_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{r=1}^{k+1}\binom{k+1}{r}(2^r - 2^k)B_{k+1-r}n^r, \quad k \geq 0, \tag{17}$$

que puede considerarse como la contrapartida para las sumas de potencias de los enteros impares de la fórmula de Bernoulli (12). Como $T_k(1) = 1$, de la expresión (17) se deduce a su vez la identidad

$$\frac{2^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(2^{1-j} - 1)B_j = 1, \quad k \geq 0.$$

Por otra parte, para $r = 1$, de la ecuación (16) obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} B_j = (2 - 2^k)B_k,$$

o, equivalentemente,

$$B_k = \frac{1}{2(1-2^k)}\sum_{j=0}^{k-1} 2^j\binom{k}{j}B_j, \quad k \geq 1. \tag{18}$$

La identidad (18) fue obtenida por Namias en [8]. Es interesante observar, finalmente, que esta última identidad se puede generalizar a (véase [5])

$$B_k = \frac{1}{n(1-n^k)}\sum_{j=0}^{k-1} n^j\binom{k}{j}B_j\sum_{i=1}^{n-1} i^{k-j}, \quad k \geq 1 \text{ y } n > 1,$$

donde n es un entero mayor que 1. La identidad (18) se recupera para $n = 2$.

[2] Como indica acertadamente uno/a de los/las revisores/as anónimos/as, la fórmula (17) se puede obtener directamente a partir de la ecuación (5) (la cual puede reescribirse como $T_k(n) = S_k(2n-1) - 2^k S_k(n-1)$) y de la fórmula de Bernoulli (12).

Referencias

[1] APOSTOL, T. M., *A primer on Bernoulli numbers and polynomials*, Mathematics Magazine, Vol. 81, Nº 3, pp. 178–190, 2008.

[2] BENJAMIN, A. T., QUINN, J. J., *Proofs that Really Count. The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, 2003.

[3] CERECEDA, J. L., *Explicit polynomial for sums of powers of odd integers*, International Mathematical Forum, Vol. 9, Nº 30, pp. 1441–1446, 2014.

[4] DEEBA, E. Y., RODRIGUEZ, D. M., *Bernoulli numbers and trigonometric functions*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 21, Nº 2, pp. 275–282, 1990.

[5] DEEBA, E. Y., RODRIGUEZ, D. M., *Stirling's series and Bernoulli numbers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, Nº 5, pp. 423–426, 1991.

[6] GOULD, H. W., *Explicit formulas for Bernoulli numbers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, Nº 1, pp. 44–51, 1972.

[7] GUO, S., SHEN, Y., *On sums of powers of odd integers*, Journal of Mathematical Research with Applications, Vol. 33, Nº 6, pp. 666–672, 2013.

[8] NAMIAS, V., *A simple derivation of Stirling's asymptotic series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, Nº 1, pp. 25–29, 1986.

[9] NUNEMACHER, J., YOUNG, R. M., *On the sum of consecutive Kth powers*, Mathematics Magazine, Vol. 60, Nº 4, pp. 237–238, 1987.

[10] RUIZ LÓPEZ, F., *Sobre las sumas de Bernoulli*, Pensamiento Matemático, Vol. VIII, Nº 2, pp. 109–134, 2018.

[11] WILLIAMS, K. S., *Bernoulli's identity without calculus*, Mathematics Magazine, Vol. 70, Nº 1, pp. 47–50, 1997.

[12] WITMER, E. E., *The sums of powers of integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 42, Nº 9, pp. 540–548, 1935.

[13] WU, D. W., *Bernoulli numbers and sums of powers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 32, Nº 3, pp. 440–443, 2001.

Sobre el autor:
Nombre: José Luis Cereceda Berdiel
Correo electrónico: jl.cereceda@movistar.es

Experiencias Docentes

Iniciación a la Criptología: una actividad extracurricular transversal

Introduction to Cryptology: a transverse extracurricular activity

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 015–022, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Abr'18; Aceptación: 20 Jun'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia extracurricular llevada a cabo en el I.E.S. Jaranda de Jarandilla de la Vera (Cáceres) donde se hace una exposición de una actividad de iniciación del alumnado a la encriptación y desencriptación de mensajes. La experiencia pone de manifiesto la importancia de la transversabilidad como herramienta metodológica de contenidos de distintas áreas pedagógicas, sin por ello menoscabar su atractivo para un alumnado completamente profano.

Palabras Clave: Criptología, cifrado de mensajes, desencriptación, transversabilidad, pedagogía extracurricular.

Abstract

This work presents an extracurricular experience carried out in Jaranda High School (Jarandilla de la Vera - Cáceres) where an exhibition of an activity of initiation of students to the encryption and decryption of messages is made. The experience highlights the importance of transversability as a methodological tool for content from different pedagogical areas, without undermining its appeal to a completely profane student body.

Keywords: Cryptology, encryption of messages, decryption, transversability, extracurricular pedagogy.

1. Antecedentes

La idea de trabajar de forma transversal e interdisciplinar distintos contenidos enmarcados dentro del curriculo es uno de los principales objetivos a los que los docentes nos enfrentamos todos los días en nuestras tareas cotidianas y el trabajo con nuestros alumnos.

Sin embargo uno de los grandes retos con los que debemos lidiar consiste en intentar mostrar a nuestros alumnos que en la vida real el conocimiento no es algo estanco y que, al contrario de lo que su intuición les hace creer, la asunción de retos y la superación de problemas aparentemente infranqueables a primera vista, tiene que ver con distintas areas para las que se preparan durante toda la secundaria.

De este modo y con la iniciativa de algunos profesores del claustro del I.E.S. Jaranda se preparó una actividad con la idea de poner de manifiesto la importancia de la transversabilidad, pensando en trabajar en distintos objetivos interdisciplinares no sólo pedagógicos, sino con la intención de mejorar el trabajo en equipo y la competitividad sana como herramienta de superación y satisfacción personal.

La iniciación a la criptología, esto es, la encriptación y desencriptación de mensajes, fue el hilo conductor que sirvió para que profesores de distintas áreas (Lengua, Inglés, Matemáticas, Orientación . . .) trabajaran de manera conjunta en la elaboración de esta actividad con la idea de conseguir en primer lugar que resultara a todas luces atractiva para el alumnado participante, y en segundo lugar se pudieran trabajar con ellos ciertos aspectos curriculares aparentemente lejanos para ellos de su cotidianidad con la que se enfrentan en el centro educativo.

2. Aspectos metodológicos

A pesar de que la actividad está diseñada desde un punto de vista completamente extracurricular, no por ello deja de trabajar ciertos aspectos curriculares que pueden resultar absolutamente aprovechables. De esta manera su diseño se realizó de un modo completamente coordinado entre todos los profesores de las distintas areas que participaron.

2.1. Descripción y fundamentos básicos

La actividad reúne un conjunto de técnicas y dinámicas que permiten a los alumnos desarrollar capacidades de comunicación, coordinación y trabajo en equipo, desarrollo ligüístico y científico y conocimiento histórico así como poner en práctica sus ideas creativas y aprendizaje racional mediante la desencriptación de mensajes cifrados.

Con la realización de la actividad planteada, el alumnado percibe la importancia de la interactuación de distintas areas del conocimiento, esto es la interdisciplinariedad, haciendo uso de técnicas metodológicas alternativas (análisis estadístico o comprensión ligüística) que contribuyen a su desarrollo cognitivo a la hora de enfrentarse con problemas, mejorando de este modo aspectos personales como la seguridad en uno mismo, autocontrol, trabajo en equipo, expresión oral en público, cálculo racional, etc.

"Iniciación a la Criptología: una actividad extracurricular transversal", pretende favorecer la mejora y el desarrollo de diferentes capacidades y habilidades que intervienen en la formación del alumno, contribuyendo en gran medida a una mejora del cálculo racional, trabajo en equipo, conocimiento del contexto histórico en el que se ambienta dicha actividad o desarrollo lingüístico. La metodología aplicada es indudablemente participativa, fomentando la cooperación y el trabajo en equipo, y estimulando la reflexión sobre la actividad, convirtiéndose así en un vehículo extraordinario para transmitir valores de tolerancia, respeto, solidaridad y crítica.

2.2. Definición de bloques de contenidos

1. *Area Orientación educativa:* apoyo al proceso de enseñanza - aprendizaje.

2. *Area Lingüística:* conocimiento y uso de las técnicas y estrategias para la producción de textos escritos, reconocimiento y uso de los elementos constitutivos de la palabra, la creación y valoración de textos.

3. *Area Geografía e Historia:* cifrado César, personajes históricos de la 2ª Guerra Mundial, entorno geográfico del Canal de la Mancha, desembarco de Normandía, invasión de europa ocupada nazi por los aliados, inteligencia británica y desencriptado de las comunicaciones nazis.

4. *Area Matemática:* matemática modular, obtención de porcentajes, presentación de resultados mediante un gráfico de barras o tabla de frecuencias.

2.3. Definición de objetivos o metas

1. Estimular el desarrollo de las capacidades cognitivas y simbólicas a traves del cálculo racional.

2. Conocer el mecanismo de encriptación de un mensaje con un cifrado César.

3. Conocer el mecanismo de desencriptado mediante el análisis de una tabla de frecuencias.

4. Estimular, favorecer y potenciar el conocimiento histórico del conflicto bélico de la 2ª Guerra Mundial.

3. Contextualización

3.1. Entorno histórico

La actividad se contextualiza en Mayo de 1944, un mes antes del desembarco de Normandía por el bando aliado. En la 2ª Guerra Mundial, la guerra criptográfica se convirtió en una de las herramientas de inteligencia y espionaje más potentes y efectivas. Las comunicaciones se realizaban a través de mensajes de radio encriptados. Los aliados podian captar estas comunicaciones con potentes antenas situadas en la costa británica, aunque éstas resultaban completamente ilegibles si no se conocía el método de desencriptado.

El cuartel general de la inteligencia británica para la lucha criptológica se situaba en la mansión victoriana de Bletchley Park, relativamente cerca de Londres, donde en su apogeo llegaron a trabajar cerca de 10.000 personas.

En Mayo de 1944 los aliados preparaban el desembarco para la invasión de la Europa ocupada nazi de un contingente de tropas a través del Canal de la Mancha, y comenzar a arrinconar al ejercito nazi para lograr la capitulación del alto mando alemán. Hitler conocía estos planes pero desconocía exactamente el lugar por el que lo harían. Hitler, desobedeciendo las recomendaciones de generales de su alto mando como Rommel, apostó que dicha invasión aliada se produciría desde las playas de Dover a través del paso de Calais, situado unas millas más al norte de donde se produjo realmente en las playas de Normandía, dado que la distancia a las playas francesas era mucho más corta.

En la 2ª Guerra Mundial la mayoría de las comunicaciones se producían por radio, de manera que cualquiera que tuviera una antera de recepción podía captar dichas transmisiones. Los británicos captaban estas comunicaciones cifradas desde las islas unas veces o desde centros de resistencia y espionaje en la europa ocupada otras, y en Bletchley Park se trabajaba en el descifrado de dichos mensajes interceptados.

3.2. Cifrado César

Se trata de un sistema de encriptación monoalfabético de desplazamiento muy antiguo, utilizado por los romanos en sus campañas militares, de ahí su nombre. El método de cifrado consiste en desplazar hacia la derecha el alfabeto tantos lugares como indica la denominada *semilla*. De esta manera, si la semilla es 4, la letra A se convierte en la letra E. En inglés se utiliza un alfabeto de 26 caracteres (evitando así el uso de la Ñ).

En realidad el método de encriptación utilizado por el ejército nazi (wehrmacht) era polialfabético realizado mediante unas máquinas muy potentes de escriptación denominadas ENIGMA. Además el alto mando mando alemán utilizaba otro sistema de encriptación de sus mensajes realizado con otras máquinas de cifrado denominadas LORENZ. Lógicamente el método de desencriptación de estas máquinas necesita de un álgebra abstracta muy potente que se sale del carácter pedagógico que se le quiere dar a la actividad, por eso al diseñar la actividad nos tomamos la licencia de ”engañar” al alumnado con el fin de facilitar la misma.

El método de desencriptado de este cifrado consiste en identificar la semilla, esto es comparar el porcentaje de repetición de varios caracteres y con ello ver el número de posiciones que se desplazó cada caracter del alfabeto.

Figura 1. Algunas diapositivas de la presentación.

3.3. Descripción de la actividad

La actividad se realizó con alumnos de 2º y 1º de Bachillerato, 4º y 3º de ESO (14–17 años). Según entraban por la puerta se les entregaba una carta personal e intransferible donde se les exponía el contexto histórico y geográfico en el que se encontraban. Se convertirán por un instante en miembros de la inteligencia británica en la lucha criptológica contra los nazis. Se les entregaba una carta en el que se exponía el contexto histórico y la finalidad del trabajo que deben realizar durante la actividad. Como curiosidad su carta está firmada por el mismísimo Primer Ministro Wiston Churchil.

"Londres, 15 de Mayo de 1944

Estimados soldados,

Están a punto de embarcarse en una aventura en vivo. Olviden su origen y mantengan en secreto la operación de la que van a ser partícipes. En cuanto lean este documento se convertirán en miembros activos de la inteligencia aliada en su lucha contra el Reich Alemán de Adolf Hitler.

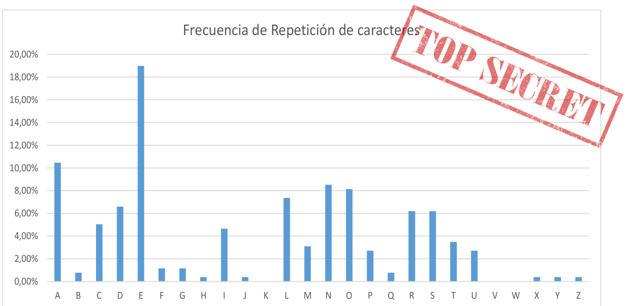
Están en Bletchley Park, una mansión victoriana del siglo XIX a las afueras de Londres, y sede de la Central de Inteligencia y Comunicaciones contra mensajes cifrados nazis alemanes. El bando aliado al que pertenecen, está preparando el desembarco de un contingente de tropas en Francia en una operación militar denominada Overlord, en el que nos jugamos la subsistencia del mundo libre que hoy conocemos. Para ello es fundamental conocer los planes nazis sobre nuestra operación, en qué fechas suponen dicho desembarco y lo más importante, dónde esperan que se produzca.

Recibirán adiestramiento criptoanalítico de una de nuestras mayores emiencias en el tema, el matemático Alan Turing, que les hará un pequeño esbozo de en qué consistirá su tarea de hoy, y cómo podrán descrifrar los mensajes cifrados nazis, y lo que es más importante, cuáles son los planes alemanes para contrarestar dicho desembarco.

Recuerden que deberán trabajar codo con codo con su compañero, en la complicada tarea de descifrar los mensajes cifrados interceptados por nuestras antenas de comunicaciones. Cuando tengan descifrado el mensaje pónganse en contacto con su instructor el Sr. Turing o cualquiera de sus colaboradores de Bletchley Parck. Tendrán que afinar su ingenio y seguir en todo momento las instrucciones definidas por su instructor, y comunicar las fechas para cuando los alemanes esperan nuestra maniobra de desembarco, y en qué puerto geográfico esperan que se produzca. De su trabajo depende que seamos capaces de engañar al bando enemigo y por lo tanto que la Operación Overlord pueda ser un éxito y podamos vencer al ejercito alemán.

Atentamente reciban un cordial saludo.

Primer Ministro del Reino Unido Wiston Churchil"




```
Texto cifrado interceptado:

TAQP CSDT CTBX VDEG TEPG PTAS THTB QPGR DSTJ CRDC
IXCV TCIT STBP HSTR XTCI DHTH TCIP BXAH DASP SDHT
CAPH EAPN PHST ACDG ITST UGPC RXPT CTAT CIDG CDST
ARPC PAST HRDC DRTB DHTA AJVP GTMP RIDT CTAF JTAD
GTPA XOPG PCET GDRG TTBD HFJT EJTS THTG TAEJ TGID
UGPC RTHS TRPA PXHA PUTR WPTH IXBP SPED SGXP HTGP
AXCX RXDS TABT HSTY JCXD
```

Figura 2. Tabla de frecuencias y mensaje cifrado.

A continuación se expuso una presentación donde se ponía de manifiesto el contexto histórico en el que se encontraban los participantes en la actividad, en qué consistía la encriptación mediante un cifrado César, como se realizaba la desencriptación mediante una comparativa con un patrón de una tabla de frecuencias, y finalmente la exposición del mensaje cifrado y la tabla de frecuencias en texto plano del mensaje interceptado.

Figura 3. Imágenes tomadas durante la realización de la actividad.

Al final varios grupos de alumnos consiguieron descifrar de forma exitosa el mensaje cifrado, que tenía una semilla 15. Identificada la semilla, lo único que tenían que hacer era desplazar hacia la izquierda tantos lugares como indicaba la semilla, de este modo por ejemplo la letra T en el mensaje cifrado se correspondía con la letra E en el texto plano o descifrado. La correspondencia es lógicamente biunívoca, no habiendo ninguna posibilidad de ambigüedad. El mensaje descifrado decía lo siguiente:

> *"El bando enemigo prepara el desembarco de un contingente de más de ciento sesenta mil soldados en las playas del norte de Francia en el entorno del Canal Desconocemos el lugar exacto en el que lo realizarán pero creemos que puede ser el puerto francés de Calais la fecha estimada podría ser al inicio del mes de junio."*

El mensaje en texto plano carecía de acentos, no olvide el lector que los alumnos estaban utilizando un alfabeto inglés de veintiséis caracteres.

4. Conclusiones

1. Cuando nuestro alumnado corre peligro de abandono del sistema convencional de aprendizaje, es el momento de que nosotros como docentes tengamos la responsabilidad de intentar atraerlos hacia el conocimiento y la formación: la motivación es una herramienta muy potente.

2. La transversalidad y la interdisciplinaridad permiten la contextualización de las actividades de aprendizaje. Si esa contextualización nos conduce de paso a una problemática actual y cercana (geográfica o virtualmente) y nos permite intervenir en ese contexto, estaremos motivando aún más a nuestro alumnado.

3. Los tiempos modernos que corren y la sociedad actual demandan necesariamente una escuela diferenciadora, donde las capacidades que han de desarrollar los alumnos no son las que de manera tradicional se han contemplado en nuestras programaciones curriculares. El currículo tiene, efectivamente, objetivos, contenidos, y otra serie de elementos que algunos consideramos obligaciones que nos coartan e impiden "hacer de otra forma", sin embargo, también contempla competencias clave o, si queremos, capacidades que han de desarrollarse, elementos transversales, indicaciones metodológicas, atención a la diversidad, que en definitiva es atender a la individualidad, pues todos somos iguales en derechos y diversos en naturaleza, intereses, destrezas. Ceñirse a los "contenidos" del currículo dejando al margen otros elementos igualmente prescriptivos es una decisión profesional, desacertada a mi juicio, que servirá para perpetuar el fracaso educativo.

4. Cabe destacar la buena aceptación por parte de docentes y alumnos que consideraron la realización de la actividad un recurso metodológico alternativo e innovador completamente aprovechable incluso desde un punto de vista curricular, aspecto a todas luces importante para la mejora de la enseñanza de algunos contenidos curriculares en el centro. No obstante, la actitud de docentes y alumnos con respecto a los objetivos planteados en la actividad con relación a la asimilación de contenidos transversales de varias disciplinas y la aplicabilidad de los mismos en el aula de clase, pusieron de manifiesto la utilidad de la actividad.

5. La actividad se plantea como totalmente replicable en multitud de niveles de secundaria y bachillerato, planteándose incluso la posibilidad de ampliarla a varias sesiones con la intención de utilizar métodos de cifrado polialfabéticos y trabajar con este pretesto la transversabilidad en el aula. Por ejemplo con mensajes cifrados en inglés en lugar de en castellano.

6. Es evidente que los alumnos reciben este tipo de actividades alternativas de un modo muy positivo y con una predisposición completamente distinta a la que realizan con las actividades curriculares cotidianas.

Referencias

[1] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel, *"Criptología Nazi. Los Códigos Secretos de Hitler"*, Revista Pensamiento Matemático, Vol. III, Nº 1, § Historias de Matemáticas, pp. 059–120, abril, 2013, ISSN 2174–0410, G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, España.

[2] DECRETO 98/2016, de 5 de julio, por el que se establecen la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato para la Comunidad Autónoma de Extremadura, DOE, Miércoles, 6 de julio, 2016.

[3] RIBERA, Anje, *"El día del mayor engaño"*, Diario El Correo, § Culturas, Historia, Martes, 7 de junio, 2016.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo electrónico: jmanuel.sanchez@educarex.es
Instituciones: I.E.S. Jaranda, Jarandilla de la Vera, Cáceres. G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes

Estrategias de motivación con la decoración en el aula de Matemáticas en distintos niveles de Secundaria

Motivation strategies with the maths classroom decorations in different levels of secondary school education

Óscar Jesús Falcón Ganfornina

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 023–036, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Feb'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

El artículo que se presenta pretende mostrar una colección de material que nos permita decorar el aula con contenidos matemáticos de distinta tipología. Tras una pequeña encuesta que nos permite sacar conclusiones sobre sus preferencias, se detallan las principales ventajas, las cuales ya han sido analizadas en distintos estudios metodológicos. Se finaliza con una batería de ejemplos y enlaces con los que comenzar a trabajar.

Palabras Clave: Decoración. Matemáticas. Material. Estudio. Educación Secundaria

Abstract

The following paper aims to show a set of educational material that let us to decorate the classroom with maths contents. A small survey, made on secondary school education, get allows obtain conclusions about their preferences. The main advantages are indicated, which have already been analyzed in different methodological studies. The paper ends with a collection of examples and links to start working with them.

Keywords: Decoration. Maths. Material. Study. Secondary school education

1. Introducción

La asignatura de matemáticas no suele ser una materia en la que puedan llevarse al aula elementos decorativos. Sin embargo, a lo largo de este artículo, vamos a comprobar que es posible utilizar en nuestras clases distintos materiales con los que decorar el aula.

Es cierto que el material que se presenta está destinado a un alumnado del primer ciclo de la ESO. Aunque dependerá del grupo con el que estemos trabajando, ya sea por el nivel académico en la asignatura que tengan, como por su grado de madurez, el que se pueda destinar a otro tipo de alumnado. Se verá a lo largo del artículo que las decoraciones que se van a trabajar no son exclusivamente dibujos para colorear. Podremos introducir también contenidos matemáticos. Gracias a ello, algunos de estos trabajos pueden ser llevados a niveles superiores.

Uno de los puntos que debemos tener claro antes de empezar a decorar el aula es saber cuál va a ser nuestro objetivo. Del mismo modo, debemos analizar si existen beneficios que nos anime a llevar adelante estas dinámicas de clase. Como ayuda, entre las posibles ventajas que se pueden encontrar, destacaremos:

- La ruptura de la monotonía y el aumento en el interés por la asignatura.
- El intercambio de posibles ideas para llevarlas a cabo.
- La mejora en el ambiente de clase.
- El acercamiento de las matemáticas a su entorno diario más cercano.
- El conseguir que permanezcan a la vista, de forma constante, los distintos contenidos matemáticos.

Puesto que es importante que el ambiente escolar sea "estimulante, ordenado, cálido y confortable" (Díaz y Muñoz, 2013), la decoración es un aspecto a tener en cuenta en nuestra asignatura. Se trata de uno de los elementos presentes en el día a día de los alumnos.

La estructura del artículo es la siguiente:

- Se comenzará aportando datos proporcionados por el alumnado, a partir de una pequeña encuesta, que nos facilitará información sobre su opinión acerca de la decoración del aula.
- A continuación, se indicará la forma más inmediata de obtener todo el material y empezar a decorar el aula.
- Como conclusión, se finalizará con la exposición del material con el que se puede trabajar. Se intentará ir indicando, en la medida de lo posible, distintas ventajas y recomendaciones en cada uno de ellos, aportando los enlaces directos al material.

2. Encuesta de opinión sobre la decoración

Los datos aportados a continuación provienen de las respuestas dadas por un grupo heterogéneo de veinte alumnos de 1º de ESO. Dicho alumnado ya ha comenzado a decorar las paredes de su aula.

Dicha encuesta está formada por las siguientes preguntas:

Marca una única respuesta en cada pregunta, o responde:

1. ¿Cómo prefieres tener la clase?

○ Decorada ○ Sin decorar

2. ¿Cómo prefieres las decoraciones?

○ Propias, hechas por nosotros ○ Solo coloreables

3. ¿Te ha gustado la decoración que usa las Matemáticas?

○ Si ○ No

4. ¿Habías tenido alguna vez tu clase decorada con Matemáticas?

○ Si ○ No

5. ¿Sobre qué te gustaría tener decorada el aula?

○ Matemáticas ○ Otras asignaturas ○ Otras cosas

6. ¿Qué otra decoración se te ocurre que pueda usar las Matemáticas?

7. ¿Qué otra decoración se te ocurre que te gustaría que hubiese en tu aula?

Figura 1. Encuesta sobre decoración

El análisis de los resultados nos servirá para anteponernos a las futuras actividades decorativas que podamos llevar al aula. Es necesario conocer la disposición tanto al trabajo, como al grado de madurez del mismo. Esta misma encuesta realizada a un grupo de un nivel mayor arrojará resultados completamente distintos.

Los resultados obtenidos en la pregunta primera, la que nos hace saber la preferencia sobre tener o no la clase decorada, indican que todo el grupo responde que sí salvo en una de las encuestas en la que aparece marcada la respuesta negativa.

La segunda pregunta cobra algo más de importancia. Nos hace saber si los alumnos quieren ser los autores de las decoraciones o prefieren que se les dé el material. Estos son los resultados:

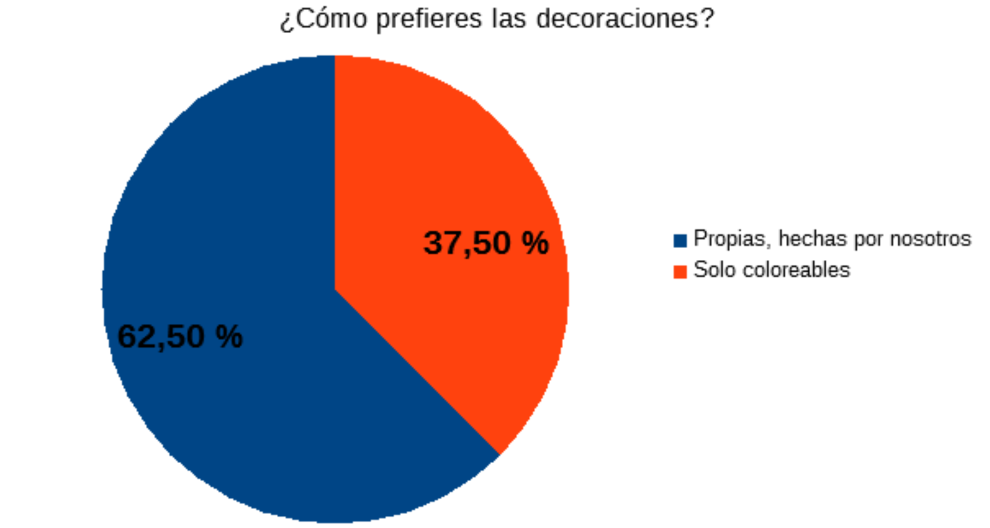


Figura 2. ¿Cómo prefieres las decoraciones?

Se observa que la mayoría elige el ser el autor de las decoraciones. No obstante, un porcentaje aceptable marca la respuesta que indica que no le importa que sea material coloreable.

En la tercera pregunta se va a valorar la decoración ya empleada en el aula. Esta encuesta se realiza a mediados del mes de noviembre, por lo que aún no se ha utilizado demasiado material. Las decoraciones se basan en unas normas de convivencia, unas imágenes de bienvenida al grupo, las asignaturas con letras coloreables y, a nivel matemático, unos carteles sobre las reglas de los signos y unos números disfrazados de Halloween (material que se detallará a lo largo del artículo). Los resultados son los siguientes:

Figura 3. – ¿Te ha gustado la decoración que usa las Matemáticas?

Aunque las respuestas de los alumnos pueden llegar a ser imprevisibles, lo cierto es que han respondido afirmativamente a la pregunta. Se debe indicar que hay dos respuestas anuladas, que no se contemplan en la encuesta porque o bien el alumno la dejó en blanco, o bien respondió literalmente en un lado "fifty fifty". Centrándonos en las respuestas aceptadas, el resultado anima a continuar con la dinámica de la decoración debido a la que parece ser una buena aceptación.

Pasamos a una nueva pregunta interesante, en la que los alumnos nos hacen saber si ellos han sido conscientes de haber tenido decoraciones relacionadas con las matemáticas en el colegio. Estos son los resultados obtenidos:

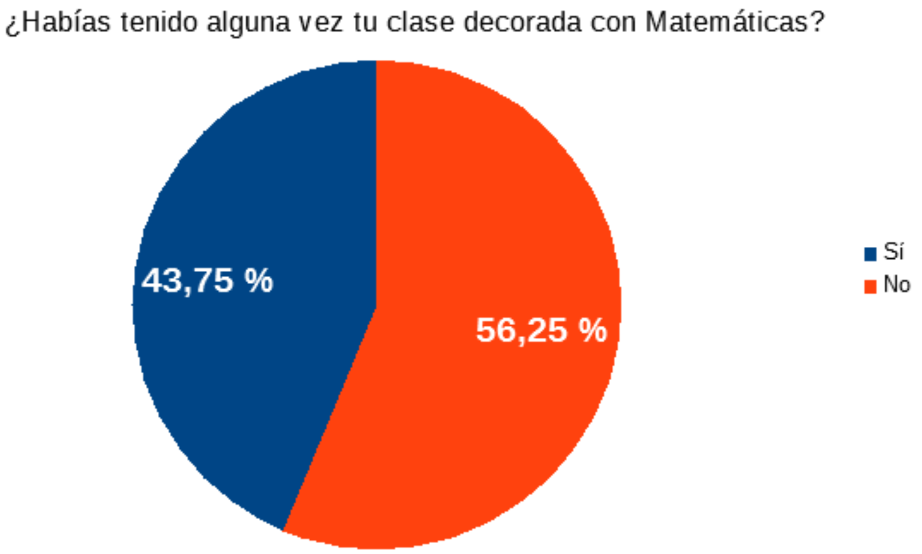


Figura 4. ¿Habías tenido alguna vez tu clase decorada con Matemáticas?

Se sabe que la asignatura de Matemáticas no es la única que reciben nuestros alumnos, y que tampoco suele ser la preferida de una parte importante de cada grupo. Es por ello que se les pregunta sobre con qué les gustaría tener decorada la clase, si matemáticas, otras asignaturas, o, directamente, con otras cosas. Los resultados obtenidos se muestran en el siguiente gráfico:

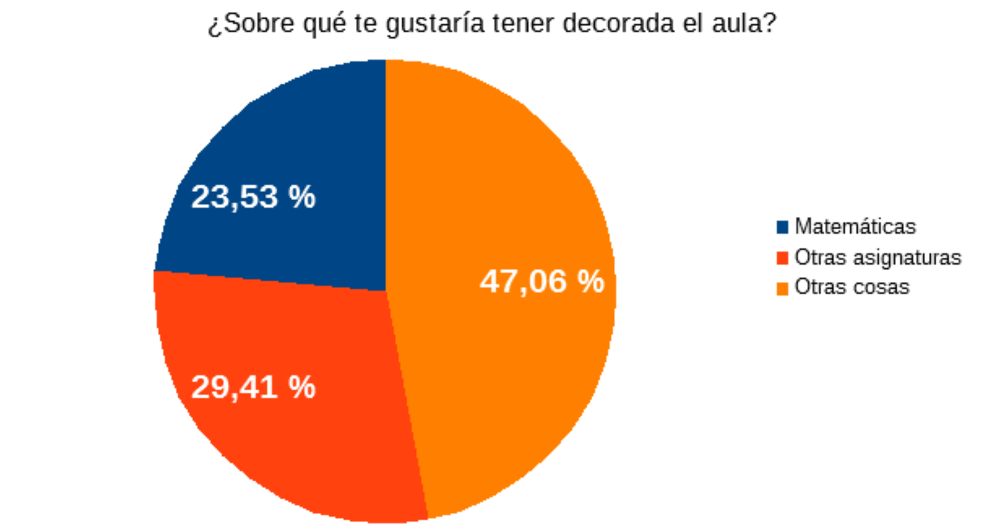


Figura 5. – ¿Sobre qué te gustaría tener decorada el aula?

Era de esperar que la respuesta que obtuviese mayor número de elecciones fuese la decoración del aula con otros elementos ajenos a lo académico. Si nos quedamos con los alumnos que eligen materias que estudian, los porcentajes que aparecen deben ser entendidos como favorecedores a la asignatura de Matemáticas frente a las nueve o diez materias restantes que reciben.

La pequeña encuesta finaliza con dos preguntas abiertas. La primera de ellas les hace pensar en ideas matemáticas que puedan llevarse a término como decoración para el aula. Entre ellas, destacan las siguientes respuestas:

- Mandalas con números.
- Poner los números favoritos de cada alumno.
- Una pelea con el signo de división, el de sumar, …

Para finalizar la encuesta, y este apartado del artículo, la última pregunta del cuestionario les da la oportunidad de indicar qué elementos exactamente son los que les gustaría a ellos que estuviesen en su aula. Es curioso como en esta pregunta, algunos alumnos que responden de forma dubitativa la anterior cuestión, aquí comentan ideas como los signos de las operaciones o los criterios de divisibilidad (esto último puede ser debido a un material entregado hacía poco). En cuanto a respuestas ajenas a la materia, se repiten ideas como:

- Relatos.
- Grafitis.
- Flores.

3. Obtención de material que nos permita el trabajo inmediato

Siempre podemos partir de cero en la creación de material para nuestro trabajo en clase, y descubrir el talento propio o del alumnado en el arte de la decoración. Tal como se ha comentado en las posibles ventajas que se listan en la introducción, o como se deduce de los resultados de las encuestas, pueden ser los mismos alumnos los que diseñen las decoraciones que iremos colocando en las paredes de nuestra aula. Sin embargo, puede resultar complejo conseguir esto al comienzo. Incluso es posible que sea necesario tener que destinar demasiado tiempo a ello. Y somos de sobra conscientes que es tiempo del que no solemos disponer para lograrlo. Uno de los objetivos de este artículo es facilitar una batería de ideas, así como mostrar los enlaces desde los que poder descargar las decoraciones.

Realmente no resulta difícil encontrar ideas de decoración para el aula de Matemáticas. Basta buscar por la red y visitar páginas como Pinterest o distintos blogs y foros de educación. Ocurre que muchas de estas decoraciones están destinadas para niveles de primaria, por lo que no resulta interesante llevarlas a un grupo de secundaria. Y si investigamos un poco más podremos encontrar material realizado en otros idiomas, principalmente en inglés. A día de hoy no es un problema el idioma. De hecho, si trabajamos con grupos bilingües puede ser una buena forma de ocuparse de ello. Por si no es el caso, todo el material que aparecerá en este artículo se encuentra en castellano o en el lenguaje universal de las matemáticas.

Todas las adaptaciones de los materiales que se han encontrado por la red, así como todas las decoraciones surgidas a partir de ideas propias, están disponibles en Matematicaula (http://matematicaula.com.es). Esta web fue creada en el 2008, y se ha convertido en un portal donde volcar todo el material que llevo a mis clases y que comparto con aquellos que les resulte de interés. Además de las decoraciones, tema del que trata el artículo, el visitante de la web puede descubrir una colección de applets de GeoGebra para trabajar los distintos contenidos de la ESO y Bachillerato, juegos imprimibles, juegos online, webquests, etc.

4. Carteles con contenidos matemáticos

En este apartado se expondrán distintos carteles con contenidos matemáticos. Como aspecto positivo, además del de decorar las paredes, se debe destacar la visión permanente de dichos contenidos matemáticos en el aula de referencia. Nosotros haremos uso de ellos en nuestra hora de clase, haciendo alusiones a los carteles siempre que lo requiramos.

Como afirman Díaz y Muñoz (2013), la aparición de carteles presenta de forma clara la información que contiene. Permiten asimilarla de manera inmediata por la persona que lo mira. Con una buena estructura y orden de las ideas a trabajar, los carteles podrán consolidar los contenidos tratados.

Y si lo pensamos, otro aspecto interesante del uso de carteles en el aula es que el alumnado se fijará en ellos en las horas de otras asignaturas. Y no solo se fijarán, sino que es posible que también puedan hacer uso de ellos en horas de guardia o en asignaturas afines (como puede ser Física o Tecnología).

El ejemplo que se va a mostrar es el de los signos en las operaciones con números enteros. Consiste en dos imprimibles distintos: uno con el resultado de la suma de números enteros, y otro con el signo final cuando un número entero está en el interior de un paréntesis.

Los enlaces a los archivos son los siguientes:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/signosenteros_poster.pdf

http://matematicaula.com.es/descargas/material/signosdelante_poster.pdf

Figura 6. Archivos de números enteros.

El resultado que podemos obtener, cuando imprimimos y pegamos por los bordes los cuatro folios que constituyen cada archivo, es el siguiente:

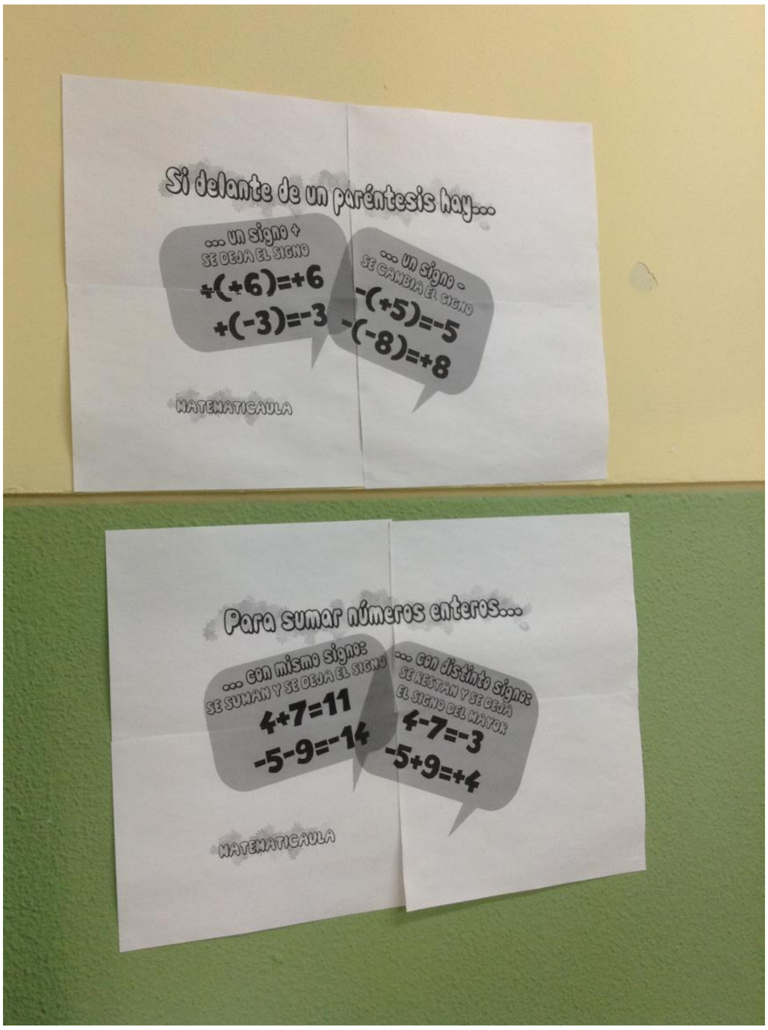


Figura 7. Carteles de números enteros.

Es conveniente que a los alumnos también se les entregue las imágenes, en tamaño reducido, para que las peguen en el cuaderno. Pero es posible que las pierdan o tarden en encontrarlas, y que al final no recurran a ellas. Por ello, estos posters se convierten en una manera fácil de conseguir que el alumnado deje de realizar operaciones con enteros sin seguridad en lo que hacen, devolviendo signos o resultados incorrectos. El material para el alumnado se puede descargar en los siguientes enlaces:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/signosenteros.pdf

http://matematicaula.com.es/descargas/material/signosdelante.pdf

5. Carteles con contenidos matemáticos

Como afirma Collado (2017), no podemos controlar la acústica, la temperatura, la luz o la calidad del aire del aula, pero sí el entorno visual. El objetivo no es abarrotar las paredes de decoraciones que pueden llevar a la distracción. Pero sí puede ser bueno un punto de equilibrio que haga más agradable y personalice el lugar de trabajo.

En este apartado se van a proponer distintas decoraciones que se podrán utilizar en distintas épocas señaladas del curso. Estas servirán de motivación extra en periodos como Halloween, Navidad, San Valentín e incluso las vacaciones de verano.

Al comenzar el curso podemos empezar la decoración del aula con 'el número uno en el arte moderno'. Se trata de una colección de nueve fichas en las que quedan representados nueve tipos distintos de arte: modernismo, dadaísmo, cubismo, ... El enlace es:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/Arte moderno con numeros - UNO.pdf

Figura 8. Arte moderno con el número uno.

Para los días previos a Halloween tenemos números que han sido disfrazados de monstruos. El dos se convierte en un fantasma, el siete es un hombre lobo, los ochos son demonios, o los ceros son calabazas. El enlace es:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/Halloween.pdf

Figura 9. Números disfrazados de Halloween.

Cuando el mes de diciembre se acerca es momento de montar nuestro belén matemático. Los números se convertirán en ovejas, pastores e incluso los Reyes Magos. La Virgen, San José y el niño Jesús son los números uno, dos y tres, respectivamente. Así podemos llegar hasta los números diez, once y doce para los tres Reyes Magos. El enlace es:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/Belén matemático.pdf

Figura 10. Belén matemático.

Tras las fechas navideñas, la siguiente fiesta reseñable es San Valentín. Es posible decorar las paredes del aula con corazones y mensajes de amor, los cuales pueden quedar remarcados si los bordes de los corazones están hechos de números. El enlace al material es:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/CorazonNumeros.pdf

Figura 11. Corazones para San Valentín.

Acabamos el curso con los números que, al igual que el resto, se van de vacaciones. Se han puesto los bañadores, han cogido flotadores, libros, o pelotas, y nos auguran un buen verano a nosotros. El enlace desde el que podemos descargarnos el imprimible es:

http://matematicaula.com.es/descargas/material/Vacaciones.pdf

Figura 12. Números preparados para las vacaciones.

6. Decoraciones en las que aparece la Geometría

El bloque de Geometría es, posiblemente, uno de los que más nos invita a decorar el aula. Si no nos perdemos en fórmulas y definiciones, podemos dedicar momentos de clase para generar elementos decorativos.

Un ejemplo es el árbol pitagórico. Consiste en un fractal en el que se va repitiendo la visualización de este teorema: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". De esta forma, los cuadrados de los lados del triángulo se van sucediendo de manera progresiva, desde el tronco hasta las ramas, hasta formar el árbol. La creatividad del alumnado es la que hará que esta decoración no termine en un bosque aburrido. El enlace al material es

http://matematicaula.com.es/descargas/material/ArbolPitagorico.pdf

Figura 13. Fractales con el Teorema de Pitágoras.

También podemos acercar el número pi de muchas formas a nuestra clase. Solemos tenerlo presente el 14 de marzo, cuando se celebra su día mundial. Entre esas posibles actividades, se va a destacar en este artículo el denominado Pi Skyline. Imaginamos una ciudad en el horizonte, llena de rascacielos que se van sucediendo. Las alturas de estos rascacielos no son cualquiera, sino que quedan determinadas por las cifras consecutivas del número pi. Esta actividad tiene unos resultados muy interesantes cuando se unifican todos los skyline de los alumnos. El enlace es

http://matematicaula.com.es/descargas/material/PiSkyline.pdf

Figura 14. Pi skyline.

7. Conclusiones

Tras disponer de una batería de material básico para llevar al aula llega el momento de decidir si comenzar a trasformar el entorno de nuestros alumnos para llenarlo de matemáticas.

Castro y Morales (2015) demuestran que la decoración del aula es un elemento más a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se están empezando a hacer estudios sobre dicho entorno del alumnado. Queda de manifiesto que los alumnos tienen presente todo lo que les rodea: luz, color, ruido, limpieza, mobiliario y también la decoración. No podemos perder la oportunidad y conseguir introducir nuestra materia allí donde sea posible.

Referencias

[1] CASTRO, M., MORALES, M. E. *Los ambientes de aula que promueven el aprendizaje, desde la perspectiva de los niños y niñas escolares*. Revista Electrónica Educare, vol. 19, núm. 3, septiembre-diciembre, 2015, p. 1-32

[2] COLLADO, M.L. *La decoración en el aula*. PublicacionesDidacticas.com, Nº 80, p. 97-99, marzo 2017.

[3] DÍAZ, M. R., MUÑOZ, A. *Los murales y carteles como recurso didáctico para enseñar ciencias en Educación Primaria*. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 10(3), p. 468-479, 2013.

Sobre el autor:
Nombre: Óscar Jesús Falcón Ganfornina.
Correo Electrónico: oscfalgan@yahoo.es
Institución: Departamento de Matemáticas, IES San Pablo, Sevilla, España.

Historias de Matemáticas

Ingeniería y Matemática: armonías

Engineering and mathematics: harmonies

Marco Castrillón López, Omar Gil Álvarez, y María Jesús Vázquez-Gallo

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 037–048, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Feb'19; Aceptación: 14 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

La ingeniería y la matemática se han retroalimentado desde sus inicios. La ingeniería como la aplicación del conocimiento científico a la invención práctica y la matemática como el conocimiento científico en sí mismo. Este artículo se sitúa en el germen del desarrollo de la física-matemática como herramienta clave en la ingeniería, a través del problema de la cuerda vibrante, con un final envuelto en "armonías".

Palabras Clave: ingeniería, matemática, física, cuerda vibrante, ondas, armonía.

Abstract

Engineering and mathematics have been fed back since its inception. Engineering as the application of scientific knowledge to practical invention and mathematics as scientific knowledge itself. This article is placed in the germ of the development of mathematical physics as a key tool in engineering, through the vibrating string problem, with an end wrapped in "harmonies".

Keywords: engineering, mathematics, physics, vibrating string, waves, harmony.

1. Introducción

Daniel y Leonard se habían conocido cuando estudiaban en Suiza, en la Universidad de Basilea. Sus familias eran amigas. Daniel estudió medicina influido por su padre, médico y matemático, llegando a realizar una tesis sobre la respiración. Leonard recibió el título en filosofía y siguió estudiando teología, griego y hebreo porque su padre quería que fuese pastor religioso. A la vez, el padre de Daniel, comenzó a dar lecciones de matemáticas a los dos amigos, y percibió en Leonard tal capacidad para esta ciencia que, finalmente, logró que se doctorase en este campo con una tesis sobre la propagación del sonido.

Un tiempo después, Daniel trabajaba en la Academia de San Petersburgo, como profesor de fisiología. Se encontraba fascinado por las ideas del filósofo Descartes -para quien la vida se fundamentaba en el calor concentrado en el corazón que se comunicaba mecánicamente con el resto del cuerpo- y también por los trabajos de W. Harvey sobre el sistema circulatorio. Había leído tratados italianos en los que se empleaban métodos de hidráulica para estudiar la circulación sanguínea y conocía la tesis de doctorado de su padre Johann, en la que se modelaba el movimiento de los músculos como un problema mecánico de medios elásticos. Inspirado por estos trabajos y con la intención de potenciar una escuela de fisiología basada en principios mecánicos y matemáticos, Daniel invitó a la Academia a su amigo Leonard, consciente de su talento físico-matemático, y durante varios años compartieron apartamento a orillas del Neva. Fueron tiempos creativos y fructíferos, plagados de discusiones científicas entre la visión intuitiva y experimental de Daniel y el enfoque riguroso de Leonard, más preocupado por la teoría general.

A partir de la combinación de las dos inquietudes: "cómo hacer" y "cómo pensar", tras aquellos años, Daniel publicó una teoría hidráulica sólida y rigurosa, basada en la dinámica de fluidos, considerando la interacción de la presión y de la velocidad. Esta teoría sustenta buena parte de la ingeniería actual: desde el suministro de agua hasta el diseño de las alas de un avión.

2. Ingeniería y matemática

Podríamos calificar a Daniel y a Leonard como antiguos ingenieros o antiguos matemáticos o antiguos físico-matemáticos porque la frontera era porosa y ni siquiera había nacido la ingeniería moderna… Nuestro Daniel era Daniel Bernouilli (1700-1782), miembro de una familia de celebrados matemáticos, a quien la Universidad de Basilea le acabó concediendo en 1750 la cátedra que había ocupado su padre, Johann. Daniel Bernouilli contribuyó no sólo a la hidrodinámica sino también a la termodinámica, a la teoría cinética de los gases y a la teoría de la probabilidad, esencial en los modernos ensayos con medicamentos o en el control de calidad en ingeniería, entre otros muchos campos.

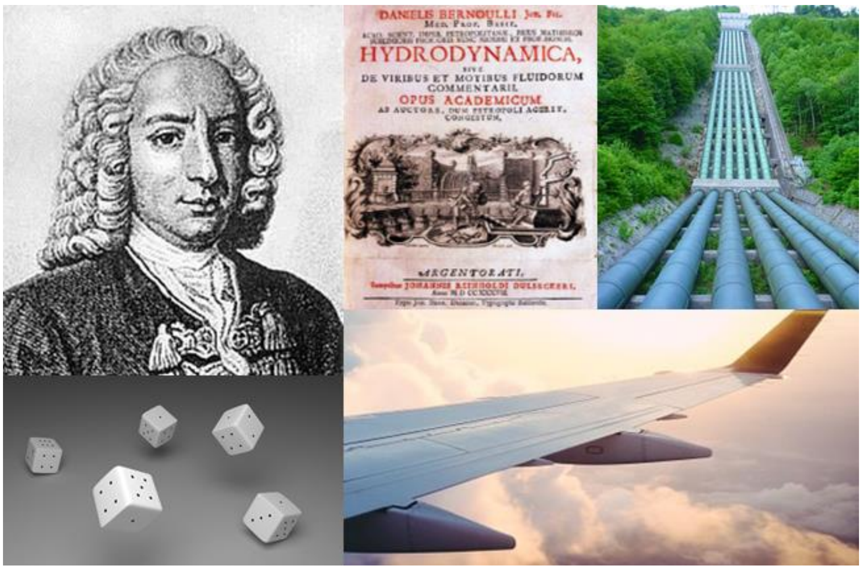


Figura 1. Daniel Bernouilli: obra y aplicaciones.

Daniel ganó 10 premios de la Academia de Ciencias de París, sólo superado por… Por su amigo Leonard, Leonard Euler (1707-1783), que ganó 12 premios de la academia francesa, después de quedar segundo tras un ingeniero naval cuando compitieron para encontrar la forma óptima de posicionar un mástil en un buque.

A Leonard Euler se le describe como matemático -quizá el más prolífico de todos los tiempos- pero también fue filósofo y físico, haciendo contribuciones a la mecánica, a la óptica y a la astronomía; y realizó además aportaciones específicas a la ingeniería, en balística y en topografía, entre otras áreas; suya es la ley sobre el pandeo de soportes verticales y la carga crítica de columnas.

Leonard Euler cultivó todas las áreas de la matemática, incluso dando origen a algunas de ellas, como la teoría de grafos, que tiene un antecedente directo en la resolución, a petición de sus ciudadanos, del célebre problema de los puentes de Königsberg: ¿es posible pasearse por la ciudad atravesando una sola vez cada uno de los siete puentes existentes? (ver figura 2). Algunos de estos puentes ya no existen y otros han sido remodelados. La teoría de grafos sigue siendo fuente de actividades lúdicas, pero es también una rama de la matemática con su cuerpo propio de teoría y aplicaciones sumamente variadas, por ejemplo, aplicaciones a cuestiones logísticas, como la optimización de rutas. En general, esta teoría se puede utilizar en todo tipo de problemas que involucren conexiones en redes de cualquier naturaleza.

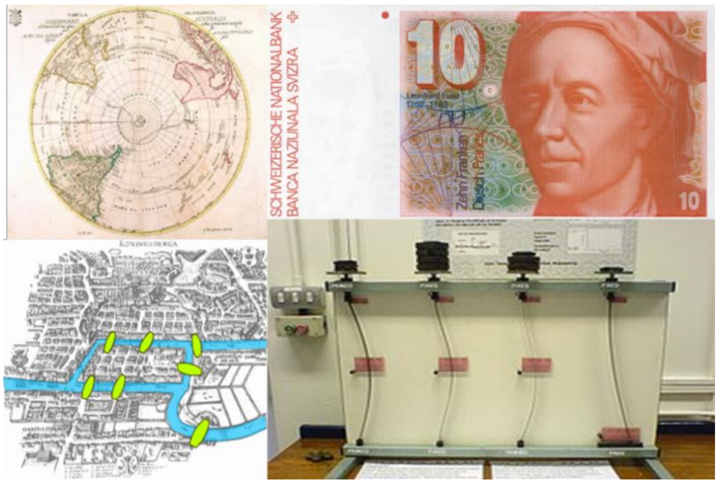


Figura 2. Leonard Euler. Los puentes de Königsberg. Aplicaciones.

Daniel y Leonard mantuvieron un intercambio fructífero, uno hacía de guía en la comprensión de los fenómenos físicos concretos, y el otro en la matemática necesaria para formular principios y leyes generales. En este intercambio, la controversia y la discusión científica condujeron a cruciales avances.

De la misma manera, la ingeniería y la matemática se han retroalimentado desde sus inicios. La ingeniería como la aplicación del conocimiento científico a la invención práctica: ¿cómo hacer? (el término ingeniería viene del latín "ingenium": inteligencia inventiva; el origen del término puede estar en un ariete con ese nombre inventado hacia el 200 d. C. para atacar las murallas) y la matemática como el conocimiento científico en sí mismo: ¿cómo pensar? (el término matemática viene del griego “mathema”: aprendizaje, conocimiento, estudio). Si bien hasta el Renacimiento, la ingeniería fue eminentemente práctica y con una gran componente artística -el “arte de inventar”-, tras la Revolución Francesa, se gesta la ingeniería moderna con una sólida formación científica en matemática y en física como pilares fundamentales: en lo metodológico y en lo instrumental. La física-matemática está cuajada de ecuaciones diferenciales que describen todo tipo de procesos relevantes en ingeniería.

El germen del desarrollo de la física-matemática, como herramienta clave en la ingeniería, está precisamente en los trabajos de nuestros protagonistas: Daniel Bernouilli, Leonard Euler y el francés Jean D’Alembert (1717-1783), matemático, filósofo y enciclopedista ilustrado, autor del conocido principio D’Alembert, emparentado con las leyes de Newton, que permite determinar las reacciones mecánicas en el cálculo con vigas y otros problemas de mecánica de sólidos.

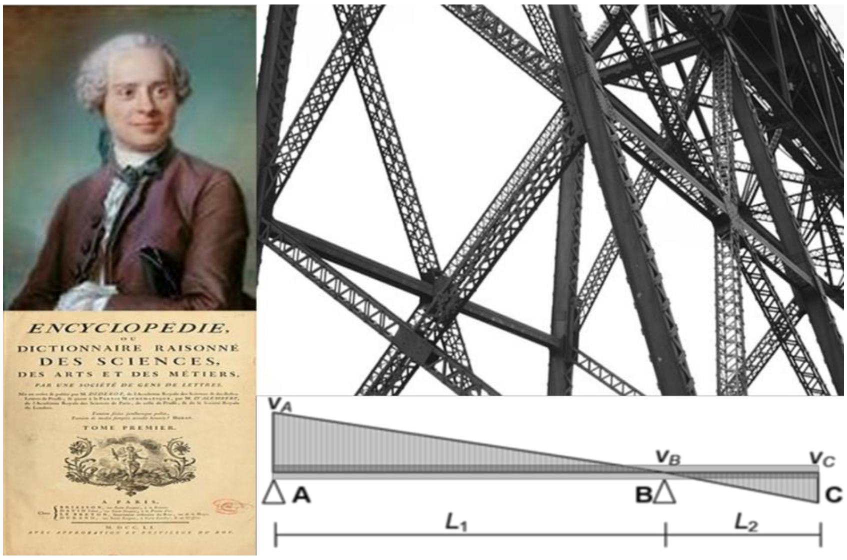


Figura 3. Jean D’Alembert. Obra y aplicaciones.

En el discurso preliminar a la Enciclopedia (1751), D’Alembert afirmaba:

> *No podemos esperar conocer la naturaleza mediante hipótesis vagas y arbitrarias, sino por el estudio reflexivo de los fenómenos, por la comparación que haremos de los unos con los otros, por el arte de reducir, en la medida de lo posible, un gran número de fenómenos a uno solo que puede ser mirado como su principio.*

D. Bernouilli, Euler y D’Alembert protagonizaron una interesante polémica sobre el llamado problema de la cuerda vibrante con un final envuelto en “armonías”.

3. El problema de la cuerda vibrante

Podría parecer que una cuerda que vibra no tiene mayor interés. Pero una cuerda que vibra, por ejemplo, la cuerda de un violín, o cualquiera de nuestras cuerdas vocales, crea un sonido que en la mayoría de los casos podemos oír, ya que poseemos unos órganos capaces de detectar ondas de compresión en el aire. Las ondas son perturbaciones que se propagan en el espacio transportando energía y… están en todas partes… Por ejemplo, nuestra vista, en general, detecta ondas de radiación electromagnética, y este tipo de ondas, que no necesitan un medio material para propagarse, son la base de la radio, la televisión, el radar o los teléfonos móviles. También son ondas las producidas por un terremoto, llamadas ondas sísmicas. Entonces, el descubrir qué leyes gobiernan las ondas nos puede ayudar a predecir un tsunami o a mejorar la comunicación con un satélite.

Desde luego, en el siglo XVIII, las motivaciones de D. Bernouilli, Euler y D'Alembert no tenían que ver con satélites. Pero el mundo actual de las comunicaciones a gran velocidad o el sofisticado diseño estructural, sería ciertamente distinto sin sus consideraciones físicas y matemáticas sobre cómo vibra la cuerda de un violín, utilizando un modelo aún más simple que la cuerda real y dando sentido, como veremos en un momento, a la teoría pitagórica de la armonía de la naturaleza.

El término "armonía" deriva del griego "ἁρμονία", como acuerdo y concordancia; en el sentido de ajuste o conexión. Nos ha llegado a través del latín "harmonia", derivado de "armós" (juntar, hombros). En mitología, la diosa griega Harmonía tuvo su equivalente romano en la diosa Concordia. El concepto de armonía implica juntar una cosa con otra en un orden placentero.

Volviendo a los pitagóricos, unos 500 años a. C., creían que todo se basaba en números (naturales: los que usamos para contar 1, 2, 3…) y en proporciones entre ellos. Opinaban que los movimientos de los planetas generaban vibraciones armónicas imperceptibles: la "música de las esferas" mencionada también por Platón (427-347 a. C.), y por Kepler (1571-1630) en su obra "Harmonices mundi". Uno de los grandes logros de la visión pitagórica sentó las bases de la música occidental, afirmando que proporciones simples gobiernan la armonía musical. Se cuenta que Pitágoras al pasar por una herrería se dio cuenta de que los martillos pequeños emitían sonidos más agudos que los grandes… Para entender lo esencial de este fenómeno, por qué no pensar primero en el problema simplificado -como suele hacer la matemática- estudiando el comportamiento de una simple cuerda vibrando… De hecho, Ptolomeo documentó en su obra "Harmonicos", hacia el año 150 d.C., los experimentos realizados por los pitagóricos con un monocordio, un rudimentario instrumento musical con una única cuerda.

En un monocordio, la longitud de la cuerda se podía modificar como hoy se pisa con los dedos la cuerda de una guitarra o de un violín. Cuanto más corta era la cuerda más alto o agudo era el sonido. Metódicamente, los pitagóricos compararon por pares los sonidos producidos por distintas longitudes, descubriendo que las parejas de sonidos producidos por cuerdas con largos relacionados por números pequeños resultaban los más placenteros –armónicos–. En concreto, la relación de 2 a 1, en la que se pulsa una cuerda y otra de longitud mitad, suenan prácticamente indistinguibles. Esta relación se conoce hoy en día como octava, y configura el patrón fundamental de las escalas actuales. De esta forma, a dos sonidos que se separen por octavas, es decir, cuyas frecuencias están una relación igual a una potencia de dos, se les asigna el mismo nombre.

La siguiente armonía en importancia dentro de la jerarquía pitagórica es la derivada de la relación 3 a 1, o equivalentemente con un cambio de octava, de la relación 3 a 2. A este intervalo musical se le denomina quinta. La escuela pitagórica seleccionó así, a partir de concatenaciones de quintas, una colección de notas, que es la conocida como escala pitagórica. Más en concreto, se consideran razones del tipo $\frac{3^m}{2^n}$, de forma que para cada $m = 1{,}2, \ldots$ se escoge el menor n para que este cociente esté entre 1 y 2 (entre una nota y la separada por una octava). Con 7 pasos, se tiene las famosas 7 notas de la escala Do Re Mi Fa Sol La Si, y con 12, la escala cromática. El siguiente paso, el 13, nos daría una nota muy cercana a la de partida…pero no la misma. A la diferencia entre esas dos notas se le denomina coma pitagórica, y su resolución llevó posteriormente a la construcción de las llamadas escalas temperadas[1]. De cualquier manera, los pitagóricos establecieron un modelo matemático de un fenómeno físico, con una motivación estética, como hicieron después los renacentistas con la proporción áurea. Los modelos no capturan todos los aspectos de la realidad pero guían su análisis.

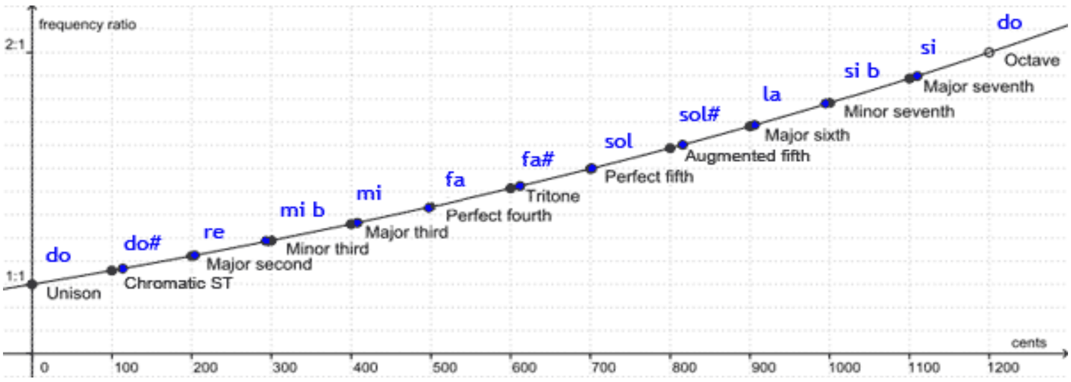


Figura 4. Las diferencias de afinación pitagórica y temperada son sutiles. Gráfica tomada de https://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-temperada.html

Con este modelo, ya tendríamos el ¿cómo hacer? Pero: ¿cómo pensar? ¿Por qué las proporciones simples producen sonidos armoniosos? ¿Qué ocurre al ejercer fuerza sobre la cuerda?

Poco antes de que nacieran Daniel y Leonard, Sir Isaac Newton (1643-1727) ya había publicado sus "Principia", estableciendo con sus leyes las bases de la mecánica clásica. Estas leyes estaban formuladas en el lenguaje del cálculo diferencial e integral, que Newton desarrolló de forma paralela al alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). La segunda ley de Newton (1643-1727) afirma que la fuerza aplicada a cierto objeto es directamente proporcional a la aceleración producida y el factor de proporcionalidad es la masa del objeto. Otro inglés de la época, Robert Hooke (1635-1703), que polemizó con Newton sobre la autoría

[1]Desde finales del siglo XVII aproximadamente, predominan las llamadas escalas temperadas, o de igual temperamento, en las que las razones entre frecuencias no son tan simples como en la escala pitagórica, pero son muy, muy cercanas a ellas. Surgieron como remedio al problema de la "coma pitagórica", es decir, al hecho de que no cuadren doce quintas, o sea $(3/2)^{12}$, y siete octavas, es decir 2^7 (hecho relacionado con el de que una potencia no trivial de 3 no puede ser igual a una potencia de 2). Una de las opciones posibles para liberarse de esa discrepancia la proponen las escalas temperadas, con una octava dividida en n intervalos iguales de tamaño la raíz n-ésima de 2 y, como consecuencia, involucrando números irracionales en lugar de números racionales, como hacía la escala pitagórica.
La escala temperada más utilizada en la música occidental emplea $n = 12$ intervalos iguales. En la figura 4, en el eje horizontal, la unidad de afinación utilizada es el cent, equivalente a la centésima parte logarítmica de un semitono temperado, es decir, 1 cent = $\sqrt[1200]{2}$.

de la ley de gravitación universal, descubrió que el cambio de longitud en un objeto elástico es proporcional a la fuerza ejercida en él, y el factor de proporcionalidad es una constante que depende de la mayor o menor elasticidad del objeto.

Parecería que la respuesta ya está clara… porque la aceleración es el cambio de velocidad con respecto al tiempo, y la velocidad es el cambio en el desplazamiento con respecto al tiempo (en el lenguaje del cálculo diferencial: la aceleración es la segunda derivada de la función desplazamiento con respecto a la variable tiempo). Entonces, traduciendo las dos leyes anteriores (Newton y Hooke) a ecuaciones diferenciales (con derivadas), se podría obtener como solución de dichas ecuaciones el desplazamiento, es decir, el cómo se mueve la cuerda.

Pero la ley de Newton se aplicaba a un único objeto, en un único punto, o en todo caso a un sistema con un número finito de masas… y una cuerda es una línea formada por un infinito de puntos, como una recta de números reales… Aquí entra nuevamente la matemática en juego y fue el reputado matemático Johann Bernouilli, el padre de Daniel, quien trabajó sobre el problema, considerando primero una cuerda sin peso, flexible e inextensible sobre la que se colocan una serie de masas idénticas igualmente espaciadas. Johann fue capaz de pasar al caso continuo, el de la cuerda "real", tomando límite en el número de masas (hablando de límites, fue Johann quien en realidad demostró la famosa regla de L'Hôpital, un marqués ducho en matemáticas que le había contratado para que lo instruyera). La solución que encontró Johann, era que el comportamiento de la cuerda, al vibrar arriba y abajo, repitiendo el mismo movimiento una y otra vez, corresponde técnicamente a que, en cada instante de tiempo, la forma de la cuerda es una curva sinusoidal en el espacio (gráfica de la función trigonométrica "seno"), es decir, una onda, cuya máxima altura (la amplitud de la onda) también sigue una curva sinusoidal en el tiempo.

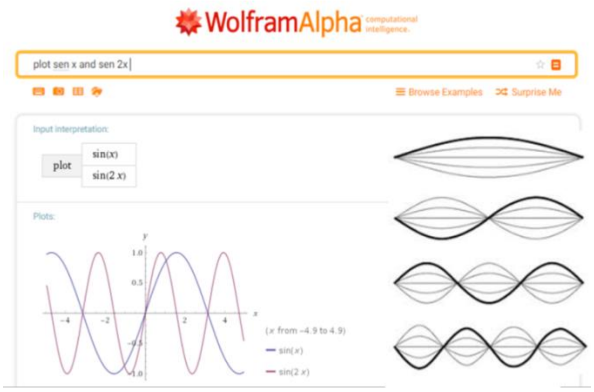


Figura 5. Funciones seno. Modos de vibración: fundamental y armónicos.

Johann Bernouilli encontró además otras soluciones: diferentes modos de vibrar que mostraban varias ondas a lo largo de la longitud de la cuerda. Cuantas más ondas, más rápido se mueve la cuerda, es decir, la frecuencia de la vibración es mayor. Los extremos de la cuerda siempre están fijos y en cada modo de vibración, exceptuando el primero, hay más puntos que se quedan quietos: los nodos de la vibración. Las distancias entre nodos y, por tanto, las frecuencias, están en proporciones sencillas, como las que observaban los pitagóricos: la distancia entre nodos del tercer modo, multiplicada por 3 y dividida por 2, nos da la distancia entre nodos del segundo modo, etc.

Pero ¿por qué suenan agradables –armoniosas- estas proporciones? Si las proporciones entre frecuencias no son simples, al superponer las ondas correspondientes, se produce el efecto conocido como batimiento. El oído también vibra cuando registra los sonidos y el batimiento produce un zumbido a veces fuerte y a veces suave que no nos resulta agradable (o quizá habría que decir conocido… en esto último hay una dimensión cultural porque el oído se compenetra con los sonidos que escucha habitualmente).

Volviendo al problema de la cuerda vibrante, los experimentos con cuerdas reales mostraban que, así como nuestros oídos perciben un sonido más complejo que el tono fundamental o sus diversos armónicos cuando una cuerda de un violín vibra, la forma que adopta una cuerda al vibrar partiendo de cierta posición inicial no es siempre sinusoidal, sino una onda periódica más compleja.

Así que Johann Bernouilli no estaba resolviendo del todo el problema… Fue Daniel quien, gracias a su vena experimental y a sus conocimientos musicales, llegó más allá que su padre y que otros matemáticos de la época, proponiendo que la solución general del problema matemático era una superposición de vibraciones fundamentales, o sea, una suma de ondas sinusoidales. Un poco más tarde, su amigo Leonard, -Leonard Euler-, junto a Jean D'Alembert, más duchos en el formalismo matemático, fueron capaces de considerar el desplazamiento de la cuerda vibrante como función simultánea del espacio y del tiempo, es decir, como función de dos variables. Históricamente, esta fue la primera ocasión en que se utilizó con éxito una ecuación en derivadas parciales.

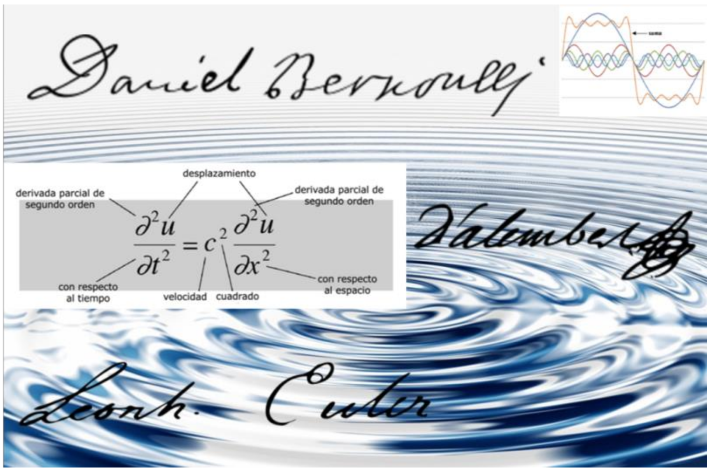


Figura 6. La ecuación de ondas. (Figura basada en Las 17 ecuaciones que cambiaron el mundo. I.Stewart)

D'Alembert y Euler consiguieron demostrar que si una cuerda tensa con los extremos fijos vibra a partir de cierta posición o perfil inicial, su comportamiento lo describe una función periódica de las variables espacio y tiempo que se puede escribir como suma de senos (y cosenos) con distintas amplitudes y frecuencias. A su vez, entre ellos discrepaban incluso en el concepto de función, porque D'Alembert sólo consideraba funciones con gráficas suaves mientras que Euler aceptaba funciones más acordes con la realidad, cuyas gráficas pueden presentar picos…

Una vez más, Daniel entró en la polémica y recordándole a Leonard los viejos tiempos en San Petersburgo, empleó argumentos físicos e intuición musical para proponer que el movimiento de una cuerda que vibra partiendo de una forma inicial cualquiera (con picos o sin ellos), se puede describir como suma de infinitos, ¡sí!, infinitos, movimientos armónicos sinusoidales.

La consecuencia de aquello es que hoy en día, la ingeniería es capaz, por ejemplo, de analizar la vibración de la estructura de un puente sometido al efecto del viento y del tráfico, como una vibración compleja que se obtiene combinando modos fundamentales de vibración con diversas frecuencias.

4. Armonías

Daniel Bernouilli, Leonard Euler y Jean D'Alembert, nuestros tres ¿filósofos? ¿físico-matemáticos? ¿o quizá ingenieros modernos? siguieron discrepando porque el análisis matemático aún no estaba suficientemente desarrollado en cuanto a las ecuaciones en derivadas parciales y al propio concepto de función, pero Daniel había dado un gran paso hacia el conocido como análisis armónico, iniciado ochenta años después de estas discusiones científicas por el fránces Jean-Baptiste Joseph Fourier (1772-1837), cuando estudiaba en otro contexto un problema relacionado con el anterior, a saber, el comportamiento de la temperatura de una varilla cuyos extremos se mantienen a una temperatura constante, conocido el estado inicial de la varilla.

A comienzos del siglo XIX, el barón de Fourier publicaba su teoría analítica del calor, demostrando que cualquier función (real) por muy complicada que sea, puede representarse en cualquier intervalo finito por una serie o suma infinita de funciones sencillas (senos/cosenos) y que, además, si el intervalo y la serie se fijan, los coeficientes quedan unívocamente determinados. La primera parte ya la había intuido Daniel y la segunda era lo que le preocupaba a Leonard. En el lenguaje del álgebra, las funciones sencillas son autovectores de cierto problema y las frecuencias son los autovalores correspondientes. A partir de entonces, las series de Fourier comenzaron a utilizarse en multitud de aplicaciones: acústicas, ópticas, eléctricas...

En la actualidad, los métodos de Fourier y otros relacionados -como el análisis de ondículas de Ives Meyer, el Premio Abel de Matemáticas en 2017, análogo al Nobel- se emplean en gran parte de la ciencia y de la ingeniería modernas. Estas ideas, que implicaron enormes avances en el desarrollo de las matemáticas necesarias para comprender los medios continuos tienen también impacto en nuestro mundo digital. Así como el cine genera la sensación de un movimiento continuo a través de la proyección sucesiva de imágenes estáticas, el sonido se codifica digitalmente tomando muestras espaciadas, y una imagen en la pantalla de nuestra computadora surge de las combinaciones de pixeles. Millones de ellos, pero un conjunto finito.

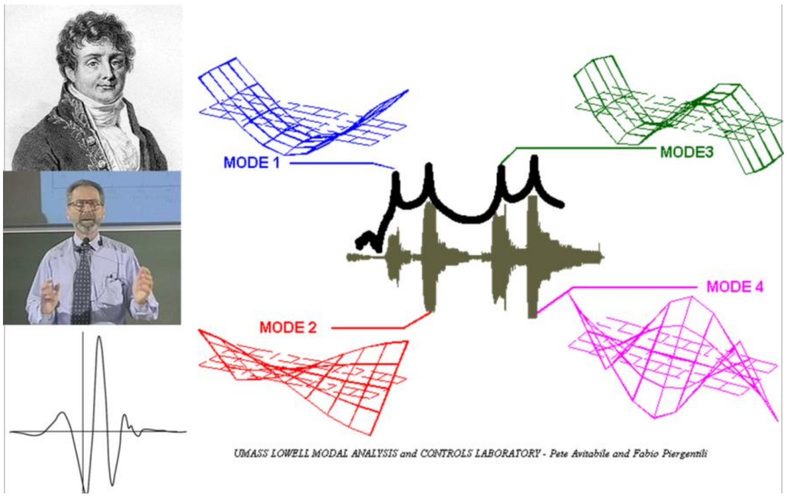


Figura 7. Fourier. I. Meyer. Modos de vibración. Ondículas.

Estas nociones de muestreo y de reconstrucción a partir de una muestra conectan el mundo digital con el analógico. Es así que el análisis armónico de Fourier tiene en la actualidad versiones discretas, con aplicaciones diversas a la tecnología de comunicaciones. Intervienen en la codificación de sonidos, algo que nuestras historias de violines y otras estructuras vibrantes podrían hacernos presumir, y también en la codificación de imágenes.

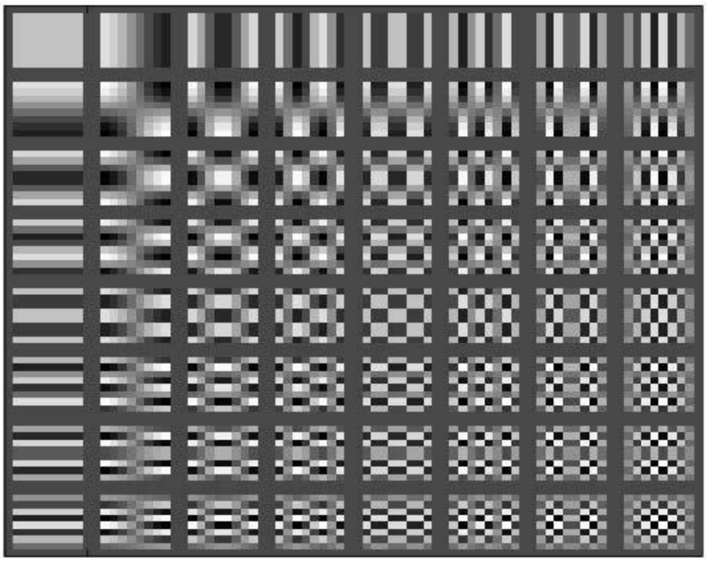


Figura 8. Colección de imágenes utilizada en el estándar JPEG.

La figura 8 muestra una familia de imágenes, con distintos modos de oscilación en cada una de las direcciones horizontal y vertical, que el estándar JPEG utiliza para representar imágenes cualesquiera, tras subdividirlas en una colección de bloques de ocho por ocho píxeles.

El desarrollo riguroso de las ideas de Fourier encontró dificultades técnicas: en la primera mitad del siglo XIX, J. Dirichlet obtuvo la primera definición clara del concepto de función, y A. Cauchy y K. Weierstrass avanzaron en la comprensión de la convergencia de series infinitas. A principios del siglo XX, el alemán David Hilbert y sus colaboradores definieron axiomáticamente el concepto abstracto de espacio de Hilbert (un espacio en el que hay una medida o producto interior que lo hace completo: cualquier sucesión de Cauchy – en la que los términos se acercan más y más entre sí a medida que se avanza en ella- converge). Unos años más tarde, Hermann Weyl, Paul Dirac y John von Neumann establecieron este concepto como la piedra angular de la mecánica cuántica (los estados posibles de un sistema cuántico son elementos de cierta clase de espacios de Hilbert). Sin la mecánica cuántica, tecnologías como el láser (*light amplification by stimulated emission of radiation*), las pantallas planas o la energía nuclear, serían diferentes… o no existirían.

Figura 9. Armonías entre ingeniería y matemática

Del monocordio a la energía nuclear, desde la dinámica estructural a la compresión de imágenes, a la mejora de los diagnósticos médicos, al análisis de turbulencias, al reconocimiento de voz, a la biometría y a la predicción de terremotos… armonías entre ingeniería y matemática que permiten al ser humano disfrutar y avanzar. Quién podía imaginar que problemas matemáticos abstractos relacionados con motivaciones musicales condujesen a aplicaciones de tanta importancia en la ciencia y en la ingeniería. Como el timbre de nuestra voz, o el de cada instrumento musical, o la vibración de un puente, es una receta especial que combina de forma particular diversos armónicos, y confiere cierta personalidad, cada persona puede hacer valer el timbre de su pensamiento, combinando de forma especial lo aprendido y lo vivido para mejorar en lo que quiera ser: profesional de calidad en ciencia, en tecnología, en ingeniería, en matemática...

Referencias

[1] ARBONÉS, J., MILRUD, P. *Música y Matemáticas*, RBA Ed, Barcelona, 2018.

[2] DUNHAM, W. *EULER. El maestro de todos los matemáticos*, Editorial Nívola, Madrid, 2000.

[3] SÁNCHEZ, C., VÁLDES, C. *Los Bernouilli. Geométras y viajeros*, Editorial Nívola, Madrid, 2001.

[4] STEWART, I. *Las 17 ecuaciones que cambiaron el mundo,* Editorial Planeta, Barcelona, 2013.

[5] Web de imágenes. *Pixabay*, http://www.pixabay.com

Sobre los autores:

Nombre: Marco Castrillón López
Correo Electrónico: mcastri@mat.ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: Omar Gil Álvarez
Correo Electrónico: omargil@fing.edu.uy
Institución: Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Nombre: María Jesús Vázquez Gallo
Correo Electrónico: mariaejesus.vazquez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Maryam Mirzakhani en Surfer

Maryam Mirzakhani on Surfer

Xaro Nomdedeu Moreno

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 049–062, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Feb'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

Breve biografía personal contextualizada de Maryam Mirzakhani y sucinta aproximación a los conceptos involucrados en su trabajo, acreedor de la primera Medalla Fields obtenida por una mujer. La contextualización se hace al hilo del film Persépolis, y la aproximación a su obra cuenta con el apoyo de objetos dinámicos construidos con el programa Surfer

Palabras Clave: Moduli, Geodésicas, Superficies de Riemann, Parametrización, Billares, Terremotos, Surfer, Seguridad.

Abstract

Maryam Mirzakhani's brief personal contextualized biography and a succint approach to concepts involved in her research, creditor of the first Fields Medal obtained by a woman. The contextualization is done in line with the film Persepolis, and the approach to her work has the support of dynamic objects built with the Surfer software.

Keywords: Moduli, Geodesics, Riemann Mannifolds, Parameterize, Billiards, Earthquakes, Surfer, Security.

1. Introducción

"La belleza de las matemáticas sólo se muestra a sus seguidores más pacientes"

Maryam Mirzakhani

Tras haber superado los escollos de las prohibiciones sociales, políticas y económicas, la falta de referentes ha sido el muro infranqueable para las jóvenes estudiantes con talento matemático.

Maryam Mirzakhani, en la entrega de la medalla Fields, dijo: "Es un gran honor recibir esta medalla y me hará muy feliz que ello sirva para estimular el gusto por las matemáticas de las jóvenes alumnas. Estoy convencida de que muchas más mujeres recibirán este premio en los próximos años."

Tras su temprana ausencia, esta presentación pretende contribuir a que su deseo expreso se haga realidad.

2. Primera parte: biografía/cronología de Maryam Mirzakhani

Maryam fue hija de Ahmad Mirzakhani, un ingeniero eléctrico, y Zahra Haghighi. Dice ella sobre su familia y amistades:

> *"Crecí en una familia con tres hermanos. Mis padres siempre fueron muy comprensivos y alentadores. Para ellos era importante que tuviéramos profesiones significativas y satisfactorias, pero no les importaba tanto el éxito como los logros. En muchos sentidos, fue un magnífico ambiente para mí, aunque estos fueron los tiempos difíciles de la guerra Irán-Iraq. Mi hermano mayor fue la persona que me interesó en la ciencia en general. Solía contarme lo que aprendía en la escuela.*
>
> *Conocí a mi amiga Roya Beheshti la primera semana de clase en secundaria. Es inestimable tener una amiga que comparta tus intereses y te ayude a mantenerte motivada. Nuestra escuela estaba cerca de una calle llena de librerías en Teherán. Recuerdo que caminar por esta calle abarrotada e ir a las librerías fue muy emocionante para nosotras. No podíamos hojear los libros como suele hacerlo la gente aquí en una librería, así que terminábamos comprando muchos libros al azar."*

Maryam se casó con Jan Vondrak, físico checo, cristiano, investigador en IBM, cerca de Stanford.

El triunfo de Maryam Mirzakhani enorgullece a las mujeres, especialmente de países musulmanes, a quienes recuerda cómo la cultura islámica, en nuestro medievo, tuvo una época en la que se estudió ciencia, no permitiendo que el saber de griegos y persas cayeran en la oscuridad de la época.

2.1. Breve cronología de la infancia de Mariam Mirzakhani, contextualizada en la historia de Irán, con el apoyo del cómic de Marjane Satrapi "Persépolis"

Figura 1: Marjane Satrapi (Autora del cómic "Persépolis) evoca su relación familiar con el pasado imperial de Irán.

La escasez de datos sobre la infancia de Maryam Mirzakhani hace difícil biografiar este periodo de su vida. Considerando que es relevante para esta exposición biográfica, se ha optado por realizar un mix con los pocos datos de que se ha dispuesto, los acontecimientos extraordinariamente relevantes que ocurrieron en su país durante su infancia y algunas viñetas del cómic autobiográfico "Persépolis" creado por Majane Satrapi, habida cuenta de que la infancia de Maryam coincide con la adolescencia de Marjane, en el mismo Irán convulso de la revolución.

Persépolis, fue fundada por Darío I y destruida por Alejandro Magno en -330. Que Marjane Satrapi haya titulado su cómic con el nombre de la ciudad de Darío, da cuenta de la intención de enraizar su autobiografía con el esplendor del imperio persa. Esa intención se hace explícita en algunas viñetas de su obra como la que muestra la figura 1.

Durante el Imperio sasánida, siglo IV, Jundishapur fue centro intelectual mundial. En él se realizaron multitud de traducciones del griego que salvaguardaron el saber clásico. Destacan las traducciones de Hipócrates y Galeno. En Europa comienza la edad media.

Siglo X, Avicena es el sabio más importante del que tenemos noticia en ese siglo. Nació y murió en Persia. Europa atraviesa la edad media. Maryam es digna heredera del prestigio del saber persa en sus momentos más brillantes.

1785 – 1925: Durante estos casi dos siglos, reinó en Irán la dinastía kayar, de origen turco.

1906: se redacta la primera constitución, se crea el primer parlamento, somete a la monarquía a la constitución, que no tiene más salida que acatarla o abdicar.

1907 se produce un pacto anglo-ruso por el reparto de zonas de influencia, debido a la debilidad del gobierno iraní y la ambición de las potencias hegemónicas europeas por controlar los yacimientos petrolíferos de Irán.

1925 el ejército da un golpe de estado. Es entronizado el oficial golpista que se convierte en el primer sha de la dinastía palhavi, *Reza Shah*, que fue pronazi durante la segunda guerra mundial.

1941 *Reza Shah*, abdica en su hijo, Mohammad Reza Pahleví, que será el último sha, fuertemente sumiso a las potencias occidentales británica y estadounidense.

1943 EEUU, Rusia y Gran Bretaña reconocen la independencia de Irán, pero el sha sigue ligado a las potencias occidentales, en particular a Gran Bretaña, por intereses materializados en la compañía petrolífera anglo-iraní, futura British Petrolum (BP).

Figura 2: Marjane Satrapi evoca el reciente pasado colonizado de Irán.

1951 Mossadeq, primer ministro, nacionaliza el petróleo.

1953 golpe de estado inducido por potencias coloniales en la lucha por el petróleo recién nacionalizado (BP), gobierno títere, el sha instala una dictadura de hecho, moderniza el país, pero la riqueza no se reparte, se inicia un periodo de creciente malestar, republicanismo, represión, encarcelamientos y ejecuciones.

1967 coronación del sha, una vez asegurada la sucesión.

1969 nace Marjane Satrapi, autora de "Persépolis", novela gráfica autobiográfica. De familia progresista, simpatizante de la revolución antes de que se impusiera la facción islamista, estudió en el liceo francés de Therán y luego marchó a Austria (ver figura 2), regresó a estudiar Bellas Artes a Therán y por último marchó a París donde se convirtió en una dibujante, escritora de cómics, guionista, realizadora y directora de cine. Se estrenó en la dirección cinematográfica con la adaptación al cine de animación de su obra "Persépolis".

Continúa el malestar entre los diversos grupos opositores al sha.

Figura 3: Marjane Satrapi escucha satisfecha las ideas políticas revolucionarias que llevaron a su tío a la cárcel y que lo llevarán dentro de poco a ser ajusticiado.

1978 revueltas de los islamistas y nacionalistas (contra la injerencia anglosajona), demócratas (contra la dictadura del sha), comunistas (influencia de la joven URSS). (Ver figura 3)

1979, la revolución derroca al sha, liberación de presos políticos, elecciones democráticas, gana el fundamentalismo islámico. Represión, encarcelamientos y ejecuciones.

1988 fin de la guerra Irán-Irak

Figura 4: mientras Marjane Satrapi es una adolescente iraní residente en Suiza para alejarse de la represión islamista en su país, Maryam es una niña que vive feliz en un entorno familiar económicamente satisfactorio.

2.2. Breve biografía cronología de la etapa académica de Maryam Mirzakhani

Maryam ingresa en Farzanegan, centro de secundaria y bachillerato para jóvenes con talento. A pesar de la segregación por sexos impuesta por el régimen, Maryam superó los obstáculos que le impedían prepararse y presentarse a las olimpiadas matemáticas.

Figura 5: con el atuendo impuesto por los ayatolás y la medalla de oro ganada en las olimpiadas.

1994 Maryam gana la olimpiada internacional como representante de la República Islámica de Irán en Hong Kong.

1995 Maryam gana la olimpiada internacional como representante de la República Islámica de Irán, sin cometer ni un solo fallo, en Toronto.

Ingresa en la Sharif University of Technology.

1999 Maryam se licencia.

Figura 6: Con su madre y su hermano que la inició en el gusto por las matemáticas

1999 Maryam viaja a EEUU para inscribirse en un curso de Curtis T. McMullen.

2003 Maryam renuncia a una beca de la Universidad de Harvard y acepta una beca de investigación en el Clay, así como un contrato como profesora asociada en la universidad de Princeton.

2004 Maryam lee su tesis doctoral, dirigida por McMullen, con 130 páginas, titulada *Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and Volume of the Moduli Space of Curves.* El trabajo le hizo acreedora de varios premios, entre ellos la Medalla Fields.

2006 Maryam colabora con Alex Eskin, y McMullen comenta al respecto de su trabajo:

> *Mirzakhani, together with Alex Eskin and, in part, Amir Mohammadi, made a major breakthrough in understanding another dynamical system on moduli space that is related to the behaviour of geodesics in moduli space. Non-closed geodesics in moduli space are very erratic and even pathological, and it is hard to obtain any understanding of their structure and how they change when perturbed slightly. However, Mirzakhani et al have proved that complex geodesics and their closures in moduli space are in fact surprisingly regular, rather than irregular or fractal. It turns out that, while complex geodesics are transcendental objects defined in terms of analysis and differential geometry, their closures are algebraic objects defined in terms of polynomials and therefore have certain rigidity properties.*

2007 Maryam publica dos artículos:

- *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves; Simple geodesics and volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces.*
- *Random hyperbolic surfaces and measured laminations.*

2008 Maryam publica otros dos artículos:

- *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces.*
- *Ergodic theory of the earthquake flow.*

Deja Princeton, es nombrada profesora de Matemáticas en la Universidad de Stanford, inicia su vida con Jan Vondrák

2009 Maryam obtiene el premio Leonard M. and Eleanor B. Blumenthal por el Avance en la Investigación de las Matemáticas Puras.

2010 Maryam dicta una conferencia sobre *On Weil-Petersson volumes and geometry of random hyperbolic surfaces* en la sección de Topology and Dynamical Systems & ODE del International Congress of Mathematicians.

2011 nace la hija de Maryam, Anahita, y publica con Eskin:

- *Counting closed geodesics in moduli*

2013 Maryam gana el premio Ruth Lyttle Satter in Mathematics. El cáncer aparece en su vida.

2014 Maryam dicta la conferencia plenaria en el International Congress of Mathematicians in Seoul, en el que le fue entregada la Medalla Fields.

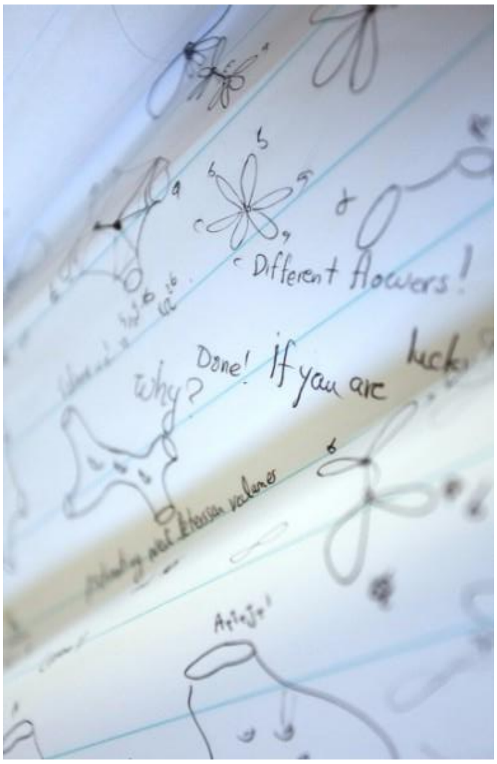


Figura 8: Maryam se describía a sí misma como lenta, pero constante. Pensaba las matemáticas con imágenes y enfocaba los problemas difíciles garabateando en grandes hojas de papel

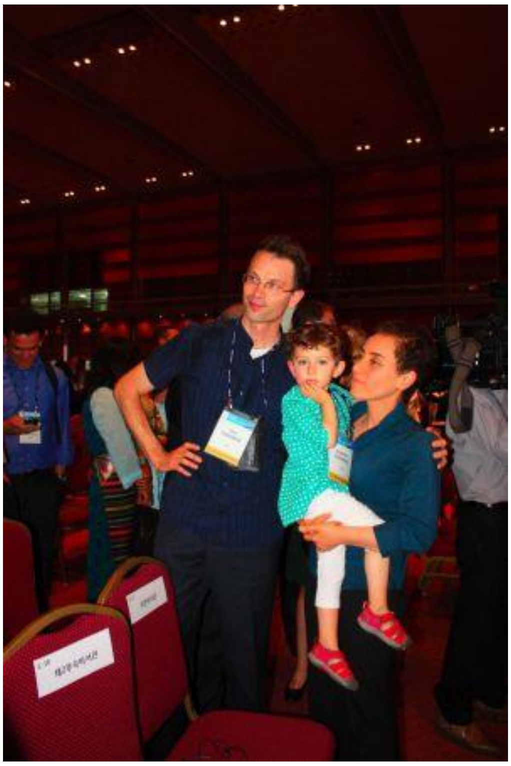


Figura 7: Con Anahita y Jan Vondràk, en el acto de entrega de la Medalla Fields. Anahita pensaba que su mamá era pintora.

2015 Maryam es elegida académica de la Paris Academy of Sciences y de la American Philosophical Society.

2016 Maryam es elegida académica de la National Academy of Sciences.

Figura 9: Con objetos que desvelan su actitud y estado.

2017 Maryam es elegida académica de la American Academy of Arts and Sciences. Siguió trabajando, resolviendo nuevos problemas y construyendo herramientas nuevas para abordarlos, hasta el día 15 de julio de ese año en que el cáncer le ganó la partida a ella y a su creatividad.

Marc Tessier-Lavigne, Presidente de la Universidad de Stanford, cerca de Syllicon Valley, dijo de ella:

> *Maryam is gone far too soon, but her impact will live on for the thousands of women she inspired to pursue math and science. Maryam was a brilliant mathematical theorist, and also a humble person who accepted honours only with the hope that it might encourage others to follow her path. Her contributions as both a scholar and a role model are significant and enduring, and she will be dearly missed here at Stanford and around the world.*

Ralf Cohen, compañero en Standford dijo

> *Maryam embodied what being a mathematician or scientist is all about: the attempt to solve a problem that hadn't been solved before, or to understand something that hadn't been understood before.*

3. Aproximación sucinta a la tesis de Maryam Mirzakhani

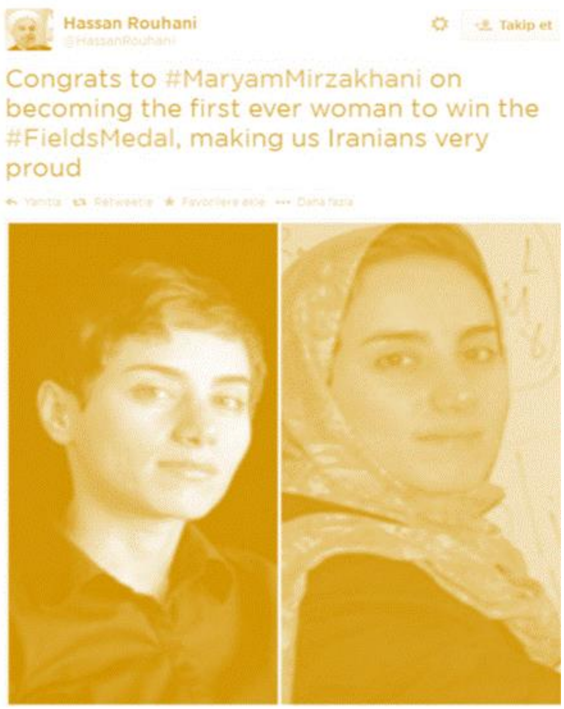


Figura 10: felicitación de Rouhani, actual presidente de Irán.

La tesis de Maryam versaba sobre las superficies de Riemann y se tituló *Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves* (2004).

Las superficies de Riemann fueron los personajes de una novela negra en la que ella era la única que sabía cómo evolucionaba la historia y cuáles eran las pistas que había que seguir.

Cuando una superficie diferenciable admite un atlas diferenciable en el que los cambios de carta son de hecho funciones, de transición, holomorfas, o analíticas (desarrollables en series de potencias: $f(z)=\sum a_i z^i$), decimos que este atlas define una estructura compleja en la superficie y ésta se conoce con el nombre de superficie de Riemann.

Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente, biholomorfa o de hecho la misma que la esfera de Riemann (compacta), el plano complejo o el disco de Poincaré (no compactas). Los cocientes por sus biholomorfismos son topológicamente equivalentes a una superficie compacta: esfera, toro o superficies de género mayor que 1.

La curvatura de Gauss de sus variedades reales riemannianas respectivas son 1, 0, -1. Las superficies se llaman en cada uno de estos casos elíptica (esfera de Riemann), parabólica (plano complejo, toro) e hiperbólica (disco unitario abierto con la métrica de Poincaré, cada superficie de género>1).

Las geometrías asociadas son la elíptica, la euclídea y la hiperbólica respectivamente.

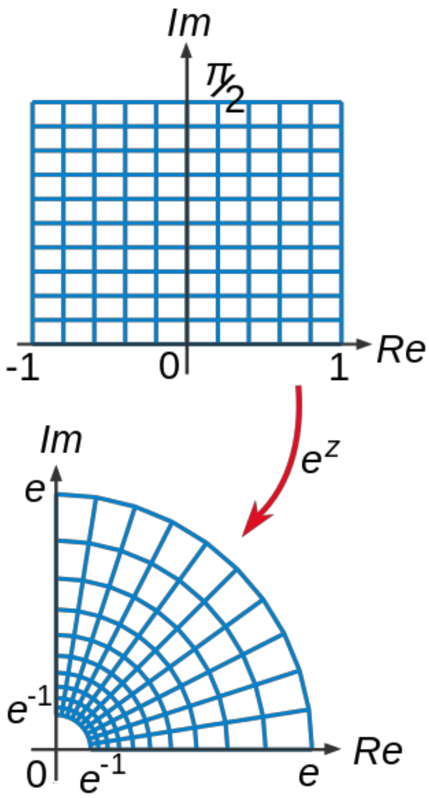


Figura 11: e^z y ln(z) son biholomorfismos

A Maryam le gustan las superficies de género g ≥ 2

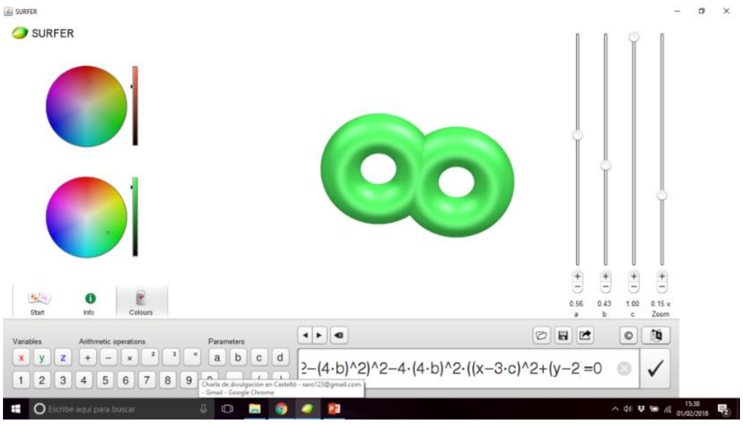


Figura 12: una superficie de género dos, obtenida "pegando" dos toros en Surfer.

Estudia las curvas geodésicas simples en dichas superficies.

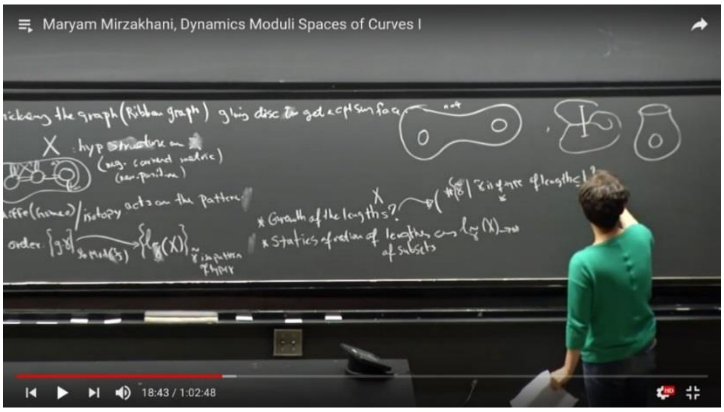


Figura 13: Maryam Mirzakhani exponiendo los cálculos sobre el número de geodésicas.

Maryam sabía que el número de curvas geodésicas cerradas en una superficie hiperbólica crece de forma exponencial en función de su longitud y en su tesis presentó una fórmula para estimar cómo crece el número de geodésicas cerradas simples (que no se cortan a sí mismas) en una superficie hiperbólica, en función de su longitud, obteniendo una expresión polinómica.

Obtuvo el volumen del espacio de moduli de curvas. (Dada una colección de objetos geométricos, X, y una relación de equivalencia ~ en esa colección de objetos, el espacio de moduli dota de estructura geométrica al conjunto de clases de equivalencia, X/ ~.).

El primer caso en la historia de un espacio de moduli es el doble cono como espacio de moduli de la colección de cónicas del plano módulo la relación de equivalencia afín, parametrizadas por un ángulo $\beta \in [0, 2\pi]$ que permite identificar si se trata de una circunferencia (caso particular de elipse), una elipse, una hipérbola o una parábola. Con el apoyo del programa Surfer, se puede visualizar dinámicamente el paso de una clase a otra, según varía el parámetro que controla un deslizador.

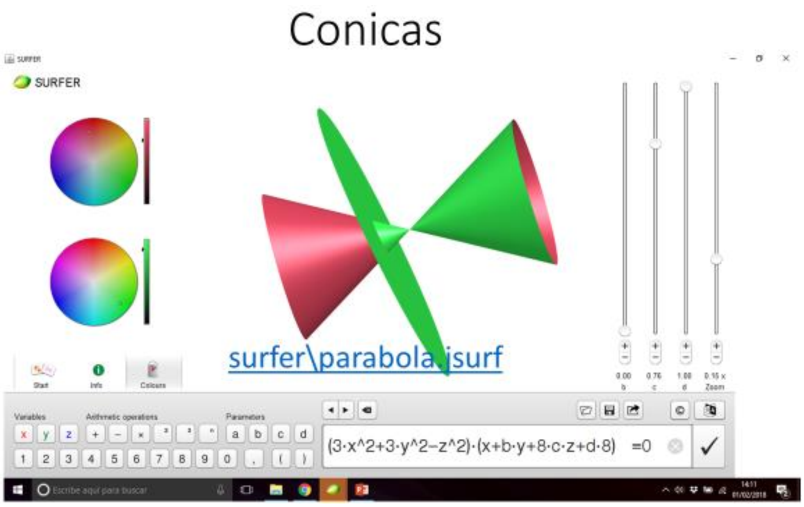


Figura 14: pantalla de inicio en Surfer, de la aplicación interactiva que ilustra el doble cono como espacio de moduli de las cónicas.

Los resultados obtenidos por Maryam Mirzakhani no se quedaron en el terreno de lo teórico, transitaron en los dos sentidos, de lo teórico a lo práctico y viceversa, como muestran sus trabajos sobre billares poligonales:

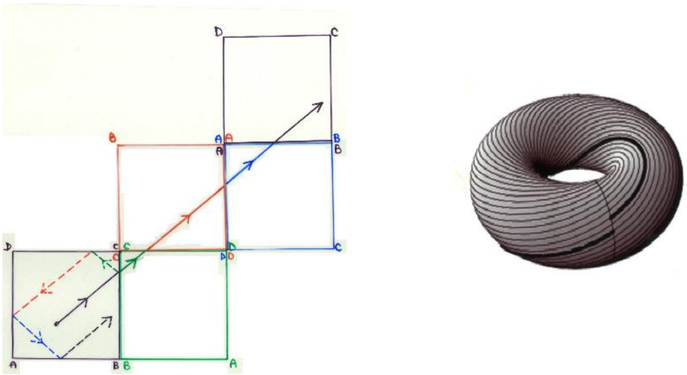


Figura 15: despliegue de las trayectorias en un billar cuadrado y su transformación en geodésicas en el toro cociente del cuadrado por identificación de aristas opuestas.

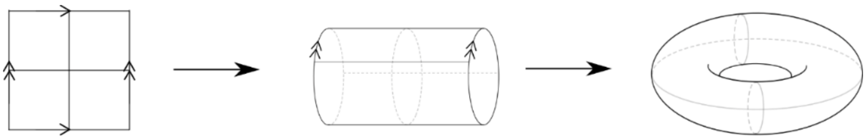


Figura 16: transformación del cuadrado en el toro cociente, por identificación de aristas opuestas

Las trayectorias en un billar poligonal se pueden ver como trayectorias en una superficie de Riemann (en este caso un toro) que, a su vez, es un punto del espacio de moduli correspondiente. Una aplicación: la iluminación de seguridad (ver figura 17).

Figura 17: exposición de Maryam sobre billares generalizados y su aplicación a la iluminación de seguridad en recintos complejos.

Sus contribuciones no se han quedado limitadas al terreno de la geometría algebraica y diferencial, sino que han abierto caminos para resolver problemas de física teórica como el modelo estándar o la teoría de cuerdas.

Referencias

[1] ANTÓN SANCHO, Álvaro (2015), "El estudio de estructuras geométricas mediante espacios de moduli" en *Lecturas matemáticas*, vol 36, págs. (197-229), Valladolid, Universidad Católica de Ávila, http://scm.org.co/aplicaciones/revista/Articulos/1175.pdf, [visitado 7-04-2018].

[2] MCMULLEN, Curtis T (2014), *The work of Maryam Mirzakhani*, Cambridge, http://www.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/papers/icm14/icm14.pdf [visitado 7-04-2018].

[3] IMU (2014), Maryam Mirzakhani, https://www.youtube.com/watch?v=swLWqlKMl5M, [visitado 7-04-2018].

[4] MIRZAKHANI, Maryam (2014), "Dynamics on Moduli Spaces of Curves I". Lecture at the conference *Current Developments in Mathematics 2014*, Harvard Math, https://www.youtube.com/watch?v=tprlQMClSYQ&t=787s, [visitado 7-04-2018].

[5] SATRAPI, Marjane (2006), *Persepolis*, Barcelona, ed. Norma.

Sobre la autora:
Nombre: Xaro Nomdedeu Moreno
Correo Electrónico: xaro123@gmail.com
Institución: Colabora esporádicamente con diversas instituciones universitarias, políticas y culturales, para divulgar el conocimiento científico en general, el matemático en particular y visibilizar a las mujeres en este ámbito, desde presupuestos igualitaristas.

Historias de Matemáticas

Aspectos científicos del viaje del Descubrimiento

Scientific aspects of the voyage of discovery

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 063–090, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Feb'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

El viaje del Descubrimiento de octubre de 1492 fue una de las hazañas históricas más importantes de la humanidad. Se considera que dio inicio al periodo histórico denominado Edad Moderna. No se trató de la aventura individual de un visionario, como algunos pretenden, sino que fueron necesarios hombres capaces, medios, conocimientos y preparación científico-técnica, imprescindibles para hacerlo posible. Se tratan en este artículo algunas consideraciones acerca del estado del conocimiento científico en el que se desarrolló dicho viaje.

Palabras Clave: Navegación, Astronomía, Historia, Cristóbal Colón, Juan de la Cosa, Hermanos Pinzón . . .

Abstract

The voyage of discovery of October 1492 was one of the most important historical feats of humanity. It is considered that started the historical period called the Modern Age. It was not the individual adventure of a visionary, as some claim, there were necessary men, media, knowledge and scientific-technical preparation, essential to make it possible. This article deals with some considerations about the state of scientific knowledge in which the trip was developed.

Keywords: Navigation, Astronomy, History, Cristóbal Colón, Juan de la Cosa, Pinzón brothers . . .

1. Introducción

Ningún artista es durante las veinticuatro horas de su jornada diaria ininterrumpidamente artista. Todo lo que de esencial, todo lo que de duradero consigue, se da siempre en los pocos y extraordinarios momentos de inspiración. (...) También en ese «misterioso taller de Dios», como respetuosamente llamara Goethe a la Historia, gran parte de lo que ocurre es indiferente y trivial. También aquí, como en todos los ámbitos del arte y de la vida, los momentos sublimes, inolvidables, son raros [Zweig, 1927].

En la madrugada del 12 de octubre del año 1492, tres naves españolas comandadas por el almirante Cristóbal Colón avistaron tierra tras algo más de un mes viajando hacia el Oeste a través del Océano Atlántico, hazaña que hasta entonces no se había realizado o, al menos, no está documentado que se hubiera hecho. Se descubría así un nuevo continente, desconocido hasta entonces.

Es difícil imaginar el contexto en el que se realizó dicho viaje. A finales del siglo XV, Europa estaba conmocionada tras la caída de Constantinopla en 1453. Con Constantinopla, y por ende el Bósforo, bajo dominio musulmán, el comercio entre Europa y Asia declinó súbitamente. No era posible, para los mercaderes cristianos, acceder a las rutas terrestres o marítimas que llevaban a la India y a China, de donde provenían las especias usadas para conservar los alimentos, además de artículos de lujo, y hacia donde se destinaban sus mercancías más valiosas.

De esta manera, las naciones europeas iniciaron proyectos para el establecimiento de rutas comerciales alternativas. Portugueses y castellanos aprovecharon su posición geográfica junto al océano Atlántico para tratar de llegar a la India por mar. Los portugueses, con el impulso que propició Enrique El Navegante, trataron de llegar a Asia circunnavegando África, intento que culminó con el viaje de Vasco da Gama entre 1497-1498. En cuanto a Castilla, los Reyes Católicos financiaron la expedición del navegante Cristóbal Colón, quien veía una posibilidad de llegar a Asia por el oeste, a través del Océano Atlántico, intento que culminó en 1492 con el Descubrimiento de América, dando inicio al proceso de exploración y colonización del Nuevo Mundo. Los dos países, que hasta entonces habían tenido una influencia relativa en el escenario político europeo, ocupados como habían estado en la Reconquista, se convirtieron en el siglo XVI en las naciones más poderosas del mundo, creando el sistema moderno mundial.

Si bien, en el ámbito científico y culto, la Tierra se consideraba esférica desde que Eratóstenes, bibliotecario de Alejandría, fijase una circunferencia de 250.000 estadios (entre 39700 y 46600 km), a nivel popular dicha creencia aun no estaba extendida. A pesar de que en el siglo III a.C, Aristarco de Samos ya había señalado que eran la Tierra y los planetas los que giraban alrededor del Sol, y no al contrario, y a pesar de que Arquímedes se hizo eco de ello, la teoría que prevaleció fue la geocéntrica descrita por Ptolomeo en el siglo II en su libro *Almagesto*. No sería hasta mediados del siglo XVI, unos cincuenta años después del viaje del Descubrimiento, cuando Nicolás Copérnico escribiera *De Revolutionibus*, estableciendo la teoría heliocéntrica, poniendo al Sol en el centro del universo y a los planetas girando alrededor suyo. En matemáticas, la numeración más extendida en Europa era la que utilizaba los números romanos, no habiéndose implantado aun la numeración arábiga. La imprenta de tipos móviles se había inventado apenas treinta años antes y los primeros libros impresos se empezaban a distribuir por aquellas fechas. La primera edición impresa de *Los Elementos* de Euclides es la de Campano y data de 1484, ocho años antes del viaje de Colón. Estudiosos del arte y de las matemáticas empezaban a interesarse por la noción de la perspectiva. El calendario que se utilizaba era el juliano. El telescopio aun no se había inventado.

A día de hoy, muchos de los detalles del viaje del Descubrimiento y de sus protagonistas siguen siendo desconocidos. No se tiene certeza acerca del origen de Cristóbal Colón. No se tiene ninguna imagen de Colón, ni tampoco de los barcos que formaron parte de la expedición. Se sigue especulando acerca de los indicios de que disponían los promotores de la expedición, sobre la cartografía utilizada para planificar el viaje y sobre la instrumentación que se utilizó para pilotar las naves [Chocano, 1991].

Hay quien considera que se trató de la aventura de un visionario, y que el descubrimiento de América se produjo por casualidad, o como genialidad exclusiva de un solo individuo. Este planteamiento no es correcto, el viaje del Descubrimiento fue algo más metódico, todo un proceso que necesitó de hombres capaces, medios, conocimientos y preparación científico-técnica imprescindibles para hacerlo posible [Colón, 1492]. Dicho ambiente científico estuvo propiciado tanto por la corona de Castilla como por la corona de Portugal, que mantuvieron una estrecha pugna por el dominio de los mares conocidos. A este fin, se vieron obligadas a recopilar y desarrollar los conocimientos necesarios en matemáticas, astronomía, cartografía, instrumentación, tecnología naval y cuantas otras artes y ciencias eran necesarias para dirigir las naves a su objetivo.

Lo que nadie pone en duda es que el descubrimiento del continente americano supuso un punto singular en la historia de la humanidad. El descubrimiento de nuevas tierras con seres humanos semejantes a los europeos y nuevas especies de plantas y animales en todo semejantes a las ya conocidas, dio pie al *humanismo*, que hizo posible el desarrollo del Renacimiento, quizás la época más prolífica que ha tenido lugar en la Historia en cuanto al desarrollo de las artes y de las ciencias. De hecho, se suele considerar el final de la Edad Media y el inicio de la Edad Moderna en la fecha del Descubrimiento[1].

El descubrimiento de América por las naves castellanas, fue un hallazgo afortunado que recompensó un esfuerzo bien planeado con los insuficientes conocimientos de la ciencia de entonces, aunque dirigido hacia otro fin. Posteriormente otras dos grandes hazañas contribuyeron a resolver incógnitas que se planteaba la ciencia de aquellos tiempos: el descubrimiento del Mar del Sur, o sea, del Océano Pacífico por Vasco Núñez de Balboa en 1513 y el descubrimiento del Estrecho de Magallanes en 1520 y la consiguiente circunnavegación del globo por parte de la expedición Magallanes-Elcano.

Este artículo se plantea con un doble objetivo. Por una parte, resumir y poner en orden el estado del conocimiento en las fechas del Descubrimiento, en lo relativo a las ciencias necesarias para la navegación. Por otra, demostrar que el viaje del Descubrimiento no fue la hazaña individual de un aventurero visionario, sino una proeza científica y técnica que requirió de una gran planificación y despliegue de medios.

Para ello, en el apartado 2 se hará un repaso histórico de las matemáticas desarrolladas hasta la fecha del Descubrimiento; el apartado 3 se dedica a establecer los conocimientos sobre geodesia que había a finales del siglo XV; el apartado 4 se dedica a comentar la situación de la cartografía; a continuación, el apartado 5 hace un pequeño resumen de los conocimientos astronómicos; en el apartado 6 se explica el concepto de «*cosmografía*», y se da detalle de alguno de los tratados que consultó Colón para planificar su viaje; en apartado 7 se detallan los instrumentos de medida utilizados en la época del descubrimiento: la brújula para la orientación, los sistemas de referencia y el problema del cálculo de la longitud, el astrolabio, la ballestilla y el cuadrante para la medición de la altura de los astros, la medición nocturna de las horas mediante las «*Guardas de la Polar*», la medición de la velocidad de los buques y la forma de abordar la medida de pequeños intervalos de tiempo y de estimación de las distancias recorridas por los buques.

No se abordan en este artículo los temas relativos a la tecnología naval y las técnicas de navegación, que por sí mismas darían para la redacción de un estudio específico. Tampoco se abordan otros aspectos importantes, como la personalidad y formación de algunos de los marinos embarcados, las causas que pudieron motivar la elección de las rutas de ida y vuelta ni los conocimientos existentes acerca de los regímenes de vientos y corrientes marinas de que disponían antes del viaje y las aportaciones a dicho conocimientos realizadas por la expedición.

2. Las matemáticas medievales

En la Edad Media, e incluso en el Renacimiento, no eran frecuentes los matemáticos puros. Lo habitual es que los desarrollos matemáticos corrieran de la mano de los astrónomos. De hecho era corriente que se unieran en un mismo científico los conocimientos de astronomía, geografía y matemáticas. A la unión de estos tres campos del conocimiento es a lo que Ptolomeo

[1] Otros historiadores fijan el inicio de la Edad Moderna en la caída de Constantinopla, en el año 1453. El final de la Edad Moderna se suele establecer en la Revolución Francesa, en 1789

denominó «Cosmografía».

Algunos matemáticos consideran a la matemática aplicada como una hermana menor de la matemática «pura», que sería la verdadera ciencia. Lo cierto es que, en numerosas ocasiones, la necesidad de resolución de determinados problemas en otros campos del conocimiento, es lo que propicia el desarrollo de distintas ramas de las matemáticas.

Hasta finales del siglo XV, la navegación discurría siempre cercana a la costa. En el Mediterráneo a veces se perdía de vista la tierra firme, pero era por cortos periodos de tiempo y navegando en una dirección conocida, de la que se conocía la distancia que había que recorrer para alcanzar el puerto de destino. Este tipo de navegación requiere pocos conocimientos matemáticos o de cosmografía.

Los viajes de navegación de altura iniciados en el siglo XV por parte de marinos portugueses y españoles, pusieron en evidencia la necesidad de perfeccionar los conocimientos de astronomía, trigonometría esférica y otros. Estas ciencias utilizan las matemáticas como lenguaje de expresión y como herramienta, lo que tuvo como consecuencia que el desarrollo de muchos campos de las matemáticas estuviera íntimamente asociado con la navegación y con los marinos. Desde el inicio de la navegación oceánica, las matemáticas han estado ligadas al arte de navegar, dando lugar a importantes colaboraciones, tanto de matemáticos que han aportado conocimientos al arte de navegar, como de navegantes que han realizado importantes aportaciones a las matemáticas aplicadas[2]. Esta asociación entre matemáticas y navegación se mantuvo durante varios siglos y, de hecho, se sigue manteniendo hoy en día a través de la navegación espacial, que no es sino una prolongación de la navegación a vela de los siglos pasados.

La Grecia clásica propició la existencia de grandes matemáticos y pensadores. Grecia vivió su gran esplendor en el siglo III a.C., con las cátedras de Euclides, Arquímedes, Eratóstenes y Apolonio, entre otros muchos. Paralelamente, Alejandría se estableció como el centro cultural del mundo. A ella llegaron filósofos, médicos, matemáticos y toda clase de sabios, para aprender en su famosa biblioteca. La biblioteca de Alejandría llegó a albergar 900.000 volúmenes.

En el siglo II de nuestra era, tras la invasión romana, Grecia vivió un nuevo renacimiento. Ptolomeo dio una explicación del Sistema Solar en el *Almagesto*, Diofanto estableció las bases del álgebra y de la teoría de los números en su *Aritmética*. En el siglo III, Papus publicó la *Colección matemática*. En el siglo IV, Teón de Alejandría y su hija Hipatia publicaron sus ediciones de los *Elementos* y del *Almagesto* [Dorce, 2016].

El imperio romano aportó poco al conocimiento matemático. El sistema de numeración que utilizaban asignaba valor a ciertas letras y era no posicional. Esto daba lugar a que la representación de números grandes y la realización de las operaciones aritméticas suma, resta y, sobre todo, multiplicación y división, fuera complicada.

Merece aquí destacar la *Historia natural* (en latín *Naturalis historia*), que es una enciclopedia escrita en latín por el procurador imperial romano Plinio el Viejo en el año 77. Esta es una de las mayores obras individuales que sobreviven del Imperio romano en nuestros días, y pretendía abarcar todo el conocimiento que se tenía en ese momento. La obra está dividida en treinta y siete libros, organizados en diez volúmenes y su temática incluye astronomía, matemáticas, geografía, etnografía, antropología, fisiología humana, zoología, botánica, agricultura, horticultura, farmacología, minería, mineralogía, escultura, pintura y piedras preciosas. Se menciona aquí, pues consta que era conocida por Colón, y que realizó anotaciones en los márgenes del ejemplar al que tuvo acceso.

A finales del siglo IV de nuestra era, la biblioteca de Alejandría fue destruida y con ello se perdió una parte importante del conocimiento humano desarrollado hasta la fecha. Comenzó la Edad Media[3].

[2]Piénsese, por ejemplo, en el caso de los españoles Antonio de Ulloa o Jorge Juan [Navarrete, 1846]

[3]El comienzo de la Edad Media se suele fijar en la caída del Imperio Romano, que sucedió por las mismas fechas

El colapso de la civilización clásica estancó el desarrollo de las matemáticas occidentales durante siglos, pero el progreso continuó en otras culturas. Durante ese periodo se estaban desarrollando conocimientos científicos de relevancia en otras partes del planeta. Es el caso de China o de la India. Los conocimientos chinos no llegaron a occidente hasta mucho después de la época del Descubrimiento. Las matemáticas hindúes lidiaban en la Edad Media con conceptos como los números negativos, el cero y el infinito, que Occidente no dominaría durante siglos. Estos conocimientos llegaron a Europa a través de las traducciones que hicieron los autores árabes y, junto con lo mejor del aprendizaje clásico, se combinaron en el trabajo de los eruditos islámicos medievales. Esto llevó a las matemáticas a un nuevo nivel mediante el desarrollo de la trigonometría y el álgebra, y usando los modelos indios para producir el sistema de números que tenemos hoy [Levy, 2016].

En el siglo V, en la India, destacó la figura de Brahmagupta. Brahmagupta, como es natural, no fue un genio aislado. Vivió en el subcontinente Indio, donde se había desarrollado una de las civilizaciones más antiguas de la historia de la humanidad, la del valle del Indo. Aunque se conoce poco de la vida de Brahmagupta, se sabe que tuvo conocimiento de los trabajos de matemáticos griegos, como Herón de Alejandría, Ptolomeo o Diofanto. Legó dos importantes tratados. En uno de ellos, el *Brahma-sphuta-siddhanta*, escrito cuando tenía 30 años, desarrolló la aritmética de los números positivos, negativos y el cero. Es la primera explicación que ha llegado hasta nuestros días, conservada en un texto, de las reglas operativas entre dichos números. Su segundo tratado, escrito a la edad de 67 años, se titulaba *Khanda-Khandyaka*, y era un manual de astronomía matemática. Como era tradición entre los matemáticos hindúes, los libros estaban escritos en forma poética [Guevara, 2016].

A partir del siglo VII, la cultura islámica comienza una gran expansión que dio lugar a un vasto imperio que, en sus momentos de mayor auge, fue mayor que ninguno de los imperios anteriores, incluido el romano. Las cortes árabes propiciaban el desarrollo de las artes y de las ciencias. Acometieron la tarea de la traducción a su lengua de las obras de los clásicos griegos y las de los hindúes. Las matemáticas, al igual que las otras ciencias, adquirieron nuevo impulso. Adoptaron la numeración de los hindúes, pues facilitaban el manejo de los números grandes e incorporaron el cero.

Destaca en este contexto la figura de Al-Khuwarizmi, en el siglo IX, geógrafo, astrónomo y matemático persa. Al-Khuwarizmi fue una de las figuras más destacadas de la matemática árabe y su obra no puede entenderse sin el contexto en el que se desarrolló su vida. En el siglo IX, Bagdad se convirtió en una de las ciudades más prósperas del mundo y los mecenazgos de los distintos califas propiciaron su supremacía cultural sobre cualquier iniciativa similar desarrollada hasta el momento. Desde la *Casa de la Sabiduría*, la astronomía, las matemáticas y todas las ciencias, vivieron su esplendor gracias a la conjunción de las herencias griegas, india y persa [Dorce, 2016].

En las traducciones que se hicieron de sus libros, su nombre aparecía deformado, y ello dio lugar al nacimiento del término «*Algoritmo*», con su significado actual. Su obra «*Aritmética*» contribuyó en gran manera a la difusión en el mundo árabe de las cifras hindúes, al uso del cero y al conocimiento de las reglas para las cuatro operaciones con números enteros y fraccionarios.

El libro más importante de Al-Khuwarizmi fue *Hisab al-jabar wa-al-muqabala*. Los árabes planteaban las ecuaciones con coeficientes enteros y positivos. Tras plantear el problema, lo primero que hacían era reordenar o restaurar el orden de la ecuación, procedimiento al que se refiere el término «*al-jabar*» y que daría lugar al vocablo «*Álgebra*». En el Quijote, Cervantes se refiere a los algebristas como las personas encargadas de recomponer los huesos descoyuntados [Rey Pastor, 1985-1].

En el siglo XII se dio un renacimiento de la cultura europea, motivado por incremento de las relaciones comerciales de las repúblicas italianas con el Oriente que se dieron a partir del año 1000 y la penetración en territorios de cultura árabe por los normandos de Sicilia, por la

Reconquista española y por los cruzados.

Se desató un entusiasmo por buscar documentos de la antigüedad griega traducidos al árabe y también obras árabes originales. Toledo fue el epicentro de este nuevo movimiento de traducción. Eruditos cristianos, judíos y musulmanes trabajaron juntos para traducir obras del árabe al latín. La matemática recibió un poderoso impulso a partir de la traducción al latín de los *Elementos* de Euclides, de las obras de aritmética y álgebra escritas a comienzos del siglo IX por el persa Al-Khuwarizmi, del *De mensura circuli* de Arquímedes y del libro de geometría *Liber trium fratrum*. De esta forma, a finales del siglo XII, se dio un importante ambiente intelectual en el que destacan figuras como Leonardo de Pisa, Alberto Magno y Rogerio Bacon. El enfoque que se dio a las matemáticas en esta época era fundamentalmente utilitario, para resolver los problemas a que daban lugar el incremento de las transacciones comerciales.

Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, fue el matemático más destacado de ese periodo. Nació en el año 1175 y era hijo de Bonaccio, responsable de la oficina de aduanas de Pisa en Argelia. Por indicación de su padre, y con financiación de los mercaderes de Pisa, siguió diversos cursos sobre cálculo posicional hindú y visitó Egipto, Siria. Provenza, Sicilia y Grecia, para conocer a los matemáticos de estos países. Fruto de esa formación fue la publicación de su libro *Liber abaci*, primer e insuperado modelo de «*summa*» medieval, en el que según palabras del propio autor, quiso poner «*a disposición de la gens latina todo cuanto sabía de aritmética y álgebra*». En esta obra se presentan las *novem figurae* de los hindúes y el *signum* 0 (*quod arabice zephirum appellatur*), las operaciones con ellos en enteros y en fracciones, las pruebas por 7, 9, 11, 13 y el criterio de divisibilidad por 9, las aplicaciones para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, reglas sobre compraventas, permutas, sociedades, leyes y cambios con las más diversas monedas entonces en curso, proporciones, regla de tres simple y compuesta, y otras cosas por el estilo. Se dedican capítulos independientes a la regla *elchataym* (o *regula falsi*, de la doble posición para solucionar ecuaciones de primer grado) y a las cuestiones *aliebre et almucabale*, relativas a la solución, discusión y aplicación de las ecuaciones de segundo grado. El *Liber abaci* fue libro de referencia para la formación matemática de numerosos estudiosos durante más de tres siglos [Picutti, 1995].

A pesar del entusiasmo de Leonardo de Pisa por la numeración indo-árabiga, los números romanos no se dejaron de utilizar hasta varios siglos después. Sirva como ejemplo que, en el siglo XVIII, el Tribunal de Cuentas de Francia todavía utilizaba números romanos.

En 1220, Leonardo de Pisa publica *Pratica geometriae*, basada en los *Elementos* de Euclides y con algunas partes tomadas de Arquímedes, de Herón y de Ptolomeo. Este libro también se convirtió en un libro de texto básico para todo tipo de estudiosos de las matemáticas hasta la publicación, en 1494, de la *Summa de Arithmetica geometria Proportioni et proporcionalità* de fray Luca Pacioli.

Otra obra destacada de Leonardo de Pisa es *Liber Quadratorum*, (El Libro de los Números Cuadrados). Consta de veinte proposiciones. Estas no consisten en una recopilación sistemática de las propiedades de los números cuadrados, sino una selección de las propiedades que llevan a resolver un problema de análisis indeterminado de segundo grado que le fuera propuesto por Teodoro de Antioquía, astrólogo de la corte de Federico II.

No era una época fácil para las matemáticas y la ciencia en general. Por poner un ejemplo, a principios del siglo XIII en París se prohibió la lectura de los textos de Aristóteles, bajo pena de excomunión.

Alfonso X el Sabio, reinó en Castilla desde 1252 hasta 1284. Estableció en Toledo un equivalente a la *Casa de la Sabiduría* de Bagdag, con la contratación de académicos para traducir las astronomía y la astrología árabe. Patrocinó la creación de las *Tablas alfonsíes*.

Las *Tablas alfonsíes* contienen las observaciones astronómicas efectuadas en el firmamento de Toledo desde el 1 de enero de 1263 hasta 1272. Se consigna el movimiento de los respectivos cuerpos celestes sobre la eclíptica, con posiciones exactas y precisas. El objetivo de estas tablas era proporcionar un esquema de uso práctico para calcular la posición del Sol, la Luna y los planetas, de acuerdo con el sistema geocéntrico de Ptolomeo. Las observaciones originales provienen de las *Tablas toledanas* del siglo XI, confeccionadas en Toledo por un grupo de astrónomos entre los cuales destacaba el andalusí Azarquiel. La revisión de estas tablas se fundó en las observaciones llevadas a cabo, también en Toledo, por los científicos judíos alfonsíes Yehuda ben Moshe e Isaac ben Sid. La influencia de las Tablas abarcó a toda Europa a través de una revisión francesa de comienzos del siglo XIV, cuya utilización llegó incluso hasta el Renacimiento.

En el siglo XIII desarrolló su trabajo Ramon Llul, nacido en Mallorca 1235. Además de su obra evangelizadora, que le llegó a costar la vida, pues murió lapidado en Argel por predicar el cristianismo, escribió sobre matemáticas. Introdujo la lógica simbólica, que tiene un papel muy importante en su obra *Árbol de Ciencia*, y el pensamiento combinatorio, que ejerció una gran influencia sobre matemáticos posteriores, como Leibnitz. En su obra *Ars Combinatoria* aparece por primera vez la denominación de *combinatoria* que hoy se usa. También se atribuye a Ramón Llul la invención del nocturlabio y de la rosa de los vientos.

Después de Fibonacci, el siguiente gran matemático medieval fue el francés Nicole Oresme (1323-1382), que fue el primero en trabajar con exponentes fraccionarios. Publicó trabajos sobre las series infinitas y una versión de la geometría analítica que precedió a Descartes varios siglos [Levy, 2016].

En el siglo XV tuvo lugar una ruptura de prejuicios y supersticiones. Así lo describe Rey Pastor:

> «*(...) se produjo un tránsito de la Astrología a la Astronomía y de la Alquimia a la Química, que tradujo en hechos materiales los gérmenes espirituales del Renacimiento, una de cuyas fuerzas propulsoras más poderosas fue, sin duda, la epopeya escrita por los ibéricos con sus descubrimientos geográficos, que influyó decisivamente en todos los estratos de la cultura. Los movimientos de los astros ya no interesan para trazar el horóscopo de los mortales, sino para navegar con rumbo cierto hacia las tierras de la canela y la pimienta; pero pronto se despierta la curiosidad desinteresada, y al margen de la resolución de tales problemas técnicos, de aplicación útil y perentoria, las mentes especulativas se plantean cuestiones teóricas de ciencia pura. Tal, por ejemplo, la invención de la loxodromia por el genial Pedro Núñez, con la cual enriquece la geometría esférica. Perdida ya la fe en la infalibilidad de los filósofos antiguos, el espíritu vuela libre de trabas, y todos se disponen a leer por su propia cuenta en el gran libro del mundo*» [Rey Pastor, 1951].

En 1412 nacion en Baza (Granada) Abu'l Hasn Ibn Ali Al-Qualasadi, que fue uno de los más importantes matemáticos de esa época en España. Tuvo numerosos discípulos y escribió 12 obras de aritmética y álgebra. Al-Qalasadi hizo el primer estudio serio de separación de las raíces de las ecuaciones numéricas. Calculó sumas de cubos y cuadrados de números naturales y fue capaz de calcular raíces cuadradas mediante aproximaciones sucesivas.

Otro notable matemático español del siglo XV fue el dominico Juan de Ortega, quien en su libro *Tratado sutilísimo de aritmética y geometría*, expone por primera vez en Europa un nuevo procedimiento para extraer raíces cuadradas.

Luca Pacioli nació en el centro-norte de Italia hacia 1445. Vivió justamente durante la transición entre los periodos medieval y moderno. Pacioli no fue un científico ni un investigador, fue un divulgador de las matemáticas y un docente. Es considerado el padre de la contabilidad moderna. En su afán divulgador, escribía sus obras en italiano, en un tiempo en el que era casi inconcebible que los libros científicos no se escribieran en latín. Sus dos obras más importantes son la *Summa de arithmetica*, que era un compendio de los conocimientos matemáticos hasta la fecha, y *La divina proportione*. Este último estaba ilustrado por su amigo Leonardo Davinci, y trata de las propiedades del «*número de oro*» o «*proporción aúrea*», número irracional con notables propiedades algebráicas, geométricas y estéticas [Piñeiro, 2017].

A finales del siglo XV destaco también como astrónomo y matemático el alemán Johann Müller Regiomontano. La obra escrita de Regiomontano engloba tratados de matemática, centrados en lo que hoy se denomina trigonometría (se le considera uno de los fundadores de esta parte de la matemática) y tratados sobre astronomía. Por otra parte describe e inventa varios instrumentos útiles para la observación y la medida del tiempo (relojes solares). Entre sus obras están *De Triangulis Omnimodis*, estructurada de manera similar a los *Elementos* de Euclides. *De Triangulis* se compone de cinco libros. En el primero da las definiciones básicas: cantidad, ratio, igualdad, círculos, arcos, cuerdas y la función seno. Proporciona algunos axiomas que serán el sustento de los 56 teoremas que enunciará. En el segundo de los libros establece la ley del seno y la emplea en la resolución de algunos problemas con triángulos. Determina el área de un triángulo mediante el conocimiento de dos lados y el ángulo que los sustenta. Los libros III, IV y V tratan de trigonometría esférica centrando el tema para las posteriores obras de astronomía. También publicó varias tablas de senos empleando divisiones sexagesimales y decimales.

En el terreno de la astronomía publicó el trabajo *Epitome in Almagestum*, en el que expone el sistema de Ptolomeo. Regiomontano publicó también tablas de efemérides astronómicas, que fueron las utilizadas por Colón para sus cálculos de longitud a partir de los eclipses de Luna.

3. Geodesia y física del globo

Suele afirmarse, sin razón, que las expediciones de Colón y Magallanes derrocaron la concepción del mundo como disco plano, demostrando la esfericidad del planeta. No es correcto; la idea de la tierra esférica estaba extendida entre las personas cultas. Ya los griegos habían abandonado esa idea. La observación de la sombra arrojada sobre nuestro satélite en los eclipses lunares confirmaba visiblemente esta verdad. Ahora bien, una cosa es el globo y otra el *ecúmene* o mundo habitable, que en los primeros siglos medievales se suponía que era un disco flotante sobre las aguas; pero a fines de la Edad Media se impuso definitivamente la tesis aristotélica, que consideraba la tierra como esfera sólida, cubierta de aguas, excepto en la porción que constituye los continentes.

El término geodesia lo usó inicialmente Aristóteles (384-322 a. C.) y trata de la representación de la forma y de la superficie de la Tierra. La geodesia también se emplea en matemáticas para la medida y el cálculo en superficies curvas. Se utilizan métodos semejantes a los utilizados en la superficie curva de la Tierra.

Existe mucha incertidumbre acerca de las mediciones geodésicas realizadas por los griegos y que tanto influyeron en el pensamiento de Colón. En la tabla 1, se pueden ver las medidas que se atribuyen a algunos de los sabios griegos. Dichas medidas están expresadas en *estadios*.

El estadio era una unidad de longitud de la Antigüedad, utilizada principalmente en Grecia y Egipto, cuya medida exacta era variable dependiendo de la época y del lugar. En Grecia un estadio siempre tenía 600 pies, pero la medida del pie no era la misma en todas las *polis*. El más usado era el estadio Olímpico, que tendría 185 m. Por otro lado, el estadio ático medía 177,6 m. También existía el estadio egipcio, que en el siglo III a. C., tenía 157,5 m.

Se suele considerar el cálculo de Eratóstenes como el más ajustado. Eratóstenes sabía que en Siena (hoy Asuan), el día del equinocio, a mediodía, los objetos no arrojaban sombra, lo que equivale a decir que Siena estaba situada en el Trópico. Consideró que Alejandría estaba en el mismo meridiano que Siena y obtuvo la distancia entre ambas ciudades a partir de los datos de las caravanas que hacían dicho trayecto. A partir de la medida angular de la sombra arrojada en Alejandría en el mediodía del equinocio, calculó los grados de meridiano que había entre ambas ciudades y, con ello, la medida de la longitud del círculo máximo (ver figura 1).

Cuadro 1. Madiciones geodésicas de la circunferencia ecuatorial de la Tierra realizadas por los griegos

	Fecha	Estadios	m (1 e = 185 m)	m (1 e = 157.5 m)
Eudoxio	s. V a.C.	400.000	74.000	63.000
Dicearco	s. III a.C.	300.000	55.500	47.250
Eratóstenes	s. III a.C.	252.000	46.620	39.690
Posidonio	s. I a.C.	180.000	33.300	28.350

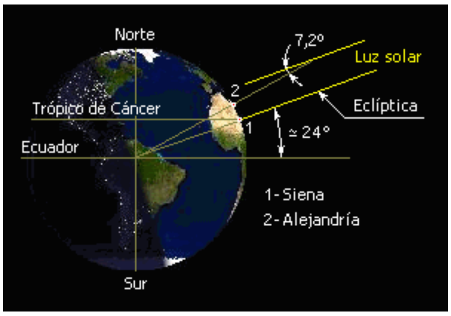


Figura 1. Esquema del cálculo realizado por Eratóstenes (fuente de la imagen [Wikipedia Eratóstenes, 2018])

Actualmente se asigna una medida de 6356.8 m al radio polar de la Tierra, lo que da lugar a una medida de la circunferencia del meridiano de 39.941 km.

No es descabellado pensar que Eratóstenes utilizase el estadio egipcio de 157.5 m, dada su procedencia y el lugar en el que se realizaron las mediciones. Si se rehace el cálculo de Eratóstenes con la distancia y medida angular exacta desde Alejandría hasta el lugar geográfico situado justo en la intersección del meridiano que pasa por Alejandría con el paralelo del trópico de cáncer, se obtiene un valor de 40074 km para la circunferencia terrestre, con un error inferior al 1 %.

Posidonio rehizo el cálculo de Eratóstenes 150 años más tarde y obtuvo una circunferencia sensiblemente menor. Este valor fue adoptado por Ptolomeo y fue en el que probablemente se basó Cristóbal Colón para justificar la viabilidad del viaje a las Indias por occidente. Con las mediciones de Eratóstenes, el viaje no se habría llegado a realizar, al menos en aquella época y con aquellos medios, aceptando solo las certezas científicas. La *Xunta dos Mathematicos*, que asesoraba al monarca, que utilizaba la medición de Eratóstenes, desaconsejó el viaje. En su informe, realizado a petición real, determinaron que el objetivo principal, –llegar a China y Japón–, era imposible dada la distancia [Comellas, 2012]. Finalmente, la empresa fue aprobada por la reina por las ventajas estratégicas y comerciales que preveía el proyecto y sobre objetivos secundarios, como la condición de Colón de obtener prebendas y porcentajes sobre las tierras que descubriera en camino.

Paolo dal Pozzo Toscanelli (Florencia, 1397-1482) fue un matemático, astrólogo y cosmógrafo italiano. En junio de 1474 envió una carta, con un mapa adjunto, a su antiguo amigo el médico portugués Fernando Martíns de Roriz, al cual el rey Alfonso V de Portugal le había pedido un parecer geográfico sobre las rutas a las Indias. Toscanelli expuso una idea para llegar a las islas de las Especias navegando hacia el oeste.

Los cálculos de Toscanelli, que nunca había salido de Italia, daban a la tierra una circunferencia de unos 29.000 km, según cálculos de historiadores modernos, en lugar de los 40.000 km reales. Este error se habría producido al basarse en datos de la Geografía de Ptolomeo. Esta confusión habría tenido dos efectos de calado: en primer lugar, animó a Colón a emprender la ruta hacia occidente, en segundo lugar, propició la identificación por el Almirante de las tierras del Caribe con la isla mítica de Antilla y con el oriente del continente asiático [Comellas, 2012].

Hernando Colón, hijo de Cristóbal Colón, en su *Historia del Almirante*, transcribe una carta enviada por Toscanelli a Cristóbal Colón en la que se afirma que le envía copia de la carta de Fernando Martíns y del famoso mapa:

> «*Como respuesta a tu carta, te remito copia de otra carta que hace tiempo escribí a un amigo mío, servidor de su majestad el rey de Portugal, antes de las guerras de Castilla ... Te mando también una carta de marear igual que la que le envié a él... En ella está delineado todo el extremo de occidente, abarcando desde Irlanda hasta el sur, llegando a Guinea, con todas las islas que en este trayecto se encuentram. Justo frente a ellas, en poniente, está dibujado el comienzo de las Indias con las islas y los territorios a los que os podéis dirigir. Consta también cuánto os podéis alejar del polo ártico por la línea equinocial, y durante cuánto tiempo, es decir, cuántas leguas hay que hacer para llegar a aquellas tierras... Las líneas rectas que surcan a lo largo de dicha carta muestran la distancia que hay de poniente a levante; las otras, verticales, marcan la distancia que hay de norte a sur... Desde la ciudad de Lisboa, yendo derechos hacia poniente, figuran en dicha carta veintiséis espacios, cada uno de los cuales abarca doscientas cincuenta millas, hasta llegar a la muy noble ciudad de Quinsai, que tiene un perímetro de cien millas, es decir, treinta y cnco leguas... Dicha ciudad se encuentra en la provincia de Mangi, cerca de la provincia de Catay[4]. Desde la isla de la Antilla[5], a la que vosotros conocéis y llamáis de las Siete Ciudades, hasta la muy noble isla de Cipango[6], hay diez espacios, correspondientes a dos mil quinientas millas, es decir, doscientas veinticinco leguas. (Florencia, a 25 de junio de 1474)*» [Hernando Colón, 1571]

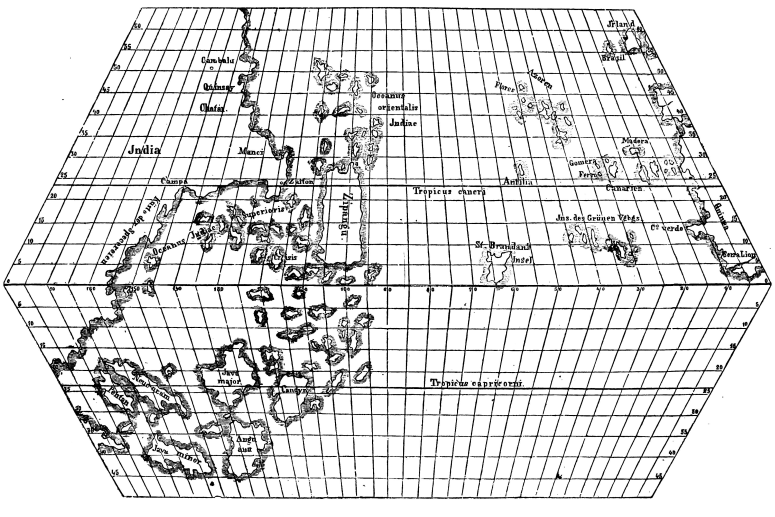


Figura 2. Reconstrucción hipotética del mapa de Toscanelli realizada en 1898 Fuente: Wikipedia).

El mapa de Toscanelli no se ha conservado. Varios historiadores modernos han propuesto reconstrucciones hipotéticas basadas en la descripción que da el propio Toscanelli en su carta. Era una «*carta de navegar*», en la cual estaban dibujadas líneas rectas longitudinales que indicaban la distancia este-oeste y líneas rectas transversales para las distancias norte-sur (ver figura 2).

[4]Quinsay es la actual Ching-chiang-hsien. Catay es hoy Hang-chou

[5]Era una isla fantástica supuestamente situada en el océano hacia los 40° de latitud norte

[6]Japón

4. Cartografía

Los primeros mapas medievales eran circulares, de acuerdo con la forma supuesta para el mundo habitado, aunque también los había de forma ovalada o, incluso, en forma de corazón. Además de colocar el Paraíso en uno u otro lugar del Oriente, solían estar ilustrados con numerosas figuras de geografía física o política, especialmente con representaciones de hombres y animales monstruosos (figura 3). Lo cierto es que los mapas evolucionaron poco en la Edad Media [Comellas, 2015].

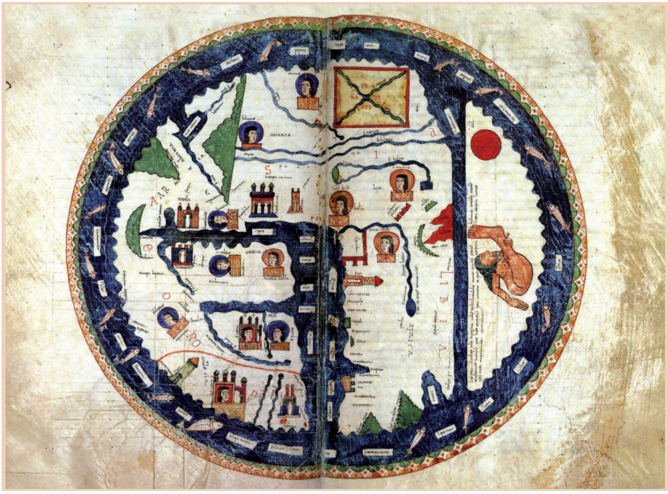


Figura 3. Mapamundi del Beato de Burgo de Osma contenido en la obra Apocalipsis, Beato d eLiébana, monjes Pedro y Martino, 1086 [Calendario IGN, 2018]

Ya en el siglo XIII se había iniciado un nuevo tipo de mapa más científico para representar las costas, con menos fantasías y figuras abigarradas. Son los mal llamados *portulanos*, *cartas de compás* o *loxodrómicas*, caracterizados por la encrucijada de líneas que los atraviesan, radios de rosas náuticas con sus centros dispuestos en circunferencia, mediante los cuales podían orientar su rumbo los navegantes. Se trata de las primeras cartas náuticas. No se sabe a ciencia cierta quién inventó la carta portulana o de compás, precursora de la moderna carta náutica. A veces se denominan incorrectamente portulanos a determinadas cartas planas. Otro punto en controversia es la existencia de un supuesto modelo, no se sabe si italiano o mallorquín, del que derivarían los portulanos conocidos, muy semejantes entre sí [Comellas, 2015].

No estaban sujetas a ningún método de proyección, antes de que se inventara el sistema de proyección que, gracias a Mercator, resolvió el problema de trazar el rumbo exactamente entre puntos cualesquiera. La deformidad salta a la vista, apareciendo contraídas las dimensiones norte-sur, al contrario de lo que sucede en las cartas de Mercator (figura 4). Esto podría deberse a haber utilizado datos españoles o portugueses para las costas del Atlántico, expresados en leguas, que al ser erróneamente reducidas a millas de portulano produjeron esa deformación [Comellas, 2015].

Entre las aportaciones más importantes de los pueblos ibéricos a las ciencias positivas, destacan sus aportaciones a la Geografía. En el primer tercio del siglo XIV, navegantes mallorquines se arriesgaron a llegar al «*Mar Tenebroso*». De estas expediciones no quedan documentos fidedignos, pero sí queda el fruto de sus descubrimientos, en los primeros portulanos mallorquines. Por ejemplo, el de Dulceti o Dulcert, fechado en Mallorca en 1339, traza la costa africana en mayor trecho que los portulanos italianos, los cuales llegan sólo hasta el cabo Bojador, considerado como límite meridional del mundo. El mallorquín Guillermo Soleri (¿Soler?), que trabajó a fines del siglo, publicó una carta en 1385 que se conserva en Florencia y otra que se conserva en París.

Figura 4. Mapa del mundo incluido en la «Cosmographia» de Ptolomeo, realizada en Florencia entre 1460 y 1477, conocida como Codex valentinus [Calendario IGN, 2018]

Además del de Duceti, algunos de los portulanos más antiguos conocidos son: la carta pisana del Mediterráneo, que se supone de fines del siglo XIII (alguien asegura que es de 1270); el atlas de Luxoro en Génova, de la misma época; la de Petrus Vesconte dibujada en Génova en 1311; la de Angelino Dalorto, en 1325; la de Giovanni Carignano, que se supone también de comienzos del siglo XIV. Entre los italianos del mismo siglo XIV merece citarse Francesco Pizigano (1367-1373);

En el siglo XIV, los mapas evolucionan rápidamente, al compás de las exploraciones de mallorquines, catalanes e italianos. Son famosos el de Visconti, o de Sanudo (1320), el Atlas de los Médici (1351) y la carta catalana de 1375.

Ya en el siglo XV surgieron muchos trazadores de portulanos: el mallorquín Viladestes, que tiene un portulano (algunos escritores españoles llegan a atribuirle la invención de la proyección de Mercator) fechado en 1413; los italianos Jacobo de Giroldis, Pietro delli Versi, Battista Becharius, Andrea Bianco, que trabajaron de 1422 a 1448; el mallorquín Gabriel de Valseca, de quien se conserva un portulano de 1439; Petrus Roselli (1447-65), Bartolomé Pareto (1455), Gratiosus Benicasa (1461-82), Andrea Benicasa (1476-90), Conte Freducci (1497), y otros.

Figura 5. Carta Universal, Juan de la Cosa, 1500. Primer Mapa en el que se representa América. Museo Naval. Madrid. [Calendario IGN, 2018]

Juan de la Cosa fue el cartógrafo que acompañó a Colón en sus primeros dos viajes al continente americano. El mismo era navegante y residía en el Puerto de Santa María, donde poseía una nave llamada Mariegalante, en honor de una mujer de la que estuvo enamorado, que fue la que se renombró como Santa María para el primer viaje de Colón. Participó en los primeros siete viajes que se hicieron a América, tanto con Colón, como con Alfonso de Ojeda e incluso al mando de alguna expedición. Era «*el cartógrafo de la reina*», como lo denomina Javier Tazón en su excelente novela [Tazón, 2010]. Al regreso de estos viajes dibujó su mapamundi, la «*Carta de Juan de la Cosa*», publicada en el año 1500 y que se conserva en el Museo Naval de Madrid (figura 5).

Se trata del mapa más antiguo conservado en el que aparece el continente americano.

> *Está dibujado sobre pergamino, en dos pieles que, unidas por el eje menor, forman un rectángulo de 1,83 m de longu¡itud por 0,96m de altura, á no haberse redondeado la parte superior, con objeto, sin duda, de embellecer la forma del conjunto y suprimir el espacio que habían de ocupar regiones desconocidas del recién descubierto continente americano. Sirve como eje mayor de semejante rectángulo, el trópico de Cáncer, siendo el punto cardinal Oeste el extremo superior, en el cual, tocando el arco de círculo que remata la figura del documento, hay otro rectángulo pequeño, á manera de cuadrado con marco, que contiene una efigie de San Cristóbal (...) alusión evidente y clara á Cristóbal Colón. Varios han sido los que han supuesto que la cara del Santo es el verdadero retrato del Almirante, y en realidad, tantas razones hay para afirmarlo como para negarlo* [Dascano, 1892].

Dicho mapa refleja los resultados de los descubrimientos realizados en América durante el siglo XV, con información procedente de los viajes realizados por Colón (viajes de 1492, 1493 y 1498), Alonso de Ojeda, Vicente Yáñez Pinzón, Juan Caboto, Pedro Álvares Cabral y diversos exploradores portugueses que recorrieron África, como Bartolomeu Dias y Vasco da Gama.

Figura 6. Mapa del mundo de Henricus Martellus, 1489, primer mapa en el que aparece delineada África [Calendario IGN, 2018].

La Cosa sugirió que, las tierras descubiertas en el norte y el sur de América, podían estar unidas formando un solo continente, aunque con la efigie superior hizo un truco para permitir la posibilidad de que existiera un paso marítimo entre ambas en Centroamérica, cosa que Colón creía. Cuba aparece ya identificada como una isla, en contra de la opinión de Colón. En general las Antillas aparecen de manera completa y en América del Sur se muestra la costa desde el cabo de la Vela hasta el cabo de San Agustín, mostrando una parte del norte del Brasil. Por el contrario, en América del Norte no se muestran la península de Florida, el golfo de México ni la península de Yucatán. América Central está tapada por la efigie del santo.

El contorno de las costas de África aparece dibujado por primera vez de manera correcta, gracias a los últimos viajes de exploración realizados por los portugueses, en contra de lo que ocurría con el mapa de Martellus (figura 6). La región de Europa y el Mediterráneo aparece bien detallada, mientras que amplias zonas de Asia se muestran vacías e imprecisas.

El mapa está decorado con rosas de los vientos, banderas, barcos, ciudades, reyes, personajes de la Biblia y figuras mitológicas. Se representan algunos ríos y la mayoría de los topónimos están escritos en castellano antiguo.

5. Astronomía

Durante la Edad Media, la Astronomía era cultivada casi exclusivamente como ciencia auxiliar de la Astrología. El trazado de horóscopos así lo exigía.

En la antigua Grecia, el astrónomo y matemático Eudoxo estableció el conjunto completo de constelaciones clásicas alrededor del 370 a.C. En el siglo II, Ptolomeo publicó un catálogo con 1022 estrellas visibles desde Alejandría, como parte de su libro *Almagesto*. El catálogo de Ptolomeo se basó casi por completo en uno anterior de Hiparco. Se mantuvo como el catálogo estándar de estrellas en el mundo occidental y entre los árabes durante más de ocho siglos[7].

Durante la época de esplendor del islam, los astrónomos árabes publicaron diversos catálogos de estrellas, incluyendo el *Compendio de la ciencia de las estrellas* de Alfraganus (850), que corregía el Almagesto de Ptolomeo, las *Tablas toledanas* de Azarquiel (1087), las *Tablas iljaníes* del Observatorio de Maraghe (1272) y las *Tablas sultanianas* de Ulugh Beg (1437). Como herencia de ese trabajo llevado a cabo por los astrónomos árabes, todavía se siguen utilizando muchos nombres árabes para muchas estrellas.

La concepción del universo que imperaba en la época de Colón era la concepción geocéntrica de Ptolomeo. Existían, no obstante, compendios de efemérides que permitían predecir las posiciones de los principales planetas y de los eclipses del Sol y de la Luna. Ya se han mencionado, en ese sentido, las tablas de efemérides astronómicas de Regiomontano, que son las que utilizaba Colón en sus viajes.

6. La cosmografía y la náutica

El término «*cosmografía*» aparece en la obra de Claudio Ptolomeo (siglo II d. C.), y se refiere a la ciencia que describe las características del universo en forma de mapas, combinando elementos de la geografía y la astronomía. En la España del siglo XVI se utilizó este concepto por parte de la escuela creada por la Casa de Contratación de Sevilla, para englobar todas las materias relacionadas con la navegación transatlántica, en la que era imprescindible la preparación matemática y los conocimientos de Astronomía.

La acumulación de conocimientos de cosmografía en el suroeste de Europa fue muy importante desde los siglos finales de la Edad Media, fundamentalmente en los reinos cristianos

[7] El astrónomo islámico abd Al-Raman Al Sufi lo actualizó en el año 964 y en el año 1437 Ulugh Beg recalculó la posición de las estrellas, pero no fue completamente reemplazado hasta la aparición del catálogo de mil estrellas de Tycho Brahe en 1598

peninsulares que experimentaron la navegación atlántica. Mientras que la navegación costera podía realizarse con muy escasos conocimientos de cosmografía. En la navegación de altura, cuando se pierde de vista la tierra firme, el horizonte no aporta ninguna indicación que permita orientarse. La única manera de obtener referencias es a partir de la posición de los astros en el cielo: el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas.

Imago Mundi es el título original y en latín de un texto de cosmografía escrito en 1410 por el teólogo francés Pierre d'Ailly. D'Ailly escribió su obra basándose en autores antiguos como Aristóteles, Claudio Ptolomeo, Plinio el Viejo, en los padres de la Iglesia, como San Agustín y en escritores árabes, como Averroes o Avicena. Una de sus fuentes preferidas fue el *Opus Maius* ("gran obra" en latín) de Roger Bacon y no dudó en señalar las contradicciones entre los diferentes autores. El libro está ilustrado con un mapa del mundo, todavía influido por los mapas *Orbis Terrarum*) de la Edad Media. A diferencia de la mayoría de los mapas medievales tiene el norte en la parte superior de la página. En el, la tierra aparece como un mundo dividido en zonas climáticas, y las superficies terrestres se recogen en el hemisferio norte. Cuando se embarcó en su primer viaje a América, Cristóbal Colón poseía una copia de la obra de Pierre d'Aylli editada en Lovaina, que dataría aproximadamente de 1483. Este ejemplar, anotado de su mano, se conserva en la Biblioteca de la Institución Colombina de Sevilla. Fue uno de sus libros de referencia en su Empresa de Indias.

7. Instrumentos de medida

Se van a resumir en este apartado los procedimientos y las características de los instrumentos que se utilizaban a finales del siglo XV en astronomía de posición, que es como se denomina la ciencia de calcular la posición sobre la esfera terrestre a partir de la medida de las posiciones de los astros.

Hasta la invención del telescopio y su utilización por parte de Galileo, a principios del siglo XVII, toda la astronomía se realizaba de manera visual, sin instrumentos que proporcionaran aumentos. Sí que se utilizaban diversos instrumentos para la medida de ángulos que permitieran situar a los astros en la bóveda celeste. Los mismos instrumentos eran los que se utilizaban en el mar para la realización de medidas que permitieran calcular la posición del buque. La diferencia estaba en el tamaño, pues en los barcos no era posible utilizar instrumentos de gran tamaño que exigieran una fijación anclada al terreno.

En el siglo XIII, el sabio rey Alfonso X de Castilla, en las *Partidas*, dio el nombre de «*náucheres*» a «*aquellos por cuyo seso se guían los navíos*». Se habla de la aguja náutica, por la que *los marineros se guían en la noche oscura*, y se explican minuciosamente los *relogios*, *astrolabios* y *cuadrantes* [García Franco, 1959].

En la época de Colón, los instrumentos astronómicos que se utilizaban en navegación eran la brújula, el astrolabio, el cuadrante y la ballestilla.

7.1. Orientación: la brújula

Los términos «*orientación*» u «*orientarse*» tienen que ver con tomar como dirección de referencia *Oriente*, el Este, la dirección por donde sale el Sol. Todas las culturas antiguas toman el Este como la dirección a la que se refieren todas las demás. Los altares mayores de los templos cristianos se dirigen al Este, con lo que la fachada principal queda dirigida a Poniente. A partir de la Baja Edad Media, con la irrupción de las brújulas, se sustituye Oriente por el Norte como dirección de referencia [Comellas, 2015].

La brújula era conocida en Europa desde el siglo XII de nuestra era y, en China, desde el siglo III. No está claro si el conocimiento de la brújula llegó a Europa desde China a través del mundo islámico, o si se trató de un descubrimiento hecho en Europa de manera independiente.

Al principio estaban constituidas por una aguja magnética, embebida en una pajita y flotando en agua. En el siglo XV la aguja se fijó a una cartulina que podía girar sobre un soporte y que llevaba marcados 32 rumbos. Las brújulas de la época de Colón llevaban una Rosa de los Vientos dibujada en la cartulina, con una flor de lis en el Norte y una cruz en el Este. La brújula es uno de los grandes inventos de la humanidad. La introducción de la brújula y de las cartas náuticas revolucionó la navegación [Dunn, 2016].

En náutica se utiliza la denominación «*compás*», en lugar de brújula. El motivo proviene de que se suelen utilizar para tomar la medida de los ángulos que forman las visuales dirigidas a dos puntos diferentes de la costa.

La brújula permite establecer la dirección de los puntos cardinales. Pero la brújula apunta al Norte magnético, no al Polo Norte geográfico. El Polo Norte magnético y el geográfico no coinciden[8]. A la desviación entre la dirección a la que apunta la brújula y la dirección del Norte verdadero se le denomina «*declinación magnética*».

Esta desviación de la aguja magnética ya era conocida en tiempos de Colón, y los marinos «*cebaban*» la aguja, esto es, desviaban un poco el cartón para que apuntase al Norte verdadero. Colón conocía la declinación y reconoce, en una carta a los Reyes Católicos, haber cebado la brújula en sus navegaciones por el Mediterráneo. Lo que no se conocía es que la declinación magnética variaba con arreglo a la latitud y la longitud geográfica, con lo que hay que cebar de distinta manera la aguja según la zona por la que se navega.

Hoy sabemos que la declinación no solo varía con la posición en la esfera terrestre, sino que también varía con el tiempo. A día de hoy, todo el trayecto realizado por Colón tiene declinación Oeste, o sea, la brújula señala más al Oeste que la dirección exacta del Norte. Hoy, en el Oeste de España, la declinación es de -1.5°, a la altura de las Azores la declinación es de -14°y, a medio camino con América llega a -18°. Luego comienza a disminuir y, en las Bahamas, donde llegó Colón, es de -3°.

En la época de Colón no era igual que ahora. Del portulano de Valseca de 1439 se podría deducir que la declinación en España era de 10°Este. Georg Hartman, vicario de Núremberg y constructor de relojes de Sol, halló, en 1510, que la declinación era de 6°Este en Roma y de 10°Este en Núremberg. En París, en 1550, Oroncio Fineo midió 8°Este. En 1658 la declinación en Londres era 0°. En el siglo XVIII la declinación marcaba ya Oeste y, en 1811, alcanzó -24°. Desde entonces ha ido disminuyendo hasta los bajos valores de hoy. A día de hoy en España las agujas señalan casi al Norte y, durante el siglo XXI, se irá desviando al este, como en tiempos de Colón.

En tiempos de Colón, en Europa, la brújula se desviaba al Este e iba disminuyendo la desviación al ir hacia América. Tomaba la máxima declinación Oeste a dos tercios del camino hacia América. Este fue un cambio que sorprendió a Colon, siendo el la primera fuente histórica de semejante variación. Se podría considerar que este fue el mayor descubrimiento de carácter científico de Colón durante sus viajes a América.

7.2. Sistemas de referencia: el problema de la longitud

Para ir de un sitio a otro es necesario conocer la posición del segundo punto respecto del primero. Por ejemplo, para ir de Canarias a las Azores hay que saber que las Azores están al Nornoroeste de Canarias. Tomar una dirección es tomar un rumbo. Es lo que hacían los marinos en los tiempos de Colón y lo que se sigue haciendo hoy en día.

[8]A día de hoy, el Polo Norte magnético se sitúa en la latitud 83.7°

Los portulanos son mapas de rumbos, que permiten a un piloto saber qué rumbos tienen que dar al navío para llegar de un puerto a otro.

El problema para establecer un sistema de referencia más preciso tiene que ver con la dificultades que había para conocer la longitud. Todo sería más sencillo si la Tierra fuera plana, como pretenden algunos, pues bastaría trazar una cuadrícula. El problema de la esfera es que no se puede transformar en un plano, y cualquier representación plana de la misma tiene deformaciones.

Para fijar la longitud se necesita establecer un meridiano cero. Los clásicos propusieron *Ponto Euxino.*, en el Mar Negro. En los tiempos modernos se adoptó la isla de Hierro, a la que siempre se refería Colón. Cada estado adoptó su meridiano de referencia. En 1882 se adoptó, por acuerdo internacional, el meridiano de Greenwich (Londres). Esta elección fue debida al prestigio de Inglaterra, pero también, por el hecho de que es uno de los meridianos que atraviesa más tierras habitadas.

El cálculo de la longitud a la que se encuentra un navío se puede hacer comparando la hora exacta a la que culmina[9] un astro con la hora conocida a la que dicho astro culmina en el meridiano de referencia. Los instantes de culminación de los astros en los meridianos de referencia se obtienen de los prontuarios astronómicos, de las tablas de efemérides. El problema en aquellos tiempos era que no se conocía la hora exacta. Hay que tener en cuenta que una diferencia de unos pocos segundos en la medida del tiempo o de décimas de minuto en la altura del astro, produce un error de varias millas de varias millas en el cálculo de la posición final [Mederos, 2007]. De hecho, el problema del cálculo de la longitud en el mar, no se pudo resolver hasta el siglo XVIII, gracias al trabajo del relojero británico John Harrison, que inventó el primer cronómetro marino.

La imposibilidad de medir la longitud con precisión forzó, por ejemplo, que en la firma del *Tratado de Tordesillas* del año 1494 que establecía el límite de las zonas de navegación de Portugal y España, se fijara la línea de demarcación a 370 leguas desde la isla de Cabo Verde, en lugar de poder indicar un meridiano concreto. De hecho, en aquel tiempo, se fijó como meridiano de referencia el que pasaba por Cabo Verde. [Armada Española, 2012].

Los mejores cálculos de longitud de Colón los hizo por estima de la distancia navegada. En agosto de 1498, en el tercer viaje, al llegar al golfo de Paria, en la desembocadura del río Orinoco, juzga haber recorrido «*casi setenta grados equinociales*». Acierta Colón, pues se encuentra prácticamente en la línea del equinocio y a 62°Oeste. Un error despreciable para un cálculo de estima con los medios de la época.

Una manera de estimar la longitud era sincronizar a partir de un eclipse, sabido de antemano en qué momento se iba a producir. Los cálculos por eclipse de Luna, que no son fenómenos instantáneos, siempre son imprecisos. A lo largo de sus cuatro viajes, Colón pudo observar dos eclipses de Luna: uno desde Saona, al sur de La Española el 14 de septiembre de 1494; el otro, el 29 de febrero de 1504, en el curso de su cuarto viaje. Hay que tener en cuenta que el reloj de que disponía Colón era una ampolleta (reloj de arena), lo que dificulta enormemente la medición del tiempo.

En el primer caso, el del eclipse de 1494, la isla de Saona esta a 69°oeste, por lo que la diferencia real de longitud con el cabo de San Vicente es de cuatro horas. Colón asignó 5 h 23 m. El error puede deberse a haber interpretado mal las efemérides del libro de Regiomontano, que son las que utilizaba, pues estas están referidas a Núremberg. La diferencia horaria entre Núremberg y Saona es de 4h 20 m., con lo que la medida de Colón sería excelente.

El segundo caso, el del eclipse de 1504 es el más conocido por la leyenda que se ha transmitido acerca de él. Su hijo Hernando, en la biografía del almirante, escribe que Colón estaba

[9]Se dice que un astro *culmina*, cuando está en la posición más alta sobre el horizonte, lo que sucede, en el hemisferio Norte, cuando pasa por el meridiano Sur del observador

en un momento dramático. Naufragó en Jamaica y las naves quedaron destrozadas. Llevaban meses sin recibir ayuda y los indios, que al principio habían sido amistosos, empezaban a ser cada vez más hostiles. Colón transmitió a los indios que su Dios les iba a enviar una señal del cielo para mostrarles lo enfadado que estaba de que no les proporcionasen alimentos; que tenían estar atentos esa noche a la salida de la luna. Cuenta Hernando que los indios, al ver la Luna enrojecida, se atemorizaron y dieron a Colón y sus hombres todo lo que pidieron [Hernando Colón, 1571]. No está claro que las cosas sucedieran de verdad como narra el hijo de Colón.

En cuanto a la medición de longitud en el eclipse, hay bastante imprecisión en determinar a qué llama Colon «*final del eclipse*». En la interpretación más generosa para Colón, el error de estimación estaría en unos 15 minutos de longitud, si bien Colón volvió a interpretar mal las efemérides de Regiomontano [Comellas, 2015].

7.3. El astrolabio

Figura 7. Astrolabio.

El astrolabio plano era un disco circular graduado, con alidada giratoria, que permitía tomar alturas y medir azimutes. En tierra se montaba sobre un trípode, pero en el mar era más difícil su manejo. Tan inseguras eran sus determinaciones que el piloto Bartolomé Díaz, que dobló por primera vez el Cabo de Buena Esperanza, se vio obligado a desembarcar en la bahía de Santa Elena, principalmente para asegurarse de la latitud con observaciones más fidedignas.

El astrolabio náutico era un instrumento mucho más simple que el astrolabio astronómico, ya que su objetivo queda reducido a tomar alturas de los astros, habiendo sido utilizados exclusivamente por los navegantes. Fundamentalmente es un círculo de bronce o latón (también los hubo de madera) atravesado por cuatro radios, situados a 90°uno del otro. La intersección con el círculo del radio situado en los 180 grados, tiene una mayor masa del material en el que se ha construido el astrolabio, para que haga el efecto plomada y disminuir la oscilación que el viento o el movimiento del buque puedan imprimirle. El diámetro vertical representa la línea zénit-nádir y el horizontal la línea del horizonte. En esta línea está situado el grado cero, correspondiendo el grado 90 al zénit. Los portugueses prefirieron situar el grado 90 en la línea del horizonte, con lo que la cifra señalada por la alidada o «*medeclina*» indicaba distancias cenitales en lugar de alturas; de este modo se ahorraba la operación de la resta. Dispone además de una anilla o «*colgadero*» para introducir por ella un dedo y sustentar el astrolabio (ver figura 7).

Así explica Diego García Palacio, en su *Instrucción Náutica para navegar* de 1587, la forma de utilizar el astrolabio:

> «*El que quiera tomar el sol con el astrolabio en la mar, se asentará y pondrá cerca del mástil mayor, que es donde la nave da menos vaivenes y está más quieta, y colgando el dedo segundo de la mano derecha de su anillo, pondrá el rostro y el astrolabio frontero del sol derechamente y conocerá que está por la sombrea que el sol, y alzará o bajará el penicidio (alidada) hasta que entre el sol por los dos agujeros de las pínulas y estando así tomará del astrolabio los grados que muestre la punta del penicidio, y hará por ellos las cuentas según las reglas"*» [García de Palacio, 1587].

Los astrolabios se usaban para situar la posición de los astros, para saber la hora solar y para determinar la latitud a partir de la posición de las estrellas. Los marineros musulmanes a menudo los usaban también para calcular el horario de oración y encontrar la dirección hacia la Meca. El astrolabio servía también para ubicar las distintas posiciones de los astros y era utilizado también para resolver problemas astronómicos más complejos.

7.4. La ballestilla y el cuadrante

Mientras el astrolabio puede considerarse como el teodolito primitivo, el precursor del sextante es el rudimentario bastón de Jacob o ballestilla (ver figura 8), de más fácil manejo y de gran utilidad en manos expertas. Rey Pastor afirma que «*Con uno u otro, el error cometido en la medición de alturas y azimutes era del orden del medio grado*» [Rey Pastor, 1951]. Parece difícil de admitir esta afirmación. Quizás en tierra y con astrolabios de mayor diámetro que lo utilizados en los barcos pudiera llegarse a alcanzar esa precisión. Pero cualquiera que haya tomado alturas con un sextante moderno en un barco batido por las olas sabe lo difícil que resulta. Mucho más con aquellos instrumentos primitivos.

El astrolabio llegó a Europa en el siglo XII a través de la España musulmana. En el caso de la ballestilla, no está claro a quién corresponde su invención. La introducción de la ballestilla se consideró un progreso trascendental en la navegación. En la figura 8 se pueden ver las dos formas de utilización de la ballestilla: hacia adelante y hacia atrás. La utilización «*hacia atrás*» sugiere que pudiera haber un pequeño espejo montado en la base de la ballestilla, que permitiera ver el Sol, pues se antoja difícil hacerlo a partir de su sombra. Si fuera así, queda aun más claro que la ballestilla sería el antecesor de los sextantes.

Por su parte, el cuadrante marino (ver figura 9) se compone de un cuarto de círculo graduado sobre el limbo. Uno de los radios estaba provisto de dos pínulas perforadas que permitían enmarcar al astro. Una plomada indicaba la vertical, y así se podía leer la altura [Reymond-Goñi, 2012].

Colón hace mención en su diario a tomas de altura de la polar con el cuadrante, durante sus navegaciones hacia América, en varias ocasiones, como se mencionará en el siguiente apartado.

7.5. La estrella del Norte

Las estrellas se han utilizado para guiar la navegación desde tiempos remotos. Homero cuenta que Ulises conducía su nave observando el cielo estrellado. Plinio dice que los primeros nautas se guiaron por la estrella polar , a la que llamaba *Estrella fenicia*. Esta estrella tuvo que ser nuestra β *Ursae Minoris*, que en aquellos tiempos lejanos de cartagineses, fenicios y griegos, estaba más cerca del Polo que nuestra α de la Osa Menor, que es la que hoy nos sirve de guía par a la orientación del norte.

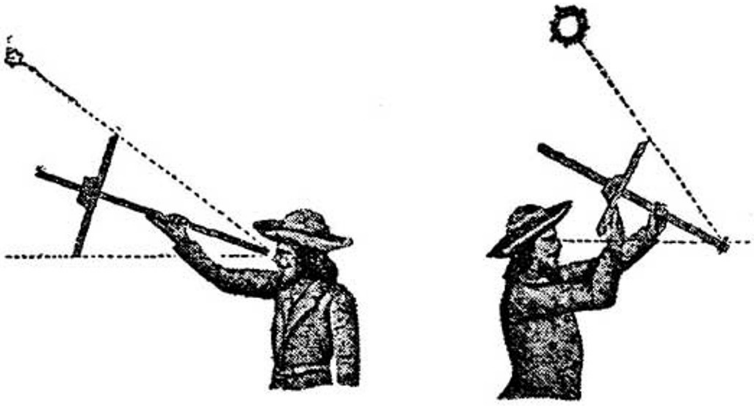


Figura 8. Utilización de la ballestilla, hacia adelante y hacia atrás [Rey Pastor, 1951].

Figura 9. Cuadrante marino.

La esfera celeste gira sobre un eje, y los extremos de ese eje son los polos celestes Norte y Sur, que coinciden de manera muy sensible con la estrella Polar y la Sigma del Octante. Estas estrellas se encuentran siempre en el mismo punto del cielo, y las demás estrellas –también el Sol y la Luna–, y en definitiva toda la campana del cielo en su conjunto, parece girar en sentido antihorario a su alrededor.

Ahora bien, la posición de la estrella Polar no es la misma para todas las latitudes de la Tierra. En el polo Norte brilla justo en el cenit. En latitudes medias, como las de Europa, a media altura entre el cenit y el horizonte. En el ecuador, la estrella Polar está exactamente en el horizonte Norte. Algo similar sucede en el hemisferio Sur con la débil Sigma del Octante [Comellas, 2015].

En el hemisferio Norte, si se mide la altura angular de la estrella Polar sobre el horizonte, con un astrolabio o con un sextante, nos da la latitud del lugar. Este fue el recurso utilizado en tiempos de Colón. Hay que indicar aquí que, en la época de Colón, la estrella Polar estaba situada 2°y 40′ por debajo del Polo (hoy en día la distancia de la Polar al Polo es de menos de 1°).

Del diario de a bordo de Colón, se deduce que, en el viaje del Descubrimiento tomó altura de la Polar en cuatro ocasiones, en Cuba y en la Española, y en una quinta ocasión que no lo consiguió. Son las veces que reseña en el diario, aunque bien podrían haber sido más.

En las cuatro ocasiones, los errores de la medición son groseros. Toma alturas (latitudes) de en torno a 40 grados, cuando andaba por tierras que están a unos veinte grados de latitud. Es un error demasiado grosero. Menciona que utilizaba un cuadrante. En una ocasión, dándose cuenta del error, anota que tiene que bajar a tierra para reparar el instrumento. Lo cierto es que cualquiera que haya localizado en el cielo la Polar, a latitudes cercanas a 40 grados, como sucede en el Mediterraneo o la península Ibérica, sabe que la Polar se encuentra a media distancia entre el horizonte y el cenit, siendo difícil que pasase desapercibido una estrella Polar a tan solo veinte grados sobre el horizonte.

El error pudo deberse a que Colón confundiera la estrella Polar con otra estrella, aunque es difícil de creer. Pero, en palabras del almirante, «*parecíale el Norte tan alto como en Castilla*», lo que podría abonar la hipótesis de la confusión en la estrella. Esas noches de la toma de altura había Luna Llena, lo que hace que la identificación de las estrellas sea más complicada. Algún autor ha calculado que, en la fecha de las mediciones, la estrella Alfirk, la Beta de Perseo, daría las medidas tomadas por Colón. Pero también podría ser que Colón anotase mal las cifras, a propósito, con el fin de despistar a otros, los portugueses, por ejemplo.

Otra posible explicación es que Colón emplease, para tomar alturas, una ballestilla. La ballestilla, según de que forma se utilice, mide el doble del ángulo, al igual que sucede hoy en día con los sextantes cuando se utiliza un horizonte artificial. Es cierto que el denomina *cuadrante* al instrumento, pero no sería raro que se tratara realmente de una ballestilla.

Lo cierto es que Colón, en el primer viaje no era aun ducho en la toma de alturas. Con el tiempo fue cogiendo destreza, y en los siguientes viajes aparecen mediciones muy precisas. En el tercer viaje de Colón sí que aparece mención expresa al cuadrante de plomada: «*En esto de la estrella del Norte... muchas noches tomaba yo a repricar la vista de ella en el cuadrante, y siempre hallé que caía el plomo e hilo a un punto*». En otra ocasión, en 1498 junto a la Boca de la Sierpe, hizo unas medidas casi perfectas: «*Hallé que, en anocheciendo, tenía yo la estrella del Norte alta cinco grados, y entonces las Guardas*[10] *estaban encima de la cabeza; y después a la media noche hallaba la estrella alta de diez grados, y, en amaneciendo, que las Guardas estaban a los pies, quince*» [Varela, 1986]. En efecto , la Boca de la Sierpe se encuentra a 10°de latitud. La máxima altura de la Polar se registra con las Guardas en «las siete», y la mínima con las Guardas en «la una».

Colón había aprendido el método de promediar la altura de la Polar a partir de las dos observaciones extremas con las Guardas en lados opuestos. En la tabla 2 se muestra la comparación de algunas medidas tomadas en su último viaje con la latitud real.

Cuadro 2. Comparación entre algunas medidas de latitud hechas por Colón en su último viaje de 1498 con las latitudes reales (fuente [Comellas, 2015])

Lugar	Latitud tomada por Colón	Latitud real
La Isabela	22°	18°30′
Entre Margarita y la Española	14°	15°
Puerto de Santa Gloria (Jamaica)	18°	18°27′

7.6. Las Guardas de la Polar

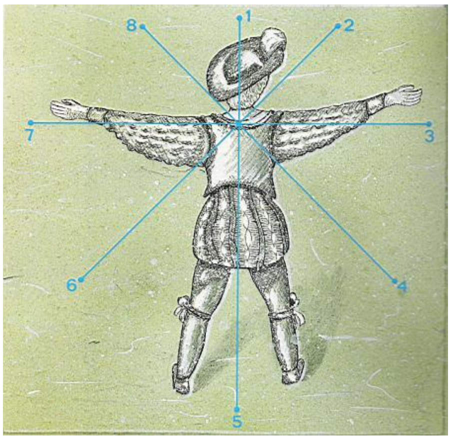
La estrella Polar es la estrella más brillante de la constelación Osa Menor. Dentro de esta constelación, las estrellas Beta y Gamma son las que Colón denomina «*las Guardas*». Durante muchos siglos, los marinos se sirvieron de ellas para calcular la hora. Se pueden interpretar, y así se hacía, como un reloj de aguja única, que da una vuelta completa cada veinticuatro horas.

La interpretación de la posición de las Guardas ha variado respecto de la época de Colón, debido a la precesión de los equinocios y al cambio del calendario Juliano al Gregoriano. El día 3 de agosto de 1492, fecha de partida de las tres carabelas, las Guardas marcaban a media noche «las siete y media». A las once de la noche marcaban «las ocho», y las nueve, justamente esa hora, «las nueve» [Comellas, 2015].

Los marinos no empleaban tanta precisión ni proyectaban en el cielo las agujas de un reloj,

[10] En el siguiente apartado se explica qué son las Guardas de la Polar

(a)



(b)

Figura 10. (a) Nocturlabio. (b) Hombre del Norte.

pues la esfera de los relojes no se generalizó hasta el siglo XVII. Sí que existía un instrumento denominado *nocturlabio* (ver figura 10a), cuyo invento se atribuye al mallorquín Ramón Llul, que vivió en el siglo XIII. También se le atribuye a él la invención de la *Rosa de los Vientos*.

Los marinos solían usar una figura simbólica, «*el hombre del Norte*», que los marinos imaginaban proyectado en el cielo, con el corazón en la Polar. La expresiones utilizadas eran *las guardas en la cabeza, en el hombro izquierdo, en el brazo izquierdo, debajo del brazo izquierdo, a los pies, debajo del brazo derecho, en el brazo derecho* y *en el hombro derecho* (ver figura 10b). Estas expresiones aparecen frecuentemente en el diario de Colón [Colón, 1492] y se adaptaban muy bien a la distribución de las guardias nocturnas de los los pilotos y grumetes.

7.7. Medida de la velocidad

La velocidad a la que se desplaza un buque se obtiene dividiendo la distancia recorrida por el tiempo que se tarda en recorrerla. Se trata, no obstante, de una magnitud vectorial, esto es, la distancia recorrida lo es en la dirección del vector velocidad.

La *estima* de la velocidad era, en tiempo de Colón y un siglo después de sus históricos viajes de descubrimientos, una solución de bulto dada por un experto *ojo marinero*. La experiencia de los pilotos permitía a estos fijar una presunta velocidad sabiendo la capacidad de marcha de un determinado tipo de nave. En el cálculo mental entraban como elementos determinativos el conocimiento práctico de la acción del viento sobre el aparejo; el aspecto del mar, unas veces suave y otras agitado; el influjo de las corrientes; la marcha cerca de la costa; el ensebado del casco, la carga y estiba de la misma. Una serie de circunstancias que solo podía apreciarlas un piloto a fuerza de tiempo y de repetidas navegaciones [García Franco, 1959]

A partir de finales del siglo XV se comenzó a utilizar en los barcos la «*corredera*» como aparato de medida de la velocidad (ver figura 11). Constaba de un flotador de madera, lastrado con plomo en su parte inferior para que se mantuviera vertical en el agua, unido a un cabo en el que se hacían nudos a distancia de 1/120 millas (15,43 m). Para la medida del tiempo se utilizaba una ampolleta especifica de treinta segundos, que también son 1/120 de una hora, con lo que la cuenta de los nudos que pasaban en treinta segundos era la velocidad en millas por hora. El procedimiento era el que sigue:

> *Un hombre manejaba la corredera y otro la ampolleta. El de la corredera la echaba por la popa y dejaba correr la primera parte para que se estabilizara en el agua. El hombre iba dejando*

Figura 11. Corredera para medida de la velocidad del barco

> *correr el cordel de la corredera libremente pasando por su mano y al sentir el primer nudo cantaba "¡marca!.ª lo que el de la ampolleta la invertía y el tiempo empezaba a correr mientras el del cordel iba contando los nudos según iban pasando hasta que el de la ampolleta, en el momento que acababa de bajar toda la arena, cantaba "¡marca!z el del cordel lo agarraba fuertemente y medía la fracción de nudo que había pasado desde el último y cantaba "¡cinco nudos y un cuarto!"* [Batlló, 2002].

En la actualidad, los barcos vienen provistos de un mecanismo de corredera para establecer la velocidad. Consiste en un molinete giratorio que se acopla bajo el casco y mide, por la velocidad de giro de las aspas del molinete, la velocidad de desplazamiento del barco con respecto al agua. Dicha velocidad se lee en el instrumental de cabina.

Todas las correderas adolecen de un defecto: la velocidad que miden es la del desplazamiento del agua con respecto al casco del barco. De esta manera, si el barco está fondeado en el lecho de un río, la corredera marcará la velocidad de la corriente de agua, aunque el barco esté inmóvil con respecto al fondo del cauce. En el mar, aun con el barco en movimiento, hay corrientes que hacen que la lectura de la corredera no mida nunca la velocidad del barco respecto del fondo.

Otra causa de error al estimar las velocidades con una corredera es que la dirección de desplazamiento real del barco no es la dirección hacia la que apunta la proa del mismo. Los barcos tienen un desplazamiento lateral, que se denomina «*deriva*», motivado por el viento y las corrientes. De esta forma, si la distancia recorrida se estima multiplicando la velocidad que da la corredera por la dirección del compás a la que apunta la proa del navío, se estará cometiendo un error.

A día de hoy todos los barcos van provistos de sistemas de navegación por satélite, los comúnmente denominados GPS (Global Positioning System) y cuya denominación más correcta es GNSS (*Global Navigation Satellite System*). En este caso, la velocidad y el rumbo que se obtienen sí que se corresponden con el desplazamiento del barco respecto del fondo marino.

En la época de Colón se comenzaba a utilizar la corredera, pero no consta que en los barcos de la expedición del Descubrimiento se llegara a utilizar. Calculaban la velocidad por estima, por indicios visuales, como la ola que se formaba en la proa o la cantidad de viento que recibían las velas. De esta forma se hicieron los cálculos de estima de distancias recorridas que anotaba Colón en su diario.

7.8. Medida del tiempo

Medir el tiempo era el gran problema no resuelto de aquellos tiempos. La forma más antigua que se conoce de medir el tiempo es la «*clepsidra*» egipcia, que consistía en un recipiente lleno de agua que se iba vaciando a través de un orificio. Hacia el año mil se empezaron a fabricar relojes de Sol. En la época del descubrimiento, la hora del día se establecía por la posición del Sol y la de la noche, como ya se ha indicado, mediante la posición de las Guardas de la Polar.

En los barcos, para la medida continua del tiempo, dividida en intervalos pequeños, se utilizaba la «*ampolleta*», o reloj de arena, como se los conoce habitualmente. Al contrario que su predecesor, la clepsidra o reloj de agua, el origen del reloj de arena no está claro, se cree que su invención pudo tener lugar en el antiguo Egipto.

Figura 12. Ampolleta o reloj de arena, utilizada para la medida del tiempo

La ampolleta no era un elemento muy preciso para medir de forma fiable el paso del tiempo, había varios factores que podían afectar la duración del flujo de arena: la humedad dentro de la ampolleta, la homogeneidad en la finura de la arena, el diámetro interior del tubo de interconexión, desgastado por el flujo de arena, la posición más o menos horizontal, el efecto de los movimientos de aceleración o deceleración del barco Todos ellos podían influir en el flujo de la arena, y por lo tanto en el tiempo medido.

Las ampolletas eran muy populares en los buques, ya que eran la medición de tiempo más fiable en el mar. A diferencia de la clepsidra, el movimiento de la nave durante la navegación no afecta a la ampolleta. El hecho de que la ampolleta utiliza materiales granulares, en lugar de líquidos, permitía mediciones más precisas, ya que el agua de la clepsidra era propensa a condensarse en su interior durante los cambios de temperatura. Los marinos utilizaban la ampolleta para determinar la distancia navegada por estima y la longitud, (en grados al este o al oeste a partir de cierto punto). En la navegación de larga distancia a través del océano abierto, la ampolleta para medir lapsos de tiempo era un instrumento tan importante como la brújula para conocer la dirección.

Solían utilizarse ampolletas de 30 minutos. A cada vaciado de toda la arena se le llamaba una ampolleta y ocho ampolletas (cuatro horas), definían una guardia. La brújula y la ampolleta junto con el registro en el diario de a bordo, de la velocidad medida con la corredera, permitía al navegante trazar la posición de su barco sobre una carta de navegar. Multiplicando la velocidad por el tiempo que se había mantenido el rumbo, daba la distancia navegada, y la brújula mostraba la dirección del rumbo a que se navegaba. Este es el método simple que se llama «*navegación* *por estima*» y que, con instrumentos más modernos, se sigue utilizando hoy en día.

Para poderlo anotar con precisión, salvo en una emergencia, los cambios de rumbo (cambio de bordo en ceñida, orzada, caída navegando al través o trasluchada yendo con el viento de popa), se hacían en el momento de completar una ampolleta, así el piloto podía calcular con más precisión la distancia navegada en ese rumbo.

Hasta principios del s. XIX, en que se pudo navegar con las distancias lunares, la navegación por estima, contrastada de vez en cuando con la medida de la latitud con el cuadrante (bastón de Jacob, astrolabio, octante) fue el único sistema al alcance de los navegantes para navegar el globo, de ahí que la ampolleta fuera tan importante para los navegantes, aunque en tierra firme para saber la hora, ya hacía más de cuatrocientos años que se usaban relojes mecánicos (aparte de los de sol y las clepsidras).

Como y se ha comentado, no fue sino hasta el siglo XVIII que los hermanos Harrison llegaron a construir un cronómetro marino que mejoraba significativamente la precisión de la ampolleta, permitiendo el cálculo preciso de la longitud.

7.9. Medida de distancias

Asfragano fue uno de los más famosos astrónomos persas del siglo IX. Realizó investigaciones para el cálculo del diámetro de la Tierra mediante la medición del arco de meridiano. En el año 833 escribió *Elementos de Astronomía*, inspirado en el *Almagesto* de Ptolomeo, y en el que trataba el movimiento de los objetos celestes. Asfragano asignaba a un grado terrestre la longitud de 56 millas y 2/3, con lo que el ecuador tendría 20400 millas. A la milla le asignaba una longitud de 1973,50 m, con lo que el ecuador terrestre mediría aproximadamente 40260 km, distancia muy parecida a la real.

Cristóbal Colón seguía las enseñanzas de Astragano en cuanto a que la medida de un grado eran 56 millas y 2/3, pero en cambio asignaba a la milla la longitud que tenía la milla itálica, que eran 1477.50 m. Esto hizo que, según sus cálculos, el ecuador midiera 30000 km, un 25 % menos que la realidad [Colón, 1492].

A quien pueda pensar que el fallo cometido por Colón es un error demasiado grosero para un científico, baste recordarle que los fallos en la navegación debido a la mala interpretación de las unidades de medida se han cometido más veces a lo largo de la historia. Sin ir más lejos, el 23 de septiembre de 1999 la nave *Mars Climate* de la NASA se estrelló sobre la superficie de Marte por un error en el software que interpretó en unidades anglosajonas (millas, pies, yardas para distancias y onzas y libras para pesos) determinadas magnitudes expresadas en el Sistema Internacional (metros y kilogramos). La nave había costado 125 millones de dólares.

En el diario de a bordo de Cristóbal Colón, se anotan las distancias recorridas cada día por el barco, expresadas en leguas, a las que el propio Colón asigna una medida de 4 millas.

Para poder trazar en la carta náutica la trayectoria del buque es necesario conocer la velocidad del mismo y su rumbo de navegación. El rumbo se medía con el compás, pero la medida de la velocidad, en la época del descubrimiento, se realizaba a ojo.

Es sabido que Colón anotaba en el diario cada día la distancia navegada. Pero la distancia que anotaba era menor que la que realmente calculaba, quizás con el fin de no asustar a las tripulaciones por lo lejos que andaban de las costas españolas. Lo curioso es que el resultado final de su cuenta real estaba más equivocado que el cálculo ficticio que hacía público.

No es posible conocer con exactitud el total de la cuenta, pues se han perdido las anotaciones de algunos días. El total de leguas que creyó haber recorrido Colón desde Gomera hasta Guaraní es entre 1080 y 1140, mientras que las cifras que dio a los tripulantes fue de unas 920 leguas. La legua equivalía a cuatro millas y Colón utilizaba la milla latina de 1477,3 m. De ser bueno el cálculo de Colón, habrían llegado a las costas de México. En realidad la cuenta falsa estaba más cercana a la realidad.

8. Conclusiones

Colón no era un científico. Tampoco había recibido una formación reglada, fue un autodidacta. Como navegante se había formado con la fuerza de la experiencia. Lo que sí tenía era la curiosidad de un hombre de ciencia y anotaba todo lo que le llamaba la atención, eso sí, cometiendo a veces importantes errores.

Es curioso observar en ese sentido, como va perfeccionando la técnica de tomas de posición con el cuadrante o astrolabio, de forma que en los últimos viajes llega a hacer mediciones muy precisas de las posiciones calculadas.

No es posible, en un artículo de extensión reducida como este, analizar en detalle la multitud de temas científicos que tienen relación con la expedición del Descubrimiento de América. Algunos se han mencionado, aunque se podría hablar mucho más sobre ellos. Otros, ni siquiera se han mencionado, como las técnicas navales, los estudios de corrientes y mareas, los detalles relativos a las rutas escogidas para la ida y para la vuelta o los indicios de los que se disponía antes del viaje.

A pesar de los muchos misterios que envuelven todavía algunos aspectos del viaje, hay, no obstante, un importante número de publicaciones que pueden ampliar muchos de los temas aquí tratados. En la bibliografía que se cita en el artículo se puede encontrar una buena muestra de ello.

El autor espera haber conseguido, al menos, el principal objetivo del artículo, que no es otro que transmitir al lector la idea de que el viaje del Descubrimiento no fue la aventura de un visionario sin conocimientos, sino el resultado de una concienzuda expedición científica, con los medios más avanzados de los que se disponía en la época, aunque el resultado que se obtuvo no era el que inicialmente se pretendía.

Referencias

[Armada Española, 2012] INSTITUTO DE HISTORIA Y CULTURA NAVAL, *Revista de historia naval. Suplemento num. 17*, Instituto de historia y cultura naval. Armada española. Año XXX, Núm. 118, 2012.

[Batlló, 2002] BATLLÓ ORTIZ, J., Bernat López, P., Puig Aguilar, R., *VI Trobada d'historia de la ciència i de la tècnica*, Societat catalana d'historia de la ciència y de la tècnica. Barcelona 2002.

[Calendario IGN, 2018] INSTITUTO GEOGRÁFICO NACIONAL, *Calendario del Instituto Geográfico Nacional, 2018*, Instituto Geográfico Nacional, 2018

[Chocano, 1991] CHOCANO HIGUERAS, G., *Naves del Descubrimiento, la 'Santa María', la 'Pinta' y la 'Niña'*, Museo Naval, 1991.

[Colón, 1492] COLÓN, C., *Diario de a bordo. Edición de Luis Arranz*, Historia16, 1991.

[Comellas, 2012] COMELLAS, J. L., *La primera vuelta al mundo*, Ediciones Rialp, 2012.

[Comellas, 2015] COMELLAS, J. L., *El cielo de Colón. Técnicas navales y astronómicas en el viaje del Descubrimiento*, Athenaica. Ediciones Universitas, 2015.

[Dascano, 1892] DASCÁNO, A., *Ensayo biográfico del célebre navegante y consumado cosmógrafo Juan de la Cosa y descripción e historia de su famosa Carta Geográfica*, Conmemoración del cuarto centenario del descubrimiento de América, 1892.

[Dorce, 2016] DORCE POLO, C., *El nacimiento del álgebra. Al-Juarismi*, EDITEC, RBA Coleccionables, 2017.

[Dunn, 2016] DUNN, R., *Navigational Instruments*, Shire Publications Ltd., 2016.

[García Franco, 1959] GARCÍA FRANCO, S., *Instrumentos náuticos en el Museo Naval*, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid, 1959

[Guevara, 2016] GUEVARA CASANOVA, I., PUIG PLA, C., *El álgebra de las estrellas. Brahmagupta*, EDITEC, RBA Coleccionables, 2017.

[Hernando Colón, 1571] COLÓN, H., *Historia del almirante*, Editorial Planeta, 2006.

[Levy, 2016] LEVY, J., *La cuiosa historia de las matemáticas. Las grandes ideas desde los primeros conceptos a la teoría del caos*, Editorial LIBSA, 2016.

[Mederos, 2007] MEDEROS, L., *Navegación astronómica*, Ediciones Tutor, 2007.

[Navarrete, 1846] NAVARRETE, M. F., *Disertación sobre la historia de la náutica y de las ciencias matemáticas que han contribuido a sus progresos entre los españoles*, Real Academia de la Historia, 1846.

[García de Palacio, 1587] GARCÍA DE PALACIO, J., *Instrucción náutica para navegar*, Ed. Cultura Hispánica., 1944

[Picutti, 1995] PICUTTI, E., *Leonardo de Pisa*, Investigación y Ciencia. Temas IyC, Julio-Septiembre 1995.

[Piñeiro, 2017] PIÑEIRO, G., *El divulgador de las matemáticas. Pacioli*, EDITEC, RBA Coleccionables, 2018.

[Reymond-Goñi, 2012] REYMOND-GOÑI, J.P. *Évolution de la Navigation Astronomique au cours des siècles*, Aldebarán Ediciones 2012.

[Rey Pastor, 1985-1] REY PASTOR, J. BABINI, J., *Historia de la Matemática. Vol. 1*, Gedisa, 1985.

[Rey Pastor, 1951] REY PASTOR, J., *La ciencia y la técnica en el descubrimiento de América*, Espasa Calpe, 1951.

[Tazón, 2010] TAZÓN RUESCAS, J., *El cartógrafo de la reina*, Editorial Kattigara. Colección Galerna, 2010.

[Varela, 1986] VARELA, C., *Los cuatro viajes. El testamento*, Alianza editorial, 1986.

[Wikipedia Eratóstenes, 2018] WIKIPEDIA, *Eratóstenes* `https://es.wikipedia.org/wiki/Eratóstenes`, Wikipedia, 2018

[Zweig, 1927] MOMENTOS ESTELARES DE LA HUMANIDAD, *Stefan Zweig, 1927*, Acantilado, 2002

Sobre el autor:
Nombre: Santiago Higuera de Frutos
Correo electrónico: santiago.higuera@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid.

Juegos y Rarezas Matemáticas

El valor de π como límite de perímetros y áreas de polígonos regulares

The value of π as the limit of the perimeter and the area of regular polygons

Alfredo Olmos Hernández y Reyna Romyna Olmos Hernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 091–096, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Feb'19; Aceptación: 13 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo se utilizara las propiedades de los polígonos inscritos y circunscritos, para obtener el valor aproximado de π como límite de una sucesión que involucra a la función sin (x). Para ello se calculará el perímetro y área de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia en función de sus lados.

Palabras Clave: Polígono inscrito, polígono circunscrito, π.

Abstract

In this article we will use the properties of the inscribed and circumscribed polygons, to obtain the approximated value of π as limit of a sequence involving the function sin (x). To do this, the perimeter and the area of the polygons inscribed and circumscribed to a circumference are calculated in function on their sides.

Keywords: Inscribed polygon, circumscribed polygon, π.

1. Introducción

Los polígonos trazados en una circunferencia se dividen en 2, los polígonos inscritos y los polígonos circunscritos.

Un polígono inscrito es aquel que tiene todos sus vértices en la circunferencia y sus lados son secantes de esta.

Un polígono circunscrito es aquel polígono cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

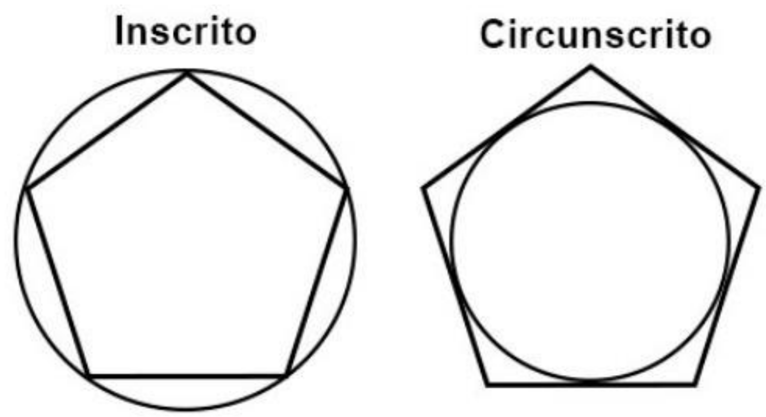


Figura 1. Polígono inscrito y polígono circunscrito.

El radio del polígono inscrito es el radio de la circunferencia circunscrita en él.

La apotema del polígono circunscrito es el radio de la circunferencia inscrita.

Arquímedes utilizo polígonos inscritos y circunscritos (método exhaustivo. Ortiz 2005) para el cálculo aproximado del valor de π.

2. Perímetro y área de polígonos inscritos y circunscritos.

2.1 Polígono inscrito

A continuación se obtienen las expresiones para el cálculo de perímetros y áreas de polígonos inscritos. (Para los ángulos se utilizará el sistema sexagesimal)

Teorema 1

En un polígono regular inscrito el perímetro y el área son obtenidos por las siguientes expresiones.

$$P = 2nr\sin\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2\sin\frac{180}{n}cos\frac{180}{n}$$

Prueba

Uniendo dos de los vértices de un polígono inscrito con el centro del círculo se obtiene el siguiente triángulo.

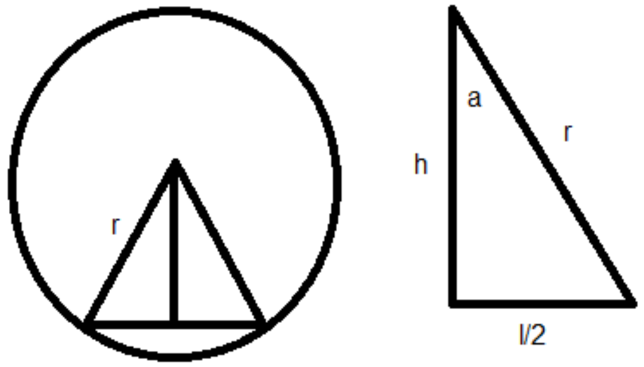


Figura2. Triangulo en polígono inscrito.

Dado que se está considerando un polígono regular, el polígono inscrito de n lados puede dividirse en n triángulos congruentes, como el de la Figura 2 (izquierda) que a su vez se divide en 2 triángulos congruentes (derecha)

En un polígono regular el ángulo central se define como

$$\alpha = \frac{360}{n}$$

$$a = \frac{\alpha}{2} = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$$

Obteniendo el valor de l y h en el triángulo de la Figura 2.

$$\sin a = \frac{l}{2r}$$

$$l = 2r \sin \frac{180}{n}$$

El polígono inscrito tiene n lados que miden l cada uno, por lo que el perímetro es igual a

$$P = 2nr \sin \frac{180}{n}$$

Para el área, se obtendrá el área del triángulo de la derecha de la Figura 2.

$$cos\, a = \frac{h}{r}$$

$$h = r\, cos \frac{180}{n}$$

Luego el área del triángulo es

$$A = \frac{h}{2} * \frac{l}{2}$$

$$A = \frac{1}{4}\left(r\, cos \frac{180}{n}\right)\left(2r \sin \frac{180}{n}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

El polígono tiene 2n triángulos congruentes, por lo que su área es igual a.

$$A = \frac{2n}{2} r^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

Q.E.D. □

2.2 Polígono circunscrito

A continuación se obtienen las expresiones para el cálculo de perímetros y áreas de polígonos circunscritos. (Para los ángulos se utilizará el sistema sexagesimal)

Teorema 2

En un polígono regular circunscrito el perímetro y el área son obtenidos por las siguientes expresiones.

$$P = 2nr \tan\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2 \tan\frac{180}{n}$$

Prueba

Uniendo dos de los vértices de un polígono circunscrito con el centro del círculo se obtiene el siguiente triángulo.

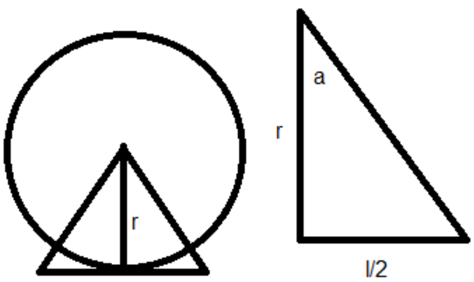


Figura3. Triangulo en polígono circunscrito.

Dado que se está considerando un polígono regular, el polígono circunscrito de n lados puede dividirse en n triángulos congruentes como el de la Figura 3 (izquierda) que a su vez se divide en 2 triángulos congruentes (derecha)

Obteniendo el valor de l en el triángulo de la Figura 2.

$$\tan a = \frac{l}{2r}$$

$$l = 2r\tan\frac{180}{n}$$

El polígono inscrito tiene n lados que miden l cada uno, por lo que el perímetro es igual a

$$P = 2nr\tan\frac{180}{n}$$

Para el área, se obtendrá el área del triángulo de la derecha de la Figura 3.

$$A = \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$A = \left(\frac{2r\,tan\frac{180}{n}}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\tan\frac{180}{n}$$

El polígono tiene 2n triángulos congruentes, por lo que su área es igual a.

$$A = \frac{2n}{2}r^2\tan\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2\tan\frac{180}{n}$$

Q.E.D. □

3. Valor de π como límite de la función sin (x).

Una circunferencia puede considerarse como un polígono regular de infinitos lados. Por lo que en un polígono inscrito, cuando el número de lados tiende a infinito, el polígono es igual a la circunferencia.

En una circunferencia el perímetro es igual a $P = 2\pi r$.

Por lo tanto.

$$\lim_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{180}{n} = 2\pi r$$

$$2r\,\lim_{n\to\infty} n\,sin\frac{180}{n} = 2\pi r$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180}{n} = \pi$$

Esto permite aproximar π mediante perímetros de polígonos inscritos en la circunferencia con número de lados grande.

Por otro lado, el área de una circunferencia es igual a $A = \pi r^2$.

Por lo tanto.

$$\lim_{n\to\infty} nr^2 \sin\frac{180}{n}\cos\frac{180}{n} = \pi r^2$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{180}{n}\cos\frac{180}{n} = \pi$$

Esto permite aproximar π mediante áreas de polígonos inscritos en la circunferencia con número de lados grande.

Se pueden hacer también aproximaciones de π con perímetros y áreas de polígonos circunscritos utilizando las expresiones de 2.1

4. Conclusiones.

En este artículo se obtuvieron las expresiones que permiten obtener el perímetro y el área para cualquier polígono regular en función de sus lados.

Esto se utilizó para obtener aproximaciones del número π mediante perímetros y áreas de polígonos regulares adecuados.

Referencias

[1] CABALLERO, Luis. *Geometría plana y del espacio*, San Marcos, Lima, 1995.

[2] HEMMERLING, Edwin. *Geometría elemental*, Limusa, México, 1975.

[3] ORTIZ, Alejandro. *Historia de la Matemática*, pp. 235-241, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2005.

[4] WENTWORTH, Jorge y SMITH Eugenio. *Geometría plana y del espacio,* pp. 141-152, Ginn Compañía, Boston, 1955.

Sobre los autores:

Nombre: Alfredo Olmos Hernández
Correo Electrónico: alfredooh16@gmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.

Nombre: Reyna Romyna Olmos Hernández
Correo Electrónico: londonlun12@hotmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.

Juegos y Rarezas Matemáticas

Ecuación de Clairaut, un desarrollo algebraico

Clairaut´s equation, an algebraic procedure

J. A. Sánchez-Cano y O.García-Jaimes

Revista de Investigación

Volumen IX, Número 2, pp. 097–108, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Abr'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo se presenta una forma alternativa para encontrar la solución singular de la ecuación diferencial de Clairaut, usando para ello un razonamiento algebraico. Con este método se llega a la solución implícita, evitando resolver por eliminación el parámetro que aparece en el sistema de ecuaciones paramétricas que resulta al resolver dicha ecuación por el método clásico.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales, Ecuación de Clairaut, Envolvente, soluciones singulares.

Abstract

This paper presents an alternative way to find the singular solution of Clairaut´s differential equation, using algebraic reasoning. With this method the solution is given in implicit form, avoiding the resolution by removing the parameter that appears in the system of parametric equations that results when this equation is solved by the classical method.

Keywords: Differential Equations, Clairaut´s Equation, Envelope, Singular solutions.

1. Introducción

En la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales juega un papel importante la noción de solución completa. Por ejemplo, en la ecuación de Clairaut la solución general viene a ser una familia de rectas, y la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso, una solución singular, de la ecuación de Clairaut. La ecuación de Clairaut [1], [2] y [6], es uno de los ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales de primer orden con solución completa. En este trabajo se propone encontrar la solución singular de la ecuación de Clairaut, usando un método algebraico muy sencillo, el cual surgió en el problema de obtener extremos de funciones de una variable real, usando sólo el álgebra elemental, dicho método se encuentra en [3]-[5].

Una condición para poder resolverla algebraicamente es que la función $f(p)$ que se define a continuación sea algebraica. Una ecuación de la forma

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

donde $f(p)$ es una función definida en un intervalo y con derivada continua, se llama *ecuación de Clairaut* . Introduciendo una nueva variable $p = dy/dx$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} dy &= pdx \\ y &= xp + f(p), \end{aligned} \tag{2}$$

que es equivalente a la ecuación (1). Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (2) la segunda, se obtiene

$$\left(x + f'(p)\right) dp = 0.$$

De aquí que $p = C =$ const o bien, $x = -f(p)$.
En el primer caso,

$$y = Cx + f(C). \tag{3}$$

En el segundo caso,

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases} \tag{4}$$

Fácilmente se comprueba que si existe la derivada segunda $f''(p)$ y ésta no es nula, entonces la curva (4) es la envolvente para la familia uniparamétrica de curvas de (3) y, por consiguiente, será una curva integral singular para la ecuación de Clairaut. El interés en estas ecuaciones se debe al hecho de que (1) tiene una familia uniparamétrica de soluciones consistentes de líneas rectas (3). Además, la **envolvente** de esta familia (es decir, la curva cuyas tangentes está dada por la familia) también es una solución de (1), y se conoce como **solución singular** (4).

Ejemplo. Determinemos todas las soluciones para la siguiente ecuación diferencial en forma explícita y bosquejemos algunas curvas solución

$$y = y'x - \sqrt{y' - 1}.$$

Solución:

La ecuación diferencial de Clairaut está dada por $y = xy' + f(y')$ donde $f(y') = -\sqrt{y'-1}$. Luego, $f(p) = -\sqrt{p-1}$. Usando p como el parámetro, las curvas solución de una ecuación diferencial de Clairaut cumplen con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(p) &= -f'(p) \\ y(p) &= -pf'(p) + f(p). \end{aligned}$$

De donde la solución se determinará a partir de:

$$x(p) = -f'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p-1}}, \tag{5}$$

$$y(p) = \frac{p}{2\sqrt{p-1}} - \sqrt{p-1} = \frac{2-p}{2\sqrt{p-1}}. \tag{6}$$

Despejando p en la ecuación (5):

$$\sqrt{p-1} = \frac{1}{2x} \Rightarrow p = \frac{1}{4x^2} + 1. \tag{7}$$

Reemplazando el valor de p encontrado en (7) en (6), se tiene

$$y(x) = \frac{2 - \left(\frac{1}{4x^2} + 1\right)}{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x}, \quad x \neq 0.$$

La cual es la curva envolvente. Por otro lado, la integral general viene dada por la familia de rectas $y = Cx - \sqrt{C-1}, \quad C \geq 1$.

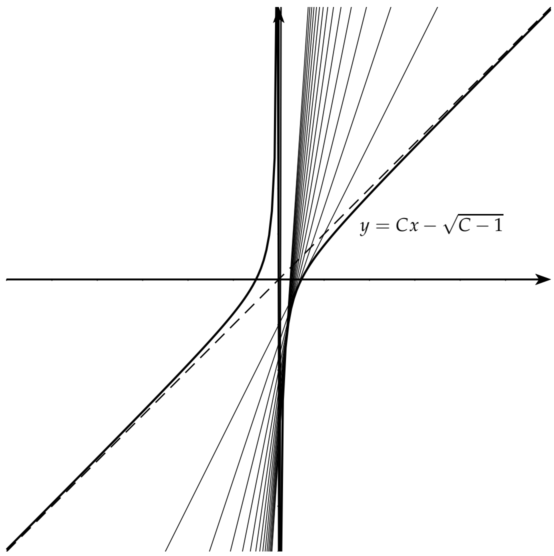


Figura 1. Algunas curvas solución de la ecuación diferencial de Clairaut $y = y'x - \sqrt{y'-1}$

Obsérvese que la gráfica de la curva envolvente $y(x) = \dfrac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0$, es asintótica a la recta $y = x$ (asíntota oblicua), a medida que C aumenta, la recta solución está más cerca del eje Y.

2. Método algebraico

El método algebraico que se propondrá se aplicará para encontrar la solución singular de la ecuación diferencial de Clairaut, imponiendo que la función $f(p)$ sea algebraica. Por otro lado, asumiremos que la solución general viene dada por la familia uniparamétrica de rectas $y = Cx + f(C)$, como en la solución clásica. Pero, como se verá, esta solución general puede ser encontrada algebraicamente mediante la solución de un sistema sencillo de ecuaciones.

Veamos entonces cómo proceder cuando se tenga una ecuación diferencial de Clairaut, donde la función dada f sea algebraica: Dada la ecuación diferencial de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Paso 1. Hacemos $p = y'$ (como en la solución clásica).

Paso 2. Resolvemos la ecuación algebraica: $G(p; x, y) = 0$, donde $G(p; x, y) = f(p) + xp - y$, donde la cual la escribiremos como una ecuación polinómica de grado n (por ejemplo), en la variable p. Impondremos que una de sus soluciones sea real y doble, esto es, expresamos:

$$G(p; x, y) = (p - \alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0,$$

donde α es función de x y y, adicionalmente, $P_{n-2}(p)$ es un polinomio de grado $n-2$ en la variable p y con coeficientes, funciones de x e y, y finalmente, igualamos coeficientes en la ecuación $G(p;x,y) = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p)$ y eliminamos parámetros para llegar a la solución singular.

Nota 1. Supongamos inicialmente que f es una función polinómica de grado n en la variable real x, luego la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene en todos los puntos de su dominio una recta tangente. Luego para encontrar la familia de rectas tangentes a la gráfica de f debemos resolver el sistema de ecuaciones: $y = f(x)$ y $y = mx + b$. Donde m representa la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de $y = f(x), \quad x \in R$. Ahora, debemos por lo tanto resolver la ecuación $f(x) - mx - b = 0$, forzando a que esa ecuación tenga raíces reales e iguales, es decir, imponemos que la ecuación tiene la forma

$$f(x) - mx - b = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, estamos interesados, sin usar cálculo diferencial , en hallar la familia de rectas tangentes (o envolventes) de la parábola $y = x^2$. Para esto, resolvemos el sistema de ecuaciones: $y = x^2$ y $y = mx + b$, esto es, resolvemos la ecuación $x^2 - mx - b = 0$, imponemos raíces reales e iguales , resolvemos $x^2 - mx - b = (x-\alpha)^2$, obteniendo $y = 2\alpha x - \alpha^2, \quad \alpha \in R$, o bien , $y = mx - \frac{m^2}{4}, \quad m \in R$. Pero $m = \frac{dy}{dx}$, por lo tanto, reemplazando en la ecuación anterior llegamos a la ecuación de Clairaut $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

La ecuación (8), con $m = 0$, aparece en [3], para encontrar los extremos relativos y los puntos de inflexión de una función polinómica f. El caso cuando f es algebraica se encuentra en [4], para hallar los extremos relativos de una función algebraica. Nótese que la ecuación $G(p;x,y) = 0$ puede llevarse siempre a una ecuación polinómica a través de operaciones finitas de suma, resta, multiplicación, división o potenciación, y por lo tanto, el método puede ser aplicado.

Nota 2. Si consideramos en particular la ecuación de segundo grado en la forma

$$Lp^2 + 2Mp + N = 0.$$

la solución singular, cuando esta existe, es $S = 0$, donde S es $LN - M^2$ o un factor de éste. En general, $LN - M^2$ no se puede factorizar, y esta no sería una solución a menos que

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - 2M\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} + N\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{9}$$

donde $LN = M^2$; y esto en general deberá dar dos ecuaciones simultáneamente independientes que determinan a x y a y como cantidades constantes.
Así, por ejemplo, consideremos nuevamente la ecuación de Clairaut $y = xy' - \sqrt{y'-1}$, observemos que haciendo $y' = p$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$x^2p^2 - (2xy+1)p + \left(y^2+1\right) = 0,$$

donde, según la ecuación (9), $L = x^2, \quad M = -\frac{2xy+1}{2}x^2$ y $L = y^2 + 1$. Entonces, con $S = LN - M^2$, es decir, $S = -\frac{4x^2-4xy-1}{4}$, se cumple que al reemplazar en la ecuación (9) y realizar todas las operaciones, se llega finalmente al par de ecuaciones simultáneamente independientes que determinan a x y a y como cantidades constantes (Nota 2), esto es,

$$(x-y)\left(4x^2 - 4y - 1\right) = 0.$$

claramente, $y = x$ es la solución de la ecuación de Clairaut, mientras que $y(x) = x - \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$ es la solución singular (obtenida en el ejemplo anterior).

En resumen, en el caso en que la ecuación es de grado 2, basta con hacer el discriminante 0 para imponer que la solución real sea doble. El discriminante igualado a cero constituye entonces la solución singular.

En la Sección 2.1 se explicará en dos ejemplos cómo aplicar el método. En el primero de estos ejemplos supondremos, como en la solución clásica, que la solución general, viene dada por la familia de rectas dada por $y = Cx + f(C)$ y encontraremos la solución singular. En el segundo ejemplo, encontraremos la solución general algebraicamente.

2.1. Ejemplos

Ejemplo 2.1.1. Determinemos todas las soluciones para la ecuación diferencial $y = y'x - \sqrt{y'-1}$ en forma explícita.
Es ecuación de Clairaut, por tanto hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px - \sqrt{p-1}$. La transformamos en una ecuación polinómica para p de grado 2: $p^2x^2 - (2xy+1)p + \left(y^2+1\right) = 0$, (ejemplo anterior) . Su solución es:

$$p = \frac{(2xy+1) \pm \sqrt{(2xy+1)^2 - 4x^2\left(y^2+1\right)}}{2x^2}, \quad x \neq 0. \tag{10}$$

Haciendo cero el discriminante (pues queremos soluciones reales e iguales)

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 + 4xy + 1 - 4x^2y^2 - 4x^2 &= 0 \\ &\Rightarrow 4xy - 4x^2 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{4x^2-1}{4x}. \end{aligned}$$

La última función, esto es, $y = \frac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0$, es la solución singular de la ecuación de Clairaut. Nótese que de (10) se tiene lo siguiente: $p = \frac{(2xy+1)}{2x^2}$. Si reemplazamos el valor de y encontrado anteriormente en esta última ecuación se tiene

$$p = \frac{2x\left(\frac{4x^2-1}{4x}\right)+1}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{4x^2+1}{4x^2} \quad \Rightarrow \quad p = 1 + \frac{1}{4x^2}.$$

Pero si se tiene en cuenta que $p = dy/dx$, entonces podemos resolver la ecuación diferencial sencilla:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{4x^2} \Rightarrow y = x - \frac{1}{4x}.$$

Obsérvese que se toma la constante de integración 0. Veamos el por qué. Supongamos que la solución obtenida es: $y = x - \frac{1}{4x} + k, \quad x \neq 0$, con $k \neq 0$, y sea (x_0, y_0) un punto de tangencia de la curva, esto es,

$$y_0 = x_0 - \frac{1}{4x_0} + k, \quad x \neq 0, \tag{11}$$

por lo tanto $C = 1 + \frac{1}{4x_0^2}$ con $C > 1$. Fijemos $C = 2$ (por ejemplo), con lo cual se tiene que $2 = 1 + \frac{1}{4x_0^2}$, o bien $x_0 = \pm\frac{1}{2}$. Remplazando estos valores en la ecuación $y = xC - \sqrt{C-1}$ se obtienen dos puntos de tangencia para $C = 2$, a saber, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

Case 1. $x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 0$, en ecuación (9) , se tiene que $k = 0$. (Note que $C = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0,x_0)} > \frac{y_0}{x_0}$ se cumple, ya que $C = 2 > \frac{0}{1/2}$).
Case 2. $x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = 2$ en ecuación (11), se tiene $k = -2$, en este caso se tiene que

$C = 2 > \frac{-2}{-1/2} = 4$ (absurdo!).

En conclusión, deberá tenerse siempre que la constante de integración sea cero, y esto es precisamente la solución singular encontrada.

En resumen:
Solución general: $y = Cx + \sqrt{C-1}, \quad C \geq 1.$
Solución singular: : $y = \frac{4x^2-1}{4x}, \quad x \neq 0.$

Ejemplo 2.1.2. Vamos a resolver la ecuación diferencial de Clairaut:

$$y = y'x + \sqrt{1+y'^2}.$$

Hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px + \sqrt{1+p^2}$.
Resolviendo para p:

$$\begin{aligned} y - px &= \sqrt{1+p^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (y-px)^2 = 1 + p^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 - 2pxy + p^2x^2 = 1 + p^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x^2-1\right)p^2 - 2pxy + \left(y^2-1\right) = 0 \\ p &= \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right)}}{2\left(x^2-1\right)}. \end{aligned}$$

Haciendo cero el discriminante (pues buscamos soluciones reales e iguales)

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 - 4\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 4x^2y^2 - 4y^2x^2 + 4y^2 + 4x^2 - 4 &= 0 \\ \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, que la circunferencia centrada en el origen y radio 1, es la envolvente de la familia de rectas $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, que viene a ser la integral general de la ecuación de Clairaut. De hecho, podemos encontrar la familia de rectas $y = mx + b$ las cuales son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
En efecto, para esto resolvemos el sistema:

$$y = mx + b \tag{12}$$
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{13}$$

Sustituyendo (12) en (13) se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (mx+b)^2 &= 1 \\ \leftrightarrow \quad x^2 + m^2x^2 + 2mbx + b^2 &= 1 \\ \leftrightarrow \quad \left(1+m^2\right)x^2 + 2mbx + \left(b^2-1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo para x, se tiene.

$$x = \frac{-mb \pm \sqrt{m^2 - b^2 + 1}}{(1+m^2)}.$$

Por un lado, se tiene que la abscisa x es: $x = -\dfrac{mb}{(1+m^2)}$.
Donde m y b verifican lo siguiente: $m^2 - b^2 + 1 = 0$.

O bien, resolviendo para b: $b = \mp\sqrt{1+m^2}$. Reemplazando en (9), se tiene que la familia de rectas tangentes a la circunferencia de radio 1 de la ecuación (10), viene dada por $y = mx \pm \sqrt{1+m^2}, \quad (m \in R)$
Obsérvese que si hacemos $m = C$ y si tomamos la raíz positiva se tiene entonces la solución general $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, la curva y sus tangentes pueden verse en la Figura 2.

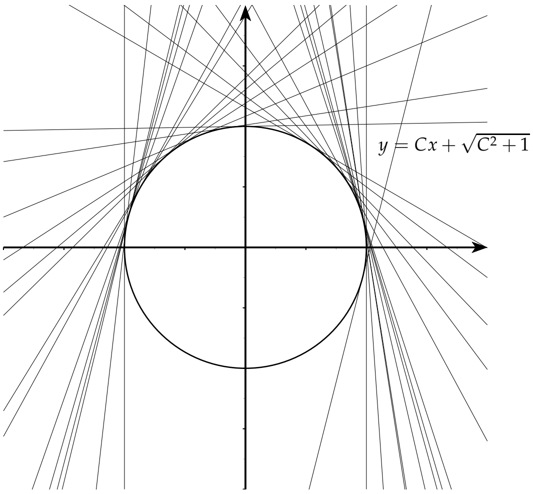


Figura 2. Algunas curvas solución de la ecuación de Clairaut $y = xy' + \sqrt{(y')^2+1}$

Ejemplo 2.1.3. Resolvamos la ecuación de Clairaut:

$$y = y'x - (y')^3.$$

Hacemos $y' = p$ para obtener: $y = px - p^3$. Resolviendo para p: $p^3 - px + y = 0$. Como estamos imponiendo soluciones reales e iguales, dos en este caso, escribimos $G(p; x, y) = p^3 - px + y = (p-\alpha)^2 P_1(p)$. Donde $P_1(p)$ es un polinomio de grado uno. Con lo cual, podemos escribir en la siguiente forma:

$$p^3 - px + y = (p-\alpha)^2(p+\beta) = p^3 + (\beta - 2\alpha)p^2 + \left(\alpha^2 - 2\alpha\beta\right)p + \alpha^2\beta.$$

Igualando término a término en la ecuación anterior, tomando como constantes a x y a y, tenemos que resolver el sistema:

$$\beta - 2\alpha = 0, \tag{14}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta = -x, \tag{15}$$

$$\alpha^2\beta = y. \tag{16}$$

De (14), tenemos que $\beta = 2\alpha$, remplazando este valor en (15) se tiene $\alpha = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}, \quad x \geq 0$. Luego $\beta = \pm 2\sqrt{\frac{x}{3}}, \quad x \geq 0$. Sustituyendo estos valores en (16), obtenemos por tanto, $\left(\frac{x}{3}\right)\left(\pm 2\sqrt{\frac{x}{3}}\right) = y, \quad x \geq 0$. O bien, finalmente: $y = \pm 2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$.

En forma más general, se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.4. Resolvamos la ecuación $y = xy' + (y')^n, \quad n \neq 0{,}1$.
Usando el método algebraico, obtenemos la ecuación

$$p^n - xp + y = (p-\alpha)^2 P_{n-2}(p), \quad P_{n-2}(\alpha) \neq 0,$$

donde

$$P_{n-2}(p) = p^{n-2} + \beta_1 p^{n-3} + \beta_2 p^{n-4} + \cdots + \beta_{n-3}p + \beta_{n-2},$$

al igualar término a término en la ecuación anterior obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\beta_1 - 2\alpha &= 0\\
\beta_2 - 2\alpha\beta_1 + \alpha^2 &= 0\\
\beta_3 - 2\alpha\beta_2 + \alpha^2\beta_1 &= 0\\
&\vdots\\
\beta_{n-2} - 2\alpha\alpha_{n-3} + \alpha^2\beta_{n-4} &= 0\\
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} &= (-1)^{n+1}x\\
\alpha^2\beta_{n-2} &= (-1)^{n+1}y,
\end{aligned}$$

o simplificando, se tiene

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2\alpha,\\
\beta_2 &= 3\alpha^2,\\
\beta_3 &= 4\alpha^3,\\
&\vdots\\
\beta_{n-3} &= (n-2)\alpha^{n-3},\\
\beta_{n-2} &= (n-1)\alpha^{n-2},\\
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} &= -x,\\
\alpha^2\beta_{n-2} &= y.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la penúltima ecuación del sistema anterior los valores obtenidos de β_{n-3} y β_{n-2}, obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta_{n-3} - 2\alpha\beta_{n-2} = -x \rightarrow \quad & \alpha^2[(n-2)\alpha^{n-3}] - 2\alpha[(n-1)\alpha^{n-2}] = -x.\\
\rightarrow \quad & (n-2)\alpha^{n-1} - 2(n-1)\alpha^{n-1} = -x\\
\rightarrow \quad & (n-2-2n+2)\alpha^{n-1} = -x\\
\rightarrow \quad & n\alpha^{n-1} = x.
\end{aligned}$$

Con lo cual, se obtiene finalmente la solución:

$$p = \alpha = \left(\frac{x}{n}\right)^{1/(n-1)}, \quad n \neq 0, 1.$$

Este valor de α hallado, reemplazado en la última ecuación del sistema da lugar a la única solución , a saber,

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta_{n-2} = y \longrightarrow \quad & \alpha^2(n-1)\alpha^{n-2} = y\\
\longrightarrow \quad & \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}(n-1)\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = y.
\end{aligned}$$

O finalmente

$$y = \frac{n-1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad n \neq 0, 1.$$

Si n es impar, luego la solución es válida para $x \leq 0$ y $x \in \Re$ para n par.
Dicha solución puede encontrarse fácilmente resolviendo el sistema (4).

Ejemplo 2.1.5. Resolvamos ahora la ecuación $y = 2xy' + y\,(y')^2$.Observamos que la ecuación dada aparentemente no es de Clairaut, esto es, no es de la forma $y = y'x + f\,(y')$.
Veamos que la ecuación dada puede convertirse a una de Clairaut.
En efecto, multiplicando por y, obtenemos: $y^2 = 2xy' + y^2\,(y')^2$. Luego haciendo la sustitución $u = y^2, \quad u' = du/dx = 2y'$, y reemplazándola en la última ecuación, produce la ecuación de Clairaut: $u = xu' + \frac{(u')^2}{4}$.

Hacemos $u' = p$ para obtener, $u = px + \frac{p^2}{4}$. Resolviendo para p: $p^2 + 4px - 4u = 0$, o bien, $p = \frac{-4x\pm\sqrt{16x^2+16u}}{2}$.

De donde obtenemos lo siguiente haciendo el discriminante 0: $p = -2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \quad \Rightarrow u = -x^2$. Que es la misma solución que se produce cuando hacemos el discriminante cero y despejamos u. Obsérvese que no hay solución singular en este caso ya que deshaciendo el cambio queda $u = y^2 = -x^2$.

La solución general viene dada por la familia de curvas: $u = Cx + \frac{C^2}{4}$, luego la solución general del problema original es $y^2 = Cx + \frac{C^2}{4}$.

Ejemplo 2.1.6. Vamos a resolver la ecuación diferencial $e^{2x}\left(y^2y - yy'\right) = (y')^2, \quad y > 0$.
Haciendo $v = y, \quad u = e^x$se obtiene una ecuación de Clairaut como el lector puede comprobar.
Ya que se sabe que la ecuación es de Clairaut, trabajamos directamente, esto es, hacemos $p = y'$ y desarrollando la ecuación obtenemos,

$$p^2 + ye^{2x}p - e^{2x}y^2\ln y = 0.$$

Cuya solución viene dada por

$$p = \frac{-ye^{2x} \pm \sqrt{y^2e^{4x} + 4e^{2x}y^2\ln y}}{2}.$$

Encontramos la solución general haciendo el discriminante 0

$$\begin{aligned} y^2e^{4x} + 4e^{2x}y^2\ln y &= 0 \\ y^2\left(e^{4x} + 4e^{2x}\ln y\right) &= 0, \quad y > 0 \\ 4\ln y &= -e^{2x}. \end{aligned}$$

El resultado final viene siendo la solución singular de la ecuación de Clairaut, esto es, la envolvente de la familia de rectas (en u, v): $e^{2x}\left(y^2\ln y - Cy\right) = C^2, \quad y > 0$. (solución general). Nuevamente, dicha solución singular puede ser encontrada resolviendo la ecuación diferencial $p = \frac{dy}{dx} = -\frac{ye^{2x}}{2}$.

Ejemplo 2.1.7. Resolvemos la ecuación

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad a > 0.$$

En este caso llegamos a la ecuación polinómica de grado 4:

$$p^4 - 2\frac{y}{x}p^3 + \frac{x^2+y^2-a^2}{x^2}p^2 - 2\frac{y}{x}p + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u = y/x$ en la ecuación anterior tenemos

$$p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)p^2 - 2up + u^2 = 0.$$

Imponemos soluciones reales e iguales, dos en este caso. Luego

$$G(p;x,y) = p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right) p^2 - 2up + u^2 = (p-\alpha)^2 P_2(p).$$

Donde $P_2(p)$ es un polinomio de grado dos. Lo escribimos de la siguiente forma:

$$p^4 - 2up^3 + \left(1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2}\right) p^2 - 2up + u^2 = (p-\alpha)^2 \left(p^2 + \beta p + \gamma\right).$$

Igualando término a término en la ecuación anterior, tomando como constantes a x y u, resolvemos el sistema.

$$\beta - 2\alpha = -2u \tag{17}$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \gamma = 1 + u^2 - a^2/x^2 \tag{18}$$
$$\alpha^2\beta - 2\alpha\gamma = -2u \tag{19}$$
$$\alpha^2\gamma = u^2 \tag{20}$$

De la ecuación (17) tenemos $\beta = 2\alpha - 2u$ reemplazando este valor en las ecuaciones (18) y (19) tenemos respectivamente

$$-3\alpha^2 + 4u\alpha + \gamma = 1 + u^2 - \frac{a^2}{x^2} \tag{21}$$

y

$$2\alpha^3 - 2u\alpha^2 - 2\alpha\gamma = -2u \tag{22}$$

Ahora, en la ecuación (20) tenemos $\gamma = u^2/\alpha^2$, reemplazando este valor en la ecuación (22) hallamos que $\alpha = u$ or $\alpha = -u^{1/3}$. En el primer caso $\gamma = 1$ y reemplazando estos valores en la ecuación (21), se tiene $a = 0$ lo cual es absurdo. Tenemos entonces $\alpha = -u^{1/3}$ luego $\gamma = u^{4/3}$ reemplazando estos valores en la ecuación (21), obtenemos por tanto, $\left(u^{2/3} + 1\right)^3 = a^2/x^2$ lo cual a su vez lleva a la solución singular $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (astroide)

3. Conclusiones

Se ha presentado un método algebraico para encontrar la solución singular de la ecuación de Clairaut, supuesto que la función que aparece en dicha ecuación es algebraica. Dicha solución singular es la curva envolvente de la solución general. Es claro, que al aplicar la teoría clásica de solución, la respuesta resulta a veces inmediata, otras veces, no tanto, pues lo que se tiene que hacer, para encontrar la solución singular, es resolver el sistema de ecuaciones paramétricas dado por (4). Mientras que por el método propuesto, llegamos siempre a la solución, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones paramétricas.

Referencias

[1] FORSYTH, A. R., *A treatise on Differential Equations*, Mineola, Dover Pub. 6 Ed., New York, 1996.

[2] NOVO, S., OBAYA, R., ROJO, J., *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, MacGraw-Hill, Madrid, 1995.

[3] SÁNCHEZ-CANO, José Albeiro, *Método alterno para la gráfica de función polinómica*, Revista UNION, Nº 30, pp. 49–59, junio 2012.

[4] ——, *Método alternativo para la gráfica de funciones algebraicas*, Revista SUMA, Nº 73(2), pp. 25–38, julio 2013.

[5] SÁNCHEZ-CANO, José Albeiro, CASTAÑEDA-R, Gustavo, *Problemas de Optimización Vía Álgebra*, Revista UNION, Nº 49, pp. 41–60, abril 2017.

[6] TENENBAUM, M., POLLARD, H., *EOrdinary Differential Equations*, Dover Pub., New York, 1985.

Sobre los autores

Nombre: José Albeiro Sánchez Cano
Correo electrónico: josanche@eafit.edu.co
Institución: Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellin-Colombia.

Nombre: Orlando García Jaimes
Correo electrónico: olgarcia@eafit.edu.co
Institución: Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellin-Colombia.

Cuentos Matemáticos

La aparición de los números de dos cifras

The two digits numbers are born

Malena Durán González

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 109–110, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Feb'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo se muestra uno de los cuentos presentados al concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE Pensamiento matemático en 2015 para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios. En él se introducen los números de dos cifras de una forma divertida.

Palabras Clave: Cuentos con contenido matemático, números naturales, dígitos.

Abstract

This paper shows one of the tales presented to the contest about tales with mathematical content organized by the Innovation Educative Group "Mathematical Thinking" in 2015. The tale introduces the two digits numbers in a funny way.

Keywords: Tales with mathematical content, positive integer numbers, digits.

1. La aparición de los números de dos cifras

Había una vez una ciudad llamada Matematrópolis, habitada por nueve familias: la familia del uno, la familia del dos, del tres, del cuatro, del cinco, del seis, del siete, del ocho y del nueve. La familia encargada de dirigir la ciudad era la del número nueve porque era la familia con más valor.

Un buen día llegó a la ciudad una nueva familia, la del número cero. Cuando los miembros de la nueva familia llegaron a la plaza de la ciudad todos los demás números les estaban esperando para darles la bienvenida. El líder de la ciudad dio un paso al frente y dijo –Bienvenidos a la Matematrópolis, la ciudad de los números –todos se presentaron a los nuevos ciudadanos y cada uno les decía su nombre y su valor. Cuando todos terminaron de conocerse el cabeza de familia de los ceros dijo –Nosotros somos la familia cero y representamos algo cuando no hay nada. – ¿No tenéis valor? –Dijo el número cuatro. –

Entonces el líder de los ceros dijo –sí que tenemos valor, el valor del cero. –Todos empezaron a reírse de los ceros y ellos muy tristes se fueron a su casa. Cada vez que un miembro de esta familia salía a la calle, notaba como los demás números se reían y cuchicheaban sobre él a sus espaldas. Un día uno de los ceros dijo –Yo ya estoy harto de que se burlen de mí, tenemos que hacer algo. –Tienes razón –dijo el líder. Unos días más tarde un grupo de ceros fueron a pedirle a Cerapio, el gurú de la familia, que ideara una poción para vengarse, entonces él invento la Pegalotodo, una poción que en cuanto rozara a un número este quedaría pegado a otro número. Antes de marcharse Cerapio les dijo –solo es necesaria una gota, si utilizaras una más la poción se volvería contra ti y tu también lo sufrirías. –Entendido -dijo el jefe. Él cogió la poción y se fue a la azotea del edificio más alto de Matematrópolis y desde allí empezó a tirar gotas de la poción e inmediatamente todos los números que pasaban por la calle empezaron a pegarse con otro que tenían cerca y empezaron a verse un tres y un dos pegados, dos cincos, un ocho y un uno… todo era una locura pero de lo que el cero no se dio cuenta fue de que por esa calle también estaban pasando ceros y todos se vieron afectados. Tan contento estaba el cero de su gran hazaña que de la emoción se le escaparon dos gotas seguidas y en ese mismo instante se vio pegado con un seis. Enseguida se dio cuenta del mal que había causado y entonces se puso a llorar, no hacía más que pedir perdón y ese momento llego el alcalde -¿Qué ha pasado aquí? –dijo él, -todos señalaron al cero y él les explico todo lo sucedido y que la poción no tenía cura, el alcalde se quedó pensativo y después de unos minutos sonrió y dijo –Pero de esto nos podemos beneficiar todos porque antes cuando teníamos que contar cosas al llegar al nueve teníamos que ir poniendo detrás números uno pero si nos organizamos bien podremos crear nuevos números más grandes para poder seguir contando. –Pero, ¿cómo hacemos eso? –preguntó el número cuatro. –Muy fácil, que todos los números en los que el primero sea un uno que se pongan en fila, al lado los del dos, los del tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve. Luego dentro de cada fila quiero que os ordenéis según el valor de vuestro segundo numero poniendo al cero delante y que cada pareja elija un nombre para el nuevo número. –Al rato se podían distinguir las distintas filas pero lo malo es que al elegir los nombres salían algunos de lo más raros, entonces el alcalde dijo –Que el primer número de cada fila elija un nombre y que los demás lo imiten pero cambian la terminación y poniendo el segundo número. –Pero el número que hay delante de mí ha elegido ser el número diez y dieciunodiecidosdiecitresdiecicuatro y diecicinco suena muy mal. –Tienes razón–, dijo el alcalde. –Vosotros seréis los únicos números que podrán cambiar su nombre completamente –decidió el alcalde. A los dos días la nueva organización de números ya estaba instaurada y todo volvía a la normalidad.

Con el tiempo empezaron a necesitar números más grandes y volvieron a usar la Pegalotodo para crear números de tres, cuatro y muchas más cifras.

Sobre la autora:

Nombre: Malena Durán González
Correo Electrónico: earqueroprin@concepcionistas.es
Institución: Colegio MM. Concepcionistas, España.

Críticas y Reseñas

Crítica del libro "Los crímenes de Alicia" de Guillermo Martínez

A book report "Los crímenes de Alicia", Guillermo Martínez

Dionisio Pérez Esteban

Revista de Investigación

G.I.E. Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 111–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Feb'19; Aceptación: 5 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

Escribir una crítica de un libro es posiblemente una tarea inútil, porque no es probable que quien se sienta tentado a leerlo vaya a desistir ante la opinión contraria, ni quien no se sienta inclinado a abrir el libro lo haga impulsado por las alabanzas de un crítico al que no conoce. Con todo, me dispongo a dejar aquí constancia de mis impresiones sobre la obra citada en el título, y lo hago de buena gana, que leer y escribir son dos actividades placenteras.

Palabras Clave: Novelas con contenido Matemático.

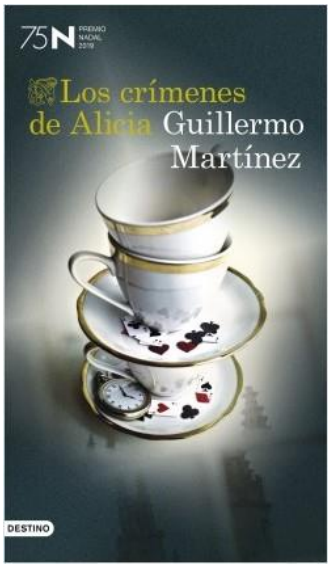
Abstract

Writing a review of a book is possibly a useless task, because it is not likely that whoever is tempted to read it will give up due to the contrary opinion, nor will anyone who is not inclined to open the book do so, driven by the opinion of an unknown critic. However, I am here to record my impressions on the work cited in the title, and I do it willingly, that reading and writing are two pleasurable activities.

Keywords: Stories with mathematics.

1. Acerca de la obra

Cuando me encargaron una crítica para "Los crímenes de Alicia", lo primero que pensé es que me encontraba en la situación de imparcialidad idónea, porque no conocía ni el libro ni a su autor, por lo que no me iba a dejar arrastrar por ningún prejuicio. De hecho, me planteé seriamente acometer la tarea sin leer el texto, a fin de no perder esa virginidad inicial y no comprometer el juicio. Descarté la idea enseguida: no sólo atraído por el tema, a caballo entre



lo policiaco y lo matemático, sino también porque un párrafo de la solapa prometía una novela en la tradición de Borges y Umberto Eco, con una prosa tersa y precisa. También me excitaba la expectativa de hallar detalles matemáticos salpimentando la narración.

En las primeras páginas hay alusiones a Bertrand Russell y a Pierre Menard, el personaje borgiano (¡qué menos, siendo argentino el autor!); más adelante se menciona a diversos científicos ilustres: Fourier, Gödel y Penrose me acuden a la memoria, lo que contribuye a prestigiar el texto, como un vizconde da lustre a una fiesta en el chalet de un petimetre. Por desgracia, el papel que desempeñan los honorables matemáticos es similar al del aristócrata: son meros figurantes cuya presencia en el evento no termina de estar justificada, y parecen llevados allí sólo por su prestancia.

La redacción se me antoja varios cuerpos alejada de la de un Borges o un Eco: ni tiene su vigor ni su originalidad ni mucho menos su brillantez. De hecho, en ocasiones se topa uno con alguna preposición usada incorrectamente o con frases tópicas y gastadas (¡lejos de Borges tales aberraciones!). También tuve varias veces la extraña impresión de estar leyendo un texto traducido (mal) del inglés, así al encontrar el término “fraguado” con el evidente significado de “falsificado”, lo que evoca el doble sentido de “forged” en inglés (en la página 13 se habla de un testamento fraguado, y la palabra vuelve a aparecer más adelante); como esta reseña no es una recensión de un artículo matemático en que convenga señalar en qué punto exacto hay un signo de pertenencia mal empleado, no insistiré, pero la incómoda sensación se repitió varias veces.

Iba por la tercera parte del libro cuando se me fue haciendo evidente que hay cosas mejores a que dedicar el tiempo. Aún seguí leyendo unos capítulos, pero antes de llegar al ecuador de la obra desistí. Así que, después de todo, el propósito que, medio en broma medio en serio, expuse al principio de escribir la crítica sin leer el libro acaba por realizarse parcialmente. Y quiero ser justo en mi juicio: no digo que el texto carezca de interés, sino que yo no encuentro en él lo que esperaba y lo que parecía prometer su cubierta; ni hay Matemática digna de ese nombre en él ni la calidad literaria es la que pretendía hallar ni el ritmo de la narración me engancha a seguirla. Puede que en la parte que dejé sin abrir se encuentre todo eso, pero no me parece probable.

Para finalizar esta exposición, quiero aclarar algo obvio: lo escrito es sencillamente mi percepción, hija de mi criterio personal y de mi gusto intransferible, y no pretende ser otra cosa. Más aún, se trata de mi opinión a mediados del año 2019; puede que diez años atrás o cinco adelante escribiera una crítica muy diferente de ésta, que uno cambia de gustos y opiniones con el paso del tiempo. Si a usted, desconocido lector, le sirve de algo, no habrá sido una pérdida de tiempo.

Referencias

[1] MARTÍNEZ, Guillermo. *Los crímenes de Alicia*, Destino, Barcelona, 2019.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez Esteban
Correo Electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto


G.I.E
Pensamient
Matemátic
MAIC