Investigación

Fórmula polinómica para la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares

Polynomial formula for the sum of powers of the first n positive odd integers

José Luis Cereceda Berdiel

Revista de Investigación

Volumen IX, Número 2, pp. 007–014, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Abr'19; Aceptación: 15 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo consideramos la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares, $T_k(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$, donde n y k son enteros no negativos, y derivamos una fórmula polinómica para $T_k(n)$ que es válida para todo $k \geq 0$, en contraste con otras representaciones polinómicas que solo se aplican para k impar o para k par.

Palabras Clave: Número impar, suma de potencias de enteros, fórmula polinómica, coeficientes binomiales, números de Bernoulli.

Abstract

This paper presents a simple approach to obtaining a unified polynomial formula accounting for the sums of powers of the first n odd integers, $T_k(n) = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$, where n and k are nonnegative integers. Our polynomial formula for $T_k(n)$ applies to any $k \geq 0$, in contrast with other polynomial representations specialized to the case where k is odd or even.

Keywords: Odd number, sums of powers, polynomial formula, binomial coefficients, Bernoulli numbers.

1. Introducción

En este artículo vamos a considerar la suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares

$$T_k(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^k = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k,$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. (Por convención, tomamos $T_k(0) = 0$ para todo k). Una propiedad fundamental de $T_k(n)$ es que, para k impar, $k = 2p - 1$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$), $T_{2p-1}(n)$ puede expresarse mediante el polinomio par en n [12, Teorema V]:

$$T_{2p-1}(n) = \sum_{r=1}^{p} E_{p,r} n^{2r}, \tag{1}$$

mientras que, para k par, $k = 2p$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$), $T_{2p}(n)$ puede expresarse mediante el polinomio impar en n [12, Teorema VI]:

$$T_{2p}(n) = \sum_{r=0}^{p} F_{p,r} n^{2r+1}, \tag{2}$$

donde $E_{p,r}$ y $F_{p,r}$ son coeficientes racionales independientes de n. Dichos coeficientes vienen dados explícitamente por [3]

$$E_{p,r} = \frac{1}{2p} \binom{2p}{2r} \left(2^{2r} - 2^{2p-1}\right) B_{2p-2r}, \quad r = 1, 2, \ldots, p, \tag{3}$$

y

$$F_{p,r} = \frac{1}{2p+1} \binom{2p+1}{2r+1} \left(2^{2r+1} - 2^{2p}\right) B_{2p-2r}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{4}$$

En las ecuaciones (3) y (4), $\binom{m}{n}$ denota un coeficiente binomial, y los B_k's denotan los números de Bernoulli $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, etc., los cuales satisfacen que $B_{2k+1} = 0$ para todo $k \geq 1$ (véase, por ejemplo, [1, 4]). Los números de Bernoulli se pueden definir a través de la función generatriz exponencial

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \quad (|t| < 2\pi),$$

o, de manera equivalente, mediante la ecuación de recurrencia[1]

$$B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j, \quad k \geq 1, \text{ con } B_0 = 1.$$

Nótese, incidentalmente que, para $p = 1$, de las ecuaciones (1) y (3) obtenemos la identidad bien conocida

$$T_1(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Añadimos, por otra parte, que $T_k(n)$ se puede expresar alternativamente en función de las sumas de potencias de enteros, $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, como

$$T_k(n) = S_k(2n) - 2^k S_k(n). \tag{5}$$

Desde un punto de vista teórico, lógico, e incluso estético, sería deseable el disponer de una fórmula unificada para $T_k(n)$, válida para todo k, y polinómica en n. En este artículo vamos a proporcionar una fórmula de esta naturaleza. Específicamente, en la sección 2 probaremos el siguiente teorema.

[1] Existen asimismo fórmulas explícitas para los números de Bernoulli. Véase, por ejemplo, el artículo de Gould en [6].

Teorema 1. *La suma de potencias de los primeros n enteros positivos impares $T_k(n)$ admite la siguiente representación polinómica:*

$$T_k(n) = \sum_{r=1}^{k+1} T_{k,r} n^r, \quad k \geq 0, \tag{6}$$

donde los coeficientes $T_{k,r}$ vienen dados por

$$T_{k,r} = \sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r}, \quad r = 1, 2, \ldots, k+1. \tag{7}$$

En este punto es conveniente declarar lo siguiente con respecto al Teorema 1. En el curso del estudio y/o consulta de diversos artículos y otras fuentes bibliográficas sobre la suma de potencias de enteros, el presente autor no ha localizado ningún resultado análogo al Teorema 1 (es decir, un resultado que proporcione la fórmula polinómica (6) con los coeficientes $T_{k,r}$ dados por (7)). Por supuesto, esto no significa que dicho teorema no exista o que, en su caso, no haya sido publicado en la literatura con anterioridad. Además puede ocurrir que exista un resultado más general que incluya al Teorema 1 como caso particular. En cualquier caso, sea o no inédito, en la sección 2 ofrecemos una demostración independiente de dicho teorema.

Como quiera que las ecuaciones (1), (2), y (6) se refieren al mismo objeto matemático, $T_k(n)$, es evidente que la fórmula polinómica (6) es equivalente a la fórmula polinómica (1) [(2)] cuando k es impar [par]. En la sección 3 utilizaremos este hecho para establecer una identidad (presumiblemente nueva) que involucra a los números de Bernoulli (véase la ecuación (16)).

2. Fórmula polinómica para $T_k(n)$

Para probar el Teorema 1 nos apoyamos en el siguiente lema.

Lema 1. *$T_k(n)$ se puede expresar en la forma:*

$$T_k(n) = (2n+1)T_{k-1}(n) - 2\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j), \quad k \geq 1. \tag{8}$$

La manera más eficaz de probar el Lema 1 es expandiendo $(2n+1)T_{k-1}(n)$ como la suma de las siguientes $2n+1$ filas:

$$\left.\begin{array}{l}
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
\vdots \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}
\end{array}\right\} n$$

$$1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
\vdots \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1} \\
1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}
\end{array}\right\} n$$

Claramente, sumando por columnas la porción marcada en rojo, obtenemos $T_k(n)$; mientras que sumando por filas los dos bloques simétricos restantes obtenemos $2\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j)$, con lo que el Lema 1 queda probado.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
&T_{k-1}(1) = 1^{k-1},\\
&T_{k-1}(2) = 1^{k-1} + 3^{k-1},\\
&T_{k-1}(3) = 1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1},\\
&\vdots\\
&T_{k-1}(n) = 1^{k-1} + 3^{k-1} + 5^{k-1} + \cdots + (2n-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

De esta manera, sumando por columnas, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} T_{k-1}(j) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)(2i+1)^{k-1} = nT_{k-1}(n) - \sum_{i=0}^{n-1} i(2i+1)^{k-1}.$$

Sustituyendo ahora esta expresión en la ecuación (8) obtenemos que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} i(2i+1)^{k-1}.$$

Por el teorema del binomio, sabemos que

$$(2i+1)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (2i)^j,$$

lo que implica que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1} \binom{k-1}{j} \sum_{i=0}^{n-1} i^{j+1}.$$

Denotando por $S_j(n-1)$ a la suma de potencias

$$S_j(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^j = 0^j + 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + (n-1)^j,$$

tendremos entonces que

$$T_k(n) - T_{k-1}(n) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1} \binom{k-1}{j} S_{j+1}(n-1),$$

o, equivalentemente,

$$T_r(n) - T_{r-1}(n) = \sum_{j=1}^{r} 2^j \binom{r-1}{j-1} S_j(n-1), \tag{9}$$

donde hemos renombrado el índice k por r y hemos redefinido los límites de la sumación. Ahora evaluamos la suma telescópica

$$\sum_{r=1}^{k} \big(T_r(n) - T_{r-1}(n)\big) = T_k(n) - T_0(n) = T_k(n) - n.$$

Por tanto, de la ecuación (9) obtenemos que

$$T_k(n) = n + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} 2^j \binom{r-1}{j-1} S_j(n-1) = n + \sum_{j=1}^{k} 2^j \left[\sum_{r=j}^{k} \binom{r-1}{j-1}\right] S_j(n-1).$$

Utilizando la siguiente propiedad de los coeficientes binomiales (véase [2, Identidad 135]):

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

podemos expresar la ecuación anterior como

$$T_k(n) = n + \sum_{j=1}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1).$$

Es importante observar que podemos incorporar el término n dentro del sumatorio si tomamos como límite inferior de dicho sumatorio $j = 0$ ya que, asumiendo la convención según la cual $0^0 = 1$, $S_0(n-1)$ es precisamente n. De esta manera $T_k(n)$ puede expresarse de manera compacta como

$$T_k(n) = \sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1). \tag{10}$$

Incidentalmente, podemos combinar las ecuaciones (5) y (10) para obtener

$$S_k(2n) = 2^k S_k(n) + \sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} S_j(n-1). \tag{11}$$

El interés de la ecuación (11) radica en que nos permite calcular las sumas de potencias de los primeros $2n$ enteros positivos a partir de las sumas de potencias de los primeros n enteros positivos.

Por otra parte, es un resultado bien conocido que la suma $S_j(n-1) = 0^j + 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + (n-1)^j$ puede expresarse como un polinomio en n de grado $j+1$ sin término independiente de acuerdo a la fórmula (véase, por ejemplo, [9, 11, 13]):

$$S_j(n-1) = \frac{1}{j+1} \sum_{r=1}^{j+1} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r} n^r. \tag{12}$$

La fórmula (12) fue establecida por vez primera (aunque no en la forma actual (12)) por Jacob Bernoulli en su gran obra *Ars Conjectandi*, publicada póstumamente en 1713. Recomendamos la lectura del artículo [10], donde se detallan las ideas esenciales que llevaron a Bernoulli a descubrir tanto la fórmula (12) como los ahora denominados números de Bernoulli. Sustituyendo entonces la fórmula (12) en la ecuación (10) obtenemos

$$T_k(n) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=1}^{j+1} \frac{2^j}{j+1} \binom{k}{j} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r} n^r = \sum_{r=1}^{k+1} \left[\sum_{j=r-1}^{k} \frac{2^j}{j+1} \binom{k}{j} \binom{j+1}{r} B_{j+1-r}\right] n^r,$$

o, equivalentemente,

$$T_k(n) = \sum_{r=1}^{k+1} \left[\sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r}\right] n^r, \tag{13}$$

con lo que el Teorema 1 queda probado.

Notamos, por completitud, que los coeficientes $T_{k,r}$ se pueden expresar igualmente como

$$T_{k,r} = 2^r \sum_{j=0}^{k+1-r} \frac{2^{j-1}}{r+j} \binom{k}{r+j-1} \binom{r+j}{r} B_j, \quad r = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Aplicando la fórmula polinómica (13) para $k = 1, 2, \ldots, 9$, obtenemos

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= n^2, \\
T_2(n) &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n, \\
T_3(n) &= 2n^4 - n^2, \\
T_4(n) &= \frac{16}{5}n^5 - \frac{8}{3}n^3 + \frac{7}{15}n, \\
T_5(n) &= \frac{16}{3}n^6 - \frac{20}{3}n^4 + \frac{7}{3}n^2, \\
T_6(n) &= \frac{64}{7}n^7 - 16n^5 + \frac{28}{3}n^3 - \frac{31}{21}n, \\
T_7(n) &= 16n^8 - \frac{112}{3}n^6 + \frac{98}{3}n^4 - \frac{31}{3}n^2, \\
T_8(n) &= \frac{256}{9}n^9 - \frac{256}{3}n^7 + \frac{1568}{15}n^5 - \frac{496}{9}n^3 + \frac{127}{15}n, \\
T_9(n) &= \frac{256}{5}n^{10} - 192n^8 + \frac{1568}{5}n^6 - 248n^4 + \frac{381}{5}n^2.
\end{aligned}$$

Por supuesto, las mismas expresiones se obtendrían aplicando las fórmulas correspondientes que aparecen en (1) y (2). Puede verse que, como anticipamos en la introducción, para k impar $T_k(n)$ es un polinomio par en n, mientras que para k par $T_k(n)$ es un polinomio impar en n. La ventaja de utilizar la fórmula (13) es que nos permite computar $T_k(n)$ para cualquier $k \geq 0$. Obsérvese también que el coeficiente de mayor grado (que está dado por $T_{k,k+1} = 2^k/(k+1)$) es siempre positivo y los siguientes coeficientes van alternando en signo sucesivamente desde mayor a menor grado. Por otra parte, como $T_k(1) = 1^k = 1$ para todo k, de la ecuación (13) deducimos directamente la identidad

$$\sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{k}{j-1} \binom{j}{r} B_{j-r} = 1, \quad k \geq 0.$$

Para concluir esta sección, y como información adicional, es pertinente señalar que, para k par, $k = 2p$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$), $T_{2p}(n)$ admite la representación polinómica [7]

$$T_{2p}(n) = n(2n-1)(2n+1) \sum_{k=1}^{p} D_{p,k} (2n-1)^{p-k} (2n+1)^{p-k}, \tag{14}$$

donde los coeficientes $D_{p,k}$ están dados por [3]

$$D_{p,k} = \sum_{m=1}^{p} \binom{2p}{2m} \binom{m}{p+1-k} \frac{2-2^{2p-2m}}{2m+1} B_{2p-2m}, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{15}$$

Obsérvese que el factor $n(2n-1)(2n+1)$ en la ecuación (14) es proporcional a $T_2(n)$. Como ejemplo, aplicando las ecuaciones (14) y (15) para $p = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} T_{20}(n) &= 1^{20} + 3^{20} + 5^{20} + \cdots + (2n-1)^{20} \\ &= nN\left(\frac{1}{21}N^9 - \frac{20}{7}N^8 + \frac{736}{7}N^7 - \frac{60160}{21}N^6 + \frac{176384}{3}N^5 \right. \\ &\qquad - \frac{29080576}{33}N^4 + \frac{6311800832}{693}N^3 - \frac{41095856128}{693}N^2 \\ &\qquad \left. + \frac{11443306496}{55}N - \frac{45773225984}{165}\right), \end{aligned}$$

donde N es la abreviatura de $(2n-1)(2n+1)$.

3. Consideraciones finales

Como hemos indicado con anterioridad, la fórmula polinómica (6) es equivalente a la fórmula polinómica (1) [(2)] cuando k es impar [par]. Esto significa que, para $k = 2p - 1$, los términos de mismo grado en los polinomios (6) y (1) deben ser idénticos; y, análogamente, para $k = 2p$, los términos de mismo grado en los polinomios (6) y (2) deben ser asimismo idénticos. Utilizando las ecuaciones (7), (3), y (4), puede verificarse que la equivalencia de dichos polinomios (6) y (1) [(6) y (2)] para k impar [par] implica en ambos casos que

$$\sum_{j=r}^{k+1} \frac{2^{j-1}}{j}\binom{k}{j-1}\binom{j}{r}B_{j-r} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{r}(2^r - 2^k)B_{k+1-r}, \tag{16}$$

donde $k \geq 0$ y $1 \leq r \leq k+1$. La relación (16) nos permite expresar $T_k(n)$ de manera alternativa en la forma[2]

$$T_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{r=1}^{k+1}\binom{k+1}{r}(2^r - 2^k)B_{k+1-r}n^r, \quad k \geq 0, \tag{17}$$

que puede considerarse como la contrapartida para las sumas de potencias de los enteros impares de la fórmula de Bernoulli (12). Como $T_k(1) = 1$, de la expresión (17) se deduce a su vez la identidad

$$\frac{2^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(2^{1-j} - 1)B_j = 1, \quad k \geq 0.$$

Por otra parte, para $r = 1$, de la ecuación (16) obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} B_j = (2 - 2^k)B_k,$$

o, equivalentemente,

$$B_k = \frac{1}{2(1-2^k)}\sum_{j=0}^{k-1} 2^j\binom{k}{j}B_j, \quad k \geq 1. \tag{18}$$

La identidad (18) fue obtenida por Namias en [8]. Es interesante observar, finalmente, que esta última identidad se puede generalizar a (véase [5])

$$B_k = \frac{1}{n(1-n^k)}\sum_{j=0}^{k-1} n^j\binom{k}{j}B_j\sum_{i=1}^{n-1} i^{k-j}, \quad k \geq 1 \text{ y } n > 1,$$

donde n es un entero mayor que 1. La identidad (18) se recupera para $n = 2$.

[2] Como indica acertadamente uno/a de los/las revisores/as anónimos/as, la fórmula (17) se puede obtener directamente a partir de la ecuación (5) (la cual puede reescribirse como $T_k(n) = S_k(2n-1) - 2^k S_k(n-1)$) y de la fórmula de Bernoulli (12).

Referencias

[1] APOSTOL, T. M., *A primer on Bernoulli numbers and polynomials*, Mathematics Magazine, Vol. 81, Nº 3, pp. 178–190, 2008.

[2] BENJAMIN, A. T., QUINN, J. J., *Proofs that Really Count. The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, 2003.

[3] CERECEDA, J. L., *Explicit polynomial for sums of powers of odd integers*, International Mathematical Forum, Vol. 9, Nº 30, pp. 1441–1446, 2014.

[4] DEEBA, E. Y., RODRIGUEZ, D. M., *Bernoulli numbers and trigonometric functions*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 21, Nº 2, pp. 275–282, 1990.

[5] DEEBA, E. Y., RODRIGUEZ, D. M., *Stirling's series and Bernoulli numbers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, Nº 5, pp. 423–426, 1991.

[6] GOULD, H. W., *Explicit formulas for Bernoulli numbers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, Nº 1, pp. 44–51, 1972.

[7] GUO, S., SHEN, Y., *On sums of powers of odd integers*, Journal of Mathematical Research with Applications, Vol. 33, Nº 6, pp. 666–672, 2013.

[8] NAMIAS, V., *A simple derivation of Stirling's asymptotic series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, Nº 1, pp. 25–29, 1986.

[9] NUNEMACHER, J., YOUNG, R. M., *On the sum of consecutive Kth powers*, Mathematics Magazine, Vol. 60, Nº 4, pp. 237–238, 1987.

[10] RUIZ LÓPEZ, F., *Sobre las sumas de Bernoulli*, Pensamiento Matemático, Vol. VIII, Nº 2, pp. 109–134, 2018.

[11] WILLIAMS, K. S., *Bernoulli's identity without calculus*, Mathematics Magazine, Vol. 70, Nº 1, pp. 47–50, 1997.

[12] WITMER, E. E., *The sums of powers of integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 42, Nº 9, pp. 540–548, 1935.

[13] WU, D. W., *Bernoulli numbers and sums of powers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 32, Nº 3, pp. 440–443, 2001.

Sobre el autor:
Nombre: José Luis Cereceda Berdiel
Correo electrónico: jl.cereceda@movistar.es