

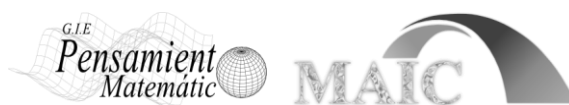
Historias de Matemáticas

La curvatura media y Sophie Germain

Mean curvature's definition and Sophie Germain

Juan Tarrés Freixenet, M^a Carmen Escribano y José Rojo Montijano

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 031–046, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Ago'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

La curvatura media de una superficie en un punto se define, por primera vez, como la semisuma de las curvaturas principales, en las memorias que Sophie Germain presentó a la Academia de Ciencias de París en 1811, 1813 y 1815, en aras a conseguir el premio que convocó esa institución, y que obtuvo Sophie Germain con la última memoria. El estudio de las superficies elásticas lo inició en 1809 a raíz de los experimentos que realizó Chladni en París con placas vibrantes. Sophie Germain fue autodidacta y falleció con 55 años a causa de un cáncer de mama. Consiguió que Lagrange la estimase como matemática y que Gauss, con quien mantuvo mucha correspondencia, la reconociese de gran valía.

Palabras Clave: Sophie Germain, curvatura media, superficies, elasticidad.

Abstract

The mean curvature of a surface in a point is defined, for the first time, as the average value between the principal curvatures in Sophie Germain's memoirs. Presented in the Paris Academy of Sciences in 1811, 1813 and 1815 in order to obtain the award proposed by this institution, Sophie Germain won with her last memoir. She began to study elastic surfaces in 1809, motivated by the experiments with vibrating plates conducted by Chladni in Paris. Sophie Germain was self-educated, and passed away at the age of 55 as a result of breast cancer. She managed to both gain the esteem of Lagrange as a mathematician, as well as the appreciation of Gauss, with whom she exchanged several letters concerning these scientific matters.

Keywords: elasticity, mean curvature, Sophie Germain, surfaces.

1. Introducción

A raíz de la llegada a París en 1808, del físico e ingeniero alemán, Ernest Florens Freidrich

Chladni (1756-1827), para presentar unos experimentos musicales¹ con placas vibrantes, la Academia de Ciencias de París, convocó al año siguiente un premio con el tema de intentar mostrar una teoría matemática que explicase el comportamiento de las superficies elásticas y compararla con la experiencia.

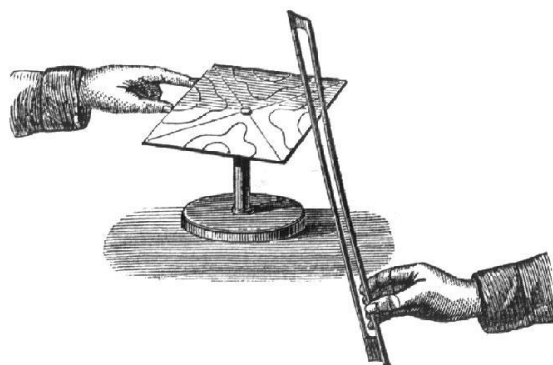


Figura 1. Experimento musical de Chladni.

La idea de curvatura media se puede decir que tiene sus orígenes en Sophie Germain y las tres memorias que esta mujer presentó a la Academia de Ciencias de París, en la segunda década del siglo XIX. Con la última memoria recibió el premio extraordinario, procediendo de forma análoga a como Leonhard Euler había razonado para el caso unidimensional de varillas, cuerdas o láminas estrechas.

Sophie Germain, a pesar de haber sido reconocida como una excelente matemática², y de haber nacido y vivido en una época revolucionaria en París (entre el último cuarto del siglo XVIII y el primer tercio del XIX), en la que salieron a la luz muchas ideas progresistas, sufrió por el mero hecho de ser mujer, y toda su vida se vio marcada por esta circunstancia. Tenía un gran talento para las ciencias en general, y las matemáticas en particular. Nunca se casó y luchó por salir adelante y hacerse un lugar entre los científicos de la época, pero a pesar de su insistencia, su sexo chocó con los prejuicios sociales y vivió a mitad de camino entre el reconocimiento y la marginación, sin poder alcanzar un trabajo que le permitiera vivir con sus propios medios y tuvo que depender económicamente, casi toda su vida, de la hacienda de su familia.

2. Sobre Sophie Germain

Sophie Germain nació el 1 de abril de 1776³ en el seno de una familia burguesa descendiente de varias generaciones de ricos comerciantes. Su padre, llamado Ambroise-

¹ El concierto de formas, como Chladni lo denominaba, consistía en llenar con arena unos platos de cristal, y tomarlos delicadamente entre dos de sus dedos, por sitios opuestos, mientras con un singular instrumento con arco hacía sonar una de sus aristas, como si fuese la cuerda de un violín. Esto producía una nota melodiosa mientras que la arena se distribuía dibujando formas que no parecían aleatorias, ya que al repetir el experimento se producía la misma figura en la arena.

² Karl Friedrich Gauss, cuando se enteró de que era una mujer la que le escribía, con el seudónimo de un hombre, le envió una nueva carta reconociendo en ella el más noble coraje, los talentos más extraordinarios, y una inteligencia superior.

³ En la famosa calle de San Denis de París.

François Germain (1726-1821)⁴, se comprometió, por poco tiempo, pero de una manera activa, durante los primeros días de la Revolución Francesa como diputado elegido por el Tiers-État para la Asamblea Constituyente de 1789. Era liberal con ideas progresistas que abogaban por las reformas sociales, económicas y financieras del Ministro Turgeot. Su madre, Marie Madeleine Gruguelus también era hija de comerciantes. Este matrimonio tuvo solamente tres hijas. La mayor, Marie-Madeleine, la mediana Marie-Sophie, y la pequeña Angélique-Ambroise. La mayor se casó con el notario Charles Lherbette que tenía 19 años más que ella, y con el que tuvo un hijo, Jacques-Armand, que estudió derecho como su padre, y llegó a ser procurador del rey y diputado. Este único sobrino de Sophie quería a su tía y era querido por ella, incluso, en los relatos biográficos se dice que se le parecía físicamente por su gran frente. Estimaba y compartía las ideas de su tía. Hizo publicar las ideas filosóficas de su tía dos años después de muerta ésta. Él murió sin descendencia en 1864. La hermana pequeña de Sophie, Angélique-Ambroise se casó con un médico, René-Claude Geoffroy, que murió en 1831, el mismo año que murió Sophie. Luego se volvió a casar con un famoso fisiologista, René-Joachim-Henry Dutrochet, que murió en 1847, al que Angélique sobrevivió hasta 1875. La residencia familiar se trasladó a casa de Angélique, cuando estaba casada con su primer marido, en la calle de Braque⁵, y allí vivieron los padres de Sophie, y ella misma, excepto los últimos años de su vida, en los que decidió trasladarse a un lugar más tranquilo para sus estudios.

Cuando estalló la Revolución, en 1789, Sophie tenía 13 años y, al parecer, era exageradamente tímida e introvertida, con un aspecto físico más bien poco agraciado. En estos momentos las calles de París eran muy peligrosas para una niña de su edad ya que estaban llenas de gentes que iban y venían corriendo y entonando himnos revolucionarios. Harta de oír en su propia casa y a todas horas del día interminables discusiones sobre el dinero, la política y los cambios que traía consigo la Revolución, Sophie encontró en la biblioteca de su padre un refugio a la vez tranquilo e intelectualmente excitante.



Figura 2. Izqda: Retrato de Sophie Germain a la edad de 14 años. Drcha: Efigie de Sophie Germain (Colección Granger).

⁴ Desde 1700 aproximadamente se tienen noticias de esta familia de prósperos comerciantes descendientes de Joseph Germain.

⁵ En el número 4 de la actual rue Braque sigue existiendo esta casa en París.

En este ambiente, encontró un libro titulado *Histoire des Mathématiques*, de Jean-Etienne Montucla⁶. Con el tiempo, y pese a la oposición de sus padres⁷, comenzó leyendo el tratado de aritmética de Étienne Bezout y el cálculo diferencial de A.J. Cousin, y llegó a leer con facilidad libros tan especiales como los *Principia Mathematica* (1687) de Newton, *Exposé sur le Système du Monde* (1796), de Pierre Simon de Laplace, y las obras de Leonhard Euler.

En 1795 se creó l'École Polytechnique, Sophie tenía 19 años y consiguió las notas que se exigían para entrar en la misma en los cursos impartidos por diferentes profesores, especialmente el de análisis matemático de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), aunque por ser mujer no se le permitió⁸. Había la costumbre de que a fin de curso algunos profesores pidieran a los estudiantes sus observaciones por escrito; Sophie Germain aprovechó la ocasión para enviarle las suyas a Lagrange utilizando el pseudónimo de Le Blanc⁹, un alumno de l'École Polytechnique, un año mayor que ella, que iba a ingresar en l'École des Ponts et Chaussées, y que Sophie conocía. Lagrange los leyó y quiso conocer a tal alumno que sabía interpretar y comentar sus lecciones, por lo que conoció a Sophie. Desde entonces no volvió a hacer discriminaciones por ser de una mujer, y se convirtió en su mentor, quedando Sophie invitada a las tertulias científicas con otros hombres de ciencias. Al principio estas reuniones deslumbraron a Sophie, pero con el tiempo volvió a sus pensamientos de que los hombres pensaban que con la participación de las mujeres debían de adoptar un tono menor, ya que el espíritu femenino es inadecuado para los temas científicos¹⁰.

Lagrange proporcionó a Sophie libros y la formación necesaria para seguir investigando. Estudió a Arquímedes, Newton, Leibniz, Euler, los Bernouilli, Diofanto, Fermat, Hipatia, Legendre y Gauss entre otros (El libro de Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* escrito en 1798 fue uno de sus favoritos).

El campo de la teoría de números le ofrecía una magnífica ocasión de realizar sus proyectos y de hacer verdaderos progresos; por añadidura, le va a permitir establecer los primeros contactos profesionales con auténticos científicos. Durante los años siguientes se dedicó sobre todo a asimilar los nuevos y difíciles métodos de las *Disquisitiones Arithmeticae*, y a realizar algunas aportaciones.

Con Carl Friedrich Gauss, en la universidad de Gotinga, intercambió mucha correspondencia desde 1804¹¹, aunque siempre con el seudónimo de Leblanc, aunque realmente Gauss solo le contestaba cuando sus trabajos presentados en las cartas tenían que

⁶ Cuentan sus biógrafos que cuando Sophie leyó la historia de Arquímedes, al que se le olvidaba comer y beber absorbo en sus pensamientos matemáticos, decidió que ella sería matemática.

⁷ Su familia la castigaba por leer, y sobre todo libros de ciencias, ya que estaba mal visto para las mujeres, pues pensaban que podía caer enferma. Por ejemplo, para que no estudiara de noche le suprimieron la ropa de abrigo, y las velas, aunque ella se las ingeniaba para poder seguir haciéndolo a escondidas.

⁸ Esta escuela parisina no admitió mujeres hasta 1972.

⁹ No se podía dirigir a él como mujer así que pensó en su amigo Antoine Auguste Leblanc que frecuentaba las reuniones en su casa, y que se encontraba matriculado en el curso de Lagrange. Él fue el que le pasó los apuntes de *Análisis* de J. L. Lagrange, y los de *Química* de A. F. Fourcroy.

¹⁰ Véase la página 68 del libro *Matemática es nombre de mujer*, de Susana Mataix.

¹¹ En la respuesta de Gauss a la primera carta recibida de Sophie, con el seudónimo de Leblanc, en 1804, le dice Gauss a Sophie (Leblanc): "Me complace comprobar su habilidad para la aritmética. Sobre todo su nueva demostración para números primos, cuando 2 es o no es residuo cuadrático, me ha gustado mucho, es una demostración muy aguda, es una pena que no se pueda aplicar a otros números..."

ver con lo qué él estaba trabajando.

Debido a las campañas de Napoleón contra los prusianos Sophie le encargó a un amigo de su familia, el general Perneti, que cuidara de este matemático olvidadizo en 1806. Este amigo cuando volvió a ver a Sophie en París, le comentó la sorpresa de Gauss que decía no conocer a ninguna Sophie Germain que pudiese interesarse por él. Entonces ella, en su siguiente carta, le descubrió quién era¹². Gauss entonces le escribió *“El gusto por las ciencias abstractas en general y, sobre todo por los misterios de los números, es muy raro; esto no es sorprendente, puesto que los encantos de esta sublime ciencia en toda su belleza sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ellos. Cuando una persona de su sexo, que por nuestras costumbres y nuestros prejuicios, debe encontrar infinitamente más obstáculos y dificultades que los hombres para familiarizarse con esas investigaciones espinosas, sabe a pesar de ello flanquear las trabas y penetrar en lo más profundo, hace falta sin duda que tenga el más noble coraje, los talentos más extraordinarios, la inteligencia superior”*¹³. A partir de 1809 Gauss se dedicó a otros menesteres y la correspondencia se interrumpió.

En 1808 llegó a París el ingeniero alemán Ernst Chladni quien presentó sus experiencias sobre la vibración de las superficies elásticas. Insistía en observar las figuras que se formaban al esparcir arena sobre una placa a la que se la hacía vibrar rozando en el borde con el arco de un violín. Lo que ocurría entonces es que la arena se concentraba donde las vibraciones eran más débiles, formando seductoras figuras geométricas. Estos experimentos que resultaron ser muy llamativos, los realizó primero en el Instituto de Francia¹⁴, y después se repitieron delante de Napoleón.

Puesto que por esta época la Academia de las Ciencias de París tenía la costumbre de ofrecer un premio¹⁵ al mejor trabajo en ciencias físicas y matemáticas, en 1809 propuso dar el premio a quien desarrollase una teoría matemática sobre las superficies elásticas que explicara las experiencias de Ernst Chladni¹⁶.

A partir de 1809 Sophie Germain se interesa por nuevos problemas y cambia completamente de campo de investigación centrándose en la física-matemática, quizás debido a que Gauss no contestaba ya sus cartas, o quizás debido a este concurso convocado por la Academia de Ciencias de París.

Sophie Germain presentó tres memorias consecutivas sobre el tema propuesto por la Academia, la primera en 1811, la segunda en 1813 y la tercera y última en 1815. El día 8 de enero de 1816, recibió el *“Prix Extraordinaire”* de la Academia de Ciencias. Se reunió mucha gente para conocer a la famosa mujer matemática, sin embargo Sophie no asistió a la ceremonia de entrega del premio, pues como ella misma aseguró en estos momentos no sentía ninguna admiración por la mayoría de los académicos, a pesar de que años atrás se había sentido una novata entre gigantes.

¹² Sophie dándole a conocer que efectivamente era una mujer le dice *“...espero que la información que hoy le confieso no me prive del honor que me concedió bajo un nombre falso, y que no me sea negado un breve momento en el que usted se dedique a escribirme para darme noticias ...”*.

¹³ Carta de Karl Friedrich Gauss a Sophie Germain, fechada el 30 de abril de 1807.

¹⁴ Delante de un grupo de élite de 66 matemáticos y físicos que constituían la *“Primera Clase”* del Instituto de Francia.

¹⁵ Se elegía una comisión de cuatro o cinco personas que planteaba un tema y se establecía un programa, teniendo los candidatos dos años para hacer una memoria que presentaban de forma anónima.

¹⁶ Véase MOLERO APARICIO y SALVADOR ALCAÍDE, *Germain, Sophie (1776-1831)* www.Divulgamat.net.

Desde la concesión del premio, toda la comunidad científica la reconoció y respetó. Además algunos académicos le rindieron su simpatía y aprecio, entre ellos Jean-Baptiste Joseph Fourier¹⁷ (1768-1830), quién en una de sus primeras actuaciones como secretario perpétuo de la Academia de Ciencias, le permitió asistir a las sesiones del Instituto de Francia¹⁸, siendo la primera mujer, no esposa de académico, que lo hizo¹⁹.

Este premio consiguió que subiera su propia autoestima, y continuó sus investigaciones con Legendre sobre Teoría de Números, y volvió a escribir a Gauss sobre este tema²⁰. Aunque Gauss y Sophie Germain nunca se conocieron, éste intentó que en 1830 la Universidad de Göttingen le otorgara el título de doctor *honoris causa*, cuestión que no prosperó incluso con la gran influencia de Gauss.

A partir de este momento se publicaron diversas memorias y artículos, incluso hasta después de su fallecimiento. Además su sobrino se encargó posteriormente de seguir publicando sus escritos.



Figura 3. Tumba de Sophie Germain en el cementerio de Père Lachaise de París.

En 1825, en una de las reuniones que organizaba François Arago en el Observatorio de París, Sophie conoció al joven matemático, del que se decía que tenía mucho talento,

¹⁷ Fue elegido Secretario Perpétuo de la Academia de Ciencias en 1822.

¹⁸ El Instituto, que se había creado en 1795 (tras el cierre de las academias en 1793) estaba compuesto por tres clases (la primera para matemáticas y naturales) y a partir de 1816 se reorganizó en cuatro academias (A. Francesa, A. de Inscripciones y Bellas Letras, A. de Ciencias y A. Bellas Artes), y a las sesiones públicas podían asistir las mujeres de los académicos sólo en ocasiones especiales. Hoy en día el Instituto de Francia agrupa además a la quinta Academia de Ciencias Morales y Políticas.

¹⁹ El 30 de mayo de 1823 Fourier le escribe a Sophie diciéndole que tendrá un asiento reservado en el centro de la sala cada vez que desee asistir a las lecciones públicas del Instituto, para demostrarle el interés que su trabajo matemático inspiraba a la institución.

²⁰ En la carta que Sophie le escribe a Gauss en Mayo de 1819 le dice "Aunque he trabajado durante algún tiempo en la teoría de superficies elásticas (a lo que tengo mucho que agregar si tuviera la satisfacción de realizar algunos experimentos en superficies cilíndricas que tengo en mente), nunca he dejado de pensar en la teoría de números... Hace tiempo que nuestra Academia propuso como materia para un premio la demostración de la imposibilidad de la ecuación de Fermat, este desafío me ha atormentado a menudo".

Guglielmo Libri, Conde de Bagnano²¹, del que se hizo una buena amiga²². Por su correspondencia con él se sabe que Libri asistía a comer invitado a casa de Sophie donde coincidió en alguna ocasión con August Leopold Crelle²³.

Libri volvió a Italia, pero siguió su amistad con Sophie. Regresó a París en 1830 y afianzaron aún más su afecto. De esta época se conservan algunas de las cartas que se escribían mutuamente, tanto con aportaciones matemáticas a la teoría de números, como con cuestiones personales, como el hecho de que a causa del dolor que sentía Sophie debido a su enfermedad, a partir de abril de 1831 se tiene constancia de que ya no veía a ninguno de sus amigos y sólo tenía la compañía de su hermana y su sobrino.

Poco antes de su muerte, en mayo Sophie le escribe a su amigo Libri diciéndole: *“Estoy enferma, señor, muy enferma. Trabajé duro durante su estancia aquí porque no quería cerrarle la puerta, pero desde entonces el dolor se ha incrementado y hoy por hoy no puedo recibir visitas o cuidarme. El dolor que siento es horrible y mi vida es un verdadero suplicio, no veo cómo mi situación pueda mejorar, como le había dicho hace un tiempo...”*. Sophie Germain falleció en París, el 27 de junio de 1831²⁴, después de haber sufrido mucho, a causa de un cáncer de pecho, que le habían descubierto un par de años antes.



Figura 4. Placa en la casa donde murió en París (13, rue de Savoie).

El busto de Sophie Germain se conserva en el "Museum d'Histoire Naturelle" de París, aunque estuvo colocado en el en el patio del Liceo de París, de la rue Jouy, que lleva su nombre desde 1888.

²¹ Había nacido en Florencia en 1802, y estudiado en la Universidad de Pisa, de la que fue profesor de física y matemáticas. Por aquel entonces se dedicaba a investigar en la teoría de números, aunque además fue historiador de matemática, bibliófilo, gran coleccionista y comerciante de libros.

²² El día 14 de mayo de 1825 Libri escribe a su madre diciéndole *“finalmente anoche me encontré con Mademoiselle Germain, que ganó el premio extraordinario de matemáticas en el Instituto hace algunos años, hablé con ella dos horas, tiene una personalidad impresionante”*.

²³ Fue el fundador de la célebre revista alemana de matemáticas *Crelle's Journal*.

²⁴ Libri escribiría a su madre unos días después diciéndole: *“La señorita Germain, por quien sentía un profundo aprecio, murió hace 15 días. Era víctima de un cáncer y sufrió terribles dolores. ¿Este es el destino reservado a las almas maravillosas? Siento un profundo pesar”*. Véase página 121 de Sánchez Fernández (2013), *Sophie Germain. Las matemáticas como pasión*.

2. Influencia en la teoría matemática de las superficies elásticas

Sophie Germain se apasionó por el estudio de las superficies elásticas a raíz de los experimentos de Chladni y del concurso²⁵ convocado por la Academia de Ciencias²⁶. Los académicos y científicos de la época consideraban el tema muy complicado. Se pretendían establecer las ecuaciones diferenciales de las superficies vibrantes.

Sophie a pesar de que no tenía una buena formación en el tema, quería proceder con las superficies por analogía con el razonamiento seguido por Euler para el caso unidimensional de las varillas, las cuerdas y las láminas estrechas.

Este último había supuesto que en un punto cualquiera de la varilla, la fuerza de elasticidad interna que compensa el efecto de las fuerzas exteriores aplicadas es proporcional a la curvatura (o lo que es lo mismo, inversamente proporcional al radio de curvatura) de la varilla en dicho punto.

En 1760, Euler había publicado el trabajo *Recherches sur la courbure des surfaces*²⁷ en el que se introducen las direcciones principales y las curvaturas principales en un punto de una superficie. Para ello, el autor analizaba las curvas obtenidas como intersección de la superficie con planos normales a ella y obtiene que, en cada punto, las curvaturas máxima y mínima corresponden a dos curvas situadas en dos planos perpendiculares entre sí. Éstas son las curvaturas principales y las direcciones correspondientes a cada una de ellas, las direcciones principales.

Se obtiene así el siguiente resultado:

Teorema. Si k_1 y k_2 son las curvaturas principales de una superficie en un punto, la curvatura k de una sección normal en el mismo, que forma un ángulo ϕ con una de las direcciones principales es:

$$k = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$$

Es decir, todas las curvaturas de las direcciones normales en un punto de la superficie quedan determinadas por las dos curvaturas principales en el mismo. Obtiene también Euler en ese trabajo que la suma de las curvaturas de dos secciones perpendiculares es igual a la suma de las dos curvaturas principales.

Por analogía con lo que había leído en los trabajos de Euler, Sophie Germain enuncia en su primera memoria presentada a la academia, lo que en adelante llamará siempre “mi hipótesis”:

La fuerza elástica en un punto de una superficie, que compensa el efecto de las fuerzas exteriores aplicadas, es proporcional a la suma de las curvaturas principales de la superficie en dicho punto.

²⁵ Se convocó un premio extraordinario con el tema «Donner la théorie mathématique des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience».

²⁶ Pierre Simon Laplace había realizado la convocatoria pensando en su discípulo y protegido Siméon Denis Poisson (1781-1840), pero éste ni siquiera se presentó al concurso.

²⁷ Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Berlin, 1760.

Sophie Germain llamará curvatura media a la semisuma de las curvaturas principales. De este modo, su hipótesis se puede reformular con estas palabras:

La fuerza elástica y la curvatura media son directamente proporcionales.

Esta memoria fue la única que se presentó en esta primera edición de este premio, pero fue rechazada por considerar el trabajo incompleto e incorrecto, y decidieron de nuevo volver a convocar el premio para dos años más tarde. Sophie había conseguido una ecuación en derivadas parciales de sexto orden, de la que buscaba soluciones regulares, en casos particulares, mediante series trigonométricas tal como había hecho Euler para el caso de las varillas elásticas.

A partir de una relación de equilibrio mecánico supuesta, Sophie Germain da, lo mismo que Euler, otras hipótesis adicionales que simplifican las relaciones asociadas a desplazamientos y rotaciones de la placa; así, supone, en particular, que los desplazamientos de los puntos de la superficie son pequeños y se realizan a lo largo de las normales a la superficie en cada uno de sus puntos. La idea de hacerle jugar a la suma de las curvaturas principales el mismo papel que la curvatura simple para una varilla elástica en el caso unidimensional es una idea completamente original de Sophie Germain. Se apoya en la intuición de que una superficie (de espesor despreciable) se comporta como una suma de sus indivisibles (las curvas que la forman) y que el movimiento al que se ve sometida se puede considerar como la superposición de los movimientos a los que se verían sometidas dichas curvas si estuvieran realmente separadas y vibraran aisladamente unas de otras.



Figura 5. Busto de Sophie Germain realizado por Zacharie Astruc a partir de la reconstrucción de su máscara mortuoria.

Lagrange utilizó este primer trabajo de Sophie sobre superficies elásticas, corrigió su análisis matemático y a partir de la hipótesis de Sophie obtuvo una ecuación diferencial para describir el comportamiento estático y dinámico de las placas en puntos del interior²⁸. Sophie

²⁸ De esta corrección y análisis se conoce la ecuación final que escribió en una nota en la página 149 del tomo 39 de los *Annales de Chimie et de Physique*.

animada por el éxito de Lagrange con su idea, volvió a su trabajo intentando que la geometría de la deformación del plano justificase su hipótesis, y comparó sus resultados con los experimentos de Chladni y con otros experimentos que ella misma llevó a cabo. Así volvió a presentar una segunda memoria más extensa que la primera en 1813, con la que consiguió una mención de honor, pues los académicos²⁹ alegaron que su teoría no explicaba los resultados experimentales³⁰. Y la academia volvió a convocar el concurso para dos años mas tarde.

El día 1 de agosto de 1814 Poisson leyó un trabajo³¹ sobre este tema, en el que empezó a criticar el enfoque de Leonhard Euler, de Jacques Bernouilli y por último de la memoria que el año anterior había recibido una mención de honor por parte de la Academia. Poisson³² obtenía una ecuación diferencial no lineal, que con ciertas simplificaciones se transformaba en la ecuación de la segunda memoria de Sophie.

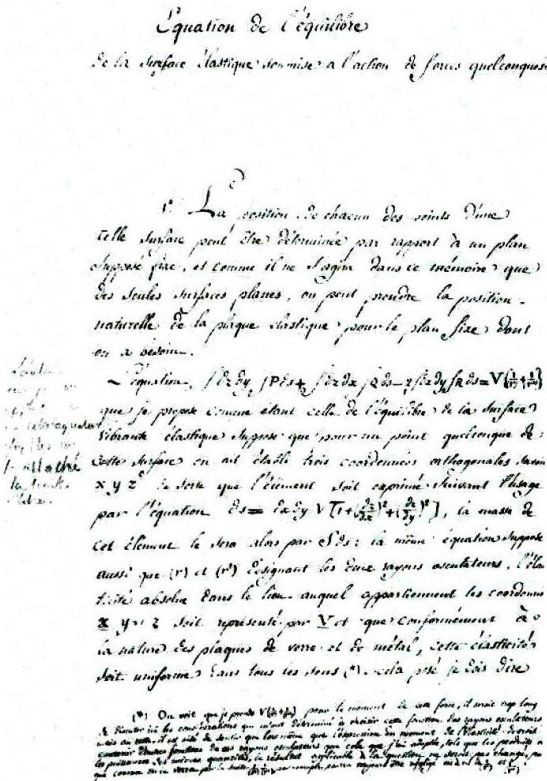


Figura 6. Primera página de la primera memoria de Sophie sobre superficies elásticas (Biblioteca Moreniana de Florencia).

²⁹ Adrien-Marie Legendre (1736-1833) fue uno de los miembros de la comisión que juzgó su segunda memoria presentada, y mantuvo mucha correspondencia con Sophie, saltándose las normas del concurso convocado, desde la primera edición, e intentando calmar la ansiedad de Sophie que había descubierto ciertas dudas sobre el trabajo presentado.

³⁰ Parece ser que Sophie tenía claro su objetivo, pero su poca formación, le impidió formular con rigor su planteamiento (manera poco ortodoxa de manejar el lenguaje matemático).

³¹ Este trabajo no se publicó, por lo que Sophie sólo tuvo acceso a un resumen del mismo que sí se publicó en el “Bulletin de la Societé Philomatique” y en la “Correspondence de l’Ecole Polytechnique”.

³² Era discípulo de Laplace y de su teoría “molecular” con la que ensayaban explicar todos los fenómenos físicos de la física newtoniana, con un conjunto de fuerzas atractivas o repulsivas. Así consideraban el equilibrio de una única molécula de la superficie elástica.

3. El gran premio de la Academia de Ciencias de París

En la tercera memoria que presenta en 1815, *“Mémoire sur les Vibrations des Surfaces Élastiques”*, Sophie, que había alcanzado una confianza cada vez mayor en su hipótesis, pretende dar a ésta el rango de teorema, deducido a partir de un postulado (que considera incontestable) mediante el uso de la lógica.

El postulado lo formula de la manera siguiente: *“El efecto es siempre proporcional a la causa que lo produce”*. A propósito de este postulado, escribe:

“Así, cuando digo que una fuerza es proporcional al efecto que produce, o que tiende a producir, ¿hago algo distinto que expresar una proposición generalmente admitida y que, por supuesto, es evidente por sí misma?...Las fuerzas de la elasticidad tienden a eliminar la diferencia entre la forma natural de los cuerpos debidas a ellos mismos y la forma que los mismos cuerpos se ven forzados a tomar por el efecto de una causa exterior.

Las fuerzas de la elasticidad que actúan sobre cualquier cuerpo elástico se pueden medir con la diferencia entre la forma natural de ese cuerpo y la forma que toman bajo el efecto de una causa exterior. El efecto producido por una fuerza es, explícitamente o implícitamente, el conjunto de los efectos producidos por la misma fuerza.

Explícitamente si se consideran sucesivamente todos los efectos sin expresar que unos dependen de los otros; implícitamente si la relación que existe entre los mismos efectos permite considerarlos como un efecto único.

El efecto de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre una superficie es eliminar la diferencia entre la curvatura natural de la superficie y la curvatura que ha sido forzada a tomar por el efecto de una fuerza exterior, pero la pregunta sobre la curvatura de una superficie no es susceptible de una respuesta simple; está compuesta de un conjunto de preguntas relativas a la curvatura de las curvas resultantes de las secciones de la misma superficie hechas en todas las direcciones y según todas las inclinaciones posibles.

El conjunto de las diferencias entre las curvaturas de las distintas secciones de la superficie, consideradas antes y después de la acción de la causa exterior, es explícitamente la medida de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre esa superficie.

Existe entre las curvaturas de las curvas formadas por las distintas secciones de la superficie una relación tal que podemos expresar sus sumas por las de las secciones principales.

El efecto de las fuerzas de elasticidad está pues implícitamente expresado por la suma de las únicas diferencias entre las curvaturas principales de la superficie, consideradas antes y después de la fuerza exterior”³³.

En el caso de las superficies elásticas, la situación viene dada por tres términos:

1. Las fuerzas exteriores

³³ Estos razonamientos se los expone Sophie a Poisson en una carta que le envía ya que a pesar de haber recibido su memoria el premio extraordinario el jurado, del que formaba parte Poisson, había presentado ciertas reservas sobre sus demostraciones. Sólo recibió una respuesta lacónica y de una cortesía formal por parte de Poisson, que siempre eludió cualquier discusión seria sobre las cuestiones de fondo y que además la ignoraba en público.

2. Las fuerzas de elasticidad

3. La relación de proporcionalidad evidente entre la deformación de la superficie y las fuerzas de elasticidad.

El problema que surge es el de dar forma matemática a la noción de deformación de la superficie, entendida como diferencia entre dos formas.

En el caso de una viga elástica, si I es la forma inicial, y E , la forma final, este concepto se convierte en algo matemáticamente operativo gracias a la curvatura, considerada como el inverso del radio de curvatura y que, de alguna manera, “mide” la deformación respecto de la forma rectilínea inicial.

Pero una superficie elástica deformada presenta una infinidad de curvas posibles en cada punto, que son las secciones planas de la superficie para cada plano que pasa por el mismo. Sophie Germain postula que si se suman todas las curvaturas de las diferentes secciones planas de la superficie se va a obtener una expresión que dará un aspecto matemático a la noción de forma de la superficie en ese punto.

Surge así de manera implícita un procedimiento de cálculo integral para obtener la curvatura de una superficie. Aprovechando los resultados de Euler, afirma Sophie Germain:

La suma de las razones inversas de los radios de curvatura de todas las curvas determinadas por las secciones planas de la superficie se reduce a la suma de las razones inversas de los dos radios de curvatura principales.

Y enuncia el teorema siguiente: *La suma integral de todas las curvaturas correspondientes a todas las curvas posibles obtenidas por intersección de las secciones planas (que pasan por un punto) con la superficie es proporcional a la suma de las curvaturas principales.*

Este resultado analítico, junto con el postulado metodológico del efecto proporcional a la causa, le parece suficiente para establecer de manera irrefutable la validez de su hipótesis en el caso de las superficies elásticas.

Sophie Germain obtuvo al fin el premio extraordinario de la Academia por esta tercera memoria, que contenía la mitad de páginas que la primera, pero ni siquiera se tomó la molestia de ir a recogerlo. Publicó la tercera memoria con la que consiguió el premio en 1821 con el título *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* (Veuve Courcier. Paris. 1821)³⁴.

Presentó una nueva memoria a la academia *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques* en 1824 que debían evaluar Poisson, Laplace y el barón de Prony. Esta memoria permaneció oculta entre los efectos de Prony, hasta que después de muerte y de haber suscitado mucho interés por su obra, se publicó la memoria en 1880.

En 1826 y 1828 publicó respectivamente *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et Équation Générale de ces Surfaces*³⁵, y *Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*³⁶, donde intenta dar un enfoque totalmente opuesto a la teoría molecular de Poisson, e

³⁴ Quizás la publicó ella misma para que nadie se adueñase de su obra, por lo que había hecho anteriormente Poisson con la memoria anterior.

³⁵ Huzard Courcier, Paris, 1826.

³⁶ Annales de Chimie et de Physique, Tome XXXVII, pp. 337.

intervenir en la polémica entre Poisson y Navier sobre la teoría de la elasticidad.

Durante los acontecimientos de julio de 1830 en París, pocos meses antes de su muerte, Sophie redactaba una *Mémoire sur la courbure des surfaces*, que se publicó en el *Journal de Crelle* en 1831. En ella trata de establecer una teoría dinámica de la curvatura que permita medir la “distribución” de la misma en torno a un punto. Una vez más, su camino se cruza con el de Gauss, que en 1827 había publicado una teoría matemática de la curvatura, muy profunda y original, que se basa en el estudio de la superficie desde un punto de vista intrínseco, situándose el observador sobre la propia superficie, sobre la que realiza sus medidas haciendo abstracción de sus relaciones con el espacio circundante en el que está sumergida, son las *Disquisitiones circa superficies curvas*. El concepto fundamental aquí es el de la llamada curvatura gaussiana, que es igual al producto de las dos curvaturas principales.

Fue precisamente el dominio de esta teoría de Gauss, que al principio pudo parecer que no tenía relación alguna con la teoría de las superficies elásticas, lo que permitió a los físicos especialistas en teoría de elasticidad hacer nuevos progresos a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX.

El trabajo de Gauss eclipsó la obra de Sophie Germain, que escribió una última carta a Gauss el 28 de marzo de 1829 en la que le envió un resumen de su propia memoria (en preparación). Además aprovecha para expresarle la emoción y satisfacción que sintió al leerla, diciéndole: *“No puedo decirle cómo de atónita me quedé, al tiempo que satisfecha, al saber que un reconocido matemático tenía, casi a la vez que yo, la idea de la analogía, que me parece tan racional. No entiendo cómo nadie la había tenido antes, ni cómo nadie le había prestado atención hasta la fecha, tratándose de una consideración que yo había publicado ya”*.

4. Conclusiones

Sophie Germain fue una mujer autodidacta en un mundo de hombres, en el que sólo por el hecho de ser mujer tenía que derruir un muro cada vez que se interesaba por las matemáticas. A pesar de todos los obstáculos puestos en su camino por la sociedad científica, además de por su propia familia, supo colocarse a nivel intelectual entre los grandes académicos del momento de todo el espacio europeo.

Sus dos grandes ámbitos de investigación matemática fueron la teoría de números y las vibraciones sobre superficies elásticas. En el primero consiguió establecer el teorema conocido con su nombre, que junto con los números de Germain³⁷ constituye uno de los pasos más importantes para demostrar la conjetura de Fermat hasta 1840. Aunque a partir de 1809 se dedicó con mucho entusiasmo al estudio de las superficies elásticas como se ha visto en este trabajo, nunca dejó la teoría de números, pues incluso estando ya muy enferma, en 1830, redactó en un artículo que se publicaría después de muerta en el *Journal de Crelle* titulado *Notes sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans la équation $x^n + y^n = z^n$* . En el ámbito de las superficies elásticas se ha visto su importancia en los acápites precedentes, y que además tuvo sus aplicaciones en construcciones como por ejemplo la Torre Eiffel unos años más tarde³⁸.

³⁷ Un número natural n es de Germain, si n es primo y $2n+1$ también es primo.

³⁸ A pesar de que el trabajo de Sophie fue muy importante, su nombre no se encuentra entre los 72 científicos que constan en la torre, algunos de ellos contemporáneos de Sophie.

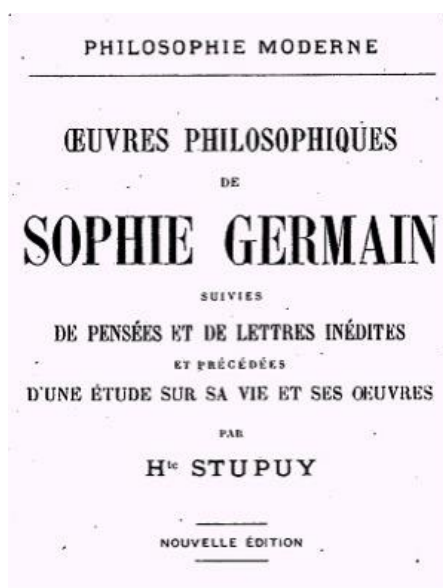


Figura 7. Publicación de 1879, reeditada en 1880.

En 1879 Hippolyte Stupuy publicó con mucho éxito en toda Europa el libro titulado *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de Pensées et de Lettres inédites et précédées d'une Étude sur sa vie et ses œuvres*. Tanta fama consiguió esta publicación que se tuvo que realizar una segunda edición al año siguiente, donde se incluyeron como anexo algunos artículos aparecidos en revistas de la época como *La Philosophie positive*, *Journal de savants* y *Revue occidentale*, que elogiaban la obra³⁹.

En su honor le dedicaron su nombre a un colegio de niñas en 1876, y también una calle en París, en el distrito 14. También la Academia de Ciencias de París, convocó desde 2003, un premio anual denominado Grand Prix Sophie Germain, dotado con 8000 euros, para un investigador que efectúe un trabajo de investigación fundamental en Matemáticas. En la actualidad existen incluso hoteles que llevan su nombre.



Figura 8. Cartel de la calle de París que lleva su nombre.

³⁹ En esta obra se comienza con un resumen de la vida e investigaciones de Sophie Germain, titulado *Étude sur Sophie Germain*, los siguientes capítulos son *Considérations sur l'état des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture*, y *Pensées diverses*, que había publicado el sobrino de Sophie en 1833. A continuación le sigue otro capítulo denominado *Correspondance*, donde se incluyen 34 cartas escritas por Sophie o dirigidas a ella, sobre todo de Gauss, Legendre y Fourier.



Figura 9. Hotel de París con el nombre de Sophie Germain.

Referencias

- [1] ALIC, Margaret. *El legado de Hipatia. Historia de las mujeres en la ciencia desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX*. Siglo veintiuno editores, México, 1991.
- [2] DAHAN-DALMEDICO, Amy. *Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain*. *Historia Mathematica* 14 (4), pp. 117-122, 1987.
- [3] DAHAN-DALMÉDICO, Amy. *Sophie Germain*. *Scientific American*, 265, 117-122, 1991.
- [4] FIGUEIRAS, Lourdes.; MOLERO, María.; SALVADOR, Adela.; ZUASTI, Nieves. *El Juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*. Madrid, 1998.
- [5] GERMAIN, Sophie. *Mémoire sur la courbure des surfaces*. *Journal de Crelle*, VII, 1-29, 1831.
- [6] HILL, Amy Marie. *Sophie Germain: A mathematical Biograph*, University of Oregon, 1995.
- [7] MATAIX, Susana. *Matemáticas es nombre de mujer*. Ed. Rubes. Barcelona, 2003.
- [8] MOLERO APARICIO, María; SALVADOR ALCAIDE, Adela. *Sophie Germain*, Ed. Orto. Madrid, 2004.
- [9] MOLERO APARICIO, María; SALVADOR ALCAIDE, Adela. *Germain, Sophie (1776-1831)*, www.Divulgamat.net, consultada 4 de Agosto 2014.
- [10] SANCHEZ FERNANDEZ, Laura. *Sophie Germain. Las Matemáticas como pasión*. Colección La matemática en sus personajes nº 47. Ed. Nívola. Madrid, 2013

[11] STUPUY, Hippolyte. *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une étude sur sa vie et ses œuvres*. Paris, Firmin-Didot, 1896.

Sobre los autores:

Nombre: Juan Tarrés Freixenet

Correo Electrónico: tarres@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: M^a Carmen Escribano Ródenas

Correo Electrónico: escrod@ceu.es

Institución: Universidad CEU San Pablo, Madrid, España.

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad CEU San Pablo, Madrid, España.