Juegos Matemáticos

Números triangulares cuadrados (la cuadratura del triángulo)

Triangular squares (the quadrature of the triangle)

Dionisio Pérez Esteban

Revista de Investigación

Volumen IV, Número 1, pp. 137–140, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 Jun'13; Aceptación: 15 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Entre los números triangulares, se encuentran camuflados algunos cuadrados. En este artículo se les desenmascara, y en el proceso nos topamos con algunos personajes interesantes: fracciones continuas, ecuación de Pell, aproximación de soluciones, etc.

Palabras Clave: Números triangulares, fracciones continuas, ecuación de Pell, polinomio de Taylor.

Abstract

Among triangular numbers, some are squares in disguise. We uncover them, and in so doing we come across some interesting people such as continuous fractions, Pell's equation and aproximation of solutions.

Keywords: Triangular number, continuous fraction, Pell's equation, Taylor polynomial.

1. En el principio existía el triángulo

Un problema geométrico clásico, que trajo de cabeza a los antiguos griegos (esos "colegas de otras universidades", como les llamó Hardy), es el de la cuadratura del círculo, que no consiste en dibujar un círculo cuadrado, sino en construir un cuadrado cuya área sea la misma que la de un círculo dado, y hacerlo usando sólo la regla y el compás. La imposibilidad de cuadrar el círculo no se logró demostrar hasta el siglo XIX, cuando se probó que el número π es trascendente.

La cuadratura del triángulo, por el contrario, es muy sencilla de realizar, y puede verse como un agradable entretenimiento. Aquí vamos a abordar un problema aritmético en lugar de uno geométrico: qué números triangulares resultan ser también números cuadrados.

Recordemos que los números triangulares son los que se obtienen sumando varios enteros consecutivos a partir de 1. La sucesión de los números triangulares comienza así:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$$

El n-simo número triangular es

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Y el cuadrado estaba junto a él. Y el cuadrado era él.

Entre los números triangulares destacan algunos que tienen características peculiares. Así, reconocemos al 6 y al 28, que son números perfectos (iguales a la suma de sus divisores); de hecho, todos los números perfectos pares son triangulares. También observamos algunos cuadrados, y en ellos nos vamos a centrar: ¿Qué cuadrados aparecen entre los números triangulares? ¿cuántos son y qué posiciones ocupan?

Por mera inspección de los primeros términos de la sucesión, descubrimos dos cuadrados: el 1 y el 36, que ocupan la primera posición y la octava. Si tenemos un poco de paciencia, encontramos otro en el cuadragésimo nono lugar: 1225 es el cuadrado de 35. Más adelante está 41616, el cuadrado de 204 (en el puesto 288). ¿Hasta dónde seguirán apareciendo? ¿Hay alguna pauta? Parece que la manera ingenua de abordar el problema no nos lleva muy lejos, y tendremos que usar herramientas más agudas.

Para empezar, escribimos nuestro objetivo en forma de ecuación. Que un número triangular sea al mismo tiempo un cuadrado se puede poner como

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

donde n y m han de ser números enteros positivos (desconocidos, de momento). Avanzamos un paso observando que los dos números n y $n+1$ tienen paridades distintas y no tienen divisores comunes, de donde se deduce que el número buscado se escribirá como un producto de dos factores de una de estas dos formas: $n \cdot \frac{n+1}{2}$ o $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$ y en ambos casos los dos factores son primos entre sí.

Esa observación es clave porque, como el producto es un cuadrado, cada factor ha de serlo (como consecuencia de que no hay divisores comunes), lo que nos permite concluir que en el primer caso habrá unos números x e y tales que n es el cuadrado de x, y $n+1$ es el doble del cuadrado de y, de donde se sigue que

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

En el segundo caso, se tiene algo parecido, con los papeles de n y $n+1$ cambiados: $n+1$ es el cuadrado de x en tanto que n es el doble del cuadrado de y (y en consecuencia

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Recogiendo los dos caso en uno solo, escribimos

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

No es difícil hallar algunas soluciones "pequeñas"de la nueva ecuación por tanteo, probando con números bajos a ver si el doble de su cuadrado se diferencia de otro cuadrado en una unidad (por exceso o por defecto). Así, encontramos las soluciones

$$x = 1, y = 1; x = 3, y = 2; x = 7, y = 5; x = 17, y = 12; \ldots$$

cada una de las cuales nos facilitan un número triangular cuadrado: por ejemplo, la solución $x = 7, y = 5$ de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

corresponde a $n = x^2 = 49$, y el correspondiente número triangular es $\frac{n(n+1)}{2} = 49 \cdot 25$, que es el cuadrado de 35; y la solución $x = 17, y = 12$ de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

corresponde a $n = 2y^2 = 288$ y nos proporciona el número triangular (y cuadrado) $289 \cdot \frac{288}{2} = 41616$, que es el cuadrado de $204 = 17 \cdot 12$.

No es difícil caer en la cuenta de que conociendo una solución x, y de la ecuación, se obtiene otra haciendo $x' = x + 2y, y' = x + y$. Así, podemos generar una sucesión de soluciones

$$(1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12), (41, 29), (99, 70), \ldots$$

que a su vez nos proporciona una sucesión de números triangulares cuadrados;

$$1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, \ldots$$

Ya podemos contestar una de las preguntas que nos planteábamos: ¿cuántos números triangulares hay que sean también cuadrados? La respuesta es una cantidad infinita (y además sabemos generarlos y determinar el lugar que ocupan en la lista).

3. Una dosis de irracionalidad: aparece $\sqrt{2}$. Y se acabó

La ecuación

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

que hemos resuelto "a ojo", es una ecuación diofántica de un tipo bien estudiado, tanto que tiene nombre: se la conoce como *ecuación de Pell*, y se resuelve fácilmente mediante el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{2}$. Los convergentes de ese desarrollo proporcionan las soluciones de la ecuación. Como ese desarrollo es

$$[1; 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$$

los convergentes son las fracciones

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots$$

que obtuvimos antes, cuando resolvimos la ecuación de modo elemental. Ahora podemos asegurar que no hay otras soluciones. La cuestión de los números triangulares cuadrados (o la cuadratura aritmética del triángulo) queda completamente resuelta.

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se expresa geométricamente mediante la inconmensurabilidad del lado de un cuadrado y su diagonal; dicho de otra manera: la imposibilidad de construir un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados tengan medidas enteras, puesto que eso supondría dar soluciones enteras a la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = 0$$

Se comprende que las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

proporcionan medidas para los lados de unos triángulos isósceles que son "casi"rectángulos: así, el triángulo de lados $12, 12$ y 17 es ligeramente obtusángulo, y el de lados $29, 29$ y 41 es levemente acutángulo; hace falta mucha agudeza para detectar la diferencia . Estimando el resto en la aproximación dada por el primer polinomio de Taylor, podemos concluir que la diferencia (en radianes) entre el ángulo que forman los dos "cuasi-catetos "(de longitud l) y un recto es casi exactamente igual a $\frac{1}{l^2}$, lo que supone aproximadamente 4 minutos de arco para el último triángulo (no digamos en triángulos de lados 408, 408 y 577, o 5741, 5741 y 8119). Desde el punto de vista del dibujo técnico estaríamos ante un triángulo rectángulo a todos los efectos.

Partiendo de la pregunta acerca de los números que son a la vez cuadrados y triangulares, hemos realizado una excursión que nos ha llevado desde algunos problemas clásicos de los antiguos geómetras griegos a los polinomios de Taylor, pasando por ecuaciones diofánticas y fracciones continuas, en una pálida muestra de la variedad e interconexión de la Matemática.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez Esteban
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: ETSI de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.