

Investigación

Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana

Fractional Calculus and newtonian dynamics

Antón Lombardero Ozores

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 077–106, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 Dic'13; Aceptación: 10 Ene'14

1 de abril de 2014

Resumen

El Cálculo Fraccionario abre la posibilidad de extender los conceptos de derivada e integral a órdenes no enteros. En este contexto, cabe plantearse una generalización de la segunda Ley de Newton en la que se sustituya la derivada segunda interviniente por otra de orden α ($1,5 < \alpha \leq 2$). En este trabajo se estudian algunos sistemas clásicos (péndulo, proyectil y resorte) bajo este nuevo enfoque.

Palabras Clave: cálculo fraccionario, derivada fraccionaria, integral fraccionaria, ecuaciones diferenciales fraccionarias, péndulo, proyectil, resorte.

Abstract

Fractional Calculus provides an opportunity to spread the concepts of derivative and integral to not integer orders. In this context, we may consider a generalization of Newton's second Law in which the second derivative is replaced by other of α order ($1,5 < \alpha \leq 2$). In this research some classical systems (pendulum, projectile and spring) are discussed under this new approach.

Keywords: fractional calculus, fractional derivative, fractional integral, fractional differential equations, pendulum, projectile, spring.

1. Introducción

Desde el punto de vista matemático, el estudio del movimiento de un cuerpo a partir de las fuerzas que actúan sobre él se reduce a aplicar la ecuación fundamental de Newton $F = ma$, teniendo en cuenta que F es la fuerza resultante o suma vectorial de las fuerzas que intervienen sobre el cuerpo. Se trata, en suma, de resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$F = mx'', \tag{1.1}$$

donde x es la función que determina el movimiento.

Puede ser interesante, como experimento físico-matemático, seguir este proceso desde una perspectiva más amplia, que utilice como punto de partida una versión generalizada de la segunda Ley de Newton. Esto es lo que se pretende con este trabajo, y para ello haremos uso del Cálculo Fraccionario.

El Cálculo Fraccionario es una activa rama del Análisis Matemático que nace de una idea muy básica: de la misma forma que una función se puede derivar o integrar un número entero de veces, ¿podemos hallar su derivada de orden $1/2$? ¿Y su integral π -ésima? Surgen así operadores diferenciales e integrales de orden racional, real e incluso complejo. Con estos cimientos se puede construir un nuevo edificio del Cálculo, que, sin perder de vista al Cálculo tradicional (al que no sustituye, sino que extiende), posee sus propios conceptos *fraccionarios*. Un ejemplo, entre otros muchos, es el de ecuación diferencial fraccionaria.

Como en cualquier área matemática viva, el interés del Cálculo Fraccionario no se restringe al plano teórico, siendo este notable. Los campos de aplicación práctica se incrementan año tras año. En particular, los modelos de derivadas fraccionarias proporcionan mejores representaciones que los modelos tradicionales en aquellos materiales con amortiguación interna.

Volviendo a la segunda Ley de Newton (1.1), autores como Ebaid [4] proponen una generalización fraccionaria de la misma en la forma

$$F = mD^\alpha x \quad (1.2)$$

en la que $D^\alpha x$ se entiende como la derivada de orden α de x ($1,5 < \alpha \leq 2$). A partir de la ecuación alternativa (1.2), seguiremos el procedimiento habitual para el estudio de la dinámica de algunos sistemas físicos clásicos: péndulo, proyectil y resorte. Este nuevo enfoque fraccionario de la dinámica conduce a resultados, ecuaciones e interpretaciones diferentes a las tradicionales, que pueden resultar de interés en el futuro.

2. Historia

El Cálculo Fraccionario (CF) puede ser considerado una disciplina tanto *antigua* como *nueva*. *Antigua* porque, de la mano del propio Leibnitz, ya da sus primeros pasos a finales del s. XVII, casi paralelamente al nacimiento del Análisis. *Nueva*, porque no es hasta la década de los setenta del pasado siglo cuando ha sido objeto intensivo de conferencias especializadas, tratados y artículos académicos.

Hasta tiempos recientes, el CF tenía reputación de teoría matemática sin aplicaciones, de un carácter un tanto esotérico. Pero en las últimas décadas se ha producido una explosión de la actividad investigadora en este campo, debido a que encuentra aplicación en las más diversas ramas científicas.

Sin embargo, fueron los padres del Análisis Matemático quienes dieron los primeros pasos. Quizá estimulados por la propia notación de Leibnitz para la derivada de orden n ,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (2.1)$$

son éste y L'Hopital quienes, en una correspondencia del año 1695, se plantean por primera vez el sustituir n por el valor no entero $1/2$.

La denominación adoptada, Cálculo Fraccionario, perdura por razones históricas sin ser la más adecuada: las derivadas no sólo serán racionales, sino también reales, e incluso complejas, por lo que una designación más apropiada sería la de *cálculo de orden arbitrario*.

Tras los primeros tanteos de Leibnitz y L'Hopital, el CF siguió siendo abordado por algunas de las mentes matemáticas más privilegiadas. Euler (s. XVIII), Laplace, Lacroix, Fourier,

Riemann (s. XIX), Hardy y Littlewood (s. XX) se ocuparon del tema, pero la gran cantidad de problemas abiertos en esas épocas en el Análisis Matemático ordinario quizás fue lo que llevó a que no profundizaran en este tipo de planteamientos alternativos.

Destacan, a principios del s. XIX, las figuras de Abel y Liouville, que propician el salto cualitativo desde la Prehistoria a la Historia del CF. Abel estaba interesado en el problema de la tautócrona, es decir, en determinar la curva tal que el tiempo requerido por una partícula en deslizarse por ella hasta su punto más bajo fuera independiente del punto desde el que se soltase la partícula. Abel llegó a que dicha curva $g(x)$ debía satisfacer la ecuación integral

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} g(t) dt = k \quad (2.2)$$

El término izquierdo de la ecuación es, excepto por la constante multiplicativa $1/\Gamma(\frac{1}{2})$ la integral fraccionaria de orden $1/2$ de la función $g(x)$. Con ello Abel establece la primera aplicación práctica del CF.

Por su parte, Liouville publica una serie de artículos en los que lleva a cabo el primer gran intento de definir formalmente derivadas e integrales fraccionarias. Dichos trabajos hacen de Liouville el artífice de las bases fundamentales del CF. Su punto de partida consistió en extender la fórmula de la derivada de orden entero de una función exponencial a derivadas de orden α arbitrarias:

$$D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax} \quad (2.3)$$

De los trabajos de Liouville y otros matemáticos posteriores surgen las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (1870-1884). Estas definiciones son, junto con la integral fraccionaria de Gröndwald-Letnikov (1867-1868), las generalizaciones más popularizadas del CF, una disciplina en la que hay casi tantas propuestas alternativas de derivada e integral fraccionaria como estudiosos del tema. Otras fórmulas integro-diferenciales fraccionarias son la integral fraccionaria de Weyl (1917), la integral fraccionaria de Riesz (1936), o la derivada fraccionaria de Caputo (1967).

Por fin, tras más de tres siglos en los que el CF se desarrolla como un campo puramente teórico casi exclusivo de los matemáticos, varios autores señalan recientemente que las derivadas e integrales no enteras son especialmente apropiadas para la modelización matemática de materiales como los viscoelásticos y otros. Se ha demostrado que los modelos de orden fraccionario, con sus propiedades de *no localidad* y *memoria*, son, en ciertos casos, más adecuados que los clásicos de orden entero en áreas como Teoría de Materiales, Teoría del Transporte, Electromagnetismo, Teoría de la Señal, Teoría del Caos o Fractales. Desde hace cuatro décadas empiezan a aparecer los primeros tratados consagrados exclusivamente al tema, y el flujo de artículos, libros, conferencias internacionales, paquetes de software y grupos de investigación dedicados al CF se refuerza año a año.

El primer libro dedicado netamente a la materia es publicado en 1974 por Oldham y Spanier [11]. Posteriormente, son destacables el libro enciclopédico de Samko, Kilbas y Marichev [16], las obras de Miller y Ross [10], Podlubny [14] y el más reciente de Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Entre los retos actuales de los investigadores se encuentra el de dar una mayor consistencia, claridad y rigor a la teoría matemática sobre operadores fraccionarios. Se hace necesaria una unificación de los muchos conceptos que ahora hay dispersos, estableciendo algunas definiciones *estándar*. Queda también abierto el encontrar interpretaciones físicas y/o geométricas a las derivadas e integrales fraccionarias, de la misma forma que las tienen las de orden entero. En esta cuestión hay propuestas interesantes, sobre las que destaca el estudio de Podlubny [15].

3. Operadores fraccionarios

Las derivadas e integrales fraccionarias son generalizaciones de las habituales que las incluyen como casos particulares. Sin embargo no hay un consenso generalizado sobre *qué* son la derivada y la integral fraccionaria de una función, y nos encontramos con una gran variedad de propuestas. Definimos en esta sección algunos de los operadores fraccionarios más extendidos, deteniéndonos especialmente en la integral y derivada de Riemann-Liouville. Estos operadores facilitan la extensión con continuidad al semiplano $\{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 0\}$ de las nociones clásicas de derivadas e integrales enteras.

3.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Para la simplificación del cálculo de la integral n -ésima de una función f , es bien conocida la llamada *Fórmula de Cauchy de la Integral Repetida*,

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \underbrace{\dots}_n \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

fácilmente demostrable por inducción. Dado que $(n-1)! = \Gamma(n) \forall n \in \mathbb{N}$, siendo $\Gamma(n)$ la función Gamma, observamos que el miembro derecho de (3.1) puede tener significado para valores no enteros de n . Por lo tanto es natural definir la integral fraccionaria de orden no entero como sigue.

Definición 1. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *integral fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) de f se define por

$$(I_a^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a). \quad (3.2)$$

Observación 2. En la notación de la integral, $I_a^\alpha f$, especificamos el límite inferior de integración a . Por debajo de ese límite, y en general fuera del intervalo $[a, b]$ consideraremos o bien que la función no existe o bien que toma valor constante 0.

Observación 3. La función Gamma Γ está definida en todo el plano complejo excepto en los enteros negativos. Por ello, la exigencia $\Re(\alpha) > 0$ de la definición garantiza la existencia en casi todo punto de $I_a^\alpha f$ para toda f perteneciente a $L_1(a, b)$.

Observación 4. De la propiedad $\Gamma(n) = (n-1)!$ de la función Gamma se desprende que la integral fraccionaria (3.2) coincide con la integral α -ésima (3.1) cuando $\alpha \in \mathbb{N}$.

Observación 5. La definición (3.2) se denomina en ocasiones integral fraccionaria *por la izquierda* de Riemann-Liouville. Una integral alternativa, que no utilizaremos en este trabajo por ser menos frecuente en la literatura, es la integral fraccionaria *por la derecha*:

$$(I_b^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b) \quad (3.3)$$

Esta misma variante se da en casi todos los operadores fraccionarios.

Observación 6. A la expresión (3.2) se puede llegar también, como se ve en Miller y Ross [10], mediante razonamientos totalmente diferentes, como son las ecuaciones diferenciales o el cálculo complejo.

A continuación enunciamos una serie de propiedades básicas de los operadores de integración fraccionarios de Riemann-Liouville, con las que se ponen de manifiesto las analogías y diferencias con los operadores *enteros* clásicos. Las demostraciones de los resultados se pueden encontrar en Samko, Kilbas y Marichev [16], Podlubny [14] y Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 7 (linealidad). Sean $f, g \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces

$$I_a^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda I_a^\alpha f + \mu I_a^\alpha g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Proposición 8 (semigrupo y conmutatividad). Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$). Entonces

$$I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^\beta I_a^\alpha f = I_a^{\alpha+\beta} f$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

Proposición 9. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x)$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

Observación 10. La Proposición 9 facilita extender la integral fraccionaria al caso $\alpha = 0$. Así, por I_a^0 denotaremos al operador identidad, i.e., $I_a^0 f(x) := f(x)$.

3.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Para la definición de la derivada fraccionaria de orden α , una posibilidad podría ser tomar la fórmula de la integral (3.2) y sustituir en ella α por $-\alpha$. Esta solución plantea dos problemas. El primero, muy evidente, es que para valores negativos de α la integral de (3.2) puede no ser convergente, además de que para los enteros negativos $\Gamma(\alpha)$ no está definida. En segundo lugar, debemos tener en cuenta que la derivación y la integración ordinarias no son operaciones recíprocas: es cierto que $[(d/dx)^n I_a^n f](x) = f(x)$, pero sin embargo $[I_a^n f^{(n)}](x) \neq f(x)$ ya que difieren en un polinomio de orden $n - 1$. La derivada entera es por tanto la inversa por la izquierda de la integral, y pretendemos que los operadores fraccionarios hereden esta propiedad: $D^\alpha I^\alpha = id$. Para ello, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se definirá como la derivada entera de una cierta integral fraccionaria.

Definición 11. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) de f se define, si existe¹, por

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ es la n -ésima derivada usual.

Observación 12. Al contrario que la integral fraccionaria, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville sí permite órdenes imaginarios puros. Cuando $\Re(\alpha) = 0$, la derivada de orden $\alpha = i\theta$ se expresa de la siguiente manera:

$$(D_a^{i\theta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}} dt \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x > a) \quad (3.5)$$

¹ En el Teorema 19 se dan condiciones suficientes de existencia.

Observación 13. Cuando α es un número natural, $\alpha \in \mathbb{N}$, se tiene que $n = \alpha + 1$ y la derivada fraccionaria coincide con la derivada usual:

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} \left(I_a^{(\alpha+1)-\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} (I_a f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x).$$

En particular D_a^0 será el operador identidad, i.e., $D_a^0 f(x) = f(x)$.

Observación 14. Algo llama poderosamente la atención en la definición (3.4): se especifica un límite inferior de integración a . La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, al igual que otras definiciones de derivada fraccionaria, es un **operador no local**. Contrariamente al caso entero, esta derivada queda definida por medio de una integral que depende de los valores que la función tome a lo largo de un intervalo. Solamente cuando α es natural la derivada fraccionaria se convierte en un operador local. Las derivadas de orden fraccionario contienen parcial o totalmente la historia temporal o el comportamiento espacial de la función, promediadas de una cierta forma. Esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en candidatas idóneas para la modelización de fenómenos con *memoria*, aquellos en los que lo que ocurre en un punto del espacio o en un instante de tiempo depende de un intervalo (espacial o temporal) que contiene al punto o al instante.

Al igual que en el caso entero, la derivada fraccionaria de una función $f(x)$ existe bajo unas condiciones más restrictivas que la correspondiente integral. No basta, como ocurría con $I_a^\alpha f$, con que $f(x)$ sea de L_1 . Antes de enunciar el resultado principal sobre existencia, necesitamos la noción de continuidad absoluta.

Definición 15. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *absolutamente continua* en $[a, b]$, $f \in AC[a, b]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, que verifique $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ se cumple que $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Observación 16. El espacio $AC[a, b]$ coincide con el espacio de primitivas de funciones Lebesgue integrables:

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = k + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (\varphi \in L(a, b))$$

y en consecuencia una función f absolutamente continua tiene derivada $f'(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto. Además, se deduce trivialmente que $k = f(a)$, con lo que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Observación 17. Ser absolutamente continua es una propiedad bastante fuerte: implica continuidad uniforme (y por tanto continuidad). Sin embargo es menos restrictiva que ser Lipschitziana: toda función de Lipschitz es absolutamente continua.

Observación 18. Denotamos por $AC^n[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) al espacio de funciones f en $[a, b]$ tales que $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$. Es claro que $AC^1[a, b] = AC[a, b]$ y que el espacio $AC^n[a, b]$ consiste en todas las funciones representables por una integral de Lebesgue n -múltiple sumada a un polinomio de orden $n - 1$.

Teorema 19. Sea $f \in AC^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando $\Re(\alpha) \geq 0$ y $[\Re(\alpha)] + 1 \leq n$. Entonces $D_a^\alpha f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$.

Demostración. Ver en Samko, Kilbas y Marichev [16]. □

Corolario 20. Si $f \in AC[a, b]$, entonces $D_a^{i\theta} f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y se representa en la forma (3.5).

Enumeramos ahora las propiedades más relevantes de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (en todas ellas suponemos que existen las derivadas fraccionarias implicadas). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville carece de algunas cualidades importantes, como la de *semigrupo* (ver Proposición 8), que sí cumple la integral. La relación $D_a^\alpha D_a^\beta f = D_a^{\alpha+\beta} f$ sólo es válida en casos muy específicos. Otra importante diferencia con el caso entero es que, en general, la derivada de una constante no nula no vale cero. Las demostraciones pueden encontrarse en Samko, Kilbas y Marichev [16] y Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 21 (linealidad). Sean $f, g \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$). Entonces

$$D_a^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda D_a^\alpha f + \mu D_a^\alpha g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Proposición 22. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). Entonces, tomando valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\Re(\alpha) \geq 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (D_a^\alpha f)(x) = f(x)$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

El siguiente resultado refleja que, análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Proposición 23. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$). Entonces las igualdades

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x) \quad (3.6)$$

$$(D_a^\alpha I_a^\beta f)(x) = (I_a^{\beta-\alpha} f)(x), \quad \text{si } \alpha \leq \beta \quad (3.7)$$

$$(D_a^\alpha I_a^\beta f)(x) = (D_a^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \text{si } \alpha \geq \beta \quad (3.8)$$

son ciertas en casi todo punto de $[a, b]$.

Sin embargo, también como en el caso entero, no es cierto el recíproco: la integral no es la inversa por la izquierda de la derivada. En consecuencia no se puede hablar estrictamente de operadores inversos.

Proposición 24. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces si $f_{n-\alpha} = I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a, b]$

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a), \quad (3.9)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$, es cierto en casi todo punto de $[a, b]$.

Corolario 25. En las condiciones de la Proposición 24, se verifica que

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) + c_0 x^{\alpha-1} + c_1 x^{\alpha-2} + \dots + c_{n-1} x^{\alpha-n} \quad (3.10)$$

con $c_i \in \mathbb{C} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Ya adelantábamos el hecho sorprendente de que la derivada fraccionaria no es nula para las funciones constantes. Esto se concluye del valor de la derivada de una potencia:

Proposición 26. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < \infty$), $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y $\beta > 0$. Se verifica que

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \quad (3.11)$$

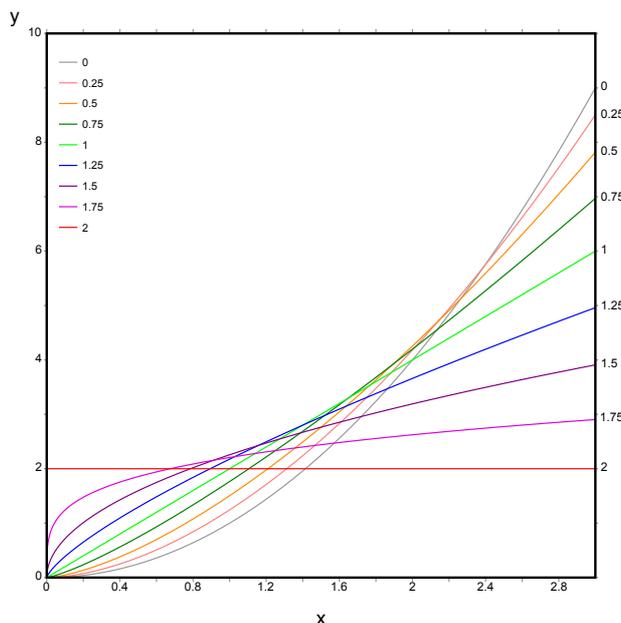


Figura 1. Evolución de las derivadas fraccionarias $D_0^\alpha x^2$, con α variando entre 0 (parábola) y 2 (función constante)

Observación 27. Como caso particular de (3.11), se tiene que cuando $\beta = \alpha - 1, \alpha - 2, \dots, \alpha - n$ ($n = [\Re(\alpha)] + 1$) la derivada de orden α -ésimo se anula, por lo que D_a^α anula las potencias $(x - a)^{\alpha-1}, (x - a)^{\alpha-2}, \dots, (x - a)^{\alpha-n}$.

Observación 28. Para el cálculo de la derivada de una función constante $f(x) = k$ hacemos tender β a 0 por la derecha en (3.11) e introducimos la constante multiplicativa k :

$$D_a^\alpha k = k \lim_{\beta \rightarrow 0} D_a^\alpha (x - a)^\beta = k \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} = \frac{k}{\Gamma(1 - \alpha) (x - a)^\alpha}$$

3.3. Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del Cálculo Fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccional. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del Cálculo Fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional. La definición que sigue representó pues un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelástico y otros.

Definición 29. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) y $f \in AC^n[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$), con $n = [\Re(\alpha)] + 1$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f se define por

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(x) &:= \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f \right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada usual de f .

Observación 30. Al contrario que en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, en la que primero se integra y luego se deriva, en la derivada de Caputo primero derivamos (n veces) y seguidamente integramos. En consecuencia, se trata de una definición más restrictiva, ya que requiere la integrabilidad de $f^{(n)}$. A pesar de ello, la hipótesis del Teorema 19 (que f pertenezca a $AC^n[a, b]$) sigue siendo una condición suficiente para garantizar la existencia de ${}^C D_a^\alpha f$ con cualquier orden α tal que $[\Re(\alpha)] + 1 \leq n$.

Las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria, en el sentido de que *respetan* los valores de las derivadas enteras usuales, concordando así entre ellas. Pero en el caso no entero no coinciden, como pone de manifiesto el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 31. Sea $\alpha \notin \mathbb{N}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$), $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $f \in L^1[a, b]$ una función para la que existen las derivadas fraccionarias de Caputo (${}^C D_a^\alpha f$) y Riemann-Liouville ($D_a^\alpha f$). Entonces se verifica la siguiente relación:

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(x) = \left(D_a^\alpha f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (x > a) \quad (3.13)$$

Observación 32. Por lo tanto, para órdenes de derivación no enteros, las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville coincidirán cuando se cumpla

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (3.14)$$

Observación 33. Como ejemplo de la no coincidencia de estos dos tipos de derivada fraccionaria, observemos las gráficas de $\left(D_0^{0.5} \cos\right)(x)$ y $\left({}^C D_0^{0.5} \cos\right)(x)$:

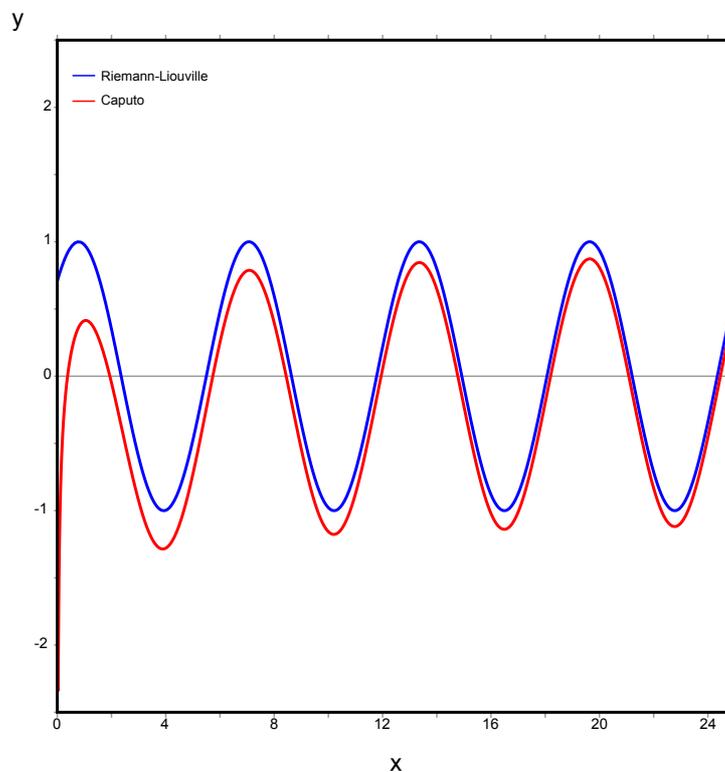


Figura 2. Comparativa de derivadas

La divergencia era de esperar ya que no se cumple la condición (3.14):

$$\cos(0) \neq 0.$$

La integral de Riemann-Liouville tampoco es la inversa por la izquierda de la derivada de Caputo. Pero en el *polinomio resto* obtenido al menos aparecen derivadas enteras, a diferencia de (3.9). Esta característica nos será de utilidad a la hora de resolver analíticamente algunas Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias:

Proposición 34. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces si $f \in AC^n[a, b]$ o $f \in C^n[a, b]$

$$\left(I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \tag{3.15}$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$.

Corolario 35. En las condiciones de la Proposición 34, se verifica que

$$\left(I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{3.16}$$

con $c_i \in \mathbb{C} \ \forall i = 1, 2, \dots, n - 1$.

La derivada de Caputo puede considerarse por tanto como una *regularización* de la derivada de Riemann-Liouville efectuada mediante la sustracción de un polinomio de Taylor, a través de la cual se obtienen ciertas ventajas importantes, como las citadas condiciones iniciales enteras, unos requisitos menos restrictivos para el cumplimiento de la propiedad de semigrupo ${}^C D_a^\alpha {}^C D_a^\beta f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f$, y la no menos significativa característica que enunciamos a continuación.

Proposición 36. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y sea $n = [\Re(\alpha)] + 1$. Se verifica que ${}^C D_a^\alpha (x-a)^k = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Esta propiedad, demostrada en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9], evidencia que el valor de la derivada fraccionaria de Caputo operada en una constante es nulo.

3.4. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

Al contrario que los operadores de Riemann-Liouville o Caputo, que obtienen sus definiciones de una integral repetida, el enfoque de Grünwald-Letnikov toma como punto de partida la derivada, en concreto de la siguiente fórmula para la derivada n -ésima, fácilmente deducible:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh). \tag{3.17}$$

Esta expresión puede ser generalizada para valores no enteros de n , teniendo en cuenta que para $\alpha > 0$ podemos interpretar $\binom{\alpha}{k}$ como

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)}. \tag{3.18}$$

Entonces, si consideramos una serie infinita se obtiene

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) \approx \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh).$$

Por otra parte, dado un h determinado, no tienen sentido términos de la serie para valores de k superiores a $\lceil \frac{x-a}{h} \rceil$, ya que en ese caso $f(x)$ tomaría valores fuera del intervalo de definición $[a, b]$. Se llega entonces a la definición que sigue.

Definición 37. Sea f una función acotada en $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov* de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) de f se define, si existe, por

$$f_a^\alpha(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{x-a}{h} \rceil} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad (x > a) \quad (3.19)$$

donde $\binom{\alpha}{k}$ significa (3.18).

Observación 38. La derivada Grünwald-Letnikov sólo está definida para órdenes de derivación reales.

Observación 39. En Podlubny [14] se demuestra que los operadores diferenciales de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov dan los mismos resultados para idénticos límites inferiores a y órdenes de integración reales $\alpha > 0$. Cabe preguntarse cuál utilizar ante un problema concreto. En la literatura relacionada con la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias se utiliza preferentemente la definición de Riemann-Liouville para la formulación de los problemas, y luego, a la hora de obtener la solución numérica, se pasa a la definición de Grünwald-Letnikov, muy apropiada para ser implementada en cálculos numéricos de tipo iterativo.

3.5. Otros operadores fraccionarios

Todos los operadores fraccionarios que hemos tratado se definían sobre un intervalo acotado de la recta real $[a, b]$. Las formas integrales de Riemann-Liouville y diferenciales de Caputo, con esta característica, serán las que utilizaremos en los cálculos a lo largo de este trabajo. Pero existen otros tipos de operadores, definidos sobre intervalos no acotados de la recta real, o incluso sobre el plano complejo. Otros están diseñados para funciones de varias variables.

El operador integral de Weil (también llamado de Liouville) es una extensión de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville al semieje no acotado $(-\infty, x]$:

$$(I_+^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (-\infty < x < \infty).$$

Esta forma, y su correspondiente forma diferencial, son especialmente adecuadas para realizar integración y derivación fraccionaria de funciones periódicas.

Pero hay una gran variedad de operadores fraccionarios. Otros registrados en la literatura especializada son el de Riesz, para derivadas e integrales fraccionarias de funciones de varias variables, Erdélyi-Kober, Hadamard, Bessel, Chen o Dzherbashyan.

4. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

De la misma forma que en el Cálculo ordinario, las ideas de derivación e integración fraccionarias conducen al concepto más avanzado de ecuación diferencial. Una relación involucrando uno o más operadores fraccionarios aplicados a una función desconocida f se conoce como ecuación diferencial fraccionaria² (EDF, de ahora en adelante). Gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene una correspondencia fraccionaria más o menos natural. Por

² En la obra pionera de Oldham y Spanier [11] aparecen con el curioso nombre de *ecuaciones diferenciales extraordinarias*, en oposición a las EDOs.

ejemplo, es conocido que una EDF de orden α necesita $[\Re(\alpha)] + 1$ condiciones iniciales para ser resuelta de manera única. Sin embargo surgen también notables diferencias, la primera de las cuales es el hecho de que una misma EDF tendrá diferentes significados según los operadores fraccionarios implicados sean los de Riemann-Liouville, Caputo u otros.

4.1. Definiciones y conceptos

Análogamente a la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, las EDF se dividen en ecuaciones lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables. Empezamos dando la definición más general para luego ir concretando casos más específicos.

Definición 40. Una ecuación diferencial fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) es una relación del tipo

$$(D_a^\alpha y)(x) = f \left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x) \right] \quad (4.1)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ es una función conocida y $D_a^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando $0 < \Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) < \dots < \Re(\alpha_{m-1}) < \Re(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Observación 41. Establecemos varias condiciones sobre los operadores $D_a^{\alpha_k}$ de la definición anterior. Han de ser operadores de tipo diferencial (en otro caso hablaríamos de ecuaciones integrales o integrodiferenciales). Además, se entiende que representan derivadas fraccionarias del mismo tipo (Riemann-Liouville, Caputo, etc.) y que tienen un límite inferior de integración a común.

Definición 42. Se denomina *solución* de la EDF anterior a cualquier función compleja de variable real $y(x)$ que verifique la igualdad (4.1).

Definición 43. Una ecuación diferencial fraccionaria lineal de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) es una relación del tipo

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x) y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x) (D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x) \quad (4.2)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) y $b(x)$ son funciones complejas conocidas y $D_a^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando $0 < \Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) < \dots < \Re(\alpha_{m-1}) < \Re(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Cuando se cumple que las funciones $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) y $b(x)$ son constantes se dice que la EDF lineal es *de coeficientes constantes*, y si se da que $b(x) = 0$ se denomina EDF lineal *homogénea*.

Problemas análogos a los de Cauchy y Dirichlet para ecuaciones diferenciales surgen también en el Cálculo Fraccionario. Aquí hemos de diferenciar explícitamente en función del tipo de operador fraccionario, ya que hay diferencias importantes en la formulación de las condiciones iniciales. Veremos los problemas de Cauchy para derivadas de Riemann-Liouville y Caputo.

Definición 44. Si utilizamos derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la EDF

$$(D_a^\alpha y)(x) = f \left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x) \right] \quad (4.3)$$

sujeta a las n condiciones iniciales

$$\left(D_a^{\alpha-k} y \right) (a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.4)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, decimos que estamos ante un *problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*.

Observación 45. En particular, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, el problema anterior se reduce al usual problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de orden n .

Observación 46. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, la n -ésima condición inicial,

$$(D_a^{\alpha-n}y)(a) = b_n$$

no verifica que $\alpha - n$ tenga parte real positiva. Debe ser interpretada por tanto como la integral fraccionaria

$$(I_a^{n-\alpha}y)(a) = b_n.$$

El planteamiento del problema anterior con derivadas de Riemann-Liouville obliga, para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, a establecer inicialmente unas condiciones iniciales de orden no entero (4.4). Como ya se ha mencionado en (3.3) es difícil asignar una significación física a este tipo de condiciones iniciales. Por el contrario, el mismo problema planteado con derivadas de Caputo se expresa en términos de valores iniciales de derivadas de orden entero.

Definición 47. Si utilizamos derivadas fraccionarias de Caputo y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la EDF

$$({}^C D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x), ({}^C D_a^{\alpha_1} y)(x), ({}^C D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, ({}^C D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)]$$

sujeta a las n condiciones iniciales

$$\left(\frac{d^k}{dx^k}y\right)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.5)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$, decimos que estamos ante un *problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo*.

Las funciones de Mittag-Leffler son de especial importancia en el Cálculo Fraccionario. Igual que las exponenciales surgen de forma natural como soluciones de EDOs lineales, la familia de funciones de Mittag-Leffler juega un papel análogo en la solución de EDFs. De hecho, la propia exponencial e^x es un caso particular de la familia Mittag-Leffler, la cual puede considerarse una generalización de las exponenciales.

Definición 48. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, la *función de Mittag-Leffler de dos parámetros* $E_{\alpha, \beta}$ es la función compleja de variable compleja definida por la serie

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Observación 49. Algunos casos particulares.

Exponencial:

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

Suma de una progresión geométrica:

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}$$

Coseno hiperbólico de una raíz:

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

La transformada de Laplace es una herramienta comúnmente utilizada en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. También lo será en el ámbito fraccionario, permitiendo simplificar un problema de EDFs en otro equivalente más sencillo de tipo algebraico.

Definición 50. Dada una función f , que esté definida para todos los valores $t \geq 0$, se denomina transformada de Laplace de f a la función F dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

siempre que exista la integral.

Observación 51. Para que dado un valor s exista la integral, debe cumplirse que $f(t)$ no crezca más rápidamente que e^{st} cuando $t \rightarrow \infty$. Concretamente, si f es continua a trozos y $|f(t)| \leq Me^{\nu t} \forall t \geq T > 0, M, \nu > 0$, entonces la transformada de Laplace de f existe para todo s con $\Re(s) > \nu$.

Observación 52. La transformada inversa de Laplace de F viene dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

donde la integración se realiza a lo largo de la línea vertical en el plano complejo $\Re(s) = c$, de forma que c sea mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$. \mathcal{L} y \mathcal{L}^{-1} son operadores inversos en el espacio cociente de funciones de dominio positivo dado por la relación *ser iguales en casi todo punto*.

Proposición 53. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) tales que existan los operadores fraccionarios $I_a^\alpha f$, $D_a^\alpha f$ y ${}^C D_a^\alpha f$. Las transformadas de Laplace de los operadores, de existir, toman los siguientes valores

$$\mathcal{L}\{I_a^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (\text{integral Riemann - Liouville}) \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0) \quad (\text{derivada Riemann - Liouville}) \tag{4.7}$$

$$\mathcal{L}\{{}^C D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{derivada Caputo}) \tag{4.8}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

Observación 54. Una vez más, el uso de derivadas fraccionarias de Caputo va a facilitar el proceso de resolución de problemas concretos. Al aplicar la transformada de Laplace a este operador podemos utilizar condiciones iniciales enteras clásicas, con clara interpretación física.

Observación 55. Si las condiciones iniciales son nulas el sumatorio se anula, y se obtiene la expresión simplificada

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$$

de forma que la derivada fraccionaria se puede expresar como

$$D_a^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}\}.$$

Este resultado proporciona una nueva expresión para la derivada fraccionaria, válido tanto para Riemann-Liouville como para Caputo siempre que las condiciones iniciales se anulen.

En la aplicación del método de la transformada de Laplace para solucionar EDFs, resulta esencial conocer la relación existente entre las funciones de Mittag-Leffler y la transformada:

Proposición 56. Dadas $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que para todo $t > 0$

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) \right\} (s) = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad \left(\Re(s) > |a|^{1/\alpha} \right) \quad (4.9)$$

donde $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z)$ es la derivada k -ésima de $E_{\alpha, \beta}$ en z . En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \right\} = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) \quad (4.10)$$

Una última herramienta útil para la búsqueda de las soluciones de una EDF es la convolución de dos funciones y su relación con la transformada de Laplace.

Definición 57. Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in L_1[0, \infty)$, se define su *convolución* $f * g$ como la nueva función

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(t) g(x-t) dt$$

Teorema 58 (de convolución). Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in L_1[0, \infty)$ tales que existan las respectivas transformadas de Laplace $F(s), G(s)$. Entonces

$$\mathcal{L} \{f * g\} = F(s) G(s) \quad (4.11)$$

o, de forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s) G(s)\} = (f * g)(x). \quad (4.12)$$

4.2. Teoremas de existencia y unicidad

A continuación daremos condiciones suficientes para la existencia de soluciones únicas en problemas tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville. En general se comprobará que las EDF pueden tener soluciones integrables, bajo condiciones que se asemejan a las del Teorema de Picard del Cálculo ordinario. Más concretamente, en este trabajo se analizan las soluciones sobre el espacio de funciones $L^\alpha(a, b)$. Los teoremas que siguen, cuyas demostraciones se pueden encontrar en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9], se fundamentan en la equivalencia de la existencia de soluciones con la resolución de ciertas ecuaciones integrales de Volterra y el uso del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Definición 59. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se define el espacio de funciones $L^\alpha(a, b)$ como

$$L^\alpha(a, b) := \{g \in L(a, b) / D_a^\alpha g \in L(a, b)\}$$

Definición 60. Dada una función $f[x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}] \in I \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que cumple la *condición de Lipschitz para las variables* y_0, y_1, \dots, y_{m-1} cuando existe una constante $K > 0$ no dependiente de x tal que para todo $x \in I$ y cualquier par de m -uplas $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}), (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}) \in B$ se cumple que

$$|f[x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}] - f[x, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}]| \leq \sum_{k=0}^{m-1} K |y_k - \bar{y}_k| \quad (4.13)$$

Teorema 61 (para Riemann-Liouville). Dado el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (4.3)-(4.4), si la función $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ cumple la condición de Lipschitz (4.13) para las variables $y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, y además se da que $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}] \in L_1(a, b)$ para cualquier $(y, y_1, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, se verifica que existe una solución única $y(x)$ al problema en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

Teorema 62 (para Riemann-Liouville, caso lineal). *Sea la EDF lineal (4.2) cumpliéndose que $b(x) \in L_1(a, b)$. Si $a_k(x) \in L_\infty(a, b)$ o si $a_k(x)$ están acotadas en $[a, b]$ (para todo $k = 0, 1, \dots, m-1$), entonces el siguiente problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)(D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x)$$

$$(D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

tiene una solución única $y(x)$ en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

4.3. Soluciones de casos particulares

En este apartado resolveremos explícitamente algunos problemas tipo Cauchy cuyas soluciones van a ser utilizadas después en el estudio fraccionario del péndulo y del proyectil. Se trata de sencillas ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden $\alpha \in (1, 2]$. Por simplicidad a la hora de traducir matemáticamente las condiciones iniciales, optamos de aquí en adelante por la derivada fraccionaria de Caputo, en conjunción con la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Como método para resolver las EDFs mostraremos dos caminos distintos: uno basado en (3.16) y en las propiedades elementales de los operadores fraccionarios; otro haciendo uso de la transformada de Laplace de forma semejante a la habitual para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.3.1. Método 1 (operadores fraccionarios)

Dada una función continua $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha \in (1, 2]$ vamos a resolver el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por

$$({}^C D_0^\alpha y)(x) = f(x) \quad (x > 0) \quad (4.14)$$

Como $1 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que necesitamos dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0:

$$y(0) = b_0 \quad (4.15)$$

$$y'(0) = b_1 \quad (4.16)$$

Si aplicamos el operador integral I_0^α sobre ambos miembros de la ecuación (4.14) obtenemos

$$(I_0^{\alpha C} D_0^\alpha y)(x) = (I_0^\alpha f)(x)$$

lo que, en virtud de (3.16), resulta en que la solución general de la EDF es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + (I_0^\alpha f)(x) \quad (4.17)$$

siendo c_1, c_2 constantes complejas dependientes de las condiciones iniciales.

Si introducimos la condición (4.15) en la solución (4.17) y, dado que $(I_0^\alpha f)(0) = 0$, llegamos a que $c_0 = b_0$.

Vamos a hacer uso de la segunda condición (4.16). Derivando (4.17) se obtiene

$$y'(x) = c_1 + (D_0^1 I_0^\alpha f)(x)$$

que en base a (3.7) vale

$$y'(x) = c_1 + \left(I_0^{\alpha-1} f\right)(x)$$

por lo que como $\left(I_0^{\alpha-1} f\right)(0) = 0$, se llega a $c_1 = b_1$.

Por tanto, la solución particular del problema (4.14)-(4.15)-(4.16) será:

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1 x + \left(I_0^\alpha f\right)(x) \\ &= b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

que como era de esperar haciendo $\alpha = 2$ coincide con la conocida solución

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

de la EDO

$$y''(x) = f(x)$$

con las mismas condiciones iniciales (4.15)-(4.16).

4.3.2. Método 2 (transformada de Laplace)

Vamos a tratar ahora una ecuación algo más complicada, que será una generalización de la conocida ecuación diferencial de oscilación $y''(x) = \lambda y(x) + f(x)$. Sustituyendo la segunda derivada por una derivada de Caputo de orden $\alpha \in (1, 2]$ obtenemos una EDF que denominaremos *ecuación de oscilación fraccionaria*. Para resolver el problema usaremos el método de la transformada de Laplace. Este sistema tiene la ventaja de que haciendo uso de la transformada podemos introducir las condiciones iniciales desde el primer momento, llegando directamente a la solución particular.

Dada una función continua $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in (1, 2]$ vamos a resolver el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por

$$\left({}^C D_0^\alpha y\right)(x) = \lambda y(x) + f(x) \quad (x > 0) \quad (4.19)$$

Como $1 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que necesitamos dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0:

$$y(0) = b_0 \quad (4.20)$$

$$y'(0) = b_1. \quad (4.21)$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación 4.19, para lo cual utilizamos el resultado (4.8) para el cálculo de la transformada de una derivada de Caputo, se llega a

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0) = \lambda Y(s) + F(s)$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$. Introduciendo las condiciones iniciales (4.20)-(4.21) y despejando $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s) = b_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} + b_1 \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} + \frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda}.$$

Se trata ahora de aplicar la transformada inversa de Laplace a los dos miembros de la ecuación, para recuperar $y(x)$. Utilizando la linealidad de \mathcal{L}^{-1} ,

$$y(x) = b_0 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \right) + b_1 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda} \right). \tag{4.22}$$

Calculemos por separado las tres transformadas inversas. El resultado (4.10) proporciona el valor de las dos primeras de forma directa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \right) = E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) \tag{4.23}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} \right) = x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) \tag{4.24}$$

Para el cálculo de $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right)$ utilizamos la propiedad (4.12),

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} \right) * \mathcal{L}^{-1} (F(s)) \tag{4.25}$$

con lo que reducimos el problema a la obtención de $\mathcal{L}^{-1} (1/(s^\alpha - \lambda))$. De nuevo volvemos a recurrir a (4.10), estableciendo los valores $k = 0$, $\beta = \alpha$ y $a = \lambda$, con lo que resulta

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} \right) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha),$$

que junto con (4.25) proporciona

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right) &= [x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha)] * f(x) \\ &= \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt \end{aligned} \tag{4.26}$$

En conclusión, (4.22), (4.23), (4.24) y (4.26) facilitan la solución particular al problema de Cauchy de partida:

$$y(x) = b_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) + b_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt \tag{4.27}$$

Observación 63. Las funciones $E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha)$, $x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha)$ forman, por tanto, un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente EDF homogénea

$$\left({}^C D_0^\alpha y \right) (x) - \lambda y(x) = 0$$

con $\alpha \in (1, 2]$.

Observación 64. El problema (4.14)-(4.15)-(4.16) estudiado con el método anterior es un caso particular, más sencillo, de este. Basta tomar $\lambda = 0$ en la ecuación (4.19). Veamos que la solución obtenida aquí es coherente con la anterior. Haciendo $\lambda = 0$ en la solución (4.27) tenemos

$$y(x) = b_0 E_{\alpha,1}(0) + b_1 x E_{\alpha,2}(0) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(0) f(t) dt$$

y teniendo en cuenta que las funciones de Mittag-Leffler verifican $E_{\alpha,1}(0) = E_{\alpha,2}(0) = 1$, $E_{\alpha,\alpha}(0) = 1/\Gamma(\alpha)$, llegamos a la solución (4.18) esperada:

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Observación 65. Gorenflo y Mainardi [5] han obtenido una solución alternativa equivalente para este problema (con $\lambda = -1$). En su trabajo, la solución se expresa en términos de derivadas e integrales de funciones de Mittag-Leffler de un solo parámetro $E_\alpha(z)$:

$$y(x) = b_0 E_\alpha(-x^\alpha) + b_1 \left(I_0^1 E_\alpha \right) (-x^\alpha) + \int_0^x \frac{d}{dt} E_\alpha(-t^\alpha) f(x-t) dt$$

5. Algunas aplicaciones dinámicas

5.1. Péndulo simple

El péndulo simple es un sistema físico constituido por una partícula de masa m que, suspendida de un punto fijo O por medio de una varilla de longitud L , puede oscilar en un plano vertical fijo por efecto de la fuerza de la gravedad. La posición de la partícula en el instante t se especifica mediante el ángulo θ que la varilla forma con la vertical en ese momento.

El estudio del péndulo constituye uno de los problemas clásicos de la dinámica elemental, y todas sus componentes están perfectamente determinadas desde el punto de vista matemático. Lo que se pretende con este apartado es realizar un análisis del movimiento pendular enfocado desde la óptica más extensa del Cálculo Fraccionario, y para ello se va a generalizar la idea clásica de aceleración (derivada segunda de la posición) a una derivada fraccionaria de Caputo de un orden comprendido entre 1.5 y 2.

Obviamente el péndulo simple es un sistema idealizado, al que para su análisis vamos a exigir una serie de hipótesis simplificativas:

- La varilla que sujeta a la partícula carece de masa, es inextensible y siempre permanece rígida.
- El movimiento de la partícula se traza en dos dimensiones; es decir, la partícula no traza una elipse sino un arco.
- El sistema no pierde energía por efecto de la resistencia del aire ni por fricción alguna.

5.1.1. Ecuación diferencial fraccionaria

Para determinar la función del movimiento del *péndulo fraccionario* empezamos buscando la ecuación diferencial fraccionaria que modeliza dicho movimiento. La ecuación buscada tiene por incógnita la función $\theta(t)$, que determina en radianes el ángulo de la varilla en el instante t . La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo el efecto de dos fuerzas: su propio peso (mg , donde $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ es la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra cerca de su superficie) y la fuerza de tensión T ejercida por la varilla. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, observamos que la componente normal de esta fuerza se ve contrarrestada por la fuerza de tensión de la varilla. Por lo tanto, la única fuerza actuante en lo que concierne al movimiento del sistema será la componente tangencial del peso, que tendrá signo negativo por ir siempre en dirección opuesta al movimiento:

$$F(t) = -mg \operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (5.1)$$

En el modelo clásico, se introduce esta fuerza en la segunda Ley de Newton,

$$F = ma, \quad (5.2)$$

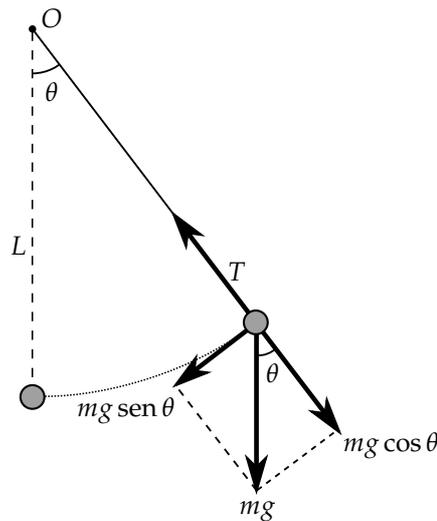


Figura 1. Fuerzas que intervienen en el péndulo

siendo a la aceleración tangencial del movimiento, y se llega así a la ecuación tradicional del péndulo. Aquí vamos a sustituir (5.2), en la que la aceleración $a(t)$ es la derivada segunda de la posición $r(t)$, por una fórmula alternativa más general haciendo uso de derivadas fraccionarias:

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha r \right) (t), \tag{5.3}$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$.

Nos interesa una ecuación en la variable *ángulo de la varilla* $\theta(t)$, y no en la variable *posición de la partícula* $r(t)$. Por ser un movimiento a lo largo de un arco de circunferencia de radio L tenemos que $r(t) = L\theta(t)$, con lo que

$$\left({}^C D_0^\alpha r \right) (t) = L \left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t) \tag{5.4}$$

donde $\left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t)$ será la aceleración angular.

Finalmente, de (5.1), (5.3) y (5.4) obtenemos

$$-mg \operatorname{sen}(\theta(t)) = mL \left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t)$$

que nos lleva a la ecuación diferencial del péndulo en su generalización fraccionaria:

$$\left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t) + \frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t)) = 0 \tag{5.5}$$

siendo $1,5 < \alpha \leq 2$, que se reduce a la ecuación clásica $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$ haciendo $\alpha = 2$.

5.1.2. Solución

La EDF (5.5) no tiene fácil solución, al no tratarse de una ecuación lineal debido al término no lineal $\operatorname{sen}(\theta(t))$. Ahora, recordemos que $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$ cuando θ es pequeño; en particular, θ y $\operatorname{sen}(\theta)$ coinciden en las dos primeras cifras decimales cuando $\theta < \pi/12$.

Por lo tanto, si nos restringimos a oscilaciones de pequeña amplitud (como las que describe, por ejemplo, el péndulo de un reloj), parece razonable simplificar nuestro modelo matemático

sustituyendo $\sin(\theta)$ por θ en la ecuación (5.5)³. La ecuación resultante se reduce a

$$\left({}^C D_0^\alpha \theta\right)(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0 \quad (5.6)$$

Esta EDF encaja dentro del tipo de las estudiadas en el Método de la transformada de Laplace. Si establecemos las condiciones iniciales del péndulo, es decir, ángulo de partida θ_0 y velocidad angular inicial v_0 ,

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (5.7)$$

$$\theta'(0) = v_0 \quad (5.8)$$

entonces utilizando la fórmula (4.27), y dado que en este caso $f = 0$, la solución particular, que determina la posición del péndulo en función del tiempo, es

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right) + v_0 t E_{\alpha,2} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right). \quad (5.9)$$

Por otra parte, en este sistema es habitual considerar nula la velocidad inicial de la partícula. Esto es, en origen el péndulo se *deja oscilar* sin ejercer sobre él ningún impulso. En esta situación la segunda condición inicial es

$$\theta'(0) = 0 \quad (5.10)$$

y la solución queda simplificada a

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right) = \theta_0 E_\alpha \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right). \quad (5.11)$$

En el caso particular $\alpha = 2$, teniendo en cuenta que

$$E_{2,1} \left(-\frac{g}{L} t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{g}{L} t^2\right)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)^{2k} = \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

se obtiene la solución tradicional del péndulo linealizado $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$ con condiciones iniciales (5.7)-(5.10):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

5.2. proyectil

Otro problema dinámico clásico es el del proyectil. Se trata de un sistema en el que una partícula es proyectada formando un determinado ángulo con la superficie de la Tierra. El proyectil, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, describirá una curva de tipo parabólico. Esta trayectoria está perfectamente determinada matemáticamente incluso para el caso, un poco más complicado, en el que consideremos otras fuerzas intervinientes en el sistema además de la gravedad, como son las de rozamiento. Áreas como la balística han estudiado en profundidad este tema. Aquí, siguiendo trabajos como los de Ebaid [4] u Otero [12], vamos a estudiar el movimiento de un proyectil desde el enfoque fraccionario. Para ello, tal y como hicimos con el péndulo, utilizaremos como hipótesis inicial una fórmula generalizada de la segunda Ley de Newton.

Vamos a partir de unas hipótesis que simplifican el problema, de forma que la única fuerza actuante sea la gravedad:

³ Esto es lo que se hace en el estudio de la dinámica del péndulo *clásico*, y es razonable para valores pequeños del ángulo debido a que la solución constante cero es estable. En el caso fraccionario, la estabilidad de la solución cero, aunque parece obvia, es todavía un problema abierto (ver [3]).

- El medio no ofrece oposición al avance del proyectil ni por resistencia del aire ni por ninguna otra fricción.
- No hay curvatura de la superficie terrestre, que es plana y sin rugosidades.
- El movimiento se traza dentro de un plano vertical fijo OXY .
- La fuerza de la gravedad es uniforme, y no disminuye con la altura del proyectil.
- No se tiene en cuenta la fuerza de Coriolis, debida al movimiento de rotación de la Tierra.

5.2.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

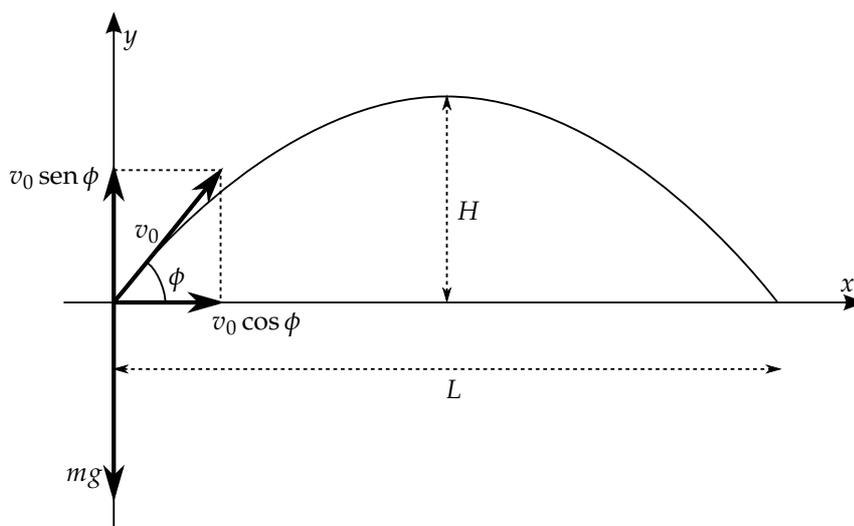


Figura 2. Fuerzas que intervienen en el proyectil

Supongamos que se lanza el proyectil, de masa m , con una velocidad inicial de módulo v_0 y formando un ángulo ϕ con la horizontal. Escogemos el plano OXY coincidiendo con el plano de la trayectoria, de forma que el origen O se corresponda con la posición inicial de la partícula. Podemos descomponer el movimiento en sus componentes horizontal y vertical, que serán independientes una de la otra. Como la única fuerza considerada, la fuerza gravitatoria, solo tiene componente vertical, la trayectoria será la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical. Es decir, si $x(t)$ e $y(t)$ son las respectivas componentes horizontal y vertical del movimiento, lo anterior junto con la segunda Ley de Newton $F = ma$ nos lleva a las ecuaciones diferenciales clásicas del proyectil:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0 \quad (5.12)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -mg \quad (5.13)$$

que con las condiciones iniciales comentadas,

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = v_0 \cos \phi \quad (5.14)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = v_0 \sin \phi \quad (5.15)$$

conducen a las conocidas soluciones del movimiento parabólico:

$$x(t) = v_0 t \cos \phi \quad (5.16)$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen} \phi - \frac{g}{2} t^2. \quad (5.17)$$

Para aproximarnos al problema desde el punto de vista fraccionario sustituimos, tal y como hicimos al estudiar el péndulo, la fórmula clásica de Newton

$$F = ma$$

por la generalización

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t), \quad (5.18)$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$. Así, aplicando el nuevo enfoque (5.18) a (5.12) y (5.13), y simplificando el factor común m , obtenemos las EDFs del *proyectil fraccionario*:

$$\left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) = 0 \quad (5.19)$$

$$\left({}^C D_0^\alpha y \right) (t) = -g \quad (5.20)$$

siendo $1,5 < \alpha \leq 2$.

5.2.2. Soluciones

Las ecuaciones (5.19) y (5.20) son sencillas EDFs lineales del tipo de las estudiadas en el Método 1 (operadores fraccionarios) de la página 92. Si fijamos las condiciones iniciales (5.14)-(5.15) y aplicamos la fórmula obtenida para este tipo de ecuaciones (4.18) llegamos a las soluciones

$$x(t) = v_0 t \cos \phi \quad (5.21)$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen} \phi - \frac{g t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (5.22)$$

donde hemos utilizado que $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = t^\alpha/\alpha$ y que $\alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$. Estas son las ecuaciones paramétricas que rigen el movimiento del proyectil en el plano OXY partiendo de (5.18) como principio físico. Como es natural, al fijar $\alpha = 2$ se convierten en las soluciones tradicionales (5.16)-(5.17).

Eliminando la variable tiempo y unificando las dos ecuaciones paramétricas se llega a la ecuación algebraica que relaciona x e y , que, al contrario que en el caso $\alpha = 2$, donde se trata de una parábola, es un *polinomio fraccionario* de grado α :

$$y = \frac{-g x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1) (v_0 \cos \phi)^\alpha} + x \tan \phi \quad (5.23)$$

A continuación se estudian, para los casos fraccionario y clásico, las cuatro magnitudes más relevantes en el análisis del movimiento de proyectiles: alcance, ángulo óptimo, altura máxima y tiempo de vuelo. Cada uno de estos valores dependerá de ciertos parámetros, e indicaremos estas relaciones con notación de dependencia funcional. Todos los resultados parten de la hipótesis de un lanzamiento de proyectil (5.23) con condiciones iniciales (5.14)-(5.15). Las demostraciones de los resultados que siguen pueden encontrarse en Ebaid [4].

5.2.3. Alcance

Definición 66. Se denomina *alcance* (L) a la distancia horizontal recorrida por el proyectil entre el instante del lanzamiento y la toma de contacto con la superficie. Es decir, al valor $x(t)$ en el tiempo t de impacto con la superficie.

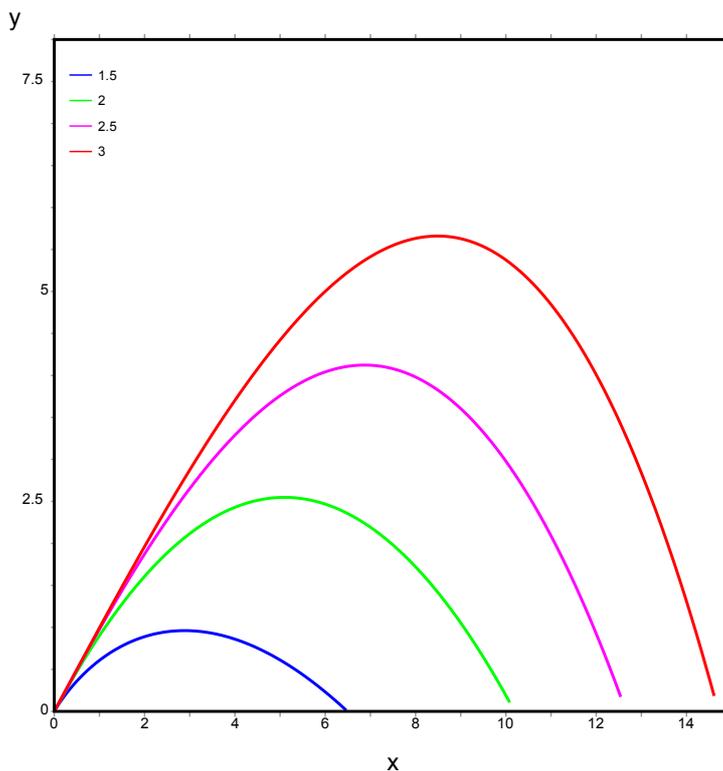


Figura 3. Comparación de trayectorias para diferentes valores de α ($\phi = \pi/4, v_0 = 10$)

Proposición 67. El alcance $L(\alpha, \phi, v_0)$ viene dado por

$$L(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\text{sen } \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos \phi$$

y coincide con el alcance clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$L(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0^2}{g} \text{sen } \phi \cos \phi$$

Proposición 68. Fijados α y v_0 , los alcances fraccionario y clásico coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto:

$$L(\alpha, \phi, v_0) = L(2, \phi, v_0) \iff \phi = \text{arc sen} \left(\frac{g \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right)$$

5.2.4. Ángulo óptimo

Definición 69. El *ángulo óptimo* (A) es el ángulo de lanzamiento (con respecto a la horizontal) con el que el proyectil consigue un mayor alcance.

Proposición 70. El ángulo óptimo $A(\alpha)$ viene dado por

$$A(\alpha) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right) \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq A(\alpha) < \frac{\pi}{2} \right)$$

y coincide con el ángulo óptimo clásico $\frac{\pi}{4}$ haciendo $\alpha = 2$.

Proposición 71. Fijados α y v_0 , el alcance máximo (que viene determinado por el ángulo óptimo) es

$$L_{max}(\alpha, v_0) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) v_0^\alpha}{g \sqrt{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y coincide con el alcance máximo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$L_{max}(2, v_0) = \frac{v_0^2}{g}.$$

5.2.5. Altura máxima

Definición 72. La altura máxima (H) es el valor de $y(t)$ en el punto más elevado de la trayectoria del proyectil.

Proposición 73. La altura máxima $H(\alpha, \phi, v_0)$ viene dada por

$$H(\alpha, \phi, v_0) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_0 \sin \phi)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

y coincide con la altura máxima clásica haciendo $\alpha = 2$:

$$H(2, \phi, v_0) = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi}{2g}.$$

Proposición 74. Fijados α y v_0 , las alturas máximas fraccionaria y clásica coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto

$$H(\alpha, \phi, v_0) = H(2, \phi, v_0) \iff \phi = \arcsen \left(\frac{g \left[(2 - \frac{2}{\alpha})^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$$

5.2.6. Tiempo de vuelo

Definición 75. El tiempo de vuelo (T) es el tiempo total en que el proyectil está en movimiento, desde su lanzamiento hasta que toma tierra.

Proposición 76. El tiempo de vuelo $T(\alpha, \phi, v_0)$ viene dado por

$$T(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) v_0 \sin \phi}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y coincide con el tiempo de vuelo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$T(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0 \sin \phi}{g}$$

5.3. Resorte o muelle

Ciertos dispositivos elásticos, como los muelles o las tiras de goma, tienen la particularidad de recuperar su longitud inicial después de ser estirados. Este comportamiento elástico se debe

a la acción de una fuerza recuperadora que se opone al estiramiento. Supongamos que disponemos de un muelle que se encuentra suspendido de un extremo, y cuya longitud es l_0 . Al colgar del otro extremo un cuerpo de masa m , el muelle se estira hasta alcanzar la longitud l_1 , quedando entonces inmóvil. En ese momento el sistema está en lo que se denomina la *posición de equilibrio*, y esa posición del cuerpo se toma como origen coordenado de un sistema unidimensional. Denotemos por $x(t)$ la distancia del cuerpo a la posición de equilibrio en el instante t , considerando $x(t) > 0$ cuando el muelle está estirado (el cuerpo se mueve hacia abajo) y $x(t) < 0$ cuando está comprimido (el cuerpo se mueve hacia arriba). En este caso sí que vamos a tener en cuenta la fuerza de rozamiento ejercida por el medio (aire) sobre la masa suspendida, pero fijamos las siguientes hipótesis de partida:

- El muelle carece de masa.
- El movimiento del sistema muelle-cuerpo es unidimensional, trazándose dentro de una recta vertical fija.

5.3.1. Ecuación diferencial fraccionaria

Vamos a analizar qué fuerzas intervienen en el sistema. De acuerdo con la Ley de Hooke, la fuerza recuperadora F_H que un resorte ejerce sobre la masa es directamente proporcional a la distancia en la que el resorte se ha estirado o comprimido. Puesto que ésta es igual al desplazamiento de la masa m respecto de la posición de equilibrio, se deduce que

$$F_H(t) = -kx(t). \quad (5.24)$$

La constante de proporcionalidad $k > 0$ se llama *constante elástica* del muelle, y depende de sus características físicas. Obsérvese que F_H y x tienen signos opuestos.

Además, un cuerpo que se mueve en el aire está sometido a fricciones que se traducen en la aparición de una fuerza que tiende a frenarlo. Suele admitirse que el rozamiento del aire, a velocidades no excesivamente altas, influye sobre los cuerpos oponiendo una fuerza proporcional y de sentido contrario a la velocidad del cuerpo, es decir

$$F_R(t) = -cv(t) = -cx'(t). \quad (5.25)$$

La constante de proporcionalidad $c > 0$ se denomina *constante de amortiguamiento* y, en el caso del aire, dependerá de las condiciones atmosféricas.

Podría pensarse que no estamos teniendo en cuenta el peso mg del cuerpo como fuerza interviniente en el sistema. Por el contrario, el peso se ve contrarrestado permanentemente por una fuerza de igual módulo y signo contrario: la tensión ejercida por el muelle, que, fijado en un punto, sujeta en todo momento el cuerpo. Por lo tanto ambas fuerzas se compensan mutuamente, y la fuerza neta resultante es nula.

Tenemos así que la masa soporta la fuerza $F = F_H + F_R$. Para enfocar el problema del resorte desde el punto de vista fraccionario sustituimos de nuevo la fórmula de la segunda ley de Newton $F = ma$ por la generalización fraccionaria

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t), \quad (5.26)$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$. De esta manera obtenemos la nueva EDF que gobierna la dinámica del muelle:

$$\begin{aligned} m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) &= F_H(t) + F_R(t) \Rightarrow \\ m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) + cx'(t) + kx(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

a la que podemos añadir unas condiciones iniciales que determinen la posición inicial de la masa,

$$x(0) = b_0, \quad (5.28)$$

y su velocidad inicial, o el impulso que se le transmite en el inicio del experimento,

$$x'(0) = b_1. \quad (5.29)$$

5.3.2. Soluciones

El problema de Cauchy dado por (5.27)-(5.28)-(5.29) no tiene fácil solución, y en la bibliografía existente no se resuelve completamente para estos parámetros particulares. Kilbas, Srivastava y Trujillo [9] han encontrado dos soluciones particulares de la ecuación (5.27):

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+1+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} + \\ & + \frac{c}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+2+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} + \\ & + \frac{c}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+1+\alpha+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} \end{aligned} \quad (5.31)$$

No hay garantía de que estas dos soluciones formen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación. El encontrarlas se convierte en una cuestión bastante complicada. Por ejemplo, si α es un racional p/q con $p < q$, necesitaríamos p soluciones para configurar un sistema fundamental. Para un α real no racional, el proceso se complica más.

6. Conclusiones

De la misma forma que las propiedades de no localidad y memoria de los operadores fraccionarios han demostrado ser de utilidad en áreas como la mecánica de fluidos, la teoría de viscoelasticidad, el procesado de imagen y otras muchas, es razonable conjeturar que en sistemas físicos de la mecánica clásica pueda, bajo ciertas circunstancias, ocurrir algo parecido. Un siguiente paso en la investigación consistiría en determinar, a nivel práctico, si existen condiciones (de fricción del medio, climatológicas, gravitatorias, etc.) para las que los modelos fraccionarios expuestos representen la realidad de forma más precisa que los modelos clásicos.

En un plano más teórico, el Cálculo Fraccionario, como rama matemática reciente que es, proporciona innumerables líneas futuras de investigación. En relación a los aspectos tratados en este artículo señalamos el problema abierto de determinar la estabilidad de la solución trivial 0 en el péndulo fraccionario, y sobre todo la búsqueda de la solución general para sencillas ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales, como la obtenida en el problema del resorte.

Referencias

- [1] AGRAWAL, O. P., *A new lagrangian and a new Lagrange Equation of Motion for fractionally damped systems*, Journal of Applied Mechanics, vol. 68, (2001) 339-341.
- [2] BALEANU, D., ASAD, J. H., PETRAS, I., *Fractional-order two-electric pendulum*, Romanian Reports in Physics, vol. 64(4), (2012) 907-914.
- [3] CHEN, F., NIETO, J. J., ZHOU, Y., *Global attractivity for nonlinear fractional differential equations*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13, (2012) 287-298.
- [4] EBAID, A., *Analysis of projectile motion in view of fractional calculus*, Applied Mathematical Modelling, 35, (2011) 1231-1239.
- [5] GORENFLO, R., MAINARDI, F., *Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order*, CISM courses and lectures, vol. 378, (1997) 223-276.
- [6] HAUBOLD, H. J., MATHAI, A. M., SAXENA, R. K., *Mittag-Leffler functions and their applications*, Journal of Applied Mathematics, vol. 2011, (2009).
- [7] HEYMANS, N., PODLUBNY, I., *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives*, Rheologica Acta, vol. 45(5), (2006).
- [8] KILBAS, A. A., *Some aspects of differential equations of fractional order*, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat., vol. 98(1), (2004) 27-38.
- [9] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., TRUJILLO, J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [10] MILLER, K. S., ROSS, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley and Sons, New York, 1993.
- [11] OLDHAM, K. B., SPANIER, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [12] OTERO, O., *Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (Trabajo de Fin de Máster)*, Tutor: Juan José Nieto Roig, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas (2012).
- [13] PIERANTOZZI, T., *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas (Tesis doctoral)*, Tutor: Vázquez, L., Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Matemáticas (2006).
- [14] PODLUBNY, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [15] PODLUBNY, I., *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fract. Cal. Appl. Anal, 5(4), (2002) 367- 386.
- [16] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Suiza, 1993.
- [17] SHIMA, H., *How far can Tarzan jump?*, European Journal of Physics, vol. 33(6) (2012) 1687-1696.
- [18] TENREIRO MACHADO, J., KIRYAKOVA, V., MAINARDI, F., *Recent history of fractional calculus*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 16(3), (2011) 1140-1153.
- [19] VÁZQUEZ MARTÍNEZ, L., *Una panorámica del cálculo fraccionario y sus aplicaciones*, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat., vol. 98(1), (2004) 17-25.

- [20] VELASCO CEBRIÁN, M. P., *Modelos diferenciales y funciones especiales en el ámbito del cálculo fraccionario (Trabajo de Fin de Máster)*, Tutores: Trujillo, J. J. (Universidad de La Laguna) y Vázquez, L. (Universidad Complutense de Madrid) (2008).

Sobre el autor:

Nombre: Antón Lombardero Ozores

Correo electrónico: antonlo@educastur.princast.es

Institución: Departamento de Análise Matemática, Universidade de Santiago de Compostela, España.

