

Juegos Matemáticos

Triángulos cuadrados y cruces cuadradas: algunos puzzles geométricos de H. E. Dudeney

Francisco Pérez Arribas

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Henry Ernest Dudeney (1857-1930) fue un autor inglés, conocido por los retos y acertijos matemáticos que publicó a lo largo de su vida en distintas revistas y que han sido recopilados posteriormente en distintos libros. Algunos de sus más de 200 retos tienen interesantes propiedades geométricas que pueden ser exploradas y mostradas con claridad, usando herramientas informáticas actuales. Este artículo presenta y analiza dos puzzles (disecciones) de gran atractivo geométrico: la transformación de un triángulo equilátero en un cuadrado, y la transformación de una curiosa cruz en un cuadrado.

Palabras Clave: Puzzles, Geometría dinámica, Disecciones

1. Introducción

Henry E. Dudeney fue un autor inglés aficionado a las matemáticas que produjo cientos de acertijos y puzzles matemáticos a lo largo de su vida. Dudeney no era matemático de profesión sino que era un funcionario de la Corona Británica, aunque poseía una cierta educación matemática y sobre todo una fuerte intuición relacionada con los campos de la matemática y de la geometría. En este último aspecto sus puzzles son realmente interesantes presentándose en este trabajo dos que resultan especialmente bellos y que se

englobarían dentro de las disecciones de figuras planas.

Mediante estas disecciones, cortes que se producen a una figura para después recolocar las piezas que estos cortes generan y formar así una nueva figura geométrica con igual área que la original, es posible transformar un triángulo equilátero en un cuadrado, y también una cruz con una forma muy característica en otro cuadrado. Matemáticamente existen numerosas soluciones para resolver estos problemas, pero cuando se observen las construcciones propuestas por Dudeney se verá que este autor poseía una gran intuición geométrica y sobre todo que las soluciones que se aportan poseen además la belleza de transformar una figura en otra mediante movimientos entre las piezas.

Como se ha comentado existen numerosas soluciones matemáticas a estos problemas basados en disecciones y no existen demostraciones rigurosas de los mismos, puesto que esta serie de problemas se proponían a modo de acertijos o pasatiempos. Las soluciones propuestas por Dudeney no eran geoméricamente precisas, si no que hay que intuir ciertas características geométricas de sus diseños para poder realizar la solución de forma matemáticamente precisa. Hoy en día es posible utilizar programas de geometría dinámica, en este caso se ha utilizado Geogebra, para realizar y sobre todo mostrar de forma efectiva como se realizan estos puzzles.

1.1 El acertijo del Mercero (The Haberdasher's Puzzle): un triángulo cuadrado

El enunciado original de este acertijo puede consultarse dentro del proyecto Gutenberg [1], o también en el libro de "Los acertijos de Canterbury" que puede encontrarse en español o consultarse en la red. Básicamente lo que indica el puzzle es que han de transformarse un paño con forma de triángulo equilátero mediante cortes rectilíneos de manera que se formen cuatro piezas y que éstas formen un cuadrado al ser colocadas de una determinada manera.

Aunque el objetivo de este artículo es presentar los acertijos y resolverlos con técnicas de geometría dinámica, también pueden proponerse estos enunciados correctos a estudiantes o investigadores. Decir antes que nada que el autor de este mismo artículo no fue capaz de resolverlo tras varios días de trabajo, lo cual despertó su curiosidad y por supuesto buscó la solución en Internet. Indicar que según los comentarios del propio Dudeney, este acertijo se propuso el 1902 en la revista Weekly Dispatch y también en 1905 a la Royal Institution of Mathematics. Después de cientos de envíos, de posibles

soluciones, únicamente una persona tuvo el mérito de resolverlo.



Figura 1. El acertijo del Mercero

La solución a este acertijo también puede verse en la referencia [1], apareciendo a continuación la construcción geométrica que propuso el propio Dudeney:

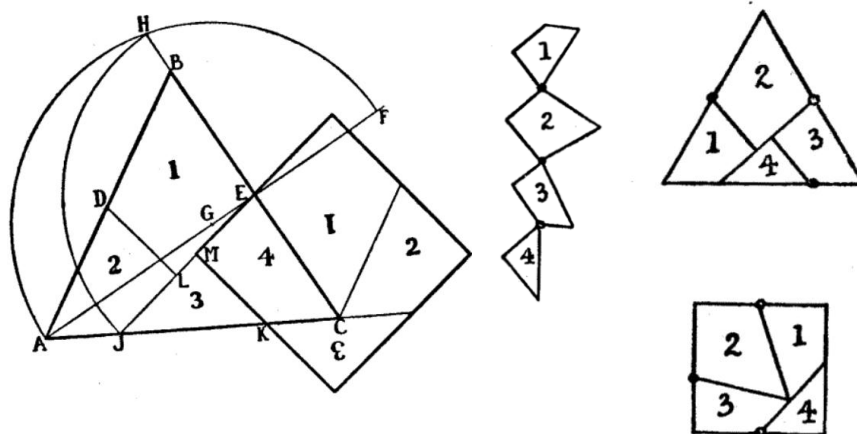


Figura 2. Solución de Dudeney al acertijo del Mercero

Indicar que la solución posee además el atractivo de que las piezas pueden unirse mediante bisagras de manera que mediante giros pueda transformarse el triángulo equilátero en el cuadrado. A raíz de este acertijo se

desarrollaron distintas disecciones de figuras geométricas denominadas "Hinged Dissections" [2], y que poseen esta propiedad.

Una solución más clara puede verse en la siguiente figura obtenida resolviendo el problema mediante Geogebra.

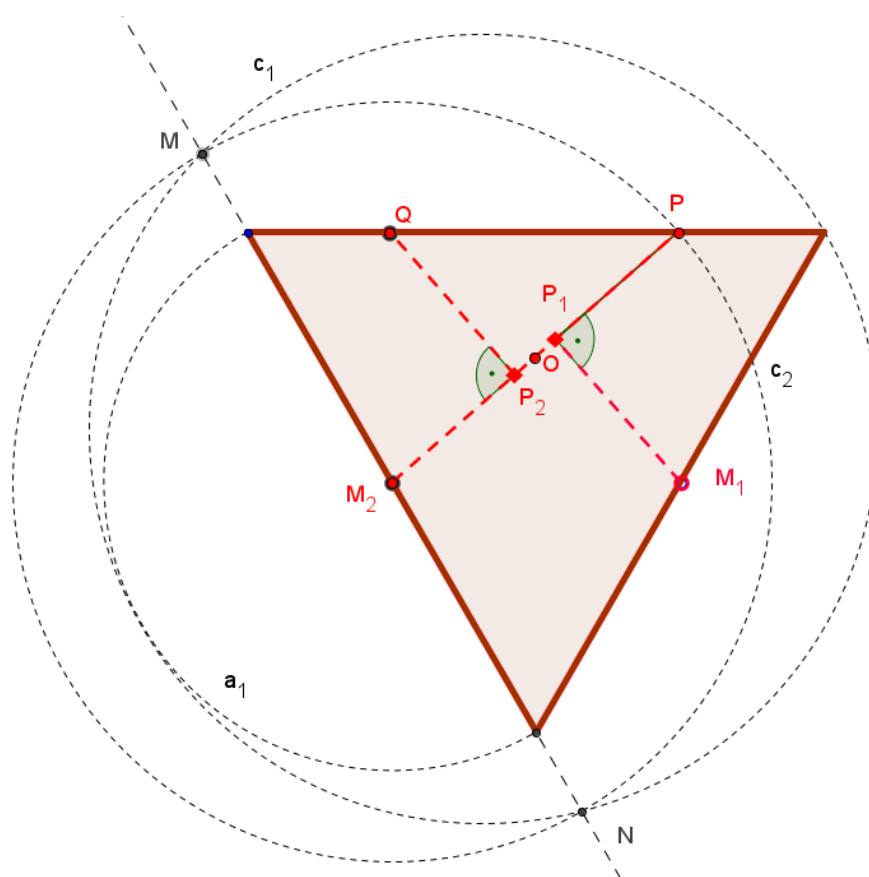


Figura 3. Solución con Geogebra

En esta Figura 3, se realiza un primer arco a_1 cuyo diámetro sea uno de los lados del triángulo equilátero. A continuación se dibuja la circunferencia c_1 que sea tangente dicho arco y pase por el vértice opuesto al mismo. Esta circunferencia corta al lado del triángulo que genera el primer arco, en dos puntos M y N . Dibujando una circunferencia c_2 que tenga por diámetro el segmento comprendido entre estos dos puntos, se obtiene un punto P en la intersección de la misma con uno de los lados del triángulo.

A continuación se une el punto P con el punto medio del lado opuesto M_2 , siendo el punto O el punto medio de este segmento. Se dibuja la

perpendicular desde el punto medio del otro lado M_1 al segmento anterior obteniéndose el punto P_1 como pie de la perpendicular. El simétrico de P_1 respecto del punto O , produce el punto P_2 .

Dibujando la perpendicular desde el punto P_2 al segmento PM_2 se obtiene en la intersección con uno de los lados del triángulo el punto Q . Los cortes al triángulo equilátero estarían definidos tal como se muestra en la Figura 3 por los segmentos PM_2 , M_1P_1 y finalmente por QP_2 . Indicar que desde el punto de vista práctico de cara a la construcción recortando por ejemplo una cartulina, las distancias entre los puntos P y el vértice más cercano, así como la distancia entre Q y el vértice más cercano, son aproximadamente la cuarta parte del lado del triángulo cada una.

Puede verse que la solución no es sencilla ni inmediata, pero que dice mucho de Dudeney en como fue concebida dado que se construye fácilmente con regla, compás y tijeras. El despliegue de las piezas unidas mediante rótulas desde la posición de triángulo equilátero hasta la posición de cuadrado puede verse en la Figura 4, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

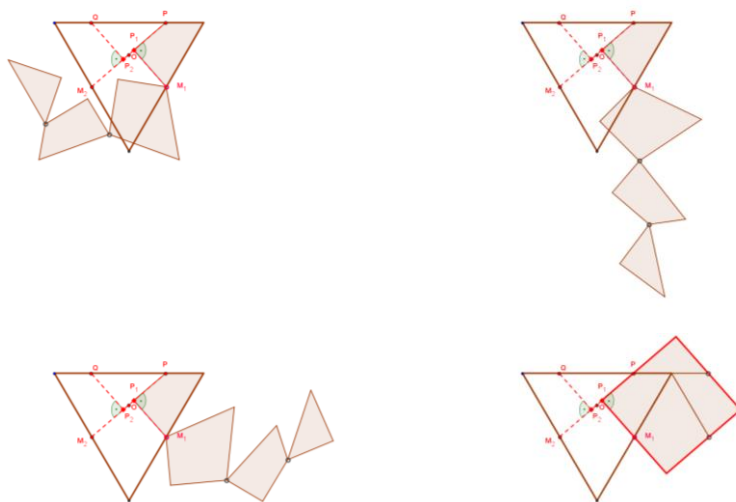


Figura 4. Transformación de triángulo a cuadrado

Es posible crear un rompecabezas físico a partir de la construcción geométrica construyendo las piezas en madera y uniéndolas mediante bisagras, Figura 5. En la referencia [3] donde puede verse el original de la figura, aparece también un vídeo para observar el movimiento a lo largo de la transformación.

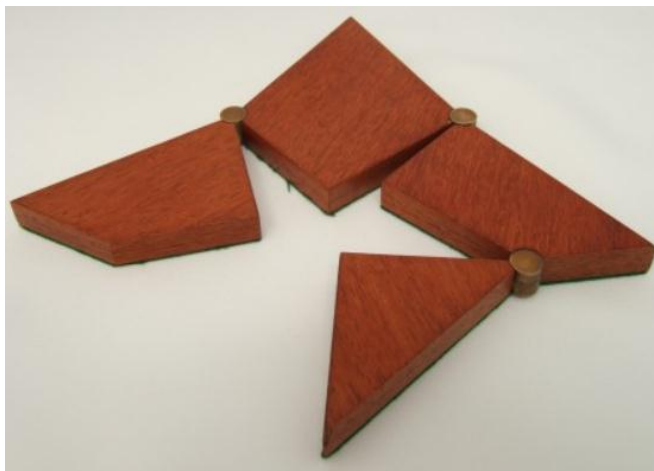


Figura 5. Rompecabezas físico del acertijo del Mercero

1.2 El acertijo de la priora (The Puzzle of the Prioress):

El enunciado original de este acertijo puede consultarse como en el caso anterior dentro del proyecto Guttenberg [1], o también en el libro de "Los acertijos de Canterbury" que puede encontrarse en español, o consultarse en la red. Lo que pide este reto es la transformación de una cruz con forma característica, en un cuadrado mediante una disección formada por dos cortes rectos que separen la cruz en cuatro piezas.

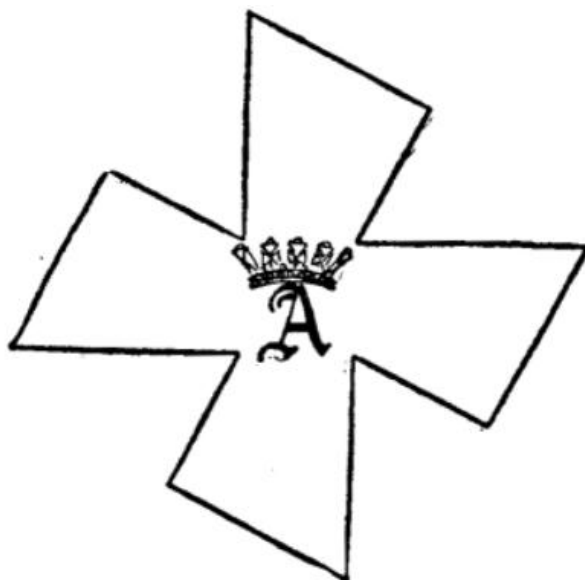


Figura 6. El acertijo de la priora

En este acertijo hay que observar bien la forma de la cruz y sobre todo la localización de los ángulos rectos en cada brazo. El autor de este artículo fue capaz de resolver este reto tras varios intentos. La solución propuesta por Dudeney aparece en la siguiente figura.

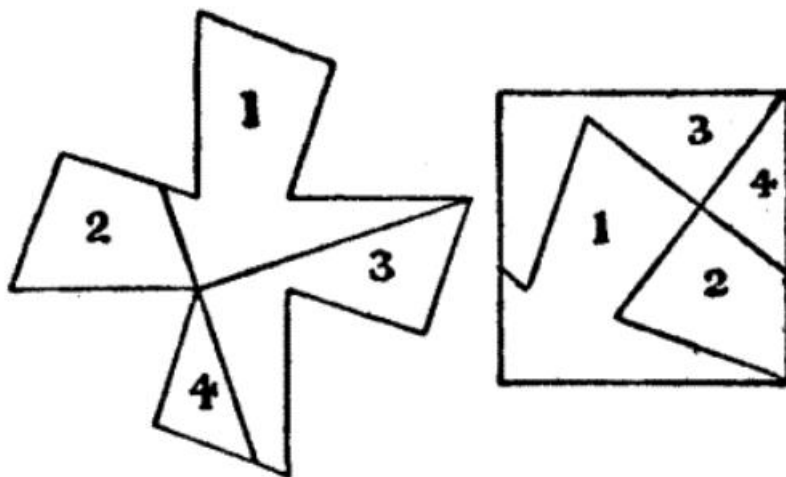


Figura 7. Solución de Dudeney al acertijo de la priora

La solución indicada no es demasiado clara, pero geoméricamente está formada por dos cortes perpendiculares (esto es importante), el primero y más claro entre dos vértices opuestos de la cruz, y el segundo perpendicular al anterior en uno de los vértices. La exploración de la solución con Geogebra permite descubrir aspectos interesantes del problema. La siguiente figura se observa de derecha a izquierda y de arriba a abajo.

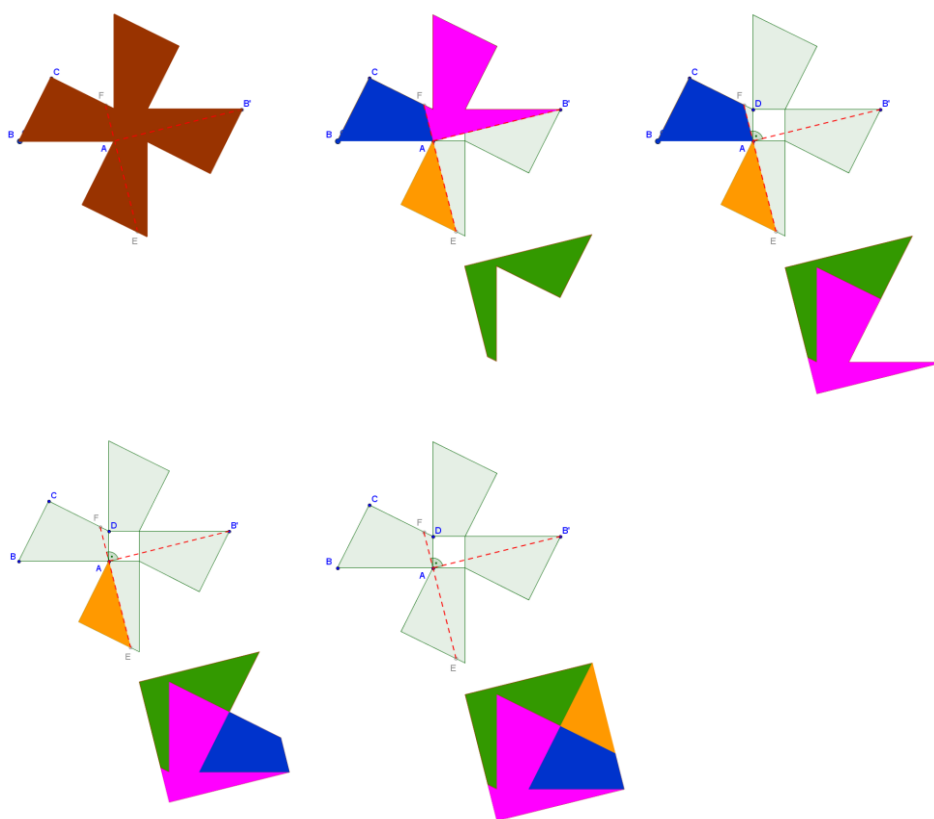


Figura 8. Solución con Geogebra al acertijo de la priora

De la solución con Geogebra se observa como se puede pasar del enunciado a la solución mediante una serie de traslaciones sucesivas, en el caso del puzzle anterior las transformaciones eran giros de las piezas. Es decir el problema tiene una dimensión dinámica muy interesante.

Trabajando sobre el enunciado propuesto por Dudeney, este enunciado en forma de cruz tiene solución, es decir es posible transformar la cruz en un cuadrado, cuando el vértice **C** de la Figura 8 está situado en la mediatriz del segmento **DB**, y además el ángulo en dicho vértice **C** ha de ser de 90° . Estos son dos condiciones geométricas interesantes, y que pueden ser independientes entre sí.

La segunda condición geométrica hace que el vértice **C** pueda desplazarse a lo largo del arco capaz (Semicircunferencia) del segmento **BD**. Cualquier punto a lo largo de este arco capaz va a producir una solución prácticamente correcta pero con una pequeña salvedad: si el punto **C** no se toma en la intersección de la mediatriz del segmento **BD** con el arco capaz, la solución

original va a transformar la cruz en un cuadrado al que curiosamente le faltará un pequeño cuadrado en su interior. Esto puede comprobarse en la siguiente figura realizada con Geogebra.

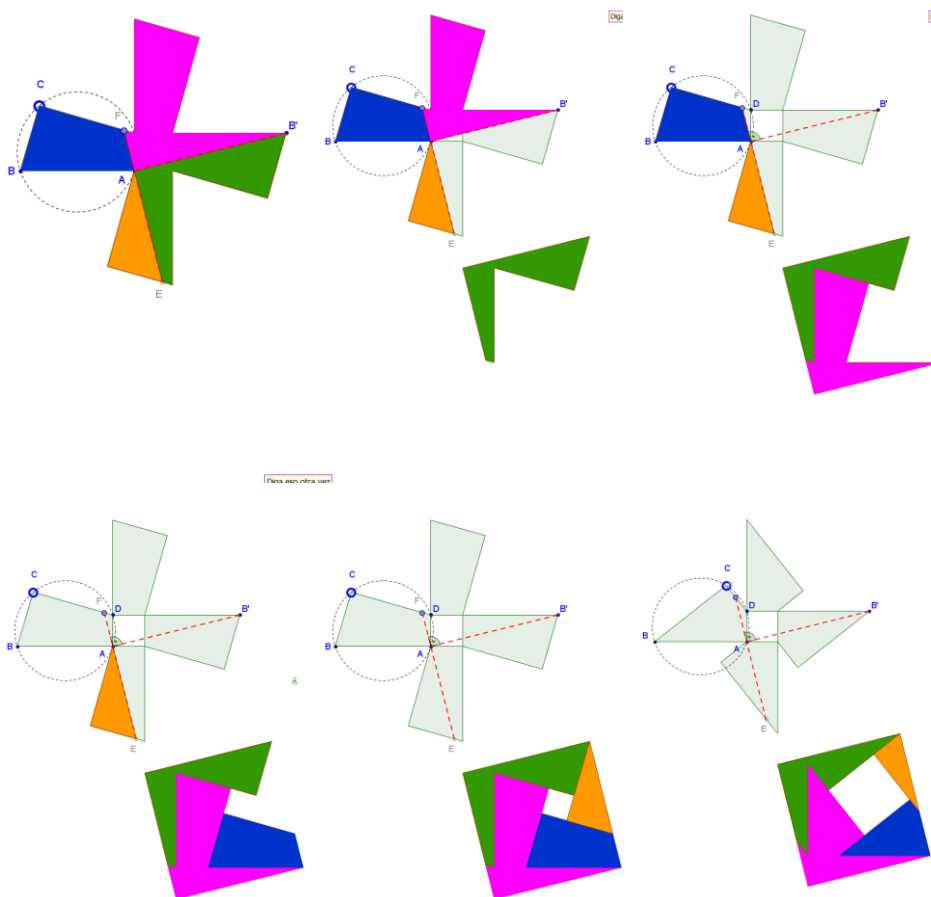


Figura 9. Variantes de la solución

Puede verse también en la última parte de la figura anterior como cambia el aspecto del agujero cuadrado interior al mover el vértice **C** de la Cruz a lo largo del arco capaz, manteniéndose en todo caso el valor del perímetro del cuadrado resultante. En el caso de este puzzle que también posee gran belleza geométrica, no se han encontrado referencias a la respecto.

Referencias

- [1] PROYECTO GUTENBERG: H. E. Dudeney. Los cuentos de Canterbury.
http://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm#Page_23

- [2] G. N. FREDERICKSON. Geometric Dissections Now Swing and Twist
http://www.imr.sandia.gov/13imr/presentations/Frederickson_presentation.pdf
- [3] JOHN BRYANT AND CHRIS SANGWIN. Dudeney's dissection
<http://web.mat.bham.ac.uk/C.J.Sangwin/howroundcom/jigsaw/index.html>

Sobre el autor:

Nombre: Francisco Pérez Arribas

Correo Electrónico: francisco.perez.arribas@gmail.com

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Navales. Profesor de Expresión Gráfica y de distintas materias relacionadas con el dibujo, el CAD y la Geometría. Aficionado a las matemáticas, le gusta rescatar del "olvido" distintos temas geométricos con técnicas actuales de diseño y visualización.