Historias de Matemáticas
El sólido hiperbólico agudo

Rosa María Herrera

Revista de Investigación

G.I.E. Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Torricelli consideró el cálculo del volumen de sólido hiperbólico agudo como el mejor logro en sus trabajos con 'indivisibles curvos'. Fue publicado en la *Opera geometrica*. Aquí se presenta como muestra del estilo de las demostraciones matemáticas (geométricas) que se efectuaban en el siglo XVII, y por su valor precursor del cálculo infinitesimal. Es un ejemplo significativo para aproximarse al pensamiento torricelliano.

Palabras Clave: Torricelli, Indivisibles, Sólido hiperbólico agudo

1. Un método geométrico nuevo

El interés del sólido hiperbólico agudo estriba posiblemente en que valida, de forma vistosa, la construcción de los indivisibles curvos. En ese sentido el método de cálculo de su volumen revela la intuición matemática de su autor, Evangelista Torricelli[1], su gran conocimiento de la geometría y su finura como matemático.

El artículo se estructura como sigue: en los primeros apartados se explica someramente la creación de los indivisibles, después en el siguiente epígrafe se describe el hiperboloide de Torricelli. Y en el último se resume la exposición del cálculo del volumen del sólido hiperbólico agudo, tal como lo

[1] Evangelista Torricelli (1608-1647), religioso, matemático y físico italiano de origen romañolo, fue discípulo de Galileo y su sucesor matemático de la corte florentina

dio Torricelli por definitivo[2], utilizando los dibujos que él mismo hizo y que aparecieron publicados con los cinco lemas y la demostración en el estilo riguroso en que él lo hizo.

2. Cavalieri: los indivisibles

El método de los *indivisibles* fue ideado por Cavalieri[3] para hallar áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos. Parece que buscaba un procedimiento más general y más refinado para abordar estos problemas que el usado regularmente en su tiempo. Este ingenioso acercamiento a estas tareas geométricas supuso un avance porque introdujo una nueva visión de este tipo de cálculos que eran conocidos desde la Antigüedad.

En el curso del tiempo esta nueva forma de abordar el problema daría paso al cálculo diferencial. Como herramienta de trabajo los indivisibles son más modestos, pero suponen un anticipo en la búsqueda de sistemas menos farragosos y más precisos de cálculo.

En esta línea, el método tuvo, en mi opinión, la riqueza de introducir un hábito distinto al de la exhaución (el método del 'agotamiento') con que se procedía para hallar áreas y volúmenes desde que los griegos pusieron en circulación esta técnica (es célebre el uso de Arquímedes de este procedimiento para calcular la longitud de una circunferencia inscribiendo en la misma polígonos regulares).

Cavalieri publicó sus trabajos con el título *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bolonia, 1635). En esta obra, de lectura bastante farragosa,[4] presenta al lector un procedimiento que consiste en descomponer los objetos que estudia en unos elementos esenciales que llama 'indivisibles'.

Aunque no dio una definición precisa de indivisible, se da por hecho que los indivisibles de rectas son puntos (de inviable operatividad). En las figuras planas los indivisibles son líneas, y la superficies son totalidades de líneas; de modo análogo, los sólidos están constituidos por una totalidad de indivisibles superficiales. Pero los indivisibles de Cavalieri aún no se parecían a la forma

[2] Los dibujos que ilustran los teoremas corresponden a los que figuran en la *Opera geométrica* realizados verosímilmente por el propio Torricelli

[3] Bonaventura Cavalieri (1598-1647) matemático italiano nacido en Milán, religioso alumno de Galileo Galilei (1564- 1642). Galileo también trabajó en indivisibles, pero no quedó nada escrito sobre ellos, no obstante la escritura de sus estudios sobre la caída de los graves dan idea de que usó un método de este tipo para escribir la fórmula.

[4] Esta afirmación la hago remitiéndome a lecturas solventes de historia de la matemática, pues no he pasado de echar un ojo a los textos originales, sin detenerme en la lectura más que ocasional y sin ninguna reflexión, en ese sentido la aseveración es tal vez un poco osada por mi parte.

que componían, las partes no se asemejaban a la totalidad en su concepción, quizá por eso no imaginó los indivisibles curvos en sólidos.

En el siglo XVII, las áreas y los volúmenes no venían normalmente dados por un número, sino mediante una comparación entre magnitudes geométricas. Así la técnica de los indivisibles era conforme a este estilo y dos figuras planas tienen el mismo área si sus indivisibles son iguales (el mismo razonamiento es válido para los volúmenes).

3. Torricelli: los indivisibles curvos

Torricelli, aplicado estudioso de los indivisibles en que tan denodadamente trabajaba su maestro y amigo, no tuvo problemas para imaginar como candidatos a indivisibles a los bordes de las figuras planas 'redondeadas' o curvilíneas que estudiaba o las superficies (matemáticas) de los sólidos, por eso ideó, aparentemente sin 'reparos' y sin los escrúpulos (de índole conceptual) de Cavalieri, los *indivisibles curvos*. Inventó estos 'elementos' no al estilo actual, es decir, no los definió formalmente, y en consecuencia no encontró necesario demostrar que estaban bien definidos, que tenían sentido y que su existencia estaba garantizada, no hay ningún teorema al respecto, los imaginó y los nombró. De este modo, los indivisibles curvos pasaron a existir una vez su autor comprobó que funcionaban fehacientemente, entonces los mostró al mundo.

Como la soltura y la habilidad con las herramientas y la confianza en la utilidad de las mismas requieren maduración, adquirió destreza y dominio sobre las características y las propiedades de los indivisibles al trabajar en distintos casos que le interesaban y así manejaba áreas y volúmenes de figuras curvas, hasta que dio con la mejor figura, la más 'bonita y sorprendente'; y en estudiar su hallazgo puso todo su talento y su ingenio de matemático fino y experimentado, este sólido le servía no solo como muestra de talento y lucimiento de matemático, sino que consolidaba el interés de sus indivisibles a la comunidad matemática de su tiempo y al mundo.

Denominó a este sólido *hiperbólico agudo.* Para construirlo hizo girar una hipérbola equilátera sobre la asíntota vertical tomada como eje Y, lo que como sólido suponía un volumen finito. Aquí quizá cabría detenerse un momento para que el lector, situándose en la mentalidad torricelliana, encontrase un punto clave y de llamada a su propia reflexión y a la revisión de determinados conceptos (y quizá también de ciertas concepciones): la asociación de una superficie infinita, con un volumen finito; y manejar también otras nociones próximas: ilimitado, limitado…

Torricelli parece que estaba convencido de que era la primera persona que

ISSN 2174-0410

se inventó un objeto geométrico de estas características, pero es muy probable que Fermat[5] ya hubiera rozado estos temas en sus trabajos con hipérbolas, y Roberval[6] también debió investigar en el asunto, pues le gustaba estar a la última y era un pensador inquieto, avanzado y polemista además de un buen matemático, ignoro si es posible rastrear antecedentes en periodos precedentes con visos de verosimilitud de algún cuerpo geométrico ilimitado, que no puede ser contenido en una esfera, y que tiene un volumen finito.

El sólido hiperbólico agudo de Torricelli se apoya sobre un cilindro de base. El matemático pensó el sólido como una secuencia de 'hojas' cilíndricas contenidas unas en el interior de otras paralelamente. Estos planos cilíndricos son los indivisibles curvos del sólido.

El siguiente paso sería demostrar que el cuerpo formado por el sólido hiperbólico agudo con un cilindro en la base es equivalente al cilindro ACOH (véase Fig. 8) y tienen el mismo volumen y en consecuencia además de ser infinitamente largo, el sólido hiperbólico agudo junto con el cilindro situado en su base tienen un volumen finito.

4. Construcción del sólido hiperbólico de Torricelli

En la Fig. 1 aparece esquematizada la idea de partida, en el siguiente epígrafe muestro la secuencia de presentación del teorema y los cinco lemas tal y como aparecen en la *Opera geométrica.* (La demostración se puede seguir en dicha obra.)

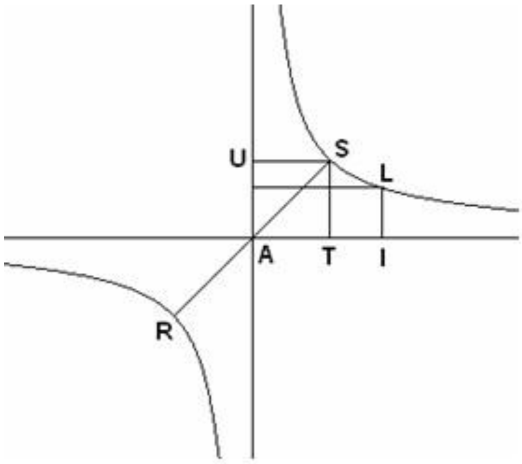


Figura 1. Hipérbola equilátera

[5] Pierre de Fermat (1601-1665) abogado y matemático francés
[6] Gilles P. de Roberval (1602-1675) religioso y matemático francés

Sea una hipérbola equilátera en la que se toma como eje las asíntotas, (escrita en forma de ecuación $y = a/x$) Conviene elegir $a = 1$ como valor de la constante. Entonces AI · IL = AT · TS. Sea S un punto tal que TS = SU; para cada punto L de la hipérbola se cumple que AI · IL = TS^2. Sea AS el semieje de la hipérbola, que es la diagonal del cuadrado de lados AT y TS, por el teorema de Pitágoras tenemos que $AS^2 = 2\ TS^2 = 2$ AI · IL.

Haciendo girar esta hipérbola en torno a la asíntota vertical (AB), véase Fig. 8, se origina un sólido de longitud infinita. Añadiendo un cilindro a la base de diámetro igual al eje de la hipérbola y de altura igual a la asíntota horizontal (AC), véase Fig. 8, Torricelli demuestra que el volumen de este cilindro así obtenido es igual al volumen del sólido obtenido al girar la hipérbola alrededor de la asíntota vertical.

Antes de presentar el trabajo a la comunidad matemática, Torricelli le comunicó a su amigo y maestro en el estudio de los indivisibles, Cavalieri, el hallazgo; quien según parece quedó encantado con el asunto -los historiadores coetáneos escribieron al respecto en un estilo muy laudatorio-. Además como paso previo a su publicación lo había expuesto en círculos matemáticos y Mersenne[7] ya lo conocía seguramente casi dos años antes de que saliera a la luz.

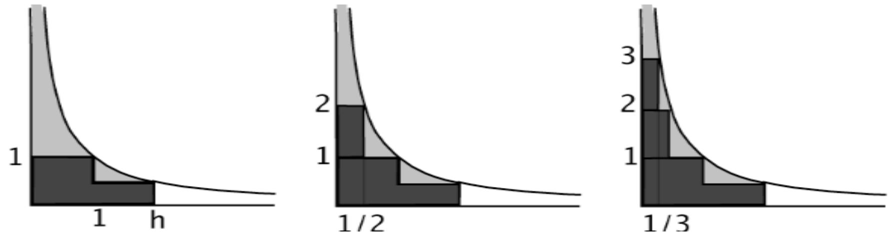


Figura 2. Imagine el lector un giro de una hipérbola alrededor de la asíntota vertical, dicho giro origina un sólido hiperbólico agudo, al que después Torricelli añadirá un cilindro de base. Detalle de la construcción de los indivisibles curvos.

[7] Marin Mersenne (1588-1648) clérigo y matemático francés

5. Volumen del sólido hiperbólico agudo

El sólido hiperbólico agudo estaba formado por un cilindro de base, más el sólido de revolución obtenido al hacer girar la hipérbola alrededor de la asíntota vertical. Torricelli se imaginó 'hojas' cilíndricas paralelas congruentes (unas dentro de otras), cada una de ellas un indivisible curvo. (Véase en la Fig. 8 NLIO). Para que no quedara ninguna duda de la paternidad de los indivisibles curvos en sólidos subrayó por escrito este hecho y afirmó contundente que su método con los indivisibles curvos no seguía el ejemplo de ningún predecesor.

> *[…] Il nostro metodo procederà con gli indivisibili curvi senza seguir l'esempio di alcun predecessore […]*


113

DE SOLIDO

Hiperbolico Acuto.

Lemma Primum.

ESTO hyperbola, cuius asymptoti sint ab, ac, angulum rectum continentes; & reuoluta figura circa axem ab, factum supponatur solidum acutum hyperbolicum infinitè longū versus b; quemadmodum definitum est. Intelligatur iam intra ipsum acutum solidum, rectangulum aliquod per axem ab ductum, puta defg. Dico hoc rectangulum æquale esse quadrato semiaxis ipsius hyperbolæ.

Ducatur ex a centro hyperbolæ, semiaxis ah, qui angulum bac bifariam secabit; fiatq; rectang. aihc; quod omninò quadratum erit (nam cum rectangula figura sit, angulus a bifariam ab axe ah diuiditur). Ergò quadratum rectæ ah duplum erit quadrati aihc, siue duplum rectanguli af. & ideò æquale rectangulo defg, Quod erat propositum &c.

Lemma II.

OMnes cylindri, circà communem axem intra solidum acutum hyperbolicum descripti, isoperimetri sunt. intellige semper sine basibus. Esto acutum solidum, cuius axis ab, & intra ipsum intelligantur descripti circà communem axem ab quælibet cylindri cdef, ghli. Eruntq; æquales rectā-

Figura 3. Documento. El sólido hiperbólico agudo (enunciado de los dos primeros lemas) 'Opera geometrica' [p.113]

Teorema del sólido hiperbólico agudo. En este teorema se establece la equivalencia entre un sólido de longitud infinita engendrado por una hipérbola que gira en torno a su propio eje y un cilindro de altura finita. La demostración se basa en cinco lemas:

En el *primer lema* considera una hipérbola con asíntotas AB y AC, haciéndola girar sobre el eje AB obtiene el sólido hiperbólico agudo. Después considera en el sólido así construido un rectángulo, por ejemplo, el DEFG. Llama AH al semieje de la hipérbola, y por ser la hipérbola equilátera, el área del cuadrado construido sobre AH es igual al área de cualquier rectángulo DEFG que gira alrededor de la asíntota AB.

ISSN 2174-0410

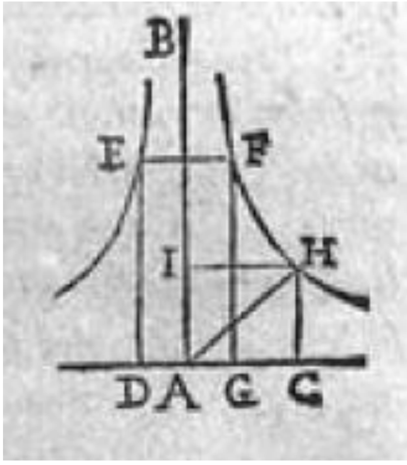


Figura 4. Ilustración Lema I sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el *segundo lema* demuestra que todos los cilindros inscritos en el sólido hiperbólico agudo en torno al eje común AB son isoperimétricos (sus superficies laterales son iguales).

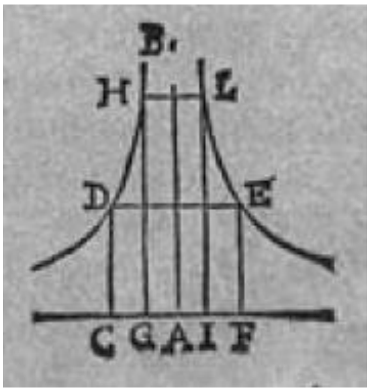


Figura 5. Ilustración Lema II sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el *tercer lema* demuestra que los volúmenes de todos los cilindros isoperimétricos descritos antes se relacionan entre sí como los diámetros de sus bases.

En el *cuarto lema* demuestra que la superficie lateral del cilindro GIHL es 1/4 de la superficie de la esfera AEFC.

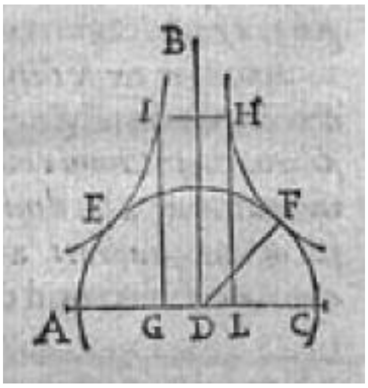


Figura 6. Ilustración Lema IV sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.114]

En el *quinto lema* demuestra que la superficie de cada cilindro CHIL inscrito en el sólido agudo como en la figura anterior, es equivalente al círculo de radio DF.

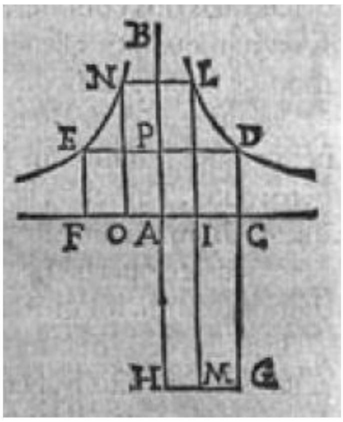


Figura 7. Ilustración para el teorema del sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.115]

En definitiva en el *teorema* por fin demuestra que el sólido infinitamente largo FEBDC constituido por el sólido hiperbólico agudo EBD y por su cilindro de base FEDC, es equivalente al cilindro ACGH de altura AC.

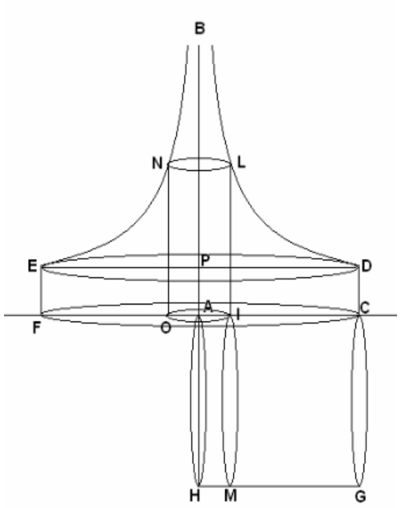


Figura 8. El sólido hiperbólico agudo equivale en volumen al cilindro ACOH

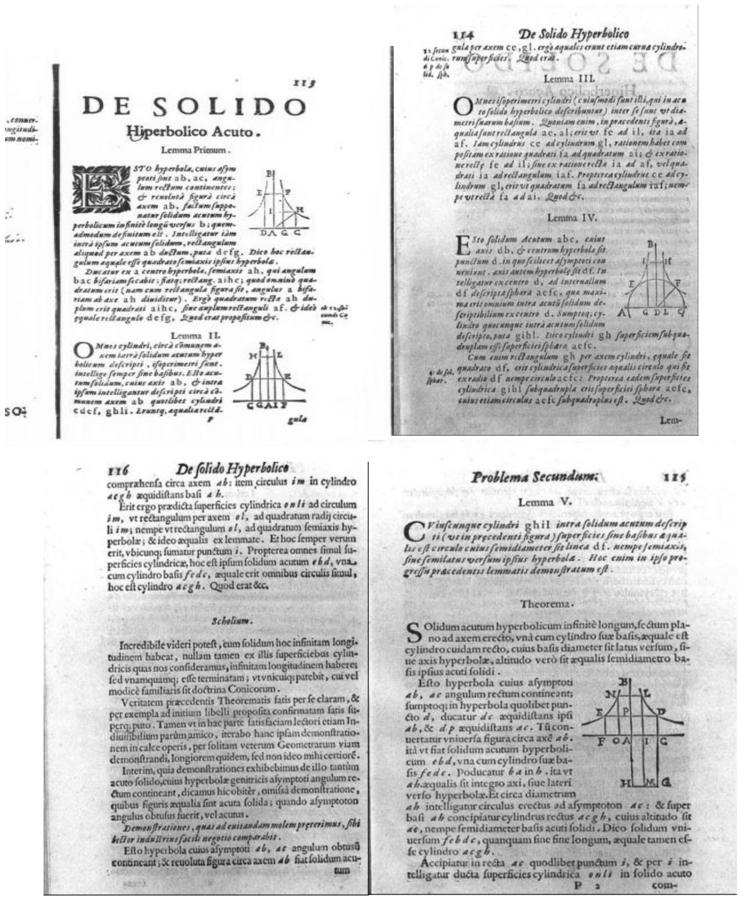
El segmento AC = PD altura del cilindro ACGH resulta de cortar la hipérbola mediante un plano perpendicular al eje AB (véase Fig. 5).

La demostración descansa sobre el quinto lema, la superficie lateral del cilindro inscrito, por ejemplo, el GIHL es igual al círculo de radio DF (véase Fig. 7).

Esta conclusión es decisiva para construir el cilindro ACGH, que Torricelli considera la suma de un número infinito de círculos. En la Fig. 8 la superficie lateral del cilindro OILN es igual al círculo que pasa por el punto I. Esta conclusión es cierta para cada cilindro inscrito, a cada uno le corresponderá un círculo de radio constante DF que pasa por uno de los infinitos puntos del segmento AC.

Torricelli pensó el cilindro OILN como *indivisible curvo*. Tomó un punto cualquiera (I) de la recta AC. La superficie lateral de este cilindro viene dada por el producto de la circunferencia de radio AI ($2\ \pi$ AI) por la altura (LI). Esto es, $2\ \pi\ AI \cdot LI$ Esta superficie lateral es igual a AS2π, es decir, el área del círculo de radio AS. Si se construye un cilindro ACGH que tiene como base el círculo de diámetro AH = RS (el eje de la hipérbola) y altura el segmento AC, la superficie lateral del cilindro es OILN que es igual al área del círculo IM. Puesto que esto es cierto, si se toma el punto I, tenemos que todas las superficies cilíndricas construidas en AC serán igual a todos los círculos de CA, y por tanto el área del sólido hiperbólico agudo BLDCFENB es igual a la del cilindro ACGH.

ISSN 2174-0410



113

DE SOLIDO
Hiperbolico Acuto.

Lemma Primum.

ESTO hyperbola, cuius aſymptoti ſint ab, ac, *angulum rectum continentes; & reuoluta figura circa axem* ab, *factum ſupponatur ſolidum acutum hyperbolicum infinitè longũ verſus* b *; quemadmodum definitum eſt. Intelligatur iam intra ipſum acutum ſolidum, rectangulum aliquod per axem* ab *ductum, puta* defg. *Dico hoc rectangulum æquale eſſe quadrato ſemiaxis ipſius hyperbolæ.*

Ducatur ex a *centro hyperbolæ, ſemiaxis* ah, *qui angulum* bac *biſariam ſecabit; fiatq; rectang.* aihc; *quod omninò quadratum erit (nam cum rectangula figura ſit, angulus* a *biſariam ab axe* ah *diuiditur). Ergò quadratum rectæ* ah *duplum erit quadrati* aihc, *ſiue duplum rectanguli* af. *& ideò æquale rectangulo* defg. *Quod erat propoſitum &c.*

Lemma II.

OMnes cylindri, circà cõmunem axem intra ſolidum acutum hyperbolicum deſcripti, iſoperimetri ſunt. intellige ſemper ſine baſibus. Eſto acutum ſolidum, cuius axis ab, *& intra ipſum intelligantur deſcripti circà cõmunem axem* ab *quotlibet cylindri* cdef, ghli. *Eruntq. æqualia rectã-* gula

114 *De Solido Hyperbolico*

gula per axem ce, gl. *ergò æquales erunt etiam curuæ cylindrorum ſuperficies. Quod erat.*

Lemma III.

OMnes iſoperimetri cylindri (cuiuſmodi ſunt illi, qui in acuto ſolido hyperbolico deſcribuntur) inter ſe ſunt vt diametri ſuarum baſium. Quoniam enim, in præcedenti figurà, æqualia ſunt rectangula ac, al; *erit vt* fc *ad* il, *ita* ia *ad* af. *Iam cylindrus* ce *ad cylindrum* gl, *rationem habet compoſitam ex ratione quadrati* fa *ad quadratum* ai; *& ex ratione rectæ* fc *ad* il; *ſiue ex ratione rectæ* ia *ad* af, *vel quadrati* ia *ad rectangulum* iaf. *Propterea cylindrus* ce *ad cylindrum* gl, *erit vt quadratum* fa *ad rectangulum* iaf; *nempe vt rectà* fa *ad* ai. *Quod &c.*

Lemma IV.

ESto ſolidum Acutum abc, *cuius axis* db, *& centrum hyperbolæ ſit punctum* d, *in quo ſcilicet aſymptoti conueniunt. axis autem hyperbolæ ſit* df. *Intelligatur ex centro* d, *ad internallum* df *deſcripta ſphæra* aefc, *quæ maxima erit omnium intra acutũ ſolidum deſcriptibilium ex centro* d. *Sumptoq; cylindro quocunque intrà acutum ſolidum deſcripto, puta* gihl. *Dico cylindri* gh *ſuperficiem ſubquadruplam eſſe ſuperficiei ſphæræ* aefc.

Cum enim rectangulum gh *per axem cylindri, æquale ſit quadrato* df, *erit cylindrica ſuperficies æqualis circulo qui ſit ex radio* df *nempe circulo* aefc: *Propterea eadem ſuperficies cylindrica* gihl *ſubquadrupla erit ſuperficiei ſphæræ* aefc, *cuius etiam circulus* aefc *ſubquadruplus eſt. Quod &c.*

Lem-

Problema Secundum. 115

Lemma V.

CVIuſcunque cylindri ghil *intra ſolidum acutum deſcripti (vt in præcedenti figura) ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo cuius ſemidiameter ſit linea* df. *nempe ſemiaxis, ſiue ſemilatus verſum ipſius hyperbolæ. Hoc enim in ipſo progreſſu præcedentis lemmatis demonſtratum eſt.*

Theorema.

SOlidum acutum hyperbolicum infinitè longum, ſectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro ſuæ baſis, æquale eſt cylindro cuidam recto, cuius baſis diameter ſit latus verſum, ſiue axis hyperbolæ, altitudo verò ſit æqualis ſemidiametro baſis ipſius acuti ſolidi.

Eſto hyperbola cuius aſymptoti *ab*, *ac* angulum rectum contineant; ſumptoq; in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *de* æquidiſtans ipſi *ab*, & *dp* æquidiſtans *ac*. Tũ conuertatur vniuerſa figura circa axẽ *ab*. ità vt fiat ſolidum acutum hyperbolicum *ebd*, vna cum cylindro ſuæ baſis *fedc*. Poducatur *ba* in *h*. ita vt *ah* æqualis ſit integro axi, ſiue lateri verſo hyperbolæ. Et circa diametrum *ah* intelligatur circulus erectus ad aſymptoton *ac*: & ſuper baſi *ah* concipiatur cylindrus rectus *acgh*, cuius altitudo ſit *ac*, nempe ſemidiameter baſis acuti ſolidi. Dico ſolidum vniuerſum *febdc*, quanquam ſine fine longum, æquale tamen eſſe cylindro *acgh*.

Accipiatur in recta *ac* quodlibet punctum *i*, & per *i* intelligatur ducta ſuperficies cylindrica *onli* in ſolido acuto

P 2 com-

116 *De ſolido Hyperbolico*

compræhenſa circa axem *ab*: item circulus *im* in cylindro *acgh* æquidiſtans baſi *ah*.

Erit ergo prædicta ſuperficies cylindrica *onli* ad circulum *im*, vt rectangulum per axem *ol*, ad quadratum radij circuli *im*; nempe vt rectangulum *ol*, ad quadratum ſemiaxis hyperbolæ; & ideo æqualis ex lemmate. Et hoc ſemper verum erit, vbicunq; ſumatur punctum *i*. Propterea omnes ſimul ſuperficies cylindricæ, hoc eſt ipſum ſolidum acutum *ebd*, vna cum cylindro baſis *fedc*, æquale erit omnibus circulis ſimul, hoc eſt cylindro *acgh*. Quod erat &c.

Scholium.

Incredibile videri poteſt, cum ſolidum hoc infinitam longitudinem habeat, nullam tamen ex illis ſuperficiebus cylindricis quas nos conſideramus, infinitam longitudinem habere; ſed vnamquamq; eſſe terminatam; vt vnicuiq; patebit, cui vel modicè familiaris ſit doctrina Conicorum.

Veritatem præcedentis Theorematis ſatis per ſe claram, & per exempla ad initium libelli propoſita confirmatam ſatis ſuperq; puto. Tamen vt in hac parte ſatisfaciam lectori etiam Indiuiſibilium parùm amico, iterabo hanc ipſam demonſtrationem in calce operis, per ſolitam veterum Geometrarum viam demonſtrandi, longiorem quidem, ſed non ideo mihi certiorẽ.

Interim, quia demonſtrationes exhibebimus de illo tantùm acuto ſolido, cuius hyperbolæ genitricis aſymptoti angulum rectum contineant, dicamus hic obitèr, omiſsà demonſtratione, quibus figuris æqualia ſint acuta ſolida; quando aſymptoton angulus obtuſus fuerit, vel acutus.

Demonſtrationes, quas ad euitandam molem præterimus, ſibi lector induſtrius facili negotio comparabit.

Eſto hyperbola cuius aſymptoti *ab*, *ac* angulum obtusũ contineant; & reuoluta figura circa axem *ab* fiat ſolidum acu- tum

Figura 9. Los cinco lemas y el teorema del sólido hiperbólico agudo 'Opera geométrica'.

Referencias

[1] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp.241, 146, 485, Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[2] HERRERA, Rosa M. *Biografía de Evangelista Torricelli,* (título provisional), en preparación, Madrid, 2011.

[3] ITARD, Jean. *La lettre de Torricelli à Roverbal d'octobre 1643*, Revue d'historie des sciences, Vol. 28, nº 2, pp. 113 – 124, 1975.

[4] TORRICELLI, Evangelista. *Opera geometrica*, pp. 93-135 , Landi e Masa, Florencia (Italia), 1644.

[5] MUSEO DE LA CIENCIA GALILEO, http://www.museogalileo.it/.

Sobre la Autora:
Nombre: Rosa M. Herrera
Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com
Profesión: Físico, trabaja como investigadora independiente en APYCE, colaborando con Universidades y otras Instituciones Educativas en el tercer mundo, y como editora (freelance) en las publicaciones tanto de la citada empresa, como en casas editoriales españolas (Grupo Anaya, SM...).