Investigación Mecánica de Contacto de Cuerpos Deformables. Interacción suelo-estructura

Miguel Martín Stickle Pablo de la Fuente Carlos Oteo

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En este artículo se presentan las bases teóricas y numéricas necesarias para analizar el fenómeno de contacto entre cuerpos deformables. Una vez descrito el modelo teórico necesario para la correcta reproducción del fenómeno de contacto entre cuerpos deformables, basado en relaciones cinemáticas y constitutivas adecuadas, se abordan los aspectos fundamentales para una correcta resolución numérica, a través del método de los elementos finitos, de los problemas de contorno asociados. Para validar el marco teórico-numérico propuesto, este se aplica al fenómeno de la interacción suelo-estructura. Los resultados numéricos obtenidos están en consonancia con datos experimentales existentes.

Palabras clave: Mecánica de Contacto Computacional, Método de los Elementos Finitos, Interacción Suelo-Estructura.

1. Introducción

Los problemas de contorno que involucran contacto son de gran importancia para la ingeniería civil. En particular, en ingeniería geotécnica la transmisión de cargas entre la estructura y el terreno se desarrolla principalmente a través del contacto entre superficies [1]. Hoy en día, es bien reconocido que el comportamiento de esta interfaz de contacto influye de forma significativa en la respuesta de los sistemas estructura-cimentación. Es por este motivo que se requiere desarrollar modelos de interacción sueloestructura precisos y robustos.

Debido a la naturaleza no lineal de la mecánica de contacto, estos problemas han sido tradicionalmente abordados considerando hipótesis excesivamente simplificadoras. En algunos casos se prescribían las cargas directamente sobre el terreno, considerando que la estructura era flexible. En otros casos lo que se imponían eran desplazamientos suponiendo que la estructura era perfectamente rígida. También se ha considerado el caso en que la estructura no experimentara desplazamientos relativos respecto a la cimentación [2]. Estas crudas simplificaciones conducían frecuentemente a predicciones imprecisas del comportamiento real del sistema estructura-cimentación, introduciendo serios errores en la estimación de las tensiones y deformaciones transmitidas a la cimentación [3].

En situaciones especiales, por el ejemplo en el caso de estructuras marítimas como plataformas petrolíferas, diques portuarios, rompeolas, etc., sometidas a la acción cíclica e impulsiva del oleaje, se pueden desarrollar complejas interacciones suelo-estructura. Este tipo de acciones pueden inducir importantes desplazamientos relativos entre la estructura marítima y el terreno [4] así como la posible pérdida de contacto entre superficies involucradas y posterior restablecimiento del mismo. Para poder reproducir este comportamiento altamente no lineal de una forma precisa y robusta parece ser necesaria la utilización de la mecánica de contacto de cuerpos deformables.

De igual forma, este comportamiento fuertemente no lineal dificulta la obtención de soluciones analíticas cerradas, haciéndose necesario el empleo de técnicas numéricas como el método de los elementos finitos.

En el presente artículo de investigación se describe la aplicación de la mecánica de contacto al fenómeno de la interacción suelo estructura bajo una perspectiva numérica. Para ello, en la sección 2 se presenta una descripción de la cinemática asociada al fenómeno de contacto friccional desde un punto de vista de la mecánica de medios continuos. Una vez establecidas las ecuaciones básicas que gobiernan el fenómeno de contacto se describe el procedimiento estándar para considerar el comportamiento constitutivo en la interfaz de contacto. Este aspecto se desarrolla en la sección 3. En la sección 4 se describe el proceso de resolución numérica a través del método de los elementos finitos de un problema de contacto computacional descrita en capítulos precedentes al fenómeno de la interacción suelo-estructura. Para ello, se reproduce numéricamente un ensayo de laboratorio a escala de un

dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo. Finalmente en el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones.

2. Cinemática asociada al fenómeno de contacto

La descripción del fenómeno de contacto que se va a desarrollar en esta publicación se circunscribe a la mecánica de medios continuos, por lo que en primer lugar se definirán los conceptos fundamentales de esta rama de la mecánica en los que se basa las relaciones cinemáticas de la mecánica de contacto.

Un cuerpo **B** puede ser descrito como la clausura de un conjunto abierto conexo y acotado del espacio Euclideo tridimensional \mathbb{R}^3 . La deformación de un de cuerpo vendrá descrita a través de un difeomorfismo $\varphi : \mathbf{B} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ llamado configuración. La descripción de la deformación de un cuerpo así establecida implica que nada catastrófico va a tener lugar como que el cuerpo se rasgue, se perfore o que exista interpenetración.

Así, el movimiento de un cuerpo se describe como la serie uniparamétrica temporal de configuraciones $\varphi_t : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^3$ de tal forma que para una partícula $X \in \mathbf{B}$ su posición a tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ vendará dada por la expresión (1)

$$\mathbf{x} = \varphi_t \left(\mathbf{X} \right) = \varphi \left(\mathbf{X}, t \right) \tag{1}$$

Esta ecuación describe una curva en \mathbb{R}^3 para la partícula $X \in \mathbf{B}$. Definimos $\mathbf{X} = \varphi_0(X)$ como la configuración de referencia del cuerpo **B**. Considerando la expresión (1) tenemos

$$\mathbf{x} = \varphi\left(\varphi_0^{-1}\left(\mathbf{X}\right), t\right) \tag{2}$$

En el presente trabajo no vamos a diferenciar entre **X** y *X*. De esta forma queda simplificada la notación $(\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t))$ siendo **X** la posición de la partícula *X* en la posición de referencia. De esta forma, las posiciones **X** y **x** pueden ser descritas como vectores en \mathbb{R}^3 respecto al origen del sistema de coordenadas, tal y como se aprecia en la Figura 1.



Figura 1. Configuraciones del cuerpo B. [5]

En esta figura el vector \mathbf{u} es el vector desplazamiento, definido por la expresión (3)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}$$
(3)

es decir, se está considerando una descripción Lagrangiana de la deformación, en la que las variables independientes son el vector de posición \mathbf{X} y el tiempo t.

Con los ingredientes hasta ahora definidos se puede empezar a describir la cinemática asociada al fenómeno de contacto friccional.

Sean \mathbf{B}^{α} con $\alpha = 1,2$ dos cuerpos del espacio Euclídeo \mathbb{R}^{3} y consideremos que los bordes Γ^{α} de cada uno de ellos, consisten en tres partes: Γ_{t}^{α} , donde quedan prescritas las tensiones superficiales; Γ_{u}^{α} , donde quedan prescritos los desplazamientos y Γ_{c}^{α} , donde los dos cuerpos \mathbf{B}^{1} y \mathbf{B}^{2} pueden entrar en contacto. En la zona de contacto hay que formular las ecuaciones cinemáticas de restricción asociadas al contacto tanto normal como tangencial.

Suponiendo que dos cuerpos entran en contacto la condición de no penetración entre ellos vendrá dada por la ecuación (4).

$$\left(\mathbf{x}^{2}-\mathbf{x}^{1}\right)\cdot\mathbf{n}^{1}\geq0\tag{4}$$

Donde \mathbf{x}^{α} denotan las coordenadas de la configuración deformada $\varphi^{\alpha}(\mathbf{B}^{\alpha})$ de cada uno de los cuerpos, es decir, $\mathbf{x}^{\alpha} = \mathbf{X}^{\alpha} + \mathbf{u}^{\alpha}$, donde \mathbf{X}^{α} son

las coordenadas de la configuración de referencia y \mathbf{u}^{α} los campos de desplazamiento, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.



Figura 2. Configuración deformada de cuerpos B^{α} . Problema de minimización. [5]

El vector normal \mathbf{n}^1 está asociado al cuerpo \mathbf{B}^1 . Asumiendo que el borde de contacto describe, al menos localmente, una región convexa, podemos relacionar cada punto $\mathbf{x}^2 \in \Gamma^2$ con un punto $\overline{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^1(\overline{\boldsymbol{\xi}}) \in \Gamma^1$ a través de un problema de minimización de distancia [5], descrito por la expresión.

 $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}_{1},\boldsymbol{\xi}_{2}) = \left\|\mathbf{x}^{2} - \overline{\mathbf{x}}^{1}\right\| = \min_{\mathbf{x}^{1} - \boldsymbol{\Gamma}^{1}} \left\|\mathbf{x}^{2} - \mathbf{x}^{1}(\boldsymbol{\xi}_{1},\boldsymbol{\xi}_{2})\right\|$



Figura 3. Minimización de la distancia y parametrización. [5]

La distancia puede ser empleada para definir la abertura o penetración entre los dos cuerpos. $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ representa una parametrización de la superficie borde Γ^1 (Figura 3). De esta forma, el punto $\overline{\mathbf{x}}^1$ se obtiene de la condición necesaria de la función mínima distancia al diferenciar respecto a

(5)

 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$, tal y como se muestra en la relación (6)

$$\frac{d}{d\xi^{\alpha}}\hat{\mathbf{d}}^{1}\left(\xi^{1},\xi^{2}\right) = \frac{\mathbf{x}^{2} - \mathbf{x}^{1}\left(\xi^{1},\xi^{2}\right)}{\left\|\mathbf{x}^{2} - \mathbf{x}^{1}\left(\xi^{1},\xi^{2}\right)\right\|} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}^{1}\left(\xi^{1},\xi^{2}\right) = 0$$
(6)

La ecuación (6) requiere la ortogonalidad del primer y segundo término. Como $\mathbf{x}_{,\alpha}^{1}(\boldsymbol{\xi}^{1},\boldsymbol{\xi}^{2})$ representa el vector tangente \mathbf{a}_{α}^{1} , el primer término ha de tener la misma dirección que el vector normal \mathbf{n}^{1} en el punto de mínimo $\overline{\boldsymbol{\xi}} = (\overline{\boldsymbol{\xi}}^{1}, \overline{\boldsymbol{\xi}}^{2})$. Así, se obtiene la condición $-\mathbf{n}^{1}(\overline{\boldsymbol{\xi}}^{1}, \overline{\boldsymbol{\xi}}^{2}) \cdot \mathbf{a}_{\alpha}^{1}(\overline{\boldsymbol{\xi}}^{1}, \overline{\boldsymbol{\xi}}^{2}) = 0$, lo que significa que la solución $\mathbf{x}^{1}(\overline{\boldsymbol{\xi}}^{1}, \overline{\boldsymbol{\xi}}^{2})$ al problema de minimización es la proyección ortogonal de \mathbf{x}^{2} sobre la superficie borde actualizada $\varphi^{1}(\Gamma_{c}^{1})$. A esta última superficie se la suele denotar por superficie maestra. Por contra $\varphi^{2}(\Gamma_{c}^{2})$ es la superficie esclava.

Una vez el punto $\overline{\mathbf{x}}^{1} = \mathbf{x}^{1}(\overline{\xi}^{1}, \overline{\xi}^{2})$ es conocido, podemos definir la restricción representada por la condición de no penetración a través de la expresión

$$\mathbf{g}_{n} = \left(\mathbf{x}^{2} - \overline{\mathbf{x}}^{1}\right) \cdot \overline{\mathbf{n}}^{1} \ge 0 \tag{7}$$

Siendo $\overline{\mathbf{n}}^1$ el vector normal asociado al cuerpo \mathbf{B}^1 , evaluado en el punto de mínima distancia $(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2)$.

En la dirección tangencial de la interfaz de contacto generalmente se distinguen dos casos. Uno es el estado en el que no hay desplazamiento relativo en la dirección tangencial entre las superficies de contacto. El otro caso corresponde al estado de deslizamiento, el cual indica la existencia de un movimiento relativo tangencial entre las superficies de contacto.

La condición matemática para representar la no existencia de desplazamiento relativo tangencial entre dos cuerpos que entran en contacto, puede ser derivada de la proyección (6). Es claro que un punto que permanece pegado a otro cuerpo no experimenta movimiento en la dirección tangencial, por lo que su valor respecto a la coordenada $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ no cambiará, es decir, $\dot{\xi}^{\alpha} = 0$. Así, se puede formular la siguiente condición:

$$\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_T \cdot \overline{\mathbf{a}}_{\alpha}^1 = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde $\mathbf{g}_T = (\mathbf{x}^2 - \overline{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{a}_{\alpha}^1$. La expresión (8) expresa el desplazamiento relativo en la dirección tangencial, el cual ha de ser cero.

En el caso de existir desplazamiento relativo entre dos cuerpos, este está relacionado con el cambio del punto $\mathbf{x}^2 \in \Gamma^2$ relativo a la proyección $\overline{\mathbf{x}}^1 \in \Gamma^1$. Esto significa que el punto solución $(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2)$, el cual ha sido obtenido a través del problema de distancia mínima (5), se moverá sobre la superficie maestra. Tal y como puede apreciarse en la Figura 4, el camino seguido por el punto \mathbf{x}^2 sobre la superficie maestra no se conoce a priori, por lo que durante nuestros cálculos no podemos asumir nada respecto al camino seguido [5], solo conocemos el vector de velocidad relativa $\mathbf{v}(t)$ a tiempo t. De esta forma, en un problema de deslizamiento con fricción, uno tiene que integrar las velocidades relativas para obtener el camino de \mathbf{x}^2 sobre la superficie maestra.



Figura 4. Camino seguido por el punto \mathbf{x}^2 relativo a la superficie maestra. [5]

En primer lugar, se determina el desplazamiento relativo del punto \mathbf{x}^2 en la superficie de contacto, el cual está definido en términos del cuerpo \mathbf{B}^1 . La diferencial del deslizamiento relativo respecto a la parametrización de la superficie borde $d\mathbf{g}_T$ es un vector tangente, pudiéndose expresar respecto a los elementos de la base del plano tangente asociado a través de la expresión $d\mathbf{g}_T = \overline{\mathbf{a}}_a^1 d\xi^\alpha = \overline{\mathbf{x}}_a^1 d\xi^\alpha$, tal y como se muestra en la Figura 5.



Figura 5. Incremento de camino friccional. [5]

Sabiendo que $d\mathbf{g}_T = \|d\mathbf{g}_T\|$ y $d\xi^{\alpha} = \dot{\xi}^{\alpha} dt$, la longitud del camino friccional puede ser calculada como

$$\mathbf{g}_{T} = \int_{t_{0}}^{t} \left\| \dot{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\alpha} \cdot \overline{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{1} \right\| dt = \int_{t_{0}}^{t} \sqrt{\dot{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\alpha} \cdot \dot{\overline{\boldsymbol{\xi}}}^{\beta} \cdot \boldsymbol{a}_{\alpha\beta}} dt$$
(9)

Donde $a_{\alpha\beta}$ es la métrica asociada a la superficie borde. Para evaluar esta última expresión, sería necesario conocer la derivada temporal de $\overline{\xi}^{\alpha}$, pudiendo obtenerla derivando respecto al tiempo la relación $(\mathbf{x}^2 \cdot \overline{\mathbf{x}}^1) \cdot \overline{\mathbf{a}}_{\alpha}^1 = \mathbf{0}$, que es válida en el punto de contacto ya que $(\mathbf{x}^2 \cdot \overline{\mathbf{x}}^1)$ es normal a la superficie de contacto y $\overline{\mathbf{a}}_{\alpha}^1$ es el vector tangente al borde Γ^1 . De esta forma, y tras un poco de geometría diferencial se obtiene la siguiente expresión para $\dot{\overline{\xi}}^{\beta}$

$$\dot{\overline{\xi}}^{\beta} = \overline{H}^{\alpha\beta} \cdot \left(\left[\mathbf{v}^2 - \overline{\mathbf{v}}^1 \right] \cdot \overline{\mathbf{a}}^1_{\alpha} + g_n \overline{\mathbf{n}}^1 \cdot \overline{\mathbf{v}}^1_{,\alpha} \right)$$
(10)

Donde $\overline{H}^{\alpha\beta} = (\overline{H}_{\alpha\beta})^{-1}$ y $\overline{H}_{\alpha\beta} = (\overline{a}_{\alpha\beta} - g_n \overline{b}_{\alpha\beta})$, mientras que $\overline{a}_{\alpha\beta} = \overline{a}_{\alpha}^1 \cdot \overline{a}_{\beta}^1$ es el tensor métrico y $\overline{b}_{\alpha\beta} = \overline{a}_{\alpha,\beta}^1 \cdot \overline{n}^1$ es el tensor de curvatura, ambos considerados en la superficie borde.

Revista "Pensamiento Matemático" – Número 1 – Oct'11 ISSN 2174-0410

3. Comportamiento Constitutivo en la interfaz de contacto

Una vez establecidas las ecuaciones básicas que gobiernan el fenómeno de contacto, es esencial describir el comportamiento constitutivo en la interfaz de contacto, tanto en la dirección normal como en la dirección tangencial [5].

Entre los distintos métodos que existen para obtener las tensiones normales provocadas por el fenómeno de contacto se ha optado por considerarlas como reacciones en la zona de contacto [6] por lo que se derivan de las ecuaciones de restricción presentadas en el capítulo anterior.

Como ya se ha indicado, la condición matemática para un estado de no penetración viene dada por $g_n \ge 0$, condición que impide la penetración del cuerpo \mathbf{B}^2 en el cuerpo \mathbf{B}^1 , teniendo lugar el contacto cuando $g_n = 0$. En este último caso, la componente normal σ_n^1 del vector de tensión \mathbf{t}^1 en la interfaz de contacto ($\mathbf{t}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{\bar{n}}^1 = \sigma_n^1 \cdot \mathbf{\bar{n}}^1 + \mathbf{t}_T^{1\beta} \cdot \mathbf{\bar{a}}_\beta^1$) ha de ser no nula y de compresión, es decir, $\sigma_n^1 < 0$. El vector de tensiones actúa en ambos bordes de contacto, tal y como se aprecia en la Figura 6, obedeciendo el principio de acción-reacción $\mathbf{t}^1(\boldsymbol{\bar{\xi}}) = -\mathbf{t}^2$ en el punto de contacto $\mathbf{\bar{x}}^1 \in \Gamma^1$.



Figura 6. Tensiones en la interfaz de contacto. [5]

De esta forma, tenemos $\sigma_n^1 = \sigma_n^2 < 0$. Es importante resaltar que $t_T^{1\beta} = 0$ en el caso de considerar un contacto sin fricción. Así, resumiendo, en caso de estar en contacto, las condiciones son $g_n = 0$ y $\sigma_n < 0$. Si existe una separación entre los cuerpos, entonces la relación que se tiene es $g_n > 0$ y $\sigma_n = 0$. Esto nos lleva a las condiciones de contacto no friccional conocidas como Hertz-Signorini-Moreau [5]

$$g_n \ge 0, \sigma_n \le 0, \sigma_n \cdot g_n = 0 \tag{11}$$

Es interesante remarcar, tal y como se aprecia en la Figura 7 que las ecuaciones (11) conducen a una ley de contacto no diferenciable para la presión de contacto normal.



Figura 7. Presión de contacto frente a abertura normal.

En relación a los contactos con una componente tangencial no nula hay que incorporar una ley que gobierne el comportamiento friccional. Es importante destacar la dificultad de obtener leyes que gobiernen este fenómeno debido a su dependencia de variables termomecánicas, del comportamiento tensodeformacional de los cuerpos que entran en contacto, el estado de las superficies que entran en contacto (rugosidad, composición química, etc.), etc. Debido a que es imposible considerar todas estas variables en una única formulación matemática, en la práctica, uno trata de expresar la ley de fricción como función de los aspectos más importantes en consonancia con el contexto en el que se desarrolla el contacto. El resto de las variables, determinan el valor de los coeficientes adimensionales que aparecerán en la ley [7].

Entre las diversas leyes existentes para modelar el comportamiento friccional, la ley de Coulomb ha sido la más utilizada, pasando a continuación a describirla.

Si los cuerpos que entran en contacto inicialmente no experimentan un desplazamiento relativo, es decir, se encuentran en modo de no deslizamiento o "pegado", es decir, la velocidad tangencial relativa entre los cuerpo es cero, entonces la expresión (12) es la más idónea para su modelización:

$$\dot{\mathbf{g}}_{T} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{g}_{T} = \mathbf{0} \tag{12}$$

Una vez la fuerza tangencial existente en la interfaz de contacto supera cierto umbral (Figura 8) entonces, las superficies que entran en contacto ya no permanecen "pegadas" entre sí, sino que experimentan un desplazamiento relativo entre ellas.



Figura 8. Ley de Coulomb de fricción

Este movimiento relativo tangencial, denotado deslizamiento, se puede expresar por la ley de Coulomb

$$\mathbf{t}_{T} = -\mu \cdot \left| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} \right| \cdot \frac{\dot{\mathbf{g}}_{T}}{\left\| \dot{\mathbf{g}}_{T} \right\|} \quad \text{si} \quad \left\| \mathbf{t}_{T} \right\| \ge \mu \left| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} \right|$$
(13)

Donde μ es el coeficiente de fricción para el deslizamiento. El valor de este coeficiente, constante en la ley clásica de Coulomb, depende de los materiales que entran en contacto, pudiéndose ver distintos valores para este coeficiente en la Tabla 1.

Pareja de materiales que entran en contacto	Coeficiente de fricción
Hormigón-Hormigón	0.5-1
Hormigón-Arena	0.35-0.6
Hormigón-Acero	0.2-0.4
Metal-Madera	0.3-0.65
Goma-Acero	0.15-0.65
Acero-Acero	0.2-0.8
Acero-Hielo	0.015-0.03
Madera-Madera	0.4-1

Tabla 1. Coeficientes de fricción para distintas parejas de materiales

El principal problema que presenta la formulación de Coulomb es que introduce un comportamiento no diferenciable al existir un umbral a partir del cual empieza a haber deslizamiento entre las superficies de contacto. Este aspecto conlleva serios problemas a la hora de realizar un tratamiento numérico del contacto cuya modelización se basa en esta ley [7]. En la literatura especializada [5, 8] se han propuesto una serie de modelos que evitan esta dificultad. Estas formulaciones, se basan en la consideración de un funcional que permite una transición suave del modo de "pegado" al modo de deslizamiento, regularizando la ley de Coulomb. En el caso dos dimensiones se tiene la expresión (14)

$$\mathbf{t}_{T} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\dot{\mathbf{g}}_{T}) \cdot \left| \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} \right| \tag{14}$$

Donde la función φ que regula la transición suave del modo de "pegado" al modo de deslizamiento puede tener diversas expresiones. Entre estas, una de las más consideradas por los investigadores es la que aparece en la fórmula (15). El procedimiento de suavizado puede apreciarse en la Figura 9.

$$\varphi(\dot{g}_{T}) = \frac{\dot{g}_{T}}{\sqrt{\dot{g}_{T}^{2} + \chi^{2}}}$$
(15)

En esta última expresión el parámetro escalar χ es la variable de regularización. Se observa que si $\chi \rightarrow 0$ se obtiene como caso límite la ley clásica de Coulomb. Es importante destacar que para valores muy elevados de χ este modelo no es capaz de reproducir adecuadamente los movimientos "pegado"-deslizamiento. Por otro lado, la diferenciabilidad de la expresión (15) permite el empleo de algoritmos numéricos más simples y robustos.



Figura 9. Regularización de la ley de fricción de Coulomb

4. Método de los elementos finitos en la mecánica de contacto.

4.1. Introducción

En esta sección se describe el proceso de resolución numérica a través del método de los Elementos Finitos de un problema de contorno en la mecánica de contacto. Los pasos a seguir quedan descritos en la Figura 10.



Figura 10. Procedimiento de resolución de un problema de contacto a través del Método de los Elementos Finitos

Partiendo del problema de contorno que gobierna la deformación de un sólido, el primer paso consiste en desarrollar la discretización espacial a través del método de los elementos finitos sin considerar la existencia de contacto. El siguiente paso consiste en modificar el sistema discretizado incorporando las restricciones del contacto. Finalmente, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias completo y de segundo orden es resuelto a través de un algoritmo de integración temporal.

4.2. Mecánica de medios continuos sin contacto

La deformación de sólidos se puede describir a través de las relaciones

cinemáticas combinadas con las ecuaciones de balance y las constitutivas. Por claridad en la exposición, se va a considerar únicamente un problema puramente mecánico en el que la densidad de los cuerpos involucrados es constante bajo un comportamiento constitutivo elástico lineal isótropo. Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de gobierno se componen de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento (16) y de la ley constitutiva correspondiente (17)

$$\sigma^{\alpha}_{ij,j} - \rho^{\alpha} \ddot{u}^{\alpha}_{i} + \rho^{\alpha} b_{i} = 0 \tag{16}$$

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = \left[K^{\alpha} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G^{\alpha} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \right] \varepsilon_{ij}^{\alpha} \quad \left(\boldsymbol{\sigma}^{\alpha} = \mathbf{D}^{\alpha \mathbf{e}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha} \right) \quad (17)$$

Siendo ρ^{α} la densidad de cada cuerpo \mathbf{B}^{α} con $\alpha = 1, 2$, que se ha supuesto constante, σ_{ij}^{α} las componentes del tensor de tensiones de Cauchy, u_i^{α} las componentes del vector desplazamiento, \mathbf{b}_i las componentes del vector de fuerzas volumétricas por unidad de masa (fuerza gravitatoria), $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{u}_{k,l} + \mathbf{u}_{l,k})$ el tensor de deformación, con $1 \le i, j, k, l \le 2$ en dos dimensiones $1 \le i, j, k, l \le 3$ en tres dimensiones. K^{α} el módulo de deformación volumétrica y G^{α} el módulo de deformación tangencial de cada cuerpo \mathbf{B}^{α} .

El sistema de ecuaciones (16) y (17) definen un sistema de ecuaciones completo del problema de asociado a la respuesta dinámica. Para poder resolver este sistema es necesario incorporar unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas, estas últimas vienen expresadas por (18)

$$\mathbf{t}^{\alpha}(\mathbf{x},t) = \mathbf{t}^{\alpha}_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ para } (\mathbf{x},t) \in \Gamma^{\alpha}_{t} \times (0,T)$$
$$\mathbf{u}^{\alpha}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^{\alpha}_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ para}(\mathbf{x},t) \in \Gamma^{\alpha}_{u} \times (0,T)$$
(18)

Donde el borde total Γ^{α} del cuerpo \mathbf{B}^{α} con $\alpha = 1, 2$, es la unión de sus componentes, es decir, $\Gamma^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_t \cup \Gamma^{\alpha}_u$. En subsiguientes apartados, cuando se incorporen las restricciones derivadas del fenómeno de contacto, se considerará la existencia de una tercera componente Γ^{α}_c , donde los dos cuerpos \mathbf{B}^1 y \mathbf{B}^2 pueden entrar en contacto.

Revista "Pensamiento Matemático" – Número 1 – Oct'11 ISSN 2174-0410

4.3. Paso 1. Discretización espacial sin considerar restricciones de contacto

Una vez la formulación fuerte del problema de cuerpos deformables ha sido planteada a través de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, se discretizan las variables primitivas que en el presenta caso se corresponde con los desplazamientos $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$, pudiendo escribir

$$\mathbf{u}^{\scriptscriptstyle 1} \cong \mathbf{u}^{\scriptscriptstyle 1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{N}_{k}^{\scriptscriptstyle u} \cdot \overline{\mathbf{u}}_{k}^{\scriptscriptstyle 1} = \mathbf{N}^{\scriptscriptstyle u} \overline{\mathbf{u}}^{\scriptscriptstyle 1}$$

$$\mathbf{u}^{\scriptscriptstyle 2} \cong \mathbf{u}^{\scriptscriptstyle 2} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{N}_{k}^{\scriptscriptstyle u} \cdot \overline{\mathbf{u}}_{k}^{\scriptscriptstyle 2} = \mathbf{N}^{\scriptscriptstyle u} \overline{\mathbf{u}}^{\scriptscriptstyle 2}$$
(19)

Debido a que las ecuaciones de gobierno obtenidas presentan derivadas parciales de primer orden en el espacio, es necesario emplear funciones de interpolación N_k^u que sean C^o [9]. Se consideran elementos isoparamétricos en la discretización de las ecuaciones de gobierno, empleando el mismo tipo de elementos para ambos cuerpos.

Así, premultiplicando la ecuación (16) por $(\mathbf{N}^{\mu})^{T}$, integrando el primer término por partes, incorporando el comportamiento constitutivo e incorporando una componente de amortiguamiento se obtiene:

$$\mathbf{M}^{t} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^{*} + \mathbf{C}^{t} \dot{\overline{\mathbf{u}}}^{*} + \mathbf{K}^{t} \overline{\mathbf{u}}^{*} = \int_{\mathbf{b}^{t}} (\mathbf{N}^{*})^{\mathsf{T}} \rho^{t} \mathbf{b}^{t} d\Omega + \int_{\mathbf{t}^{t}_{i}} (\mathbf{N}^{*})^{\mathsf{T}} \mathbf{t}^{t}_{imp} d\Gamma^{t}_{i}$$
$$\mathbf{M}^{t} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^{*} + \mathbf{C}^{t} \dot{\overline{\mathbf{u}}}^{*} + \mathbf{K}^{t} \overline{\mathbf{u}}^{*} = \int_{\mathbf{b}^{t}} (\mathbf{N}^{*})^{\mathsf{T}} \rho^{t} \mathbf{b}^{t} d\Omega + \int_{\mathbf{t}^{t}_{i}} (\mathbf{N}^{*})^{\mathsf{T}} \mathbf{t}^{t}_{imp} d\Gamma^{t}_{i}$$
(20)

Siendo \mathbf{M}^{α} , \mathbf{K}^{α} y \mathbf{C}^{α} las matrices de masas, rigidez y de amortiguamiento del sistema, respectivamente, para cada cuerpo con $\alpha = 1, 2$ estando definidas por:

$$\mathbf{M}^{\alpha} = \int_{\mathbf{B}^{\alpha}} \left(\mathbf{N}^{u} \right)^{\mathrm{T}} \rho^{\alpha} \mathbf{N}^{u} d\Omega ; \mathbf{K}^{\alpha} = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha e} \mathbf{B} d\Omega$$
(21)

Con
$$\mathbf{C}^{\alpha} = \tilde{\alpha}\mathbf{M}^{\alpha} + \tilde{\beta}\mathbf{K}^{\alpha}$$
; $\mathbf{B} = \mathbf{SN}^{\alpha}$ y $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$

4.4. Paso 2. Restricciones derivadas del contacto.

Resolver un problema de contacto con varios cuerpos deformables significa resolver las ecuaciones de equilibrio de los distintos cuerpos junto con las condiciones de contorno de contacto impuestas por la presencia del resto de cuerpos.

Cuando los cuerpos \mathbf{B}^1 y \mathbf{B}^2 entran en contacto entran en contacto, tanto las fuerzas normales, derivadas de las ecuaciones de restricción Hertz-Signorini-Moreau, como las tangenciales, derivadas de la ley que gobierna el comportamiento friccional, han de incorporarse en la discretización espacial de las ecuaciones que gobiernan el problema de contorno considerado. Esta contribución a las ecuaciones de gobierno ha de considerarse exclusivamente en los bordes que entran en contacto, es decir Γ_c^1 y Γ_c^2

Una vez la interfaz de contacto es conocida y considerando la contribución del contacto, las expresiones se ven modificadas por

$$\mathbf{M}^{t} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^{t} + \mathbf{C}^{t} \dot{\overline{\mathbf{u}}}^{t} + \mathbf{K}^{t} \overline{\mathbf{u}}^{t} = \int_{\mathbf{a}^{t}} (\mathbf{N}^{s})^{\mathsf{T}} \rho^{t} \mathbf{b}^{t} d\Omega + \int_{\mathbf{r}_{c}^{t}} (\mathbf{N}^{s})^{\mathsf{T}} \mathbf{t}_{imp}^{t} d\Gamma_{c}^{t} + \mathfrak{I}_{c}^{t}$$
$$\mathbf{M}^{t} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^{t} + \mathbf{C}^{t} \dot{\overline{\mathbf{u}}}^{t} + \mathbf{K}^{t} \overline{\mathbf{u}}^{t} = \int_{\mathbf{a}^{t}} (\mathbf{N}^{s})^{\mathsf{T}} \rho^{t} \mathbf{b}^{t} d\Omega + \int_{\mathbf{r}_{c}^{t}} (\mathbf{N}^{s})^{\mathsf{T}} \mathbf{t}_{imp}^{t} d\Gamma_{c}^{t} + \mathfrak{I}_{c}^{t}$$
(22)

Donde \mathfrak{J}_c^1 y \mathfrak{J}_c^1 son las contribuciones debidas al contacto. Considerando que la discretización del contacto se desarrolla nodo a nodo, siendo la formulación empleada para el tratamiento numérico el método de penalización y considerando como comportamiento friccional la regularización de la ley de Coulomb presentada en secciones anteriores, las contribuciones debidas al contacto adquieren la siguiente forma Figura 11

$$\mathfrak{J}_{c}^{1} = \sum_{i=1}^{n_{c}} \left(\varepsilon_{n} \mathbf{g}_{ni} A_{i} \mathbf{n}_{i}^{1} - \mu \frac{\dot{\mathbf{g}}_{Ti}}{\sqrt{\dot{\mathbf{g}}_{Ti}^{2} + \chi^{2}}} |\varepsilon_{n} \mathbf{g}_{ni}| A_{i} \mathbf{t}_{Ti}^{1} \right)$$

$$\mathfrak{J}_{c}^{2} = \sum_{i=1}^{n_{c}} \left(-\varepsilon_{n} \mathbf{g}_{ni} A_{i} \mathbf{n}_{i}^{1} + \mu \frac{\dot{\mathbf{g}}_{Ti}}{\sqrt{\dot{\mathbf{g}}_{Ti}^{2} + \chi^{2}}} |\varepsilon_{n} \mathbf{g}_{ni}| A_{i} \mathbf{t}_{Ti}^{1} \right)$$
(23)

Donde \mathbf{n}_{i}^{1} y \mathbf{t}_{Ti}^{1} son el vector normal y tangente en el nodo *i* al borde Γ_{c}^{1} del cuerpo \mathbf{B}^{1} , respectivamente, tal y como se puede apreciar en la



Figura 11. Elemento de contacto nodo a nodo

En esta figura, también se puede apreciar el área de influencia A_i asociada al nodo *i*. Ya que la discretización de contacto empleada es nodo a nodo, se aprecia como en las expresiones (23) el sumatorio se establece sobre número de nodos activos n_e , que a lo sumo pueden llegar a ser min{n^o nodos Γ_e^2 , n^o nodos Γ_e^i }. En la

Figura 11 se aprecia la localización de los contornos Γ_c^2 y Γ_c^1

En las expresiones anteriores $\mathbf{g}_{ni} = (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i^1$, mientras que $\mathbf{g}_{Ti} = (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1) \cdot \mathbf{t}_{Ti}^1$, siendo \mathbf{u}_i^1 el desplazamiento del cuerpo \mathbf{B}^1 en el nodo *i*, mientras que \mathbf{u}_i^2 es el desplazamiento del cuerpo \mathbf{B}^2 registrado en el nodo del borde Γ_c^2 que esté a menor distancia del nodo *i* del cuerpo \mathbf{B}^1 . \mathcal{E}_n es el coeficiente de penalización. μ es el coeficiente de fricción. Por último, el parámetro χ es la variable de regularización de la ley de Coulomb.

4.5. Paso 3. Integración temporal.

Es aconsejable agrupar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones

nodales de los cuerpos \mathbf{B}^{1} y \mathbf{B}^{2} a través del conjunto de variables $\left[\overline{\mathbf{u}}^{1}, \overline{\mathbf{u}}^{2}\right]^{T}$. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales (22) se pueda expresar mediante la expresión

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\bar{u}}^{1} \\ \mathbf{\bar{u}}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\dot{\bar{u}}}^{1} \\ \mathbf{\dot{\bar{u}}}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\ddot{\bar{u}}}^{1} \\ \mathbf{\ddot{\bar{u}}}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{1} + \mathbf{\mathfrak{I}}_{c}^{1} \\ \mathbf{f}^{2} + \mathbf{\mathfrak{I}}_{c}^{2} \end{bmatrix}$$
(24)

Esta representación además de ser más conveniente para el desarrollo de la discretización temporal de las ecuaciones de gobierno, permite una implementación eficiente en el lenguaje M del entorno Matlab al tener almacenada la información del sistema de ecuaciones diferenciales de forma matricial.

Evaluando el sistema (24) para el paso de tiempo t_{n+1} , se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{1} \\ \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{1} \\ \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{1} \\ \mathbf{\overline{u}}_{n+1}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{1} + \mathbf{\widetilde{v}}_{n+1}^{1} \\ \mathbf{f}_{n+1}^{2} + \mathbf{\widetilde{v}}_{n+1}^{2} \end{bmatrix}$$
(25)

Discretizando temporalmente los desplazamientos $\overline{\mathbf{u}}^{global} = [\overline{\mathbf{u}}^1, \overline{\mathbf{u}}^2]^T$ a través del método Generalizado de Newmark *GN*22 [10], se obtienen el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{global} &= \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{global} &= \dot{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \beta_{1} \cdot \Delta t \cdot \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} \\ \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{global} &= \overline{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \frac{1}{2} \Delta t^{2} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \frac{1}{2} \Delta t^{2} \cdot \beta_{2} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{global} \end{aligned}$$
(26)

Siendo β_1 y β_2 , parámetros que habitualmente se escogen en el rango de 0 a 1. Dependiendo del valor asignado a estos parámetros se puede obtener una amplia gama de integradores con distintas propiedades de estabilidad y precisión. Para que el esquema de integración obtenido a partir del sistema de ecuaciones en diferencias (26) sea incondicionalmente estable, se ha de cumplir $\beta_2 \ge \beta_1 \ge 1/2$. Habitualmente, se suele incorporar algo de amortiguamiento numérico, empleando $\beta_2 = 0.605$, $\beta_1 = 0.6$

Incorporando la relación (26) en (25) se obtiene el sistema de ecuaciones

algebraico (27) a resolver para cada paso de tiempo donde $\left[\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^1 \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^2\right]$ permanecen desconocidas.

$$\Psi_{n+1}^{1} \left(\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1}, \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{2} \right) \equiv \dots$$

$$\mathbf{M}^{1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1} + \beta_{1} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{C}^{1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1} + 0.5 \beta_{2} \cdot \Delta t^{2} \cdot \mathbf{K}^{1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1} - \mathbf{F}_{n+1}^{1} = \mathbf{0}$$

$$\Psi_{n+1}^{2} \left(\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1}, \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{2} \right) \equiv \dots$$

$$\mathbf{M}^{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{2} + \beta_{1} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{C}^{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{2} + 0.5 \beta_{2} \cdot \Delta t^{2} \cdot \mathbf{K}^{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{2} - \mathbf{F}_{n+1}^{2} = \mathbf{0}$$
(27)

Las funciones \mathbf{F}_{n+1}^1 , \mathbf{F}_{n+1}^2 del sistema algebraico (27) quedan formuladas en las expresiones.

$$\mathbf{F}_{n+1}^{1} = -\mathbf{M}^{1} \ddot{\mathbf{u}}_{n}^{1} - \mathbf{C}^{1} \left[\dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{1} + \Delta t \cdot \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{1} \right] - \mathbf{K}^{1} \left[\overline{\mathbf{u}}_{n}^{1} + \Delta t \cdot \dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{1} + 0.5\Delta t^{2} \cdot \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{1} \right] + \mathbf{f}_{n+1}^{1}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{2} = -\mathbf{M}^{2} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{2} - \mathbf{C}^{2} \left[\dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{2} + \Delta t \cdot \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{2} \right] - \mathbf{K}^{2} \left[\overline{\mathbf{u}}_{n}^{2} + \Delta t \cdot \dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{2} + 0.5\Delta t^{2} \cdot \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{2} \right] + \mathbf{f}_{n+1}^{2}$$
(28)

Debido al contacto, el sistema (27) es no lineal incluso en el presente caso en el que se han considerado dos cuerpos con un comportamiento elástico lineal. Este sistema puede resolverse de forma iterativa a través del conocido algoritmo de Newton-Raphson.

Una vez se haya resuelto el sistema no lineal (27), los valores de los desplazamientos $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{global}$ a tiempo t_{n+1} , son evaluados a través de las expresión (26).

5. Interacción suelo-estructura.

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta una aplicación de la mecánica de contacto computacional descrita en capítulos anteriores. Esta aplicación consiste en la reproducción numérica de un ensayo de laboratorio a escala de un dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo [11]. Esta aplicación ha sido desarrollada en el trabajo de tesis doctoral del autor del presente trabajo de investigación [12]

En primer lugar se describe el modelo a escala empleado por Goda en 1994, pasando a continuación a describir el modelo numérico desarrollado para reproducir el ensayo experimental. Una parte fundamental del modelo numérico está relacionada con la interacción entre el cajón y la banqueta de grava. Tras un análisis cualitativo de la respuesta proporcionada por el modelo numérico se presenta una comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales.

5.2. Modelo a escala

En la Figura 12 se puede apreciar la descripción del modelo a escala del dique vertical empleado por Goda en 1994, en el que no se consideró la presencia de agua. Como se puede apreciar en esta figura, se trata de un dique vertical compuesto con una banqueta de grava de 190mm de alto, con una anchura en la parte superior de 400mm y una pendiente 1 a 2. La grava empleada en la banqueta estaba formada por piedras cuyo tamaño se correspondía con d₅₀ = 15mm y coeficiente de gradación de $(d_{75}/d_{25})^{0.5} = 1.16$. El suelo sobre el que se apoyaba la banqueta era de hormigón.



Figura 12. Modelo a escala de un Dique Vertical sobre una banqueta de Grava

El cajón fue modelado a través de un bloque de hormigón de 202mm de alto, 205mm de ancho y 205mm de largo, con una densidad de $\rho = 2314 \text{ kg/m}^3$. El bloque incorporaba en la cara anterior tres tornillos metálicos a tres alturas diferentes $\ell_i = 34,101,168$ mm sobre la base del bloque. Estos tornillos fueron considerados como puntos de impacto sobre los que colisionaba el péndulo, tal y como se puede apreciar en la Figura 13.



Figura 13. Disposición del péndulo y de los indicadores.

En la Figura 13 se puede apreciar la disposición del péndulo empleado para colisionar con el bloque de hormigón. Este péndulo de masa M = 5.5kg fue suspendido del techo a través de una cuerda. Se consideraron tres longitudes de cuerda, $\ell_0 = 3.393, 3.46, 3.527m$, ajustadas para conseguir que el péndulo impactara sobre cada uno de los tres tornillos metálicos. El péndulo fue situado a una distancia de $s_0 = 250mm$ respecto a la cara anterior del bloque de hormigón, tal y como se puede apreciar en la Figura 13.

El movimiento del bloque de hormigón fue medido a través de los indicadores de deformación situados a 41mm respecto a la parte superior e inferior del bloque de hormigón. Además, se emplearon dos medidores de desplazamiento para poder verificar el deslizamiento residual tras la colisión del péndulo.

De los distintos ensayos realizados por Goda en 1994 se ha considerado para el presente caso de aplicación aquel que se corresponde con una longitud de cuerda $\ell_0 = 3.393$ m, haciendo colisionar el péndulo en el tornillo metálico situado a $\ell_1 = 168$ mm.

5.3. Modelización a través del Método de los elementos finitos

El modelo a escala del dique vertical ha sido analizado a través del método de los elementos finitos bajo la hipótesis de deformación plana. En la Figura 14 se muestra la geometría y la malla de elementos finitos empleada en el análisis numérico, consistente en 558 elementos triangulares isoparamétricos de seis nodos para discretizar la banqueta de grava y 156 elementos triangulares isoparamétricos de seis nodos para discretizar el cajón.



Figura 14. Malla de elementos finitos empleada en la simulación numérica

En el borde inferior de la banqueta de grava los desplazamientos verticales y horizontales han sido impedidos, permitiendo el libre movimiento en el resto de bordes de la geometría no involucrados en el contacto entre el cajón y la banqueta de grava. La parte inferior del cajón así como la zona central de la banqueta de grava son modelados a través del contacto descrito en secciones anteriores del presente trabajo. Esta zona de contacto queda resaltada en rojo en la Figura 14.

En relación a la carga impulsiva derivada de la colisión del péndulo, la velocidad de impacto del péndulo ha sido derivada de las ecuaciones de movimiento de un péndulo, calculando el impulso de impacto a partir de dicha velocidad. Estas expresiones son:

$$\omega = s_0 \cdot \left(g/\ell_0\right)^{1/2}$$

$$I = M \cdot \omega \cdot (1 + e_0)$$
(29)

En la expresión (29) e_0 es el coeficiente de restitución, siendo su valor en este caso de 0.2. Incorporando los datos especificados en los párrafos anteriores, es decir, $s_0 = 250$ mm, $\ell_0 = 3.393$ m y M = 5.5kg, se obtiene un impulso de I = 2.81 N/s. Por otro lado, debido a que la simulación numérica se realiza bajo la hipótesis de deformación plana, es necesario corregir el impulso I para obtener un sistema dinámico en el que la relación entre la masa del sistema y la fuerza aplicada sea igual a la del modelo a escala. De esta forma, en el modelo numérico, se considera un impulso de I = 13.71 N/s.

Este impulso fue aplicado a una altura de $\ell_{i} = 168$ mm sobre la base del cajón mediante el esquema triangular de la Figura 15.



Figura 15. Desarrollo temporal de la fuerza puntual aplicada sobre el cajón.

Tanto la banqueta de grava como el cajón han sido modelados bajo un comportamiento constitutivo elástico lineal isótropo. La rigidez horizontal considerada por Goda en su modelo masa-muelle, derivada a partir del movimiento del bloque de hormigón medido en el ensayo, era de $K_x \approx 500 \text{kN}/\text{m}$. El valor asignado al módulo tangencial *G* para la banqueta de grava en el modelo numérico fue el asociado a esta rigidez horizontal, siendo el coeficiente de Poisson v = 0.25. El módulo tangencial del cajón fue de $G = 2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ siendo el coeficiente de Poisson v = 0.25.

Debido a que la ley constitutiva empleada es elástico lineal, se ha incorporado un amortiguamiento de Rayleigh para poder reproducir numéricamente los efectos de la histéresis presente en la relación tensión-deformación de la banqueta de grava. Los valores asignados a los coeficientes de Rayleigh fueron $\alpha = 0.023$ y $\beta = 0.023$.

Para modelar correctamente el fenómeno de contacto, se consideró un coeficiente de penalización $\varepsilon_n = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^3$, siendo el coeficiente de fricción $\mu = 0.65$. Por último, el parámetro de regularización de la ley de Coulomb considerado ha sido $\chi = 10^{-10}$. Los valores asignados a los parámetros del esquema numérico integración temporal GN22, fueron $\beta_2 = 0.605$, $\beta_1 = 0.6$.

5.4. Resultados y discusión

Antes de analizar la respuesta del cajón ante el impacto del péndulo así como el comportamiento dinámico del contacto incorporado en la interface entre el cajón y la banqueta de grava, se muestra el correcto funcionamiento estático del modelo numérico, analizando la respuesta del sistema cajón – banqueta de grava al colocar el cajón sobre la banqueta de grava.

En la Figura 16 se puede apreciar el desplazamiento vertical del sistema cajón-banqueta de grava al colocar el cajón sobre la banqueta. En esta figura, se puede apreciar como la transición de colores del cajón a la banqueta de grava es continua, por lo que el fenómeno de la interacción entre el cajón y la banqueta de grava, desde el punto de vista de compatibilidad geométrica, ha sido simulado correctamente.



Figura 16 Isolíneas de desplazamiento vertical tras apoyar el cajón sobre la banqueta de grava. Resultado numérico.

Una vez analizado el fenómeno de contacto estático desde el punto de vista de la compatibilidad geométrica de mallas, se observa en la Figura 17 el campo de tensiones registrado en la banqueta de grava y en el cajón tras apoyar el cajón. En esta figura se puede apreciar como la distribución de tensión vertical en la superficie de contacto entre el cajón y la banqueta de grava es propia de una cimentación rígida, mostrando unos valores máximos de tensión vertical en los extremos y un valor mínimo en el centro. Por otra parte, el valor medio de las tensiones en la superficie de contacto se corresponde con el peso propio del cajón $\sigma_{\rm c} = 2314 \cdot 9.81 \cdot 0.202 = 4586 \text{ N/m}^2$.



Figura 17 Isolíneas de tensión vertical registradas en banqueta de grava y cajón tras colocar el cajón. Resultado numérico.

Revista "Pensamiento Matemático" – Número 1 – Oct'11 ISSN 2174-0410 Una vez analizado el comportamiento del contacto entre el cajón y la banqueta de grava de forma estática, se pasa a continuación a analizar la respuesta del cajón ante el impacto del péndulo, prestando especial atención al comportamiento dinámico del contacto.

En la Figura 18 se muestra la comparación entre los datos experimentales obtenidos por Goda en 1994 y los resultados numéricos alcanzados al analizar la respuesta del dique vertical a escala ante la acción impulsiva de un péndulo.



Figura 18. Comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales obtenidos por Goda en 1994. Desplazamientos horizontales del cajón.

En esta figura se puede apreciar como la respuesta numérica obtenida es bastante buena. Se observa como los desplazamientos numéricos registrados son muy similares a las mediciones experimentales, siendo la diferencia entre los datos experimentales y los numéricos inferiores al 8%.

Tras aplicar el impacto, se observa como el desplazamiento horizontal no regresa a cero, si no que existe un desplazamiento residual, representando el deslizamiento sufrido por el bloque de hormigón sobre la banqueta de grava tras la colisión del péndulo.

Debido a que la diferencia entre las lecturas experimentales de desplazamiento residual registradas por los indicadores es insignificante, se pudo concluir que el impacto del péndulo no causo el cabeceo del bloque de hormigón. Esta última observación se puede también derivar de los resultados numéricos, ya que tampoco existe una diferencia apreciable entre los desplazamientos residuales obtenidos de cada indicador. El desplazamiento residual registrado en los cálculos numéricos es un 20% inferior a los registrados experimentalmente.

En la Figura 19 se puede apreciar el desplazamiento horizontal experimentado por la esquina inferior izquierda del cajón junto con el desplazamiento horizontal del nodo de la banqueta de grava más cercano a esta esquina del cajón. Se puede apreciar claramente como tras la colisión del péndulo, el bloque de hormigón queda ligeramente desplazado respecto a su posición inicial, existiendo un deslizamiento de unos 0.4mm, valor muy similar al registrado experimentalmente.



Figura 19 Comparación entre el desplazamiento horizontal registrado en la esquina inferior derecha del cajón y el nodo de la escollera más próximo a la esquina inferior derecha del cajón.

En la Figura 20 se muestra, empleando un factor de amplificación de desplazamientos de 20, la deformada en el instante en el que se alcanza el máximo desplazamiento horizontal. En esta figura se aprecia claramente la pérdida de contacto entre el bloque de hormigón y la banqueta de grava derivada de la colisión del péndulo. De la misma forma, se aprecia como el contacto implementado reproduce adecuadamente la no interpenetración entre las geometrías de los cuerpos que entran en contacto.



Figura 20 Deformada en el instante t=0.032s, máximo desplazamiento horizontal. Resultado numérico.

La pérdida de contacto parcial entre el bloque de hormigón y la banqueta de grava queda puesta de manifiesto con más claridad en la Figura 21, en la que se muestra el desplazamiento vertical experimentado en la esquina inferior izquierda del cajón junto con el desplazamiento vertical del nodo de la banqueta de grava más cercano a este. En esta figura se aprecia claramente como la colisión del péndulo es de suficiente intensidad para separar el bloque de hormigón de la banqueta de grava. También se aprecia cómo, una vez el efecto del impacto ha pasado, el peso del bloque de hormigón es el causante del restablecimiento del contacto, no existiendo interpenetración apreciable entre ambos cuerpos.



Figura 21. Comparación entre el desplazamiento vertical registrado en la esquina inferior derecha del cajón y el nodo de la escollera más próximo a la esquina inferior derecha del cajón.

Por último, en la Figura 22 se muestra el campo de tensiones registrado en la banqueta de grava y el cajón tras el impacto del péndulo. En esta figura se puede apreciar como la distribución de tensión vertical en la superficie de contacto entre el cajón y la banqueta de grava representa correctamente el giro del cajón, mostrando una concentración de tensiones verticales en la parte derecha inferior del cajón, mostrando una buena compatibilidad entre los registros obtenidos en la banqueta de grava y el cajón.



Figura 22. Isolíneas de tensión vertical registradas en la banqueta de grava y el cajón tras el impacto del péndulo. Instante de tiempo t=0.032s. Resultado numérico.

6. Conclusiones

En el presente artículo de investigación se describe la aplicación de la mecánica de contacto al fenómeno de la interacción suelo estructura bajo una perspectiva numérica. Se describe el modelo teórico necesario para la correcta reproducción del fenómeno de contacto, basado en relaciones cinemáticas y constitutivas adecuadas, abordando posteriormente los aspectos fundamentales para una correcta resolución numérica, a través del método de los elementos finitos.

Bajo el marco teórico y numérico propuesto, se reproduce numéricamente un ensayo de laboratorio a escala de un dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo. Las principales conclusiones alcanzadas son:

- La interacción suelo-estructura que involucra importantes deformaciones así como pérdida de contacto entre superficies y posterior restablecimiento del mismo se representa mejor a través de la mecánica de contacto friccional que prescribiendo condiciones de contorno.
- Considerando algoritmos numéricos apropiados, el método de los elementos finitos puede proporcionar soluciones precisas y robustas a problemas de la interacción suelo-estructura.
- En el caso particular abordado de la colisión de un péndulo sobre

un dique vertical los resultados numéricos alcanzados reproducen fielmente el comportamiento obtenido experimentalmente.

7. Referencias

- SHENG D, WRIGGERS P, SLOAN W. Application of Frictional Contact in Geotechnical Engineering. *International Journal of Geomechanics*. 2007; 7(3): 176-185.
- [2] ZIENKIEWICZ OC, SHIOMI T. Dynamic behavior of saturated porous media: The generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.* 1984; 8:71-96.
- [3] DESAI CS. *Geotechnical Modeling and Applications*. Gulf Publishing Company, 1987.
- [4] BEA RG, WRIGHT SG, SIRCAR P, NIEDORODA AW. Wave Induced Slides in South Pass Block 70, Mississippi Delta. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE.* 1983; **109**(1):619-644.
- [5] WRIGGERS P. Computational Contact Mechanics. Springer: New York, 2006.
- [6] KIKUCHI N, ODEN JT. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [7] RAPPAZ M, BELLET M, DEVILLE M. Numerical Modeling in Materials Science and Engineering. Springer: New York, 2003.
- [8] ODEN JT, PIRES EB. Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*. 1983; 50: 67-76.
- [9] HUGHES TJR. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Publications: New York, 2000.
- [10] KATONA MG, ZIENKIEWICZ OC. A unified set of single step algorithms part 3: the beta-m method, a generalization of the Newmark scheme. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1985; **21**: 1345-1359.
- [11] GODA Y. Dynamic Response of Upright Breakwaters to Impulsive Breaking Wave Forces. *Coastal Engineering* 1994; **22**(1-2): 135-158.

[12] STICKLE MM. Sobre la respuesta dinámica del terreno bajo la acción del olaje en cajones fondeados en suelos arcillosos. PhD Thesis, Polytechnic University of Madrid, 2010.

Sobre los autores:

Nombre: Miguel Martín Stickle *Correo Electrónico:* <u>miguel.martins@upm.es</u> *Institución:* Grupo M2i, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Pablo de la Fuente *Correo Electrónico:* <u>pdelaf@caminos.upm.es</u> *Institución:* ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Carlos Oteo *Correo Electrónico:* <u>carlosoteo@telefonica.net</u> *Institución:* Catedrático de Ingeniería del Terreno