Experiencias Docentes
Visualización de Lugares Geométricos mediante el uso de Software de Geometría Dinámica Geogebra

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

La utilización de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, llamadas comúnmente TIC's, son en la actualidad un apoyo fundamental en nuestra labor como docentes. Este artículo está orientado tanto a docentes como a alumnos de últimos años de bachillerato y primeros años de carreras de ciencias e ingenierías. La finalidad fundamental es integrar el uso del software de geometría dinámica Geogebra con la resolución de casos prácticos para la obtención de algunos lugares geométricos famosos.

Palabras Clave: Geogebra, lugares geométricos, software de geometría dinámica.

1. Introducción

¿Qué es Geogebra?. Geogebra es un software matemático interactivo para la educación en colegios y universidades. El proyecto nació en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo, y su creador Markus Hohenwarter lo continua en la actualidad en la Universidad de Atlantic, en Florida.

Markus Hohenwarter

Una de las principales características de Geogebra, es que está escrito en Java y por tanto su uso está disponible en múltiples plataformas. Esta característica le confiere un carácter universal e independiente de los sistemas operativos (libres o no) sobre los que corre.

Es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo (y por eso puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas). Se puede decir que Geogebra integra en una única herramienta lo que sus homónimos comerciales (léase Derive y Cabri fundamentalmente) aportan de forma separada.

Su categoría más cercana es "software de geometría dinámica" (del inglés: DAS).

Con Geogebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas... etc, mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

Geogebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

2. Geogebra vs. "Otros"

A lo largo de los últimos años se ha producido un crecimiento casi exponencial de la aparición en el mercado de diferentes softwares matemáticos especializados, cada uno por supuesto con sus seguidores incondicionales y sus detractores. Son multitudes las razones por las que entre todos estos softwares Geogebra destaca, y a continuación vamos a nombrar algunas de ellas.

1. Geogebra es un software escrito con código libre, gratuito con licencia GNU/GPL. Existen en el mercado otros programas de idénticas prestaciones o incluso más limitadas pero cuyo coste es elevado, como por ejemplo Cabri, Derive o Mathematica. Aquel que desee utilizar Geogebra no tiene que pagar ninguna licencia de uso ni utilizar ningún software patentado, puesto que su uso es libre y gratuito, Lo único que debe hacer es descargarlo de su página oficial[1], e instalarlo en su ordenador.

2. Geogegra es un software de geometría dinámica, esto es, permite construcciones de geometría elemental, donde los elementos se construyen y se definen por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa.

3. Geogebra integra perfectamente a través de su interfaz, tanto el trabajo desde una perspectiva puramente geométrica en la ventana gráfica, como desde una perspectiva totalmente analítica en la ventana algebraica, de este modo cada uno puede trabajar en una ventana u otra interactuando

[1] http://www.geogebra.org

con ambas y pasándose de una a otra en cada momento. Este hecho nos permite trabajar con nuestros alumnos de modo mucho más profundo y facilitar el desarrollo de nuevas estrategias cognitivas y por lo tanto facilitar en gran medida los procesos de enseñanza-aprendizaje.

4. Sus rutinas analíticas permiten su uso como instrumento para el estudio de un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, etc. Es de muy fácil manejo a pesar de su potencial. El aprendizaje es muy intuitivo y se realiza al hilo de su utilización en contextos de aprendizaje, lo que no requiere ni sesiones especiales de manejo del programa ni elaboración de apuntes sofisticados.

5. Permite introducir coordenadas y ecuaciones de forma directa. Permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

6. Tiene implementado rutinas de animación de funciones y de localización de máximos, mínimos, puntos de inflexión, función derivada, integral definida, recta tangente en un punto. También cabe la posibilidad de crear construcciones geométricas fundamentales con regla y compás, para estudios de triángulos y polígonos en general, construcción de cónicas, etc.

7. Permite exportar los trabajos a páginas web para interactuar dinámicamente de manera online. Además Geogebra permite trabajar bien en local es decir instalando la aplicación en el ordenador, como de forma online, sin ser necesario que el usuario deba instalar la aplicación en ningún ordenador, en este caso sólo es necesario una conexión a internet.

8. Para aquellos que trabajen en LaTeX (como un servidor), el programa nos ofrece la posibilidad de exportar código *PSTricks*[2] que permite construir gráficos de carácter vectorial y compilarlos en LaTeX.

9. La comunidad tanto de desarrolladores como de usuarios de Geogebra es amplísima, además de tratarse de una comunidad muy proactiva. Por ello es relativamente sencillo conseguir multitud de trabajos ya realizados por miembros de dicha comunidad e implementarlos con nuestros resultados.

Todas estas características hacen que en la actualidad Geogebra sea un software ampliamente utilizado por la comunidad pedagógica con una tremenda aceptación tanto por parte de los docentes como por los alumnos debido a la facilidad de aprendizaje en su manejo, y por la agradable naturalidad y sencillez con la que se puede trabajar en su interfaz.

Pero para ser justos, hemos de nombrar también los que desde nuestro punto de vista deben ser consideradas las carencias de Geogebra en la actualidad, que por otra parte constituyen los principales esfuerzos en los que la comunidad de desarrolladores está trabajando.

[2] http://tug.org/PSTricks/main.cgi/

1. Aunque existe una versión Beta en 3D[3], el trabajo en tres dimensiones es muy limitado.

2. El tratamiento analítico de curvas algebraicas de orden mayor que dos, no es tan intuitivo como ocurre por ejemplo con las cónicas. Por ello se debe recurrir a otro tipo de construcciones para obtener los resultados de las mismas en pantalla.

Esta última desventaja es precisamente la finalidad principal de la elaboración de éste artículo, puesto que nos da pie tanto a la presentación de las características fundamentales de Geogebra como de su utilización pedagógica para la construcción de algunos lugares geométricos que dan lugar a ciertas curvas algebraicas históricas.

3. Presentación del Software

Por supuesto, ni que decir tiene que no es la finalidad de este artículo servir de tutorial o manual de utilización de Geogebra, por lo que recomendamos al lector que indague por la red con el fin de utilizar uno que se ajuste a sus necesidades, por ejemplo el Manual Oficial de Geogebra en español que puede ser descargado en la página oficial del mismo.

Sin embargo, sí que haremos una presentación tanto de la interfaz general del software como de alguna herramienta que utilizaremos posteriormente a la hora de obtener las gráficas de ciertos lugares geométricos.

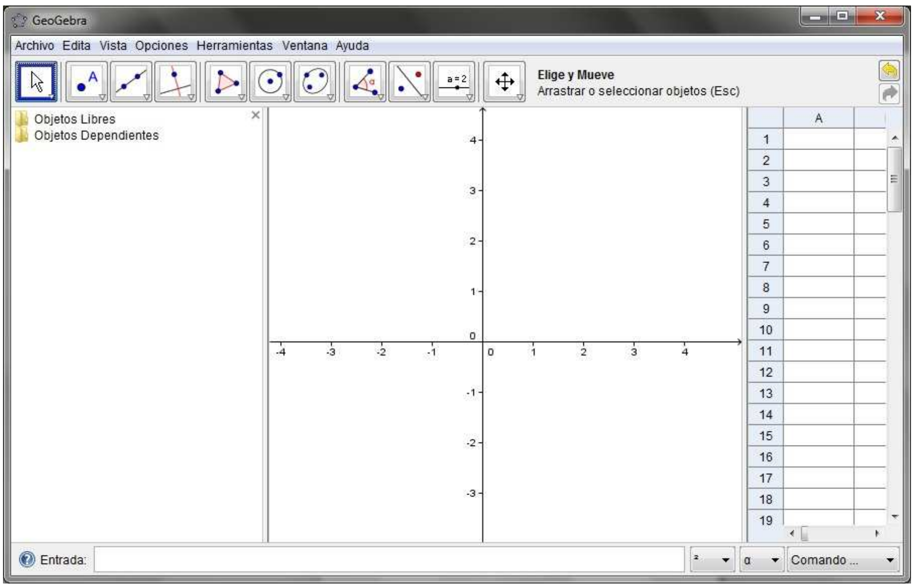


Figura 1. Interfaz General de Geogebra

[3] http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D

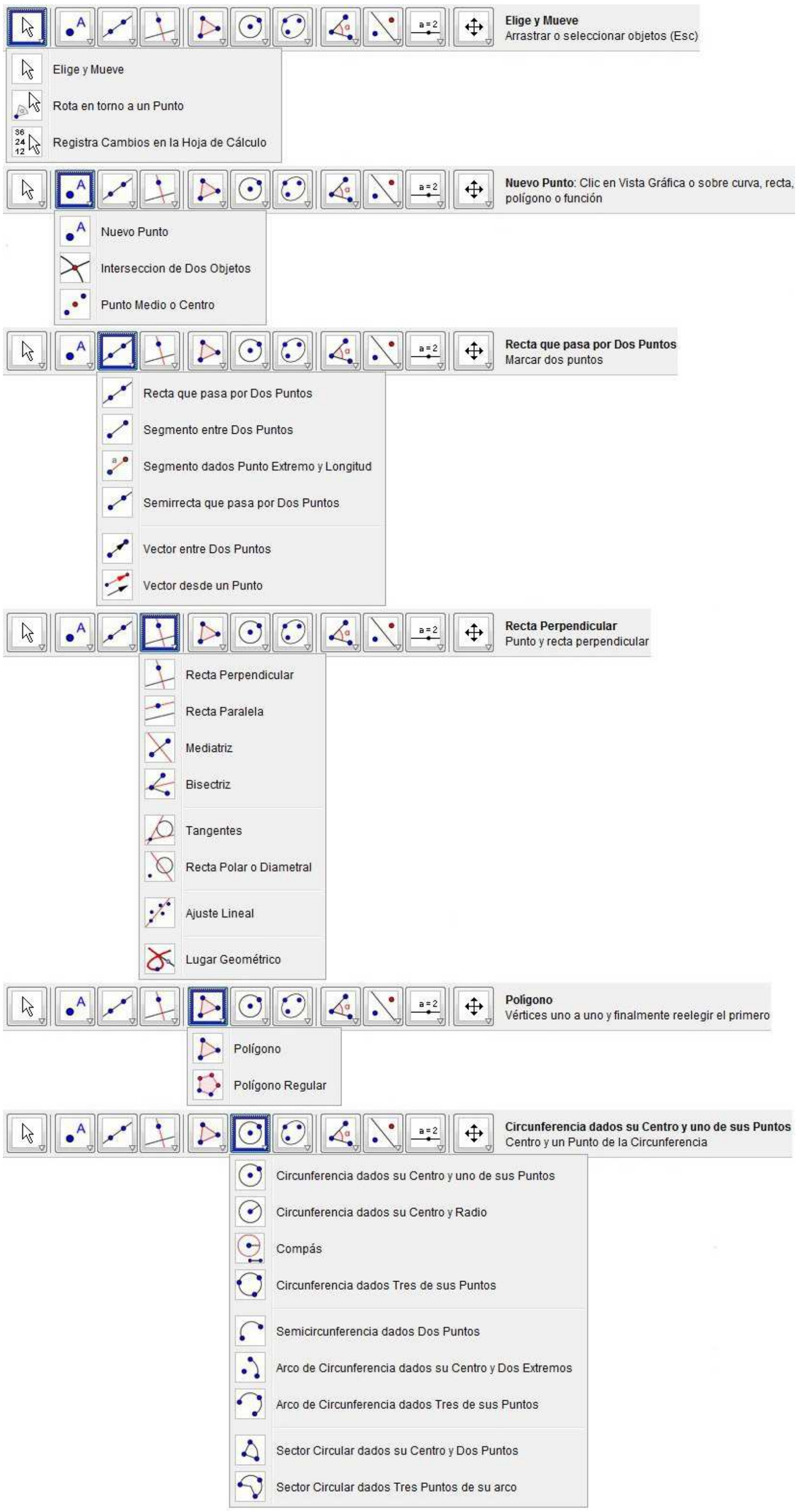


Figura 2. Herramientas Geogebra (I)

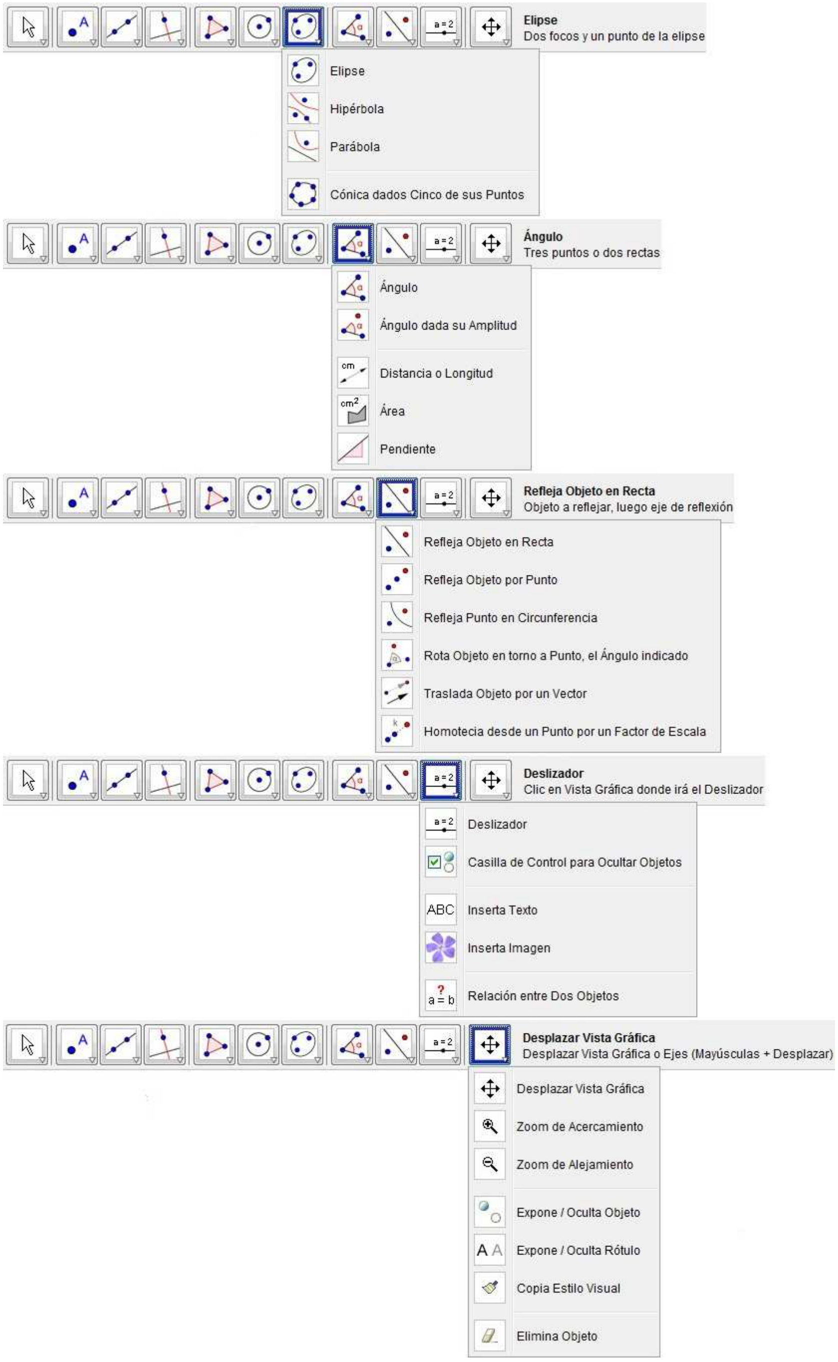
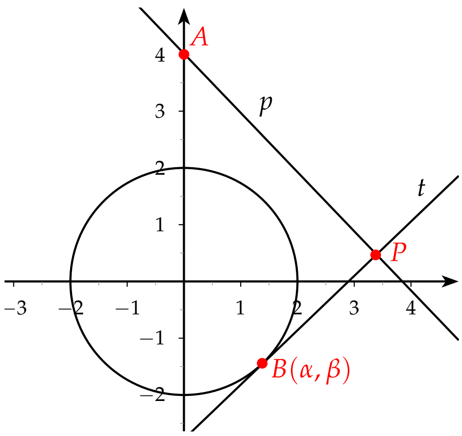


Figura 3. Herramientas Geogebra (II)

4. Lugar Geométrico (I)

4.1. Enunciado

Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico descrito por el punto P, pie de las perpendiculares trazadas desde el punto $A(0,4)$ a las tangentes a dicha circunferencia.



4.2. Resolución Analítica

El punto $B(\alpha, \beta)$, por pertenecer a la circunferencia, cumplirá su ecuación, y por lo tanto:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{4 - \alpha^2}$$

Para obtener la tangente a la circunferencia en el punto B y por lo tanto su pendiente, derivamos su expresión analítica:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow (y')_{(\alpha,\beta)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

por lo tanto la expresión analítica de la tangente una vez obtenida la pendiente en el punto B será:

$$t \equiv y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \Rightarrow \beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2$$

Cualquier recta perpendicular a la recta t tangente a la circunferencia tendrá como pendiente:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Como queremos la perpendicular a la tangente a la circunferencia en B que pasa por el punto A, su expresión resultará:

$$p \equiv y - 4 = \frac{\beta}{\alpha}x \Rightarrow \beta x - \alpha(y - 4) = 0$$

Por lo tanto tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$\beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2$$

$$\beta x - \alpha(y - 4) = 0$$

Previamente operando en la segunda expresión e introduciendo la primera en ella podemos obtener:

$$\beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2 \Rightarrow \alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha x + \beta y = 4$$

Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (α, β):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ \alpha(y-4) - \beta x = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$\beta = \alpha \, \frac{y-4}{x} \Rightarrow \alpha x + \alpha \, \frac{(y-4)y}{x} = 4 \Rightarrow \alpha(x^2+y^2-4y) = 4x$$

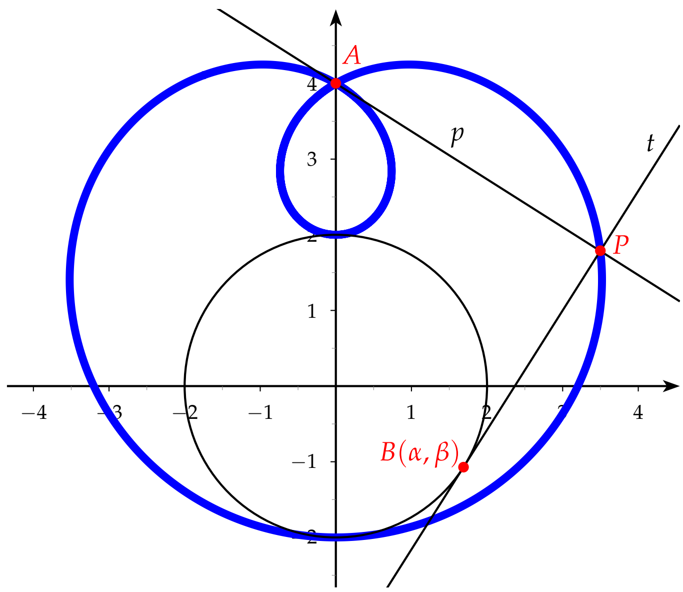
$$\alpha = \frac{4x}{x^2+y^2-4y}$$

$$\beta = \frac{4(y-4)}{x^2+y^2-4y}$$

Introduciendo los valores de α y β en la ecuación $\alpha^2+\beta^2 = 4$ obtenemos la expresión analítica del lugar geométrico solicitado, que resulta:

$$4x^2+4y^2 = (x^2+y^2-4y)^2$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describe el punto P.



4.3. Visualización con Geogebra

1. Dibujamos en la ventana gráfica una circunferencia centrada en el origen y de radio 2, así como el punto $A(0,4)$.

2. Colocamos sobre la circunferencia un punto genérico B a fin de que le podamos mover, y sobre este punto hacemos pasar la recta tangente t a la circunferencia que pasa por él.

3. Desde el punto A hacemos trazar la perpendicular p a dicha tangente t, y donde intersecten colocamos un punto P.

4. Activamos el rastro del punto P clicando con el botón derecho sobre dicho punto.

5. Clicamos sobre la herramienta Elección y hacemos que el punto B se mueva sobre la circunferencia. De este modo, el punto P se irá punteando el lugar geométrico que buscamos.

6. Si hacemos visible la hoja de cálculo en el Menú Vista, podemos obtener las coordenadas (x,y) de los puntos del lugar geométrico que marca el punto P con el rastreo activado.

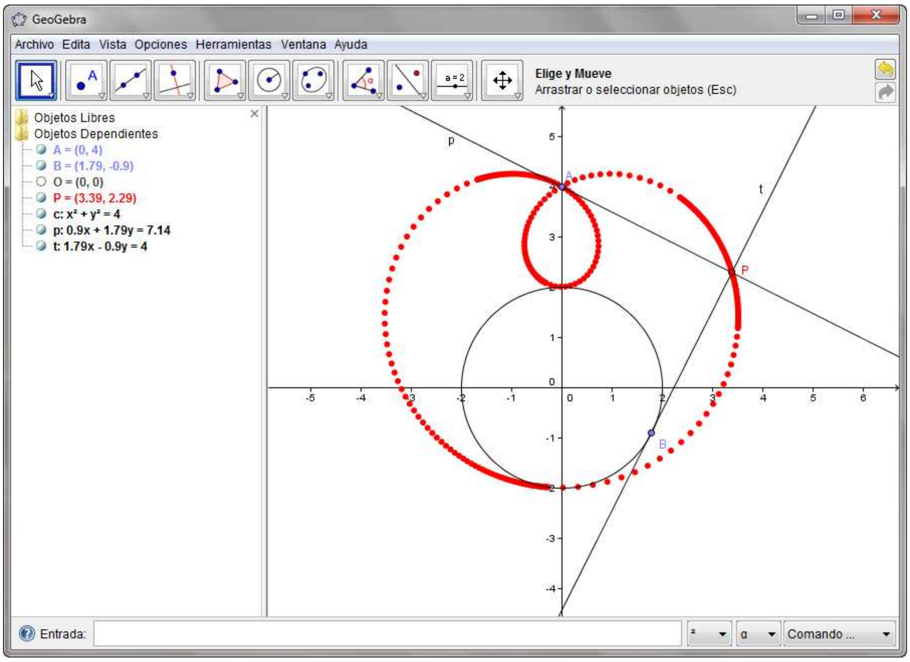


Figura 4. Generación del Lugar Geométrico I con Geogebra

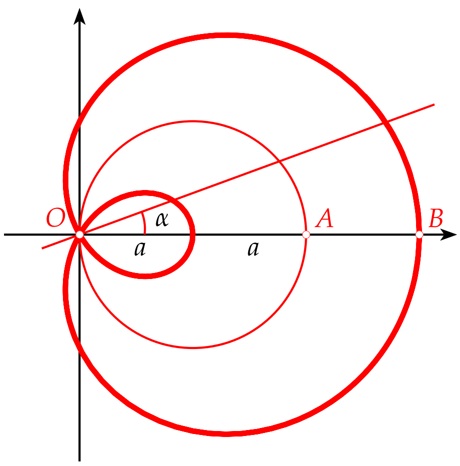
Como alternativa al punto 6, cabe la posibilidad de visualizar el lugar haciendo uso precisamente de la herramienta *Lugar Geométrico*, en el que en primer lugar se pincha con el ratón el punto del lugar geométrico deseado, y en segundo lugar el punto que vamos a mover. Luego si pinchamos con esta herramienta primero el punto P y luego el punto B nos arroja en pantalla el resultado del lugar geométrico solicitado, pero esta vez de forma continua en lugar de “por puntos”. Recomendamos utilizar esta segunda alternativa después de la primera puesto que no es tan constructiva desde un punto pedagógico, ya que simplemente presenta al alumno el resultado final.

En el caso de curvas algebraicas el gran inconveniente de Geogebra es que no nos da una expresión implícita de las mismas, y si introdujéramos una expresión de este tipo en la ventana algebraica nos arrojaría un error. Este punto es uno de los “objetivos de mejora” en el que los desarrolladores se encuentran trabajando actualmente para hacer el software tan competitivo como otros programas comerciales.

4.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es el LIMAÇON (O CARACOL) DE PASCAL, descubierto por el padre de Blaise Pascal, Étienne Pascal (1588-1651) y denominada así por el francés, Gilles-Personne Roverbal, en 1650 cuando hizo uso de esta curva para utilizarlo como ejemplo de sus métodos de dibujo de tangentes, en definitiva para el estudio de la diferenciación. La curva en cuestión ya había sido estudiada por Alberto Durero (1471-1528) a quien se le debe verdaderamente su descubrimiento, mucho antes de que Pascal centrara su atención en ella, y 125 años antes de la denominación de Roverbal. Durero propuso un método de dibujo del caracol, aunque no lo denominó limaçon, sino *arácnida* o *araña* en su obra *Vnderweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt* (Núremberg, 1525). Estudiada también por Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874), en *Nouveaux mémories de l'Académie de Bruxelles*.

El nombre de limaçon proviene del término en latín *limax* (caracol). Étienne Pascal mantuvo correspondecia con Mersenne, en cuya casa se celebraban reuniones con las matemáticas como tema fundamental de las mismas, y a las que acudían geómetras[4] famosos, entre ellos Roverbal, quien utilizó este foro para darle el nombre con el que la conocemos actualmente.



Ecuación cartesiana: $(x^2 + y^2 - 2ax) = b^2(x^2 + y^2)$ con $2a = OA$, $b = AB$.

[4] En el s.XVII los términos geometría y matemáticas eran sinónimos.

Ecuación polar: $\rho = b + 2a\cos\alpha$, con a y b distintos de 0.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2a\cos^2 t + b\cos t \\ y = 2a\cos t \operatorname{sen} t + b \operatorname{sen} t \end{cases}$

o bien: $$\begin{cases} x = \dfrac{(1-t^2)(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \\ \\ y = \dfrac{2t(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

Se trata de una curva cuártica limitada, cerrada y continua, salvo cuando $b > 2a$, en cuyo caso el centro es un punto aislado. El eje de las $x(y=0)$ es un eje de simetría y cuando $b = 2a$ el centro es un punto singular cuspidal y el eje de las $x(y=0)$ es tangente en él. Si $b < 2a$, el centro es un nodo y las rectas

$$y = \pm\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{b}x$$

son tangentes en el nodo. El limaçon de Pascal es la concoide de un círculo con relación a uno de sus puntos O, siendo el círculo de diámetro OA con $A(2a, 0)$. Y la cisoide de dos círculos cuando uno pasa por el centro del otro con respecto a ese centro.

Cuando $b = 2a$ entonces el caracol se convierte en una cardioide y si $b = a$ entonces es un trisectriz. Si bien esta trisectriz no es la de MacLaurin.

Si $b \geq 0$ (el caso que dibujamos aquí con $a = b = 1$) entonces el área de la vuelta interna es

$$a^2\left(\pi - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

y el área entre las vueltas es $a^2(\pi + 3\sqrt{3})$

El limaçon de Pascal, también llamado concoide[5] del círculo, es una bicircular racional y, como todas estas curvas, es la podaria de un punto P respecto de una circunferencia de radio a, si P se encuentra fuera de la circunferencia. También se puede considerar la inversa de una cónica con respecto a uno de sus focos.

[5] Sea C una curva arbitraria y O un punto exterior a ella. Sea M un punto de la curva C por el que trazamos un radio. Desde M trazamos un segmento de longitud k en ambas direcciones de la curva. El conjunto de puntos P y P' de los extremos de los segmentos generados por los puntos base de la curva C y el polo O forman la concoide. Es decir, cuando M describe la curva C, el lugar geométrico de los puntos P alineados con O y M, tales que $MP = k$, se denomina concoide de C en relación a O y k.

Si los segmentos se trazan desde el punto M con rectas que pasan a través del punto con un ángulo constante α con el radio OM, entonces el conjunto de puntos del segmento se llama concoide oblicua. Si el ángulo constante es igual a $\frac{\alpha}{2}$, entonces la curva es una ortoconcoide. Si las ecuaciones de la curva de partida C son: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ entonces las ecuaciones paramétricas de la concoide con base C y polo $O(a, b)$ son

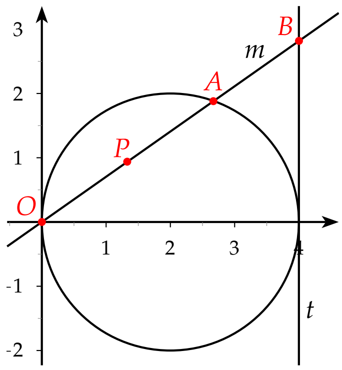
$$\begin{cases} X = x(t) \pm \frac{x(t)-a}{\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}}\, l \\ \\ Y = x(t) \pm \frac{y(t)-b}{\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}}\, l \end{cases}$$

El caracol es una curva analagmática[6]. Es también la catacáustica[7] de un círculo cuando el rayo de luz viene de un punto a finito (no cero), lejano a la circunferencia, propiedad que fue demostrada por Thomas de St. Laurent en 1826. Son casos particulares de óvalos de Descartes, es decir, es un óvalo de Descartes de foco doble. La evoluta del limaçon es la cáustica por reflexión del círculo.

5. Lugar Geométrico (II)

5.1. Enunciado

Se considera la circunferencia de expresión $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Se traza la recta tangente t a dicha circunferencia por el extremo diametralmente opuesto al origen de coordenadas. Trazamos por el origen una recta cualquiera m. Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que la distancia desde el origen de coordenadas a P sea igual que la distancia de la intersección de la recta m cualquiera con la circunferencia (Punto A) al punto B.



5.2. Resolución Analítica

Utilizamos coordenadas polares de tal forma que si consideramos θ como el ángulo medido desde el eje de abcisas hasta la recta genérica $y = mx$, entonces

[6] Se trata de una curva que es invariante con respecto a la inversión, es decir, que su inversa es la misma curva. Esta propiedad fue estudiada en primer lugar por el inspector general de minas francés Théodore Florentin Moutard (1827-1901) en 1864.

[7] La cáustica es un método de obtención de una nueva curva. basándose en otra curva dada y un punto (origen de los rayos). Dada una curva C y un punto fijo S (origen de los rayos), la *catacáustica*, o cáustica por reflexión, es la envolvente de los rayos de luz que provienen de S y son reflejados sobre la curva. Y la *diacáustica*, o cáustica por refracción, es la envolvente de los rayos refractados. Los rayos de luz pueden ser paralelos si el punto S está en el infinito.

Sea γ una curva definida por la ecuación $y = y(x)$ y un haz de rayos que siguen la dirección del vector $\overline{v} = (a, b)$; las ecuaciones de la cáustica vienen dadas por las expresiones:

$$X = x - \frac{(b - ay'(x))^2}{2y''(x)}\, y'(x) - \frac{(b - ay'(x))(a + by'(x))}{2y''(x)}$$

$$Y = y(x) - \frac{(b - ay'(x))^2}{2y''(x)} - \frac{(b - ay'(x))(a + by'(x))}{2y''(x)}\, y'(x)$$

Cuando los rayos de luz reflejan una curva, entonces la envolvente de los rayos reflejados es una cáustica por reflexión o una *catacáustica*. Cuando la luz es refractada por una curva, entonces la envolvente de los rayos refractados son una cáustica por refracción o un *diacáustica*. Es decir, una cáustica es una envolvente de los rayos procedentes de un punto que atraviesan un medio óptico cualquiera, o bien se reflejan en una superficie.

Una cáustica no siempre genera una curva. Por ejemplo, los rayos reflejados desde el foco de una parábola no se intersecan y por tanto su envolvente no forma ninguna curva.

La cáustica de una curva C con los rayos paralelos en una dirección, genera una curva que es también diacáustica de la curva C con rayos paralelos en dirección opuesta.

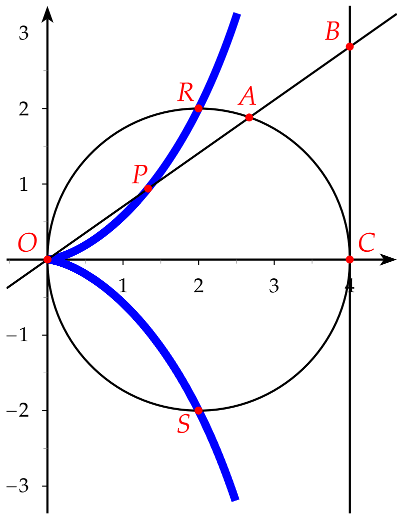
resulta que el punto A tiene de coordenadas $\rho_A = 4\cos\theta$. Del mismo modo $\rho_B = \frac{4}{\cos\theta}$. Por lo tanto la distancia entre los puntos A y B (que es la misma que del punto origen de coordenadas O al punto P del lugar geométrico solicitado), será:

$$\delta_{AB} = \frac{4}{\cos\theta} - 4\cos\theta = 4\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) = 4\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = 4\tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

La expresión de la curva solicitada en coordenadas polares resulta entonces:

$$\rho = 4\tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describe el punto P.



5.3. Visualización con Geogebra

1. Con la herramienta círculo con centro y radio, pinchar en la ventana gráfica de geogebra en el punto $(2,0)$ y radio 2, así dibujamos la circunferencia dada. La otra posibilidad es introducir la expresión de la circunferencia en la barra de entrada de la ventana algebraica.

2. Dibujar una recta que pase por el origen de coordenadas y un punto genérico de la circunferencia (Punto A).

3. Dibujar la recta tangente a la circunferencia en el punto $(4,0)$, o bien introducir en la barra de entrada la expresión de esta recta $(x = 4)$.

4. Colocar un punto en la intersección de la recta genérica que pasa por el origen con la recta $x = 4$ (Punto B).

5. Con la herramienta compás medimos la distancia que hay del punto A al B y llevamos esa distancia al origen de coordenadas. Donde intersecte con la recta genérica colocamos el punto P lugar geométrico solicitado.

6. Activamos el rastro en el punto P, de tal modo que moviendo el el punto A (con la herramienta selección), el punto P va dejando el rastro y dibujando el lugar geométrico pedido.

7. Como alternativa a este último punto, podemos hacer uso de la herramienta *Lugar Geométrico*, pinchando primero sobre el punto P que es el encargado de trazar el lugar solicitado, y después sobre el punto A (el B también es válido), de este modo obtendremos un trazado continuo en lugar de por puntos del lugar geométrico en cuestión.

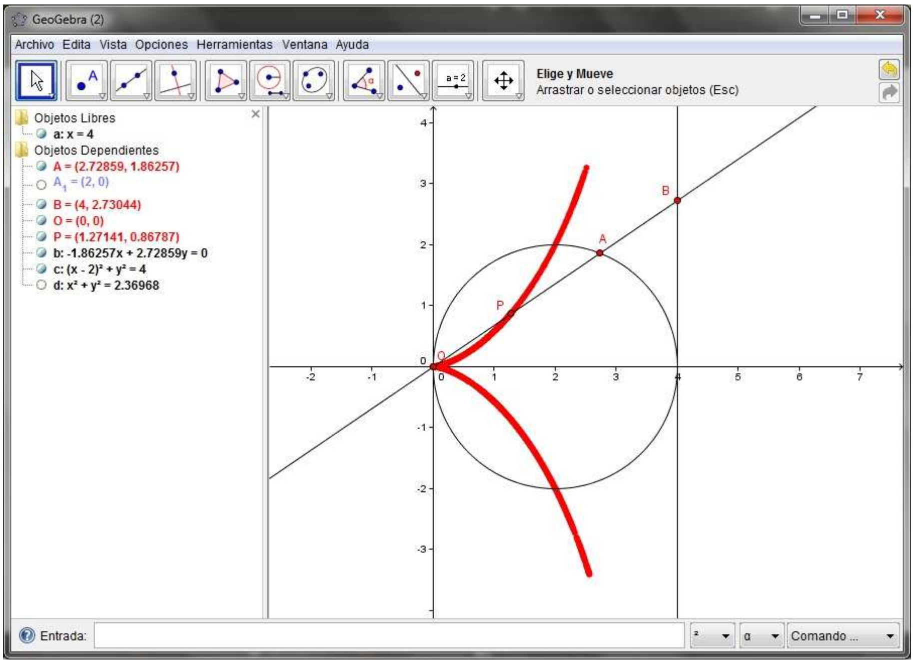


Figura 5. Generación del Lugar Geométrico II con Geogebra

5.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es la CISOIDE DE DIOCLES. Diocles (240-180 a.C.) fue contemporáneo de Nicómedes (280-210 a.C). Llevó a cabo su estudio con el fin de resolver el problema "délico" de hallar la longitud del lado de un cubo cuyo volumen fuera dos veces el de un cubo dado (la duplicación del cubo)[8]. Diocles también estudió el problema de Arquímedes de cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de las dos partes tengan una proporción dada. La atribución de la cisoide de Diocles puede comprobarse en los comentarios de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C), en su libro *La esfera y el cilindro*. En ellos Arquímedes afirma que la cisoide fue creada por Diocles y a él se atribuye.

[8] El problema de la duplicación del cubo, junto con el de la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son considerados los tres problema clásicos griegos de la época heroica, denominada así, puesto que las únicas herramientas usadas para su resolución eran tan sólo el compás y la regla.

Ecuación cartesiana: $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$, con $a > 0$. O bien $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

Ecuación polar: $\rho = 2a \tan\theta \operatorname{sen}\theta$, o bien $\rho = 2a(\sec\theta - \cos\theta)$, siendo a el radio de la circunferencia y θ el ángulo del eje que gira con respecto al eje positivo de las x.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ \\ y = \dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$

O bien $\begin{cases} x = \dfrac{2a}{1+t^2} \\ \\ y = \dfrac{2a}{t(1+t^2)} \end{cases}$

La cisoide de Diocles es la ruleta generada por el vértice de una parábola rodando sobre una parábola igual. Es una cúbica unicursal continua e ilimitada con un eje de simetría y un punto de retroceso. La recta $x = 2a$ es una asíntota vertical y el eje $y = 0$ es un eje de simetría. El centro de coordenadas es un vértice, o punto cuspidal, y el eje de las x es una tangente en dicho punto. El área entre la curva y su asíntota es $3\pi a^2$. Dentro de las curvas cisoides es un caso particular de cisoide oblicua.

Si los puntos R y S están en la cisoide de manera que BS subtiende un ángulo recto a O entonces el lugar geométrico de intersección de las tangentes a B y S queda en el círculo con diámetro $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $(2a, 0)$.

La curva podaria de la cisoide, cuando el punto de la podaria está en el eje más allá de la asíntota, a distancia cuatro veces del vértice de la asíntota, es una cardioide. Por el contrario, la podaria de una parábola con relación a su vértice es una cisoide de Diocles.

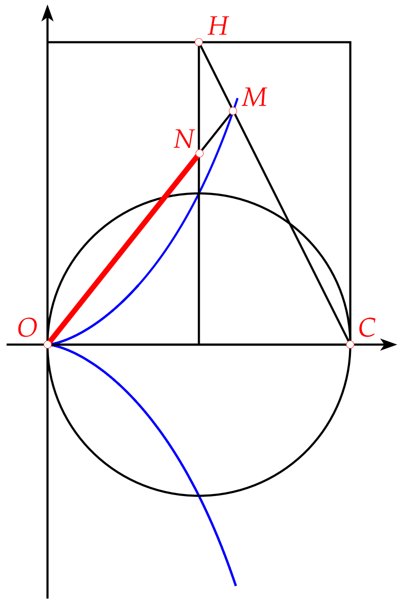
Si se toma como centro de inversión el vértice de la cisoide, la cisoide se invierte en una parábola.

La cáustica de la cisoide cuando se toma el punto radiante como $(8a, 0)$ es una cardiode.

El nombre aparece por primera vez en un trabajo de Gémino (10 a.C - 60). Pierre de Fermat (1601-1665) y Gilles Personne de Roberval (1602-1675) construyeron la tangente para su generación en 1634. Hygens (1629-1695) y John Wallis (1616-1703) encontraron, en 1659, que el área entre la curva y su asíntota era igual a $3\pi a^2$.

Isaac Newton (1642-1727) desarrolló un método de dibujo para la cisoide de Diocles, usando dos segmentos de longitud igual a ángulos rectos. Si se mueven de manera que una línea siempre pase por un punto fijo y el extremo del otro segmento se deslice a lo largo de una línea recta, entonces los puntos medios del deslizamiento del segmento de la línea deslizada trazan una cisoide de Diocles.

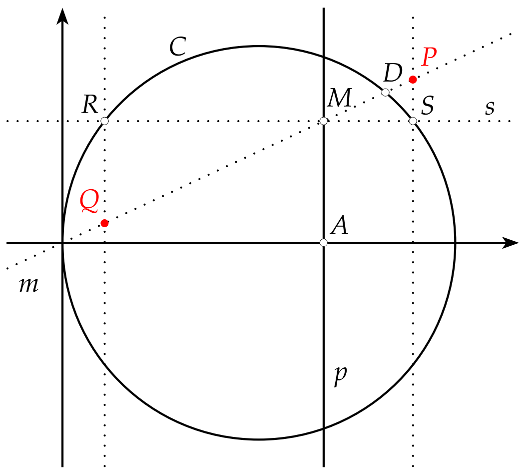
Esta curva, cuyo significado del término es *forma de hiedra*, fue ideada por Diocles aproximadamente en el año 180 a.C. Permite calcular $\sqrt[3]{2}$ tal y como muestra la siguiente figura. Se construye un cuadrado de lado igual al diámetro de la circunferencia. En el lado superior se busca el punto medio del mismo H. Se une mediante una recta el punto H con el punto C, que intersecta a la cisoide en el punto M. Trazando una vertical por H y una línea que une O y M, se obtiene otro punto de intersección N. El segmento ON es la raíz cúbica de 2.



6. Lugar Geométrico (III)

6.1. Enunciado

Se considera la circunferencia C de expresión $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$. Se traza la recta p perpendicular al eje de abcisas por el punto A genérico de coordenadas $(b,0)$. Se traza una recta genérica m que pasa por el origen de coordenadas, y que corta a la recta p en el punto M. Por el punto M hacemos pasar una recta s paralela al eje de abcisas que corta a la circunferencia C en R y S. Por R y S trazamos sendas rectas paralelas a p que cortan a la recta m en los puntos P y Q. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos P y Q.



6.2. Resolución Analítica

El punto M tendrá de coordenadas (b, mb). Introducimos el valor de la ordenada de M en la expresión de C para obtener la siguiente expresión:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + m^2 b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{1}$$

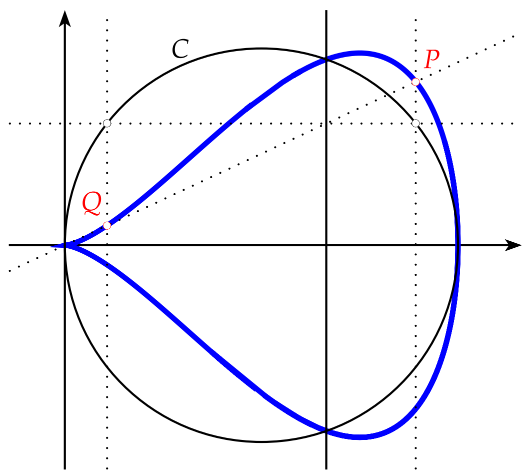
Como $m = \dfrac{y}{x}$ sustituimos este valor en la expresión (1).

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{x^2}\, b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Resolviendo en la expresión (2) obtenemos el lugar geométrico solicitado

$$b^2 y^2 = x^3 (a - x)$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describen los puntos P y Q.



6.3. Visualización con Geogebra

1. Dibujamos la circunferencia C genérica eligiendo la herramientas de circunferencia dado centro y un punto de la misma (por ejemplo).

2. Eligiendo la herramienta de recta que pasa por dos puntos, dibujamos la recta genérica que pasa por el origen m y un punto al azar D de la circunferencia C.

3. Dibujamos una recta vertical genérica p introduciendo su expresión en la barra de entrada ($x = b$, siendo b un número real positivo).

4. Por el punto de intersección de m con p trazamos el punto M y la recta horizontal s, para ello en herramientas elegimos la recta paralela que pasa por un punto.

5. Por los puntos de intersección de s y la circunferencia C, dibujamos los puntos R y S y las rectas verticales, mediante la herramienta recta paralela a otra (p) que pasa por un punto.

6. En los puntos de intersección de las rectas verticales con la recta genérica m colocamos nuestros puntos P y Q y activamos en ellos el rastro. Para ello hacemos clic en ellos con el botón derecho y desplegando el menú de diálogo elegimos la opción Activar Rastro.

7. Elegimos la herramienta Seleccionar y movemos el punto D de este modo al moverse los puntos P y Q representan el lugar geométrico buscado.

8. Como alternativa a este último punto podemos hacer uso de la herramienta *Lugar Geométrico*. Una vez elegida esta pinchamos primero sobre el punto P y luego el D para visualizar la primera parte del lugar geométrico solicitada de forma continua. Y después con la misma herramienta pinchamos sobre el punto Q primero y a continuación el punto R y visualizamos de este modo el lugar geométrico completo.

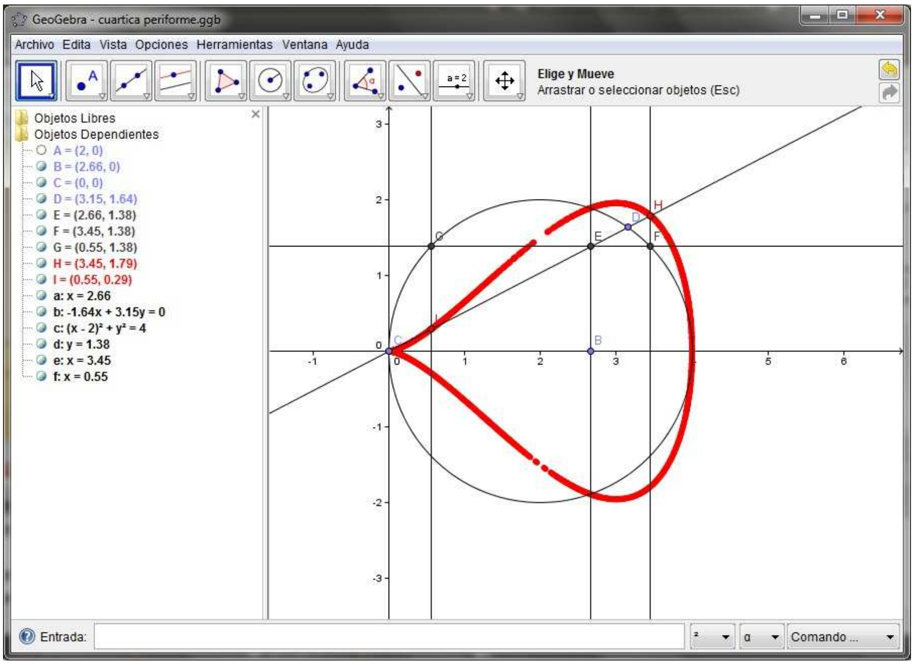


Figura 5. Generación del Lugar Geométrico III con Geogebra

6.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es la CUÁRTICA PIRIFORME. Esta curva fue estudiada por Gohierre de Longchamps (1842-1906) en 1886, entre otras vurvas que fueron nombradas después de él. Anteriormente había sido estudiada por John Wallis (1616-1703) en 1685 y por Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) en 1844.

Ecuación cartesiana: $b^2y^2 = x^3(a - x)$, con $a > 0$, $b > 0$.

O bien: $y = \pm\frac{x}{b}\sqrt{ax - x^3}$

Ecuaciones paramétricas cartesianas: $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ \\ y = \dfrac{a^2\cos^3 t \operatorname{sen} t}{b} \end{cases}$

Curva algebraica plana de cuarto orden, es una cuártica racional. Es una curva limitada, cerrada y continua, en la que el eje de abcisas $(y = 0)$ es un eje de simetría. El centro de coordenadas es un punto singular cuspidal de primer género y la recta $y = 0$ es tangente en él. Los puntos $\left(\frac{3}{4}a, \pm\frac{a^2}{16b}3\sqrt{3}\right)$ son los puntos colocados a la máxima distancia del eje de abcisas.

El área que engloba la curva es igual a $\frac{\pi a^3}{8b}$.

La curva también es conocida como *gota de agua*. Cuando $a = b$ se trata de un caso particular de cuártica piriforme conocida como *cuártica de Bonnet*.

La cuártica piriforme tiene también por ecuación cartesiana

$$y^2(x - r)^2 - 2r^3y + r^4 = 0 \quad \text{con } r > 0$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = r(1 + \cos t) \\ \\ y = \dfrac{r}{1 + \operatorname{sen} t} \end{cases}$$

La recta $x = r$ es, en este caso, un eje de simetría y una asíntota vertical. Es una curva ilimitada y continua. Si la cuártica piriforme toma la fórmula anterior, resulta la misma curva que la *apiena*.

7. Conclusiones

La exposición de los lugares geométricos presentados en este artículo, pueden constituir un ejemplo tipo de cómo preparar de un modo mucho más eficiente y fundamentalmente de un modo geométrico la presentación de ciertas curvas históricas. Para ello Geogebra facilitará las herramientas necesarias tanto para la exposición pedagógica de los docentes como para la preparación y el estudio de los alumnos.

Geogebra es un software potente, versátil, dinámico que se puede adaptar perfectamente a las necesidades específicas de cada usuario. Además es un programa muy intuitivo en su utilización lo que se traduce en un aprendizaje cómodo y muy ágil.

Referencias

[1] ÁLVAREZ PÉREZ, José Manuel. *Curvas en la historia. Tomo 1*, pp. 117–121, 160–162, Nívola Libros y Ediciones, Tres Cantos, Madrid, 2006.

[2] ÁLVAREZ PÉREZ, José Manuel. *Curvas en la historia. Tomo 2*, pp. 69–72, 212, 233–234, Nívola Libros y Ediciones, Tres Cantos, Madrid, 2006.

[3] GEOGEBRA. *Página Oficial del Software Geogebra* http://www.geogebra.org

[4] PSTRICKS. *Página Oficial Macros PSTricks para LaTeX*
http://tug.org/PSTricks/main.cgi/

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.