Cuentos Matemáticos
Fracciones bonitas

Fernando Chamizo Lorente
Dulcinea Raboso Paniagua

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En un futuro tecnificado en el que las Matemáticas han caído en desuso, una joven aficionada a los números llamada Unita, se enfrenta al problema de aproximar una fracción por otra más bonita. En su búsqueda de la solución, visitará la consulta de un mático, una especie de adivino con fama de nigromante que ofrece enseñanzas personales.

Palabras Clave: Aproximación por racionales, geometría de números.

¿Será una vez?

Uno, dos, cuatro, sesenta, … Unita tenía la manía de contarlo todo, pasos, personas, hormigas y edificios. Era como un reloj, llevaba la cuenta incluso cuando nadie la miraba, y como un reloj, al completar una vuelta, comenzaba a contar de nuevo. Unita había creado una extraordinaria topografía triangulando en pasos el mapa de los alrededores de su casa. Disponía también de unidades propias como el tiempo-latido-normal y el tiempo-latido-corriendo que, a pesar de su imprecisión, servían para alimentar su costumbre. Se añadían a sus síntomas los rudimentos de algunas operaciones aritméticas, principalmente utilitarias para comprobar o abreviar sus cuentas.

Después de la revolución de la tercera década aquello la convertía en una persona singular, pues la revolución había sido tan rápida y eficaz que ni siquiera había dejado los escombros en los que se apoyan nostálgicos y poetas.

Todo comenzó con la aparición del paradigma PROPROG (PRogram Oriented PROGramming) que propugnaba programas creadores de código. El salto cualitativo se produjo cuando el generador de interfaces FACIO, elaborado bajo este paradigma, modificó inopinadamente su propia interfaz varias veces.

Sus mejoras recurrentes mostraron por qué la inteligencia artificial había sido un fracaso: lo importante no es la creación automática de conocimiento, pues como la memoria es casi gratuito e ilimitado, sino su intercomunicación.

El último artefacto portátil era incapaz de realizar un determinado cálculo porque no sabía leer el libro donde estaba escrito. La solución no era miniaturizar los procesadores una vez más haciendo nuevas cajas negras más pequeñas, obsoletas tras unos años. La solución eran los interfaces intercódigo automáticas. Después de que cientos de miles de billones de *querybots* consultaran día y noche, sin participación humana, las fuentes de conocimiento en todos sus formatos, la primera versión de PROGNOSIS vino a la luz. Al principio era una hiperbase de datos relacional que requería la intervención de operadores especializados humanos para formular las preguntas de manera adecuada pero el desarrollo de las interfaces ultralingüísticas permitió que versiones posteriores admitieran cualquier formato de consulta.

La revolución se desató con el acceso universal y sencillo a PROGNOSIS y se completó cuando pasó a denominarse popularmente "el oráculo". Y es que cuando la gente cambia un término científico, permitiendo incluso que sea esdrújulo, aquello ya no es ciencia, es sociedad.

El acceso de entrada al oráculo era la imagen de su poder. Entre la enorme identificación multicolor O-R-Á-C-U-L-O y el pequeño cajetín de entrada de datos (alegoría de la desproporción entre lo conocido y lo consultado), se leía con ese tipo de letra recta y seria con la que las excusas se disfrazan de avisos: "Todas las respuestas. Ninguna pregunta". Y es que el oráculo era infalible pero verdaderamente no conocía las preguntas y por ello podía resultar totalmente inútil para cuestiones incompletas o mal planteadas.

El problema

Hacía unas horas que había amanecido y Unita metía sus cosas apresuradamente en la bolsa, debía darse prisa si no quería llegar tarde al trabajo, otra vez. Y es que de entre todas las características de Unita, la impuntualidad era la que tenía más desarrollada, tal vez el contar las respiraciones que daba en un minuto, la cantidad de rosas rojas y blancas en el jardín del vecino o el número de pasas que incluía ese día su desayuno tuviera algo que ver pero todo aquello se había convertido en un hábito al que no podía o más bien, no quería renunciar.

Un último vistazo para comprobar que todo estuviera en orden y salía de casa. Se podía olvidar de muchas cosas pero nunca de algo para leer en el trayecto de ida y vuelta a su trabajo y es que estos eran los únicos momentos del día en los que su afición de contar parecía volverse en su contra. Todas las mañanas Unita tomaba un vela cerca de su casa, enormes estructuras de plataformas apiladas que parecían flotar unas encima de otras y que se deslizaban a gran velocidad por toda la ciudad, en cada parada la plataforma inferior quedaba fija mientras que el resto seguían su camino. El viaje en un vela era de todo menos tranquilo, cuando las puertas de conexión se abrían parecía que la locura se apoderaba de todo aquel que iniciaba su viaje y esta no les abandonaba hasta que volvían a cruzar la puerta para salir. Demasiado ruido, demasiada gente moviéndose de un lado a otro, algo que desesperaba a Unita y le hacía imposible concentrarse en aquel ir y venir de información. La lectura, y unos buenos tapones en los oídos, hacían su viaje mucho más agradable.

Dos semanas antes, su amigo Cerox le regalaba una extraña novela. Lo peculiar de esta lectura no era la historia en sí, lo extraño de aquel archivo era su formato. La división en páginas, seguramente resquicio del pasado cuando los libros se imprimían en papel, y que el marcador de línea no funcionara en él seguramente habrían desesperado a más de uno, pero esto no molestó en absoluto a Unita que se había propuesto leer 10 páginas al día, 5 en el trayecto de ida y otras 5 en la vuelta, ni una más ni una menos. De este modo, podría leer el total de 500 en exactamente 50 días.

Ya en el vela, inmersa en la lectura, no se percató de que llegaba su parada y tuvo que bajarse en la siguiente. Para Unita el descuido fue doble, a la pérdida de tiempo había que añadirle 5 páginas de más sobre su previsión de lectura.

– Está bien, no es para tanto. Se suponía que hoy debía llegar a la página 300 y si las cuentas no me fallan cuando regrese a casa estaré en la 305.

Absorta en sus pensamientos comenzó a caminar en dirección al trabajo. El frío invierno había llegado a su fin, ahora el sol parecía brillar con más fuerza y la agradable temperatura podría haber hecho a Unita disfrutar del paseo de no ser porque tenía la mente puesta en otras cosas.

– Si hubiera parado antes habría leído tres quintas partes –suspiraba–, en cambio llegaré a un total de 305/500, un poquito más pero ¿cuánto más? ¿No hay una forma más bonita de decir eso mismo?

El cansancio y la contrariedad la sumieron durante el resto del día en una preocupación casi ontológica sobre la naturaleza de las fracciones. Cuando la jornada de trabajo hubo acabado, Unita se dispuso a tomar de nuevo un vela en dirección a su casa.

– Quizás lo más fácil sea no leer nada en el trayecto de vuelta, así todo quedaría igual, el número de páginas no variaría y todo seguiría como antes pero, ¡qué voy a hacer si no leo! ¡no! ¡no puedo! el trayecto sería una auténtica locura.

Una, dos, tres páginas más, parecía que la lectura realmente la evadía de sus pensamientos pero al llegar a la 305, y por segunda vez en ese día, todo parecía derrumbarse bajo sus pies. Al final de la misma se podían distinguir tres líneas verticales que continuaban a lo largo de las 9 páginas siguientes. La explicación más razonable era la de un error al descomprimir el archivo y que a su vez se traducía, tal y como Unita pudo comprobar, en que en realidad el libro constaba de 491 páginas en lugar de las 500 que creía en un principio.

– ¡Tiene que ser una broma! Esta mañana estaba preocupada porque no conseguía entender cuánto era 305/500 y realmente me debía preguntar por 305/491. Si antes tenía mala pinta, ahora la cosa se pone peor.

Cuando estaba a punto de regresar a su casa tuvo lo que en un principio le pareció una gran idea, consultar al "oráculo" el significado de lo que se le antojaban unas horribles cifras. Los números eran simplemente eso, números y no le habían dado nunca problemas, era un juego, pero pronto comenzó a preguntarse por las relaciones entre esas cifras y unas preguntas llevan a otras, el problema ahora para Unita era encontrar las respuestas. Una vez en casa, preguntó al oráculo qué proporción era 305 de 491, pero este no hizo más que devolverle 305/491, los mismos números separados por una barra.

–¿Todas las respuestas? ¡todas las respuestas! ¡Va a ser que no! – una mezcla de indignación y desconsuelo se hacía visible en sus palabras – lo único que consigo al pensar en estas cosas es un espantoso dolor de cabeza, no estoy preparada para esto.

En ese instante Unita recordó algo que había leído el día anterior, *"El bienestar no se consigue solo fortaleciendo el cuerpo, es imprescindible hacer lo mismo con la mente"*. Cuando leyó aquel anuncio, se regocijaba pensando que aquel bienestar lo tenía asegurado, ella se ocupaba de mantener su cuerpo y mente al día, pero en aquel momento no estaba tan segura.

Buscó el anuncio, deteniéndose esta vez en el nombre que aparecía debajo del eslogan, *"mática Demi, pregunta y entenderás la respuesta"*.

Los máticos no eran ni mejores que cualquier otro colectivo y sólo tan distintos de los demás como cualquiera que tenga un nombre. Era verdad que se habían ganado cierto grado de mala reputación por su extraña política: sólo cobraban la primera sesión pero obligaban a asistir a otras gratuitas hasta que ellos consideraran que el tema estaba zanjado porque el cliente hubiera entendido la respuesta. Cuando un cliente hastiado renunciaba a las sesiones, entonces el mático tenía derecho a una fuerte indemnización. Corría el rumor de que algunos prolongaban estas sesiones o las hacían especialmente farragosas para propiciar el abandono.

Muchas preguntas y una respuesta

El aspecto del consultorio de la mática era siniestro. Había todo tipo de instrumentos graduados, volumétricos, alabeados, móviles y simplemente extraños. A Unita le llamó la atención un grueso tomo en una estantería en cuyo canto se leía "Diccionario de $\mathbb{R}$" pero estaba demasiado lejos como para acercar las manos a su curiosidad y se decidió por un objeto más cercano abigarradamente numerado.

–¿Qué es esto? –Preguntó Unita.

–Una regla de cálculo.

La mática desplazó una pieza oculta y añadió con una sonrisa que a Unita se le antojó enfermiza:

–Un antiguo sustituto de los dedos.

Unita no se atrevió a inquirir más sobre ese cepo de tortura ortopédico y halló algún alivio exponiendo el problema que le había llevado allí.

–¿Qué te ha dicho el oráculo?

–Simplemente 305/491.

–Eso es una fracción, ¿por qué no te gusta?

ISSN 2174-0410

–No es una fracción bonita.

–¿Y qué es para ti una fracción bonita?

–No sé, algo así como la mitad, dos terceras partes, cuatro quintas partes o algo de eso.

–¿Una fracción con denominador 8 es bonita?

–Yo diría que sí.

–¿Y con denominador 9?

–No estoy segura.

–¿Entonces el concepto de fracción bonita es subjetivo?

–Supongo que sí –respondió Unita ligeramente acalorada– pero lo que está totalmente claro es que 305/491 no es una fracción bonita.

Unita resopló abrumada por tantas preguntas mientras pensaba que quizá no había sido una buena idea acudir a la consulta. Y es que los máticos empleaban a menudo un método que los olvidados filósofos denominaron mayéutica y la gente común, pesadez.

–¿Sabes dividir?

–Sí –respondió Unita muy ufana.

–¿Con decimales?

–Creo que no –añadió cabizbaja pues no sabía bien a qué se refería.

–No importa, con partes enteras nos arreglaremos –sentenció resuelta y sonriente la mática–. ¿Conoces el teorema del aspa?

Unita dudó, pestañeó maquinalmente con la mirada extraviada, y tras buscar en el desván de los recuerdos perdidos, exclamó triunfante:

-Sí, sí, creo que sí.

El teorema del aspa dice que al multiplicar en aspa dos fracciones, el brazo ascendente es mayor exactamente cuando las fracciones crecen. Por ejemplo,

$$\frac{13}{21}\;\overset{147}{\underset{143}{\times}}\;\frac{7}{11}, \qquad 147 > 143 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{21} < \frac{7}{11}.$$

–Coloquemos entonces todas tus fracciones bonitas hasta denominador 8 y veamos cómo están ordenadas. Déjame añadir 0/1 y 1/1 que son fracciones tontas, la nada y el todo, para tener unos extremos sencillos.

La mática movió con soltura su digistilo y escribió:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}.$$

–¿Cómo se puede crear esta lista directamente? –preguntó curiosa, Unita.

–La ordenación creciente de las fracciones entre la nada y el todo hasta un denominador dado tiene una *propiedad mágica*: en el teorema del aspa la diferencia entre el brazo ascendente y el descendente es siempre uno. Por ejemplo, para $2/5$ y $3/7$, se tiene $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$. Esto permite calcular, con un poco de práctica, cada fracción a partir de la anterior. ¿No es bonito? –Unita asintió sin convencimiento mientras la mática finalizaba su perorata–. Cuando la práctica no alcanza al cálculo, siempre está el algoritmo de Euclides... pero creo que por ahora es mejor evitar estos temas e ir directos al grano.

–Sí, por favor –exclamó Unita sin contenerse.

–Pues bien, si usamos de nuevo el teorema del aspa, vemos que tu fracción fea cae exactamente entre las fracciones bonitas $3/5$ y $5/8$. Se puede comprobar que, en efecto, está más próxima a la segunda. En resumidas cuentas –sentenció la mática parsimoniosamente pronunciando con placer cada palabra–, si quieres converir la fracción fea $305/491$ en una de tus fracciones bonitas, la mejor elección es $5/8$.

–Gracias... –dijo Unita haciendo el ademán de movimiento que acaba las conversaciones y advierte a los pedigüeños.

La mática recuperó como por ensalmo su tono animado, casi descarado, y añadió sonriendo:

–Ahora sabes la respuesta pero no la entiendes, por ello debes asistir a la próxima sesión.

Unita dio un respingo resignado que a pesar de no ser advertido por la mática, halló consuelo en sus próximas palabras:

–Comprender el tema con mediana profundidad nos llevaría demasiadas sesiones. Basta con que entiendas cómo llevar a cabo la algoritmia y poco más.

Algoritmia

Unita recordó los rumores que circulaban acerca de los abusos de los máticos con el número de sesiones. O bien por economía, o bien por timidez o quizá incluso por un pellizco de curiosidad, el caso es que acudió a la segunda sesión. Algo debió de insinuar su semblante, pues al llegar se enfrentó a un alegato.

–¿Sabrías decirme la fracción bonita que aproxima a $3305/4491$? – preguntó la mática retóricamente– No. La algoritmia permite, con una generalidad razonable, que una respuesta resuelva muchos problemas –y señaló un cartel apenas legible que rezaba: "Una respuesta. Muchas preguntas", en clara oposición con el lema del oráculo.

La mática continuó circunspecta con una charla casi moral acerca de los ejemplos que sonaba como un zumbido en los oídos de Unita y que sólo se transformó en palabras cuando la cadencia preconizó el fin del discurso.

–Ahora vamos a ver el algoritmo a través de tu ejemplo. ¿Cuál es el cociente y el resto al dividir 491 entre 305?

–El cociente es 1 y el resto 186 –respondió Unita muy ufana pues nunca había encontrado a nadie parejo en el ancestral y olvidado arte de los cálculos.

–¿Y si ahora tomamos 305 y 186?

–El cociente es 1 y el resto 119.

–¿Y con 186 y 119?

–El cociente es 1 y el resto 67, y con 119 y 67 el cociente es de nuevo 1 y el resto 52.

–Muy bien, ya veo que entiendes el proceso. Cada vez tomamos el último número y el nuevo resto.

Unita preguntó si todos los cocientes eran 1 y la mática le instó a que entre las dos terminaran la cadena de números que se dividían uno entre otro hasta llegar a resto cero. El resultado fue:

$$491 \to 305 \to 186 \to 119 \to 67 \to 52 \to 15 \to 7 \to 1$$

con sus cocientes respectivos 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 7.

La mática puso su digistilo en TABMOD y diseñó en un instante el siguiente esquema:

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0							
0	1							

Aclaró también que las parejas 1, 0 y 0, 1 que aparecían solitarias en los renglones inferiores eran auxiliares, mientras que la primera línea estaba evidentemente formada por los cocientes.

–¿Para qué son esas casillas vacías? –preguntó Unita.

–Ahí van a nacer las fracciones bonitas. Todo lo que tienes que recordar es la siguiente regla de oro:

> Cada cociente multiplica a su columna y se suma el resultado a la columna anterior.

Por ejemplo, debajo del primer cociente, del primer 1, hay un 0 y antes un 1, entonces en la primera celda libre escribimos $1 \cdot 0 + 1 = 1$. De la misma forma, bajo esta celda escribimos $1 \cdot 1 + 0 = 1$. –La mática con un gesto elegante coloreó los números involucrados en los cálculos de rojo y los resultados de azul–. En la siguiente columna repetimos las cuentas con el siguiente cociente, que vuelve a ser un 1, y utilizando los nuevos resultados, obtenemos arriba $1 \cdot 1 + 0 = 1$ y abajo $1 \cdot 1 + 1 = 2$.

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1						
0	1	1						

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1	1					
0	1	1	2					

La mática pidió a Unita que rellenara la siguiente columna para comprobar si lo había entendido y así lo hizo diligentemente.

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1	1	2				
0	1	1	2	3				

Además creyó notar un tono desafiante en esta petición y ella no se arredraba ante unas cuentas tontas. En un impulso casi rebelde completó en un instante toda la tabla.

	1	1	1	1	1	3	2	7	
1	0	1	1	2	3	5	18	41	305
0	1	1	2	3	5	8	29	66	491

La mática no se inmutó ante la inusual iniciativa. Reservó sus emociones para señalar triunfante que la última columna eran los números de partida. Unita, influida por las leyendas de nigromancia acerca de los máticos, preguntó ingenua si eso mismo ocurriría fuera de la consulta. La mática le aclaró tras una carcajada que aquello era cierto no sólo en cualquier sitio, sino para cualquier fracción.

–Cada fracción tiene una tabla, determinada únicamente, y que termina con ella misma. Esta tabla es como un mapa que diera cada vez más detalles hasta terminar a escala 1:1.

–Pero un mapa a escala 1:1 es inútil –apuntó Unita un poco pedante.

Con un rápido toque la mática destacó en colores las columnas de la tabla.

	1	1	1	1	1	3	2	7	
1	0	1	1	2	3	5	18	41	305
0	1	1	2	3	5	8	29	66	491

–Y así ocurre en muchas ocasiones con las fracciones como 305/491 que tú llamaste fea. Las columnas que hemos rellenado dan aproximaciones a diferentes escalas, las mejores aproximaciones, en cierto sentido. En nuestro caso son 0/1, 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 18/29, 41/66 y 305/491. Según avanzamos, se pierde belleza y se gana en proximidad. Dónde acaban las fracciones bonitas depende de tus gustos. Si alguien piensa que un fracción con denominador menor que 30 es todavía bonita, debiera escoger 18/29, pero tú, por lo que dijiste, te quedarías con 5/8. Además las fracciones que están en lugares impares, las verdes, crecen y no superan la fracción inicial, mientras que las de los lugares pares, las rojas, decrecen y no quedan por debajo de ella. Lo puedes comprobar con el teorema del aspa. Nuevamente tendrás la diferencia mágica 1 entre el brazo ascendente y el descendente o viceversa para las mejores aproximaciones consecutivas de la lista.

Tanta información abrumó a Unita y le asaltó la extraña euforia que obliga a los niños a intervenir cuando los mayores los miran. Sin tiempo para pensar, se valió de las últimas palabras que resonaban en su mente.

–¿Qué quiere decir que son las mejores aproximaciones?

–Es un poco difícil explicarlo con precisión pero implica en particular que para cualquiera de las fracciones de la tabla no hay una aproximación mejor

ISSN 2174-0410

con denominador más pequeño. Por ejemplo, cualquier fracción con denominador menor que 29 está más lejos de 305/491 que 18/29. De la misma forma, tu fracción bonita 5/8 es la campeona entre todas las de denominador que no supera a 8.

Los números se dibujan

Esta vez, Unita no tuvo muchas dudas sobre su asistencia a la sesión pues la mática había asegurado que era la última. No obstante, por la locuacidad desinteresada que causa la confianza, preguntó por el motivo de la sesión ahora que ya sabía encontrar las fracciones bonitas o medio feas que aproximan a cualquier fracción. Ese día, darían sentido a la propiedad mágica que vieron en la primera sesión y con un gesto animado, la mática invitaba a Unita a reunirse con ella en el centro de la sala.

–Comenzaremos repasando algunas ideas geométricas simples pero importantes que nos permitirán dar una prueba del problema, el hecho de poder encontrar fracciones bonitas no se limita a unos pocos ejemplos.

–¡Uf! ¿geometría? –Unita no escuchó nada más de lo que había dicho la mática.

–Me extraña tu tono, parece como si estuviera hablando de algo alejado de la realidad cuando todo lo que te rodea tiene su parte geométrica. De hecho, no tienes que buscar mucho para dar con un ejemplo del primer elemento del que te quiero hablar, un retículo, y para ello sólo hace falta que mires el suelo que pisas.

Unita dio un paso atrás sorprendida, miraba primero al suelo y luego a sus pies, cómo si esperase recibir una respuesta de estos. Allí no había absolutamente nada.

–Como puedes observar –la mática continuaba hablando sin apreciar la confusión que sus palabras habían generado en Unita– el suelo del consultorio se compone de grandes baldosas cuadradas, todas iguales, que rellenan toda la sala. La única limitación la imponen las paredes pero puedes entonces imaginar el mismo resultado en una habitación más grande, y más y más grande, quizás podrías pensar en un suelo "infinito" y nuestro primer ejemplo de retículo. Con otro tipo de baldosas, más grandes o pequeñas tendríamos más.

–Creo que no acabo de comprender muy bien a qué te refieres. ¿Qué es un retículo? ¿el suelo o la baldosa?

–No, no, el suelo siempre es suelo –realmente la mática parecía estar disfrutando con la confusión de Unita–, digamos que un retículo sería la forma con la que tú lo visualizas, una especie de mapa con el que moverte. Ahora lo entenderás, sitúate en la intersección de estas cuatro baldosas –la mática señaló un punto en el suelo al que Unita se dirigió obediente–. Ahora imagina que tus pasos fueran de amplitud igual al lado de cada baldosa y sólo pudieras situarte en sus esquinas, de este modo, ¿qué posición dirías que ocupo respecto al lugar donde te encuentras?

–Pues –contestó algo indecisa– supongo que dos pasos al frente y uno a la derecha.

–¡Perfecto! –la mática dio tres pasos al frente cuidando de pisar únicamente en las intersecciones de las baldosas– ¿y ahora?

–Un paso atrás y otro a la derecha –contestó esta vez con más seguridad.

–Está bien, pero para abreviar a partir de ahora solo me dirás dos números, el primero indicará mi posición en pasos a la derecha, o a la izquierda con un signo menos, y el segundo indicará lo mismo con adelante y atrás, de este modo me he movido de la intersección $(1, 2)$ a la $(1, -1)$. Me puedes decir entonces ¿qué posición ocuparías tú?

–Esto no parece complicado, diría que la intersección $(0, 0)$.

–¡Enhorabuena! Pero recuerda que estos puntos, los únicos de todo el plano que deben importarte, vienen impuestos por el tamaño de las baldosas de la sala, si cambiamos su tamaño o incluso su forma tendríamos otros puntos y por tanto otros retículos.

La mática comenzó entonces a moverse rápidamente de un lado a otro, tomando lo que parecían pequeñas piedras de colores que se hallaban repartidas por toda la sala, deteniéndose frente a un gran baúl del que sacó una tabla de madera decorada con cuadrados blancos y negros.

– Precioso ¿no te parece? –dijo con tono solemne– Es un tablero muy antiguo, ¿conoces el ajedrez?

–No estoy segura, el nombre me resulta familiar ¿es un juego?

–En efecto, aunque hoy le daremos otra utilidad. En cierto modo vamos a jugar pero nuestras piezas serán fracciones –mientras, una mezcla de asombro y desconcierto aparecía en la cara de Unita–. Fracciones bonitas, no te preocupes –añadió.

Una vez hubo despejado de libros el escritorio colocó el tablero en la mesa y junto a él, las piedras.

–El tablero será nuestro retículo, limitado por los extremos del tablero pero recuerda que siempre podemos pensar en...

–En un tablero infinito –se apresuró a decir Unita.

–Veo que le vas cogiendo el truco. Tenemos 64 cuadrados aunque del mismo modo que antes con las baldosas, los únicos puntos que tendremos en cuenta serán las intersecciones, ¿recuerdas la posición que ocupabas?

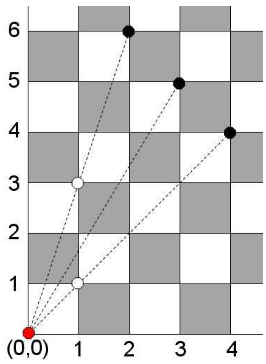
–La $(0, 0)$.

–Bien, ahora colocaremos en ese punto una piedra roja –dejando una pequeña piedra de ese color en la esquina del tablero más próxima a Unita–. La posición que ocupa esta piedra será especial en el retículo pues vamos a ver el resto de puntos a través de ella, así diremos que un punto del retículo es visible cuando la piedra roja lo pueda "ver" desde su posición privilegiada.

–Lo pueda ver –repetía– lo pueda ver desde su posición, y ¿qué pasa cuando el punto no es visible? ¿es invisible? ¿está escondido?

ISSN 2174-0410

–En cierto sentido, así es. Un punto es oculto si entre este y el rojo no hay ningún otro del retículo. Por ejemplo, de estos tres puntos –decía mientras colocaba unas piedras negras en el tablero– el único visible es el $(3,5)$, en los otros dos casos las líneas que unen estos puntos con el rojo pasan por otros puntos del retículo –al tiempo que añadía un par de piedras blancas más–, $(1,1)$ y $(1,3)$ respectivamente. Si ahora consideramos puntos más alejados del origen como por ejemplo el $(6,18)$ o el $(12,20)$, ¿qué dirías? ¿son visibles estos puntos?



–¿Cómo quieres que lo sepa? –respondió algo indignada– No puedo hacer lo mismo que tú porque estos puntos quedan fuera del tablero.

–¡Precisamente! Ahora necesitamos ejercitar un poquito nuestro cerebro. En ambos casos, se trata de puntos ocultos, el primero oculto tras el punto $(1,3)$, el segundo tras el $(3,5)$, por otro lado los puntos $(6,19)$ y $(13,21)$ vuelven a ser visibles ¿podrías decirme ahora cómo tiene que ser un punto, digamos (a,b), para ser visible?

–Pues, para que sea visible no estoy segura, pero supongo que para que sea oculto basta con que a y b tengan algo en común, como lo que pasa con el $(12,20) = (4\cdot 3, 4\cdot 5)$.

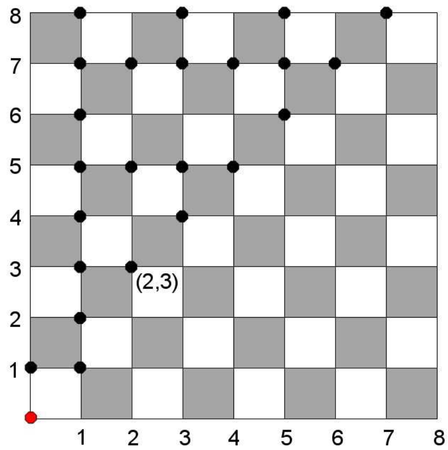
–Tal y como has notado el punto (ka,kb) está oculto por el (a,b) y para que este último sea visible basta con que a y b no tengan factores comunes. Por otro lado, los puntos del retículo podemos verlos en realidad como fracciones, de este modo $(2,3)$ representa la fracción $\frac{2}{3}$ y un punto (a,b) será visible si la fracción correspondiente $\frac{a}{b}$ es irreducible.

–¡Oh! Fracciones, pensaba que ya nos habíamos olvidado de ellas.

–¡Ni mucho menos! –exclamó la mática mientras colocaba más y más piedras sobre el tablero–. Si recuerdas la lista de fracciones que elaboramos en la primera sesión, fracciones bonitas hasta denominador 8.

$$\frac{0}{1},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{1}{1}.$$

–Ahora –continuaba hablando– podemos ver todas estas fracciones como puntos de nuestro retículo, de hecho como puntos visibles. Pero recuerda que aquella lista tenía un orden fijado, el motivo de que aquella diferencia, brazo ascendente menos el descendente, siempre diera uno ahora tendrá su explicación.



–Si nos fijamos en dos fracciones consecutivas, digamos $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, de todas las rectas que se obtendrían al unir estos puntos con el rojo, aquellas que pasan por puntos (a, b) y (c, d) son siempre rectas consecutivas y por tanto el triángulo formado por dichos puntos y el origen no tiene ningún otro punto del retículo en su interior.

–Eso último tiene que ver con que sean puntos visibles ¿verdad?

–Así es, son visibles todos los que están pero además "están todos los que son", al menos en esa región en la que parecen concentrarse, el triángulo definido por las líneas $x = 0$, $y = x$, $y = 8$ –ante la cara de desconcierto de Unita, añadió– pero olvida esto último, lo importante es que te quedes con la idea de que cada uno de estos triángulos ha de tener área mínima.

Si la primera reacción de Unita fue desconcierto ahora había que añadir cierto grado de desconfianza, algo que la mática notó al instante.

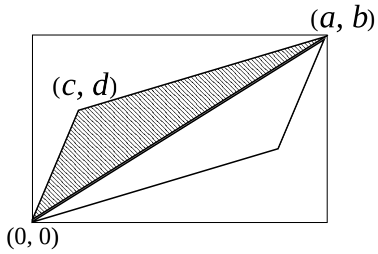
–Te estarás preguntando qué tiene que ver el área con el resultado que buscamos, ¿cierto? quizás sería interesante hacer un inciso para aclarar tu mente ¿Sabes cómo calcular el área de un triángulo?

–Me temo que estoy algo perdida con los triángulos, pero por si sirve de algo, la de un rectángulo es lado por lado –respondía Unita cada vez más animada.

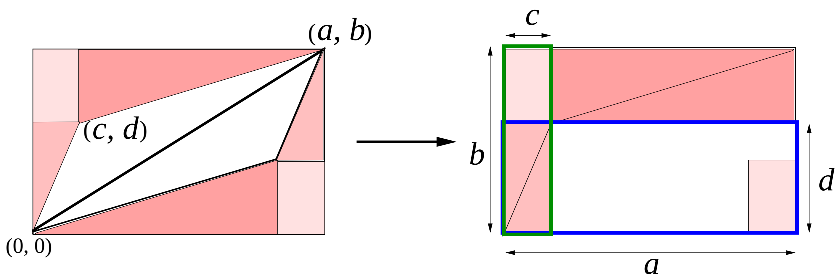
–Pues estamos de enhorabuena porque con eso basta para hallar el área de cualquier triángulo. No tienes más que trazar la diagonal de un rectángulo para que este quede dividido en dos triángulos iguales.

–Entiendo, si conocemos el área del primero basta con tomar la mitad de esa cantidad para tener el área del triángulo. Pero, no es cierto que todos los triángulos puedan formar rectángulos de ese modo.

–Esos triángulos son especiales. El problema es que los triángulos que nos interesan no son de este tipo, ¡pero no todo está perdido! –y empuñando su digistilo, añadía– La solución, como antes, pasa por duplicar el triángulo pero ahora obtenemos una especie de "rectángulo feo" el cual podemos incluir dentro de un rectángulo, este último el de toda la vida.



–Lo peculiar de esta construcción –proseguía al tiempo que dibujaba nuevas figuras–, es que la parte que no nos interesa del rectángulo, la podemos dividir en triángulos y rectángulos de los cuales podemos calcular fácilmente su área. Pero. . . – la mática parecía hacerse la interesante – claro que podemos evitarnos las cuentas y con apenas dos movimientos, notando que la parte sin pintar ha de ser la misma en las dos figuras, deducir que el área buscada no es más que $ad - bc$, resta del área de los rectángulos azul y verde, respectivamente.



–Bueno, en realidad sería la mitad de esa cantidad como en el caso de los rectángulos –sentenció Unita que seguía atenta toda la explicación.

–Muy bien. ¡Ya casi lo tenemos! Teniendo en mente esa cantidad

$$\frac{1}{2}(ad - cd),$$

recuerda que los triángulos que nos interesan tienen área mínima debido a su construcción, sus vértices son puntos enteros sin más puntos del retículo en su interior. Ahora resulta que el área es la mitad de un número entero, pues la resta de números enteros vuelve a serlo. La pregunta es ¿cuánto debe medir el área?

–Espera, un momento –tras una pequeña pausa, Unita añadió emocionada– ¡Claro! ¡1, digo $\frac{1}{2}$!

–¿Y recuerdas qué representaban los puntos (a, b) y (c, d)?

–Eso pensaba ahora mismo, y creo que. . . –Unita se reía– La mágica propiedad deja de ser tan mágica.

La mática sonrió dando por finalizada la sesión y el silencio se hizo en la sala. Unita estaba feliz, el camino no había sido fácil de recorrer pero ahora se sentía optimista y sobre todo, segura. La próxima vez que se encontrarse con aquellas cantidades monstruosas simplemente las sustituiría por algo más asequible y a su juicio, más bello, pero lo mejor de todo es que aquel proceso no guardaría secretos para ella. Llegado a ese punto el semblante de Unita cambió, sorprendiendo a la mática que había estado observándola mientras guardaba las piedras en una arqueta.

–¿Ocurre algo?

–No estoy segura. Diría que todo me ha quedado bastante claro, pero ¿eso es todo?

–Por supuesto que no. Hay una extensa teoría que apenas has atisbado en estas sesiones. Lo maravilloso es que es interminable, de algún modo eterna. Lo único que se necesita para avanzar es curiosidad, pues una respuesta origina muchas más preguntas y eres tú quien decide contestarlas o no.

Entonces Unita formuló a la mática una pregunta que hacía muchos años que no escuchaba: –¿Puedo volver mañana?

Sobre los autores:

Nombre: Fernando Chamizo Lorente
Correo Electrónico: fernando.chamizo@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid, España.

Nombre: Dulcinea Raboso Paniagua
*Correo Electrónico:*dulcinea.raboso@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid, España.