Historias de Matemáticas
El Álgebra de la Teoría Especial de la Relatividad

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende ofrecer una visión desde el punto de vista matemático de los conceptos fundamentales sobre los que Albert Einstein construyó su Teoría Especial de la Relatividad que aparecería publicada en *Anales de Física*, dirigida por el prestigioso físico Max Planck, en 1905, y que supuso una revolución en la comunidad científica, pues era capaz de hacer compatibles la Teoría Electromagnética de James Maxwell con la Mecánica Clásica Newtoniana. Más tarde la teoría se puliría, haciendo uso de los espacios pseudoeuclídeos tetradimensionales espacio-tiempo propuestos por el matemático alemán Hermann Minkowski.

Palabras Clave: Teoría Especial de la Relatividad, Albert Einstein, espacios tetradimensionales, álgebra relativista.

1. Introducción

Durante la segunda mitad de siglo XIX, la actividad científica de los físicos y sus esfuerzos se centraron entre otros en la determinación de la velocidad de la luz. Como resultado de los experimentos llevados a cabo, principalmente el experimento de Michelson-Morley en 1887, los físicos concluyeron que los resultados obtenidos en la medición de la velocidad de la luz son independientes de la velocidad del instrumento utilizado para medirla. Como ejemplo, supongamos que estando en la Tierra un observador mide la velocidad de la luz emitida por el Sol y obtuviera como resultado 300000 kilómetros por segundo. Ahora supongamos que el experimentador coloca el equipo de medición en una nave espacial que se aleja del Sol a 160000 kilómetros por segundo. Si se repitiera el experimento esta vez en la nave cabría esperar que la velocidad de la luz relativa a la nave sería de 140000 kilómetros por segundo, pero paradójicamente la luz sigue viajando a 300000 kilómetros por segundo.

Esta revelación condujo a una nueva manera de relacionar los sistemas coordenados empleados para explicar hasta el momento cualquier evento mecánico en el espacio-tiempo. El resultado fue la teoría especial de la relatividad de Albert Einstein, que puso patas arriba toda la mecánica clásica, y dio pie a un conflicto entre la comunidad científica, surgiendo tanto detractores como defensores a ultranza de la recién aparecida teoría relativista.

2. La fundamentación matemática de la Teoría

El final del siglo XIX puso de manifiesto la necesidad de llevar a cabo una formalización de la Física Matemática a través de una geometrización y una axiomatización de la misma. Debemos considerar a los matemáticos alemanes David Hilbert y Hermann Minkowski como dos personajes cruciales encargados de llevar a cabo esta última tarea.

David Hilbert

A lo largo de toda su carrera científica, Hilbert siempre sintió un especial interés por la física, fundamentalmente porque en Gotinga, Universidad donde impartía docencia, este hecho era considerado una tradición matemática, que otros ilustres como Gauss, Riemann y Klein ya habían tratado previamente. La actividad científica de Hilbert coincidió con el nacimiento de las dos grandes teorías físicas del siglo XX, la Física Cuántica (1900) y la Mecánica Relativista (1905), lo que en cierto modo intensificó su afición por la física matemática de la que se ocuparía durante cierto periodo de su vida. Aunque la física debe apoyarse en hechos experimentales, Hilbert la consideró como parte de la disciplina matemática, de este modo sus máximos objetivos fueron establecer con claridad los fundamentos de la física, presentar el formalismo matemático de la física desde una perspectiva geométrica, y desarrollarlo desde un punto de vista axiomático.

En el Congreso Internacional de París de 1900, Hilbert expondría su famoso discurso sobre los 23 problemas del siglo, pero consideremos fundamentalmente en el número seis, el último de los problemas relativos a los fundamentos de las ciencias matemáticas. Su título es *"Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física"* y su planteamiento es el siguiente:

> *"Las investigaciones en los fundamentos de la geometría sugieren el siguiente problema: Tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que la matemática juegue un papel importante: en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica".*

Llegados a este punto conviene dejar bien claro que existe una diferencia notable entre "Matematización de la Física" y "Axiomatización de la Física".

ISSN 2174-0410

La Física es una ciencia de la Naturaleza y, consecuentemente, es una ciencia que se debe desarrollar basándose en datos experimentales. Galileo fue el primer científico que estableció con claridad (aunque de forma un tanto poética para los gustos actuales) la idea de que las leyes de la Física son todas ellas expresables en lenguaje matemático. Primero sus seguidores en Italia (Torricelli, Viviani) y luego Huygens y Newton y sus contemporaneos (Barrow, Halley, Hooke, Wren), desarrollaron las ideas de Galileo y buscaron un formalismo matemático apropiado para la mecánica. Los desarrollos posteriores de los Bernoulli, de Riccati y sobre todo de Euler, hicieron que al analizar el siglo XVIII, época de Lagrange y de Laplace, la mecánica (número finito de grados de libertad) pudiera considerarse como una ciencia totalmente "matematizada". Pero la propuesta de Hilbert va mucho más allá; propone no contentarse con descubrir el formalismo matemático que gobierna la Naturaleza (que ya es bastante), sino además demostrar que este formalismo, que recordemos debe adecuarse a los experimentos, admite además una presentación formal similar a la geométrica.

El caso es que Newton cuando, a sugerencia de Halley, se decide a escribir un libro de mecánica desde una perspectiva matemática, toma como modelo a Euclides. El resultado es que los *Principia* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687) tienen una estructura bastante axiomática donde el papel de los famosos cinco postulados de Euclides intenta ser desempeñado por un conjunto de tres leyes del movimiento ("Las Leyes de Newton"). Así las cosas, el trabajo de Newton podría ser considerado como un precedente para el problema número seis, aunque conviene dejar bien claro que los Principia, por más que sea uno de los documentos más importantes en toda la historia de la ciencia, desde un punto de vista puramente axiomático es fácilmente criticable.

Si consideramos la obra de Euclides, durante muchos siglos la geometría Euclídea fue considerada como la "unica y verdadera" (la geometría cartesiana no se oponía sino que podía ser considerada como un perfeccionamiento de la geometría euclídea). Pero en el siglo XIX surgieron de la mano de Gauss Lobachevski y Bolyai nuevas ideas geométricas que dieron lugar a finales del siglo XIX a nuevos modelos establecidos primero por Eugenio Beltrami[1] luego por Felix Klein, y más tarde por Henri Poincaré y David Hilbert, quienes demostraron que la geometría hiperbólica, considerada como un sistema formal deductivo, era tan satisfactoria como la geometría Euclídea clásica. A partir de ese momento la geometría Euclídea pasó a ser una de las varias geometrías existentes (en un lenguaje Riemanniano, un caso muy particular de espacio con curvatura constante); la diferencia estribaba en que se suponía que Euclides describía el mundo real externo y las otras eran simplemente "invención del hombre". Sorprendentemente, esto hizo que pasara de ser una teoría matemática a ser una teoría física. Penrose, que defiende esta interpretación, clasifica, en su conocido libro *La nueva mente del emperador*, las teorías físicas en tres categorías: Soberbias, Útiles, y Tentativas. En el primer grupo incluye siete teorías físicas que, en su opinión, han demostrado tener un alcance y una exactitud realmente extraordinarios. Pues bien, la primera teoría física que coloca en este grupo es precisamente la "Geometría Euclídea". Comenta que, aunque

[1] Considera la *pseudoesfera* como el primer modelo de geometría hiperbólica, que no es otra cosa que la superficie que surge de girar la curva *tractriz* alrededor de un eje de coordenadas.

ISSN 2174-0410

los científicos de tiempos pasados pudieron no considerarla como una teoría física, eso es en su opinión lo que realmente es:

> *"una sublime y soberbiamente precisa teoría del espacio físico (y de la geometría de los cuerpos rígidos)".*

Pero volvamos al sexto problema. De entrada digamos que, aunque este problema podría ser considerado como algo peculiar y diferenciado de los demás, Hilbert lo situó entre los más importantes; al menos fue uno de los diez seleccionados para la exposición oral. Parece ser que su origen se encuentra en la doble actividad que Hilbert desarrolló durante los años previos a París: por una parte escribe *Die Grundlagen der Geometrie*, por otra empieza a impartir cursos de mecánica. Son en principio dos actividades distintas pero que, de alguna forma, se superponen y le llevan a plantearse la aplicación de la axiomática geométrica a las leyes de la física. Por aquellos años escribe

> *"La geometría es una ciencia que se ha desarrollado hasta un nivel tal que todas sus propiedades pueden ser obtenidas por deducción lógica a partir de otras propiedades previamente admitidas".*

y a continuación añade

> *"Se trata de una situación completamente diferente a lo que ocurre, por ejemplo, con la teoría de la electricidad o la óptica donde, incluso actualmente, se siguen descubriendo nuevos hechos".*

Parece deducirse de estas frases que Hilbert ya se había empezado a plantear el sexto problema hacia 1895-97 y que, aún encontrando deseable la axiomatización de la física, era consciente de que las dificultades surgían al intentar compatibilizar esquemas formales deductivos con medidas experimentales (posibilidad de que los laboratorios descubran fenómenos nuevos que puedan romper los esquemas). No se trata pues de axiomatizar toda la física, sino algunas de sus ramas; de ahí la frase "en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica" (la expresión teoría de probabilidades hace referencia a la Mecánica Estadística desarrollada en los años 1880-1900, fundamentalmente por Boltzmann).

Hilbert, que está al tanto de los trabajos recientes en mecánica, no cita a los creadores del formalismo matemático de la mecánica (p.ej., Poisson, Jacobi, Liouville, Hamilton) sino que comenta cómo durante esos últimos años (1890-1900) algunos físicos han hecho importantes contribuciones a los fundamentos de la mecánica (cita a Mach, Hertz, Boltzmann y Volkmann) y a continuación añade:

> *"...es por consiguiente muy deseable que la discusión sobre los fundamentos de la mecánica sea desarrollada también por matemáticos".*

En 1905 apareció un documento entre la comunidad científica que iba a ser capaz de ofrecer una nueva perspectiva de la realidad física. Una de las grandes aportaciones científicas de la segunda mitad del siglo XIX fue, sin duda alguna, la teoría del campo electromagnético de Maxwell; pero pasados los primeros años de alegría surgió la crisis: esta nueva teoría no era compatible con la mecánica de Newton. Tanto Lorentz como Poincaré se dedicaron intensamente al estudio del comportamiento de las ecuaciones de Maxwell bajo las transformaciones de Galileo, pero quien resolvió esta cuestión fue un casi desconocido Einstein que publicó en 1905 el que iba a ser uno de los trabajos más importantes del siglo que entonces empezaba, *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*. Einstein propuso mantener la electrodinámica de Maxwell y modificar la mecánica de Newton creando de esta forma una nueva rama de la física que se llamaría "mecánica relativista" o "teoría de la Relatividad (especial)". El impacto de la nueva mecánica fue enorme en todas las universidades alemanas pero sobre todo en Gotinga donde Hilbert y Minkowski impartían un seminario en el que trataban fundamentalmente esas mismas cuestiones (en Francia la situación fue muy distinta ya que Poincaré recibió con bastante frialdad las nuevas ideas de Einstein; de hecho la nueva "mecánica relativista" permaneció bastante marginada en las universidades francesas hasta que Paul Langévin se ocupó de promocionarla varios años después).

Albert Einstein

Hermann Minkowski, que había estado estudiando las teorías pre-relativistas de Lorentz y Poincaré, se sintió muy interesado por el nuevo enfoque relativista. Digamos antes que Einstein había estudiado en el Instituto Tecnológico de Zurich y había tenido a Hurwitz y a Minkowski como profesores, y que cuando Minkowski se encontró con que la nueva teoría provenía de aquel antiguo alumno de Zurich, expresó su sorpresa, ya que parece ser que tenía algunas dudas sobre el nivel de los conocimientos matemáticos de Einstein. En cualquier caso, a partir de 1905, Minkowski se concentró casi exclusivamente en el desarrollo de la electrodinámica incorporando las nuevas ideas de Einstein a la teoría previa de Maxwell-Lorentz.

Minkowski, aunque valoraba positivamente las ideas de Einstein, llegó a la conclusión de que el formalismo matemático utilizado no era el adecuado. Einstein afirmaba que las transformaciones de Galileo debían ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz y que, como consecuencia de ello, el tiempo perdía su carácter absoluto para pasar a ser algo relativo. Para Minkowski estas nuevas ideas físicas (con importantes implicaciones filosóficas) debían ser desarrolladas utilizando nuevos planteamientos matemáticos. En su opinión, habría que considerar el tiempo como una cuarta dimensión y desarrollar geométricamente esta idea; de esta forma las ideas de Einstein fueron expresadas en un nuevo lenguaje geométrico en un espacio de cuatro dimensiones pero con una métrica pseudo-Euclídea. En geometría Euclídea, el cuadrado $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ de la longitud de un vector tridimensional (distancia Euclidea entre dos puntos) permanece invariante bajo las transformaciones

Hermann Minkowski

ortogonales que, interpretadas físicamente, se corresponden con las transformaciones de Galileo. En geometría Minkowskiana, la expresión cuadrática

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

permanece invariante bajo transformaciones de Lorentz. Los índices griegos μ, ν, van de 0 a 3, y el tensor métrico $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ en este nuevo espacio viene dado por $g_{\nu\mu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1$. Por consiguiente, las transformaciones de Lorentz se deben interpretar geométricamente como las transformaciones ortogonales de un espacio con métrica de signatura (3; 1); la velocidad, aceleración y la fuerza deben ser sustituidas por sus versiones cuadri-dimensionales (cuadri-velocidad, cuadri-aceleración y cuadrifuerza), los cuadri-vectores pueden tener longitud positiva, negativa, o nula; y lo que es incluso más importante, al introducir un cuadri-potencial electromagnético A^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, las ecuaciones de Maxwell adoptan una forma asombrósamente simple. En resumen, todo lo que en Einstein era complicado y confuso, adopta ahora con este formalismo geométrico, una forma elegante y sencilla. Para sorpresa de todos, las leyes de la física deben ser planteadas en un mundo pseudo-Euclídeo con cuatro dimensiones.

Minkowski presentó el formalismo que hoy lleva su nombre en tres conferencias. La primera de ellas impartida en Gotinga, dio lugar a un artículo que apareció publicado en 1908; las otras dos fueron *Das Relativitëtsprinzip* (El principio de relatividad), comunicación presentada en Gotinga en Noviembre de 1907 y, posteriormente, *Raum und Zeit* (Espacio y tiempo), presentada en Colonia en Septiembre de 1908, de donde procede el siguiente párrafo introductorio:

> *"Los puntos de vista sobre el espacio y el tiempo que deseo presentar ante ustedes surgieron del seno de la física experimental, y de ahí proviene su solidez. Son puntos de vista radicales. De aquí en adelante, el espacio por si mismo y el tiempo por si mismo están condenados a desvanecerse, y sólo una especie de unión entre los dos soportaría una realidad independiente."*

Lamentablemente, Minkowski no llegó a vivir para ver impresas estas dos últimas comunicaciones, ya que murió en enero de 1909 como consecuencia de las complicaciones surgidas en una operación de apendicitis.

Jules Henri Poincaré

Acabaremos esta sección con dos observaciones. En primer lugar, está plenamente admitido que Poincaré fue el primero en introducir la idea de un espacio relativista de cuatro dimensiones; pero se limitó a indicar la posibilidad de interpretar el tiempo t como una cuarta coordenada y a comentar la conveniencia de introducir la unidad imaginaria para reescribir las expresiones cuadráticas relativistas como suma de cuadrados positivos

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

Por los motivos que sean, no fue capaz de desarrollar las consecuencias geométricas de esta idea; posiblemente la utilización de coeficientes complejos le privó de adivinar la existencia de geometrías no euclídeas.

En segundo lugar, resaltemos que Minkowski introduce un grupo de transformaciones del espacio-tiempo G_c que depende de c como parámetro, analiza las propiedades y los invariantes de G_c, demuestra que el grupo límite G_∞ caracteriza la mecánica Newtoniana, pero resalta que G_c es matemáticamente más inteligible que G_∞. Está claro que esta aproximación grupo-teórica a un problema geométrico puede considerarse como surgida dentro del espíritu del Programa de Erlangen. Es cierto que, en sentido estricto, Erlangen está relacionado con el análisis comparativo de varias geometrías, pero la aproximación minkowskiana utilizando el grupo G_c cae claramente dentro de este espíritu. En años posteriores surgieron otras posibles geometrías relativistas, espacios de De-Sitter y anti De-Sitter, y se pudo extender la aproximación minkowskiana a estas nuevas geometrías.

3. 1905. El *"Annus Mirabilis"* de Einstein

Todos los estudiosos de Einstein coinciden en afirmar que 1905 fue uno de los años más productivos para la carrera científica de éste. Durante este año Einstein, con tan sólo veintiséis años, llevó a cabo multitud de estudios y llegó a publicar cuatro artículos trascendentales para el devenir de la ciencia en la famosa publicación *Anales de Física* dirigida por Max Planck. En marzo envió un artículo titulado *Un Punto de Vista Heurístico sobre la Producción y Transformación de la Luz* que versaba sobre el efecto fotoeléctrico y los *quantos* de luz (más tarde pasarían a denominarse *fotones*, nombre introducido por Gilbert Newton en 1926). El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por parte de un metal cuando sobre él se hace incidir un rayo de luz. Este trabajo sugiere el intercambio de energía entre radiación y la materia, confirmado la teoría de Einstein que establecía que la luz tenía tanto carácter de onda como carácter corpúscular, formada por pequeños corpúsculos de energía denominados *cuantos*. Einstein llamó *Energiequanten* y *Lichquanten* a esas unidades elementales de la energía. Para aquel entonces esta afirmación era cuanto menos atrevida, y aunque parte de la comunidad científica no aceptó en un principio este hecho, más tarde se corroboró, tras las experiencias de Compton en 1923, que pusieron de manifiesto la consistencia de la relatividad especial con la idea de un corpúsculo luminoso, demostrando que Einstein estaba en lo cierto.

En el segundo artículo, enviado en mayo y en el que se basaría su tesis doctoral y titulado *Sobre el Movimiento Requerido por la Teoría Cinética Molecular del Calor de Pequeñas Partículas Suspendidas en un Líquido Estacionario*, Einstein realizó un estudio sobre el movimiento browniano, que no es otra cosa que el movimiento desordenado e incesante de pequeñas partículas sobre la superficie de los líquidos. Se llamaba así en honor al botánico escocés Robert Brown que lo descubrió en 1828, a quien le había llamado la atención el movimiento incontrolado de los granos de polen sobre las aguas de un estanque. Einstein demostraba matemáticamente que este movimiento era provocado por la inestabilidad de las moléculas del mismo líquido debido a la agitación térmica de estas, lo que era una prueba directa de la existencia de los átomos, cuya reali-

ISSN 2174-0410

dad no era entonces universalmente admitida (p.ej, el Nobel de Química en 1909 Wilhelm Ostwald, o el físico, historiador y filósofo austríaco Ernst Mach).

En el tercer artículo, titulado *Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento*, Einstein sentó la bases de la Teoría Especial de la Relatividad. La idea era simple, aunque darle la forma definitiva le llevaría varios años. Einstein quería demostrar que el espacio y el tiempo eran relativos respecto a un observador. Su teoría resolvía los problemas abiertos por el experimento de Michelson-Morley en el que se había demostrado que las ondas electromagnéticas que forman la lus se movían en ausencia de un medio, lo que significa que la velocidad de la luz es, por lo tanto, constante y no relativa la movimiento del observador. Sin embargo la originalidad de este artículo estuvo cuestionado puesto que en él omitió citar toda referencia a las ideas o conceptos desarrollados por otros autores, entre ellos Poincaré. Según parece, Einstein no estuvo al tanto de estas aportaciones anteriores, lo que le llevó a desarrollar su teoría de un modo completamente genuina, deduciendo hechos experimentales a partir de principios fundamentales y no dando una explicación fenomenológica a observaciones desconcertantes. La Relatividad Especial arroja resultados sorprendentes, ya que en ella se niegan los conceptos de espacio tiempo absolutos. La teoría recibió el nombre de *Teoría Especial de la Relatividad* para distinguirla de la *Teoría General de la Relatividad* que fue publicada por Einstein en 1915 y en la que introdujo la gravedad para explicar desde un punto de vista revolucionario un teoría completa sobre el universo.

Antes de acabar el año, Einstein publicó un cuarto artículo en el volumen 18 de *Anales de Física* titulado *¿Depende la Inercia de un Cuerpo de su Contenido de Energía?*, con el fin de complementar el artículo de la relatividad. Se trataba de una conclusión corta de tres folios en la que aparecía por primera vez la famosa relación que determina la energía asociada a la masa. Más exactamente

> *"Si un cuerpo proporciona energía en forma de radiación, su masa disminuye en L/c^2... por lo que llegamos a la conclusión general de que la masa de un cuerpo es la medida de su contenido energético."*

L es aquí la energía; como tal, la famosa fórmula $E = mc^2$ aparece en trabajos posteriores de 1907.

4. El Álgebra de la Teoría

El problema fundamental consiste en comparar dos sistemas de coordenadas distintos inerciales[2], que están en movimiento relativo uno con respecto al

[2] Esta es la característica fundamental y el motivo por el que se denomina Teoría "Especial" de la Relatividad, puesto que únicamente funciona para sistemas que se mueven con velocidad constante. Más tarde en 1907, mientras trabajaba aún en la Oficina de Patentes Suiza, Einstein comenzaría a trabajar en la Teoría General de la Relatividad, introduciendo sistemas no inerciales a su teoría para que pudiera ser aplicable a la totalidad del universo, incluida la fuerza omnipresente que lo mantiene todo unido, es decir la gravedad, lo que significaba contradecir más de dos siglos de tradición científica y a su ídolo, Sir Isaac Newton. El razonamiento de Einstein consistió básicamente en ignorar la atracción gravitatoria y considerar al espacio y al tiempo como entes flexibles que pueden curvarse. Teniendo en cuenta este hecho, Einstein podía explicar por ejemplo

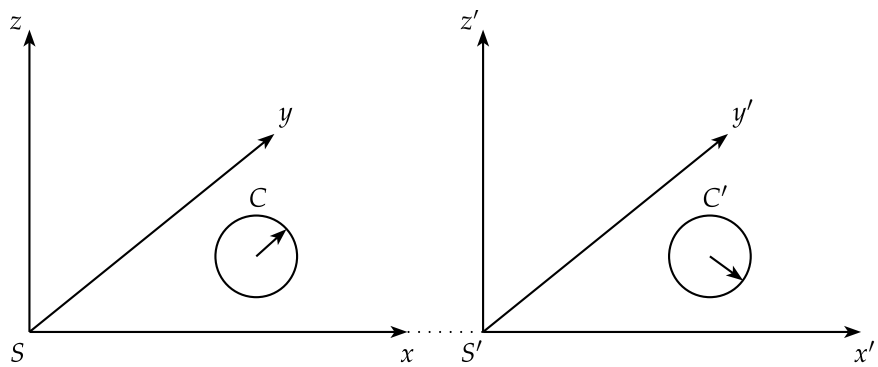
otro bajo la suposición de que la velocidad de la luz es la misma, medida en ambos sistemas. Supóngase que tenemos dos sistemas de coordenadas inerciales (sin aceleración) que notaremos como S y S' en un espacio de tres dimensiones ($\mathbb{R}^3$) y tales que S' se desplaza a una velocidad constante en relación con S, medida a partir de S.

Con el fin de simplificar, suponemos:

1. Los ejes correspondientes de S y S' (x y x', y y y', z y z') son paralelos y el origen de S' se desplaza en la dirección positiva del eje x de S a una velocidad constante $v > 0$ relativa a S.

2. Se colocan dos relojes C y C' en el espacio (el primero estacionario relativo al sistema de coordenadas S y el segundo estacionario relativo al sistema de coordenadas S'. Estos relojes están diseñados para dar como lecturas números reales en unidades de tiempo (segundos). Se calibran los relojes de manera que en el instante en que los orígenes de S y S' coincidan, ambos relojes den la lectura cero.

3. Nuestra unidad de longitud será el *segundo luz* (la distancia que recorre la luz en un segundo) y nuestra unidad de tiempo será el segundo. Ha de observarse que con respecto a estas unidades la velocidad de la luz es de un segundo luz por segundo.



Dado un evento cualquiera (cualquier cosa cuya posición y tiempo de ocurrencia pueda ser descrito) le podemos asignar un conjunto de coordenadas de "espacio-tiempo". Por ejemplo si consideramos que p es un evento que ocurre en una posición

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cómo la tierra giraba en torno al Sol, hecho que la mayoría explicaría que se produce porque el Sol atrae a la Tierra a través de la gravedad, pero Einstein consideró que la Tierra giraba alrededor del Sol porque éste curva el espacio alrededor de la Tierra, y el espacio la empuja hacia el Sol. Einstein había descubierto una nueva Teoría del Universo.

relativa a S en un tiempo t leído en el reloj C, podemos asignar a p el conjunto de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Este vector es denominado *coordenadas espacio-tiempo* de p relativas a S y a C. De igual modo p tendrá unas coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C' de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Podemos definir una correspondencia $T_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (que depende de la velocidad v) como consecuencia de lo anterior tal que, para cualquier conjunto de coordenadas de espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

que miden un evento con respecto a S y a C.

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

es el conjunto de coordenadas espacio-tiempo de este evento con respecto a S' y a C'. Puede comprobarse fácilmente que la correspondencia T_v es biyectiva.

Einstein llevó a cabo una serie de suposiciones sobre la correspondencia T_v que le condujeron a formular su teoría especial de la relatividad, equivalentes al siguiente grupo de axiomas.

Axiomas de la teoría especial de la relatividad

$\boldsymbol{R_1}$: La velocidad de cualquier haz de luz, al ser medida en cualquiera de los sistemas coordenados utilizando un reloj estacionario relativo al mismo sistema, es 1.

$\boldsymbol{R_2}$: La correspondencia $T_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es lineal.

$\boldsymbol{R_3}$: Para cualquier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

si

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

entonces $y' = y$ y $z = z'$.

$\boldsymbol{R_4}$: Para

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

x' y t' son independientes de y y z; es decir, si

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_v \begin{pmatrix} x \\ y_2 \\ z_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix}$$

entonces $x'' = x'$ y $t'' = t'$.

$\boldsymbol{R_5}$: El origen de S se desplaza en la dirección negativa del eje x' de S' a una velocidad constante $-v < 0$ medida desde S'.

Como veremos, estos 5 axiomas (R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5) definen completamente a T_v. El operador T_v es denominado *transformación de Lorentz en la dirección x*. Nuestro objetivo es calcular T_v, y utilizarla para estudiar curiosos fenómenos de la contracción del tiempo.

Teorema 1. En $\mathbb{R}^4$

(a) $T_v(e_i) = e_i$ para $i = 2, 3$.

(b) $L(\{e_2, e_3\})$ es T_v*-invariante*.

(c) $L(\{e_1, e_4\})$ es T_v*-invariante*.

(b) $L(\{e_2, e_3\})$ y $L(\{e_1, e_4\})$ son T_v^**-invariantes*[3].

(e) $T_v^*(e_i) = e_i$ para $i = 2, 3$.

Demostración.

(a) Por el axioma R_2

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] Se define T^* como la aplicación lineal $T^* : V \to V$ mediante $T^*(y) = y'$, siendo V un espacio vectorial, tal que $(T(x), y) = (x, T^*(y))$. El operador lineal T^* descrito se denomina *adjunto* del operador T, y se demuestra que es único.

Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido mediante $T(a_1, a_2) = (2ia_1 + 3a_2, a_1 - a_2)$. Si β es la base ordenada estándar para $\mathbb{C}^2$, entonces

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$[T^*]_\beta = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$T^*(a_1, a_2) = (-2ia_1 + a_2, 3a_1 - a_2)$$

ISSN 2174-0410

y por lo tanto, por el axioma R_4, las coordenadas primera y cuarta de

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

son iguales a cero para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$. Luego, por el axioma R_3

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las demostraciones de (b), (c) y (d) se realizarían del mismo modo.

(e) Para cualquier $j \neq 2$, en virtud de (a) y (c)

$$(T_v^*(e_2), e_j) = (e_2, T_v(e_j)) = 0;$$

para $j = 2$ por (a)

$$(T_v^*(e_2), e_j) = (e_2, T_v(e_2)) = (e_2, e_2) = 1$$

Concluimos que $T_v^*(e_2)$ es un múltiplo de e_2, o sea que

$$T_v^*(e_2) = \lambda e_2 \quad \text{para alguna} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$1 = (e_2, e_2) = (e_2, T_v(e_2)) = (T_v^*(e_2), e_2) = (\lambda e_2, e_2) = \lambda$$

y por lo tanto

$$T_v^*(e_2) = e_2$$

Del mismo modo $T_v^*(e_3) = e_3$.

Supóngase que en el instante en el que los orígenes de S y S' coinciden se emite un destello luminoso desde su origen común. Cuando este evento se mide relativo a S y C o relativo a S' y C' tiene coordenadas espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea P el conjunto de todos los eventos cuyas coordenadas espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

ISSN 2174-0410

relativas a S y C son tales que el destello se observa en el punto de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(medidas con respecto a S) en el instante t (medido en C). Vamos a caracterizar a P en términos de x, y, z y t. Como la velocidad de la luz es 1, en cualquier instante $t \geq 0$ el destello se observa desde cualquier punto cuya distancia al origen de S (medida a partir de S) sea $t \cdot 1 = t$. Estos son justamente los puntos que se localizan sobre la superficie de la esfera de radio t con centro en el origen. Las coordenadas (relativas a S) de tales puntos satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Por lo tanto, un evento está en P si y sólo si sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S y a C

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$. En virtud del axioma R_1 podemos caracterizar a P en términos de coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C' de la misma manera: un evento está en P si y sólo si sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \qquad (t' \geq 0)$$

satisface la ecuación $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Para cualquier $w \in \mathbb{R}^4$, si $(L_A(w), w) = 0$, entonces

$$(T_v^* L_A T_v(w), w) = 0$$

Demostración. Sea

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

y supóngase que $(L_A(w), w) = 0$.

CASO 1. $t \geq 0$. Como $(L_A(w), w) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, w es el conjunto de coordenadas de un evento de P relativos a S y a C. Como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

ISSN 2174-0410

son las coordenadas espacio-tiempo del mismo evento relativas a S' y a C', la discusión que precede al Teorema 2 da

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$$

Luego entonces,

$$(T_v^* L_A T_v(w), w) = (L_A T_v(w), T_v(w)) = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$$

y se obtiene la conclusión.

CASO 2. $t < 0$. La demostración se obtiene al aplicar el Caso 1 a $-w$.

Procedamos ahora a deducir información acerca de T_v. Sean

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(w_1, w_2) es una base ortogonal para $L(\{e_1, e_4\})$, y $L(\{e_1, e_4\})$ es $T_v^* L_A T_v$-invariante. El siguiente resultado nos dice aún más.

Teorema 3. Existen escalares a y b no nulos tales que

a) $T_v^* L_A T_v(w_1) = a w_2$,

b) $T_v^* L_A T_v(w_2) = b w_1$.

Demostración.

a) De acuerdo con el Teorema 2, $(L_A(w_1), w_1) = 0$, $(T_v^* L_A T_v(w_1), w_1) = 0$. Entonces $T_v^* L_A T_v(w_1)$ es ortogonal a w_1. Como $L(\{e_1, e_4\}) = L(\{w_1, w_2\})$ es $T_v^* L_A T_v$-invariante, $T_v^* L_A T_v(w_1)$ debe pertenecer a este conjunto. Pero $\{w_1, w_2\}$ es una base ortogonal para este subespacio, y entonces $T_v^* L_A T_v(w_1)$ debe ser múltiplo de w_2. Así $T_v^* L_A T_v(w_1) = a w_2$ para algún escalar a. Como T_v y A son invertibles, también $T_v^* L_A T_v$ lo es. Luego $a \neq 0$, demostrando así a). La demostración de b) es semejante.

Corolario. Sea $B_v = [T_v]_\beta$, donde β es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^4$. Entonces

a) $B_v^* A B_v = A$,

b) $T_v^* L_A T_v = L_A$.

Omitiremos la demostración que dejamos para el lector.

Consideremos ahora la situación cuando ha transcurrido un segundo desde que los orígenes S y S' coincidieran medido por el reloj C. Como el origen de S' se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad v medida en S, sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S y C son

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ISSN 2174-0410

De la misma manera, las coordenadas espacio-tiempo para el origen de S' relativas a S' y a C' deben ser

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

para algún $t' > 0$. Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{para algún t'>0} \tag{1}$$

Por el corolario del Teorema 3

$$\left(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(L_A \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v^2 - 1 \tag{2}$$

Pero también

$$\left(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \right) = -(t')^2 \tag{3}$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3), concluimos que

$$v^2 - 1 = -(t')^2, \quad \text{o bien} \quad t' = \sqrt{1 - v^2} \tag{4}$$

Luego, de las ecuaciones (1) y (4), obtenemos

$$T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{1 - v^2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Tenemos que recordar que el origen de S se desplaza en la dirección negativa del eje x de S' con la velocidad constante $-v < 0$ medida desde S' (este hecho es el axioma R_5). En consecuencia, un segundo después de que los orígenes de S y S' coincidieran medido con el reloj C, existe un tiempo $t' > 0$ medido en el reloj C' tal que

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vt' \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \tag{6}$$

De la ecuación (6) se obtiene, de una manera semejante a como se obtuvo la ecuación (5), que

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{7}$$

y por lo tanto, de las ecuaciones (6) y (7)

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

El siguiente resultado se puede demostrar fácilmente utilizando las ecuaciones (5) y (8) y el Teorema 1.

Teorema 4. Sea β la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^4$. Entonces

$$[T_v]_\beta = B_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$$

5. Las paradojas relativistas

En su momento la teoría de Einstein causó cierta perplejidad entre los científicos de la época, puesto que de ella se extraían resultados curiosos y paradójicos, como era la aceptación de la contracción del tiempo, la paradoja de los gemelos, la contracción de Lorentz-Fitzgerald, o el efecto Doopler entre otros.

5.1. La contracción del tiempo

Supongamos que un astronauta abandona nuestro sistema solar en una nave espacial que viaja a una velocidad constante v medida con respecto a nuestro sistema solar. De la teoría de Einstein se deduce que al final del tiempo t medido desde la Tierra, el tiempo que habrá transcurrido en la nave espacial es únicamente $t\sqrt{1-v^2}$. Para establecer este resultado, se consideran los mismos sistemas de coordenadas S y S' y los relojes C y C' que vimos antes. Supóngase que el origen de S' coincide con la nave espacial y que el origen de S coincide con un punto en el sistema solar (estacionario con relación al Sol), de manera que los orígenes de S y S' coincidan y los relojes C y C' den una lectura cero en el momento en el que el astronauta inicia su viaje.

Visto desde el sistema de referencia S, las coordenadas espacio-tiempo del vehículo en cualquier instante $t > 0$ medidas por C son

$$\begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

mientras que vistas desde S' las coordenadas espacio-tiempo del vehículo en cualquier instante $t' > 0$ medidas por C' son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

Pero si dos conjuntos de coordenadas de espacio-tiempo describen el mismo evento, debe tenerse que

$$T_v \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

Luego entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

De la ecuación anterior se obtiene que:

$$\frac{-v^2 t}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} = t' \quad \text{o bien} \quad t' = t\sqrt{1-v^2} \tag{9}$$

que es el resultado que muestra el hecho que queríamos demostrar.

Hagamos una consideración adicional. Supongamos que las unidades de distancia y tiempo que consideramos son unidades que se usan más comúnmente que el segundo-luz y el segundo, tales como el kilómetro y el segundo o la milla y la hora en el mundo anglosajón. Sea c la velocidad de la luz en las unidades que hayamos considerado para la distancia y el tiempo. Se puede ver fácilmente que si un objeto viaja a una velocidad v relativa a un conjunto de unidades, entonces viaja a una velocidad v/c en unidades de segundos-luz por segundo. Así, para un conjunto cualquiera de unidades de distancia y tiempo, la ecuación (9) se transforma en

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5.2. La paradoja de los gemelos

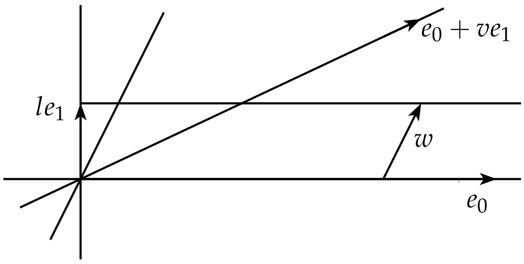
En la formulación más habitual de la paradoja, debida a Paul Langevin, se toma como protagonistas a dos gemelos (de ahí el nombre); el primero de ellos hace un largo viaje a una estrella en una nave espacial a velocidades cercanas a la velocidad de la luz; el otro gemelo se queda en la Tierra. A la vuelta, el gemelo viajero es más joven que el gemelo terrestre.

ISSN 2174-0410

5.3. Contracción de Lorentz-Fitzgerald

Consideremos ahora una varilla rectilínea de longitud l en reposo respecto de un sistema de referencia inercial[4]. Vamos a calcular la longitud de la misma varilla medida por un observador inercial que se aleje con velocidad aparente v en la dirección de la varilla (digamos e_1). El vector w que en un instante dado determine la varilla para el nuevo observador

$$w = \lambda e_0 + l e_1$$



es espacial para este observador, luego $w = \lambda e_0 + l e_1$ ha de ser ortogonal a la velocidad del observador, que es proporcional a $e_0 + ve_1$

$$0 = w \cdot (e_0 + ve_1) = \lambda - \frac{vl}{c^2} \;\; , \;\; \lambda = \frac{vl}{c^2}$$
$$w = l\left(\frac{v}{c^2}\, e_0 + e_1\right)$$

y concluimos que para el nuevo observador la longitud l' de la varilla es

$$|w| = \sqrt{w \cdot w} = l\sqrt{l - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$
$$l' = l\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l - \frac{v^2 l}{2c^2} - \cdots$$

La longitud se contrae aproximadamente en $lv^2/2c^2$ unidades cuando $v \ll c$. Por ejemplo, como el diámetro de la Tierra es de unos 12700 kilómetros, un viajero que se alejara de ella observaría una contracción de 0,6 milímetros.

Al considerar la trayectoria de un móvil, siempre hemos supuesto que éste es puntual, de modo que su trayectoria es una curva en el espacio-tiempo $\mathbb{A}_4$. En general, la trayectoria de un móvil no-puntual será una región $F \subset \mathbb{A}_4$ y

[4] Fijadas las unidades de tiempo y longitud, dadas por sendas métricas g y $g^* = -c^2 g$, un *sistema de referencia inercial* en el espacio-tiempo de Minkowski es un observador inercial, cuya velocidad denotaremos e_0, junto con un suceso p_0 de su trayectoria, llamado *origen del tiempo*, y tres vectores ortonormales e_1, e_2, e_3 (respecto de g^*) de $(\mathbb{R}e_0)^\perp$, llamados *ejes*, de modo que la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de V esté orientada positivamente.

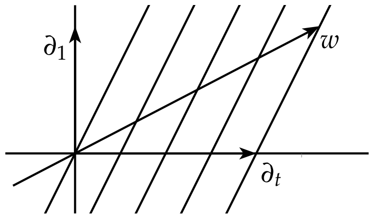
Es decir, es un sistema de referencia afín $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ tal que $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base orientada positivamente y la matriz de la métrica g en tal base resulta

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}$$

el lugar que ocupa el móvil en un instante t, para un observador inercial, es $\mathcal{E}_t \cap F$, por lo que la forma de un cuerpo (que es el lugar que ocupa, salvo semejanzas) depende de la velocidad del observador.

5.4. Efecto Doopler

Supongamos que un observador inercial envía una señal luminosa con una frecuencia f, por ejemplo emite f fotones por unidad de tiempo. Vamos a calcular la frecuencia f' de la señal para un observador que se aleje con velocidad aparente ve_1.



Consideremos el intervalo w de la trayectoria del receptor determinado por los f fotones emitidos durante una unidad de tiempo, que ha de ser proporcional al vector $\partial_t + v\partial_1$:

$$w = \partial_t + \lambda(\partial_t + c\partial_1)$$

$$v = \frac{c\lambda}{1+\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{v}{c-v}$$

$$w = \frac{1}{1-\frac{v}{c}}\,\partial_t + \frac{v}{1-\frac{v}{c}}\,\partial_1$$

$$\sqrt{w\cdot w} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Como $\sqrt{w\cdot w}$ es el tiempo que mide el receptor durante la absorción de esos f fotones recibe una señal de frecuencia menor

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Si en vez de alejarse, el receptor se acerca con velocidad aparente $-v\partial_1$, entonces w ha de ser proporcional al vector $\partial_t - v\partial_1$ y un razonamiento análogo permite concluir que el receptor observa una señal de frecuencia mayor

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

ISSN 2174-0410

Referencias

[1] CUGOTA, Luís, y ROLDÁN, Gustavo. *Me llamo ... Albert Einstein*, pp. 18–24, Parramón Ediciones S.A, 2004.

[2] DE AZCÁRRAGA, José A., *Albert Einstein (1879-1955) y su ciencia*, La Gaceta de la RSME, Vol. 8.1, pp. 53–92, 2005.

[3] FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., y SPENCE, Lawrence E.. *Álgebra Lineal*, pp. 403–413, Publicaciones Cultural S.A, Primera Edición, México, 1982.

[4] NAVARRO GONZÁLEZ, Juan Antonio, y SANCHO DE SALAS, Juan B.. *Gravitación Newtoniana y Relatividad*, pp. 56, 60–64, Facultad de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 2004.

[5] RAÑADA, Manuel F.. *David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis*, La Gaceta de la RSME, Vol. 6.3, pp. 403–413, 2003.

[6] SÁNCHEZ RON, José Manuel, *Eistein, la relatividad y las matemáticas*, La Gaceta de la RSME, Vol. 7.1, pp. 153–184, 2004.

[7] SENOVILLA, José M. M., *La Cosmología y los matemáticos*, La Gaceta de la RSME, Vol. 8.3, pp. 597–636, 2005.

[8] EN LA RED,
Albert Einstein, http://www.spaceandmotion.com/quantum-theory-albert-einstein-quotes.htm
David Hilbert, http://www.free-photos.biz/photographs/art/abstraction/144518_david_hilbert_1886.php
Jules Henri Poincaré, http://pl.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré
Herman Minkowski, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Minkowski.html

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.