Historias de Matemáticas
Abel y la imposibilidad de resolver la "quíntica" por radicales

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo ofrece en su última sección, una traducción comentada de la memoria que Niels Henrik Abel publicó en 1824, para demostrar la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado mediante radicales (Teorema de Abel-Ruffini). Además se ofrece una visión general de las dificultades que debió sufrir a lo largo de su vida, anhelando siempre un puesto de privilegio entre la comunidad científica de su tiempo, que sistemáticamente le negó el lugar que la historia de la matemática acabó reservándole.

Palabras Clave: Abel, Quíntica, ecuaciones algebraicas, método de los radicales.

1. Introducción

A lo largo de la historia, fueron muchos los que intentaron resolver las ecuaciones de grado cinco y superior por métodos de radicales, al igual que se había llegado previamente a esta solución para la cuadrática, cúbica y bicuadrática. Pero todos y cada uno de ellos lamentablemente desconocían que este logro era imposible de lograr. Ya Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en su *Disquisitiones Arithmeticae* (1799) había "intuido" esta posibilidad, aunque no ofreció demostración alguna. Haciendo uso de los trabajos sobre "permutaciones" de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Paolo Ruffini (1765-1822), fue el primero en acertar con la estrategia utilizada para demostrar que las ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto son irresolubles por radicales, problema que permanecía abierto desde el siglo XVI y que sería finalmente resuelto por el francés "alma gemela"[1] de Abel, Evariste Galois (1811-1832). Lamentablemente el trabajo de Ruffini no fue del todo aceptado por los matemáticos del momento, quizás debido a la todavía "en pañales" teoría de las permutaciones de Lagrange o quizás por la negación a la aceptación de la imposibilidad de resolver algunas ecuaciones mediante radicales. El caso es que estudios posteriores confirmaron que había una pequeña laguna en los trabajos de Ruffini, lo que hacía de su demostración insuficiente.

El ataque definitivo del problema se llevaría a cabo desde las gélidas tierras noruegas, donde el joven matemático Abel (con tan sólo 21 años) demostraría definitivamente esta imposibilidad de resolver la ecuación de grado cinco por métodos radicales, y lo que resulta evidente debido al aislamiento de Noruega a principios del siglo XIX, de forma independiente a los resultados obtenidos por Ruffini. Abel basó principalmente su estrategia y esfuerzos en los resultados sobre permutaciones obtenidos por Lagrange y por una figura admirada y a la vez en cierto modo odiada (más adelante en la breve biografía de Abel el lector sabrá por qué digo esto) como Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Cabe destacar que el trabajo en cuestión de Cauchy sobre permutaciones (1815) estaba basado fundamentalmente en los trabajos de Ruffini, sin embargo éste le fue ajeno a Abel, quien desconocía en 1824, año en el que preparó su memoria, los trabajos del ilustre italiano.

2. Niels Henrik Abel (1802-1829)

Niels Henrik Abel

Sobre la vida y obra de Niels Henrik Abel se ha escrito una gran cantidad de bibliografía. Casi toda, por no decir la totalidad, coincide en una misma afirmación, que Abel ha sido el matemático escandinavo más brillante de la historia. Su vida presenta todos los ingredientes de un melodrama; la pobreza de un genio que muere consumido en su barrio natal, mientras que egoístas académicos le niegan un lugar privilegiado entre ellos que tanto necesitaba y merecía. Desafortunadamente, estos mismos académicos sólo fueron capaces de rectificar la injusticia cometida con él cuando ya era demasiado tarde, el cuerpo y el genio de Abel se habían ido apagando poco a poco, víctimas de la incomprensión y la tuberculosis.

Søren Georg Abel, párroco luterano de una pequeña isla de la ciudad de Stavenger llamada Finnøy, en la costa sudoccidental noruega, era un ambicioso teólogo educado en la Universidad de Copenhage; su mujer, Anne Marie Simonsen, era la hija de Niels Henrik Saxild Simonsen, un mercader de Risør, dueño de una flota de barcos. Su segundo hijo Niels Henrik, nació el 5 de Agos-

[1] Podemos considerar que las vidas de ambos tuvieron una particular similitud. Ambos sufrieron una genialidad incomprendida para los conservadores cánones de la época que les tocó vivir. Ambos murieron jóvenes, sin darles tiempo a disfrutar de un futuro más prometedor, acorde a los resultados que fueron capaces de alcanzar. Juntos sentaron las bases del nacimiento del álgebra moderna, y sin embargo, nunca fueron suficientemente reconocidos en vida.

to de 1802. Fue el segundo de siete hermanos (seis niños y una niña). Cuando Niels tenía sólo un año de edad, su padre fue designado pastor de un lugar llamado Gjerstad cerca de Risør. Aquellos primeros años fueron tiempos difíciles, dado que Noruega pasaba por un época crítica para su desarrollo político y económico.

Iglesia de Gjerstad. Foto tomada en torno a 1890-1895

En el país dominaba la pobreza, el hambre, y la carestía. Antes en 1789 había comenzado la Revolución francesa, y años más tarde, el gran conquistador Napoleón en el apogeo máximo de su poder e influencia sobre Europa, había forzado a Noruega a la unión política con Dinamarca, y aunque ambas naciones pretendieron ser neutrales en el transcurso de las guerras que se desencadenaron, sufrieron un fuerte ataque naval de Inglaterra en Copenhague (1801), y un bloqueo de la costa noruega en 1807, además de tener que afrontar posteriormente un enfrentamiento militar con Suecia (1813). Tras las guerras napoleónicas, dado que los noruegos habían realizado varios intentos de independizarse de Dinamarca sin éxito, su padre, un profundo nacionalista, y habida cuenta de su actividad política , fue considerado para ser elegido miembro en el cuerpo legislativo del Storting o Parlamento Noruego, encargado en 1814 de reescribir la constitución noruega con el fin de disolver la unión con Dinamarca y pactar la anexión a Suecia, monarquía bajo el reinado de Carlos XIII.

Cristianía en julio de 1814
Pintura de Margrethe Kristine Tholstrup

Unos años antes, Søren, que era un intelectual que leía con asiduidad a Voltaire, había promovido campañas de alfabetización y vacunación en la Noruega rural. También promovió la fundación de la primera Universidad noruega en Cristianía[2] que tuvo lugar en 1811, la cual se pudo crear al proveerse de un cuerpo docente constituido por los mejores maestros de la Escuela Catedralicia de Cristianía (existente desde la Edad Media), inaugurando la docencia universitaria en 1813. Pero Noruega estaba inmersa en una profunda crisis, y el padre de Abel

[2] En 1624, se produjo un incendio que destruyó gran parte del Oslo medieval (la parte ahora conocida como Gamlebyen) y la nueva ciudad fue ubicada cerca de la Fortaleza de Akershus. El Rey Cristián IV de Dinamarca y Noruega renombró la nueva ciudad como Christiania (o Cristianía, en castellano). Desde finales de los años 1800, el nombre de la ciudad apareció escrito también como "Kristiania". No se aprobó oficialmente ninguna de ellas, por lo que ambas eran válidas y se aceptaban sus usos. El nombre original de Oslo fue recuperado en una ley del 11 de julio de 1924, siendo efectiva a partir del 1 de enero de 1925.

ISSN 2174-0410

fue incapaz de resolver la precaria situación familiar, por lo que difícilmente pudo lograr escolarizar a su primogénito y a Niels Henrik.

A la edad de trece años, en 1815, su hijo Niels ingresaría a duras penas en la Escuela Catedralicia de Cristianía. La escuela tenía una inmejorable reputación, pero acababa de perder a parte de sus mejores profesores que se habían mudado a la Universidad Real Frederik, lo que provocó que parte del entusiasmo intelectual de los alumnos de la Catedralicia se viera pronto frenado. Al principio de su instrucción, Abel se mostraría como un estudiante indiferente, más bien mediocre y sin que ni siquiera las matemáticas le despertaran atracción alguna. Sin embargo, afortunadamente, se produjo un inesperado cambio en su actitud tras la muerte de un condiscípulo suyo ante los malos tratos recibidos por un maestro brutal que se excedía con métodos pedagógicos mediante castigos corporales a sus alumnos. El maestro fue entonces relevado (1818) por un joven aunque capacitado profesor matemático llamado Bernt Michael Holmboë (1795-1850), quien inició su misión motivando a sus alumnos para que resolvieran por sí mismos algunos problemas de álgebra y geometría. Supo así vislumbrar entonces el gran potencial de Abel, teniendo que escoger cuestiones especiales para él, a la vista de su enorme capacidad. Según coinciden varios historiadores, es en aquel momento crucial de la vida de Abel, cuando *"se consagra a las matemáticas con la pasión más ardiente"*, adquiriendo rápidamente un pleno conocimiento de las matemáticas elementales.

Bernt Michael Holmboë

Bajo las enseñanzas de Holmboë, el joven Abel comenzó a familiarizarse con trabajos de mayor nivel como los de L. Euler (1707-1803) sobre el cálculo (obras que fueron textos universitarios durante más de cien años)[3], Lagrange y Laplace. Registros Bibliotecarios, acreditan que durante su primer año universitario, Abel había solicitado en préstamo, la *Arithmetica Universalis* y *Principia Mathematica* de I. Newton, *Disquisitiones Arithmmeticae* de C. F. Gauss, o *Calcul de fonctions* de J. L. Lagrange entre otras obras de grandes maestros. Años más tarde le preguntaron cómo pudo situarse tan rápidamente en primera fila, a lo que Abel replicó:

"... estudiando a los maestros, no a sus discípulos."

En esta época, la carrera política del padre de Abel acababa de forma inesperada y trágica en Septiembre de 1818, expulsado del Parlamento debido a falsas acusaciones contra algunos de sus colegas. Inmerso en una profunda depresión, Søren se había refugiado en la bebida como válvula de escape a sus problemas lo que le hizo enfermar gravemente. El padre de Abel fallecía sólo dos años después en 1820. Como anécdota, en el funeral, su viuda Anne Marie Abel bebió en exceso y se fue a la cama con uno de sus sirvientes a la vista de todos los asistentes al acto. Esta pérdida sumiría a la familia en una situación crítica, recayendo sobre Abel una gran responsabilidad para su sustento, ya que su hermano mayor estaba incapacitado para trabajar por enfermedad.

[3] A los 16 años, Abel generalizó el teorema del binomio formulado por Isaac Newton (y extendido luego a los números racionales por Euler), dando una prueba válida, no sólo para números enteros y racionales, sino también para los casos de exponentes irracionales e imaginarios.

Su madre cayó en una profunda depresión difícil de superar lo que la hizo convertirse en una alcohólica.

En 1821, a pesar de la precaria situación en la que vivían él y su familia, Abel logra ser matriculado en la Universidad Real Frederik y en atención a una solicitud tramitada por su mentor Holmboë, se le concede a Abel con carácter excepcional, alojamiento gratuito y una modesta aportación monetaria para pequeños gastos (parte de la misma sufragada particularmente por el propio Holmboë). En aquel entorno universitario y en su ciudad, Abel ya estaba reconocido como un genio sobre el que sus profesores comenzaban a depositar grandes esperanzas desde el punto de vista científico.

Niels Henrik Abel (retrato original)[4]

Durante su último año en la universidad, cuando sólo tenía veinte años, Abel comenzó a atacar el viejo problema de encontrar la solución de la ecuación general quíntica mediante operaciones algebraicas. En términos concretos, se trataba de encontrar la solución mediante radicales de la ecuación general de quinto grado $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$; es decir, hallar una fórmula que exprese sus raíces en términos de coeficientes a, b, c, d, e y f dados, de modo que sólo incluya un número finito de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Abel no sólo estuvo al tanto de los trabajos desarrollados por Cardano, Tartaglia y Bombelli para las ecuaciones cúbica y cuártica, sino que conocía muy bien la problemática pendiente, estimulado por el trabajo de algunos maestros como Lagrange y su obra "*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*" (1770)[5] donde había reconsiderado críticamente los métodos y fracasos de todas las tentativas de búsqueda de soluciones para las ecuaciones algebraicas. Paolo Ruffini (1765-1822) intentó probar la imposibilidad de la resolución algebraica de la ecuación general de grado $n > 4$, primeramente en su *Teoria generale della equazione* en 1799, y más tarde en su *Reflessioni intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali* en 1813. Tuvo éxito con su primera versión de la demostración haciendo uso del método de Lagrange, que establece que no existe ninguna ecuación *resolvente*[6] que satisfaga una ecuación de

[4] Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. © Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

[5] Este trabajo influyó tanto en Ruffini como en Abel para el caso $n > 4$, y también condujo a Galois a su *Teoría de Grupos*. Debe añadirse que Abel tuvo conocimiento de los trabajos de Ruffini, por una referencia que realizó Cauchy sobre él en su trabajo de 1815.

[6] El término *resolvente* (del latín *aequatio resolvens*) significa "ecuación que resuelve". Los referidos intentos de resolución eran equivalentes al establecimiento de la teoría algebraica de la *resolvente*, es decir, el hallazgo de otra ecuación algebraica de grado menor (en general) cuyos coeficientes sean funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de partida, y tal que aquella permita hallar las raíces de esta última.

grado menor que cinco. Ruffini hizo uso, aunque sin demostrarlo, de un teorema ya hoy conocido como el Teorema de Abel-Ruffini, en el que se afirma que si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. A pesar de todo, no pudo lograr una fundamentación de acuerdo a los estándares matemáticos de la época. En trabajos posteriores, formularía una regla de cálculo aproximado de raíces.

Paolo Ruffini

El primer triunfo real del problema corresponde a Abel, al parecer independientemente de Ruffini, seguramente debido a la imposibilidad de encontrar en una Noruega bastante precaria, documentos científicos importantes de calidad, y además, de haberlos hipotéticamente, Abel hubiera sido incapaz de comprenderlos, ya que no manejaba por aquel entonces el italiano. Ruffini había basado sus trabajos sobre el problema en los resultados sobre permutaciones obtenidos por J. L. Lagrange. Al igual que otros que habían considerado erróneamente resolver el problema antes que él, Abel creyó en un principio haber descubierto la resolución del problema de la quíntica; sin embargo, a la vista de que ni Holmboë ni ninguno de los mejores matemáticos de Noruega (Christopher Hansteen, Søren Rasmussen,...) pudieron comprobar la veracidad de su conjetura, envió a través de Holmboë la presunta resolución al matemático profesor Ferdinand Degen en Copenhague, para que la presentase a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca. Degen le contestó requiriéndole algún ejemplo numérico, sin comprometerse a emitir un juicio. Esa respuesta contenía la advertencia de que "estudiara las integrales elípticas"[7]. Fue entonces cuando Abel se puso a trabajar en la búsqueda de ejemplos, hallando más tarde un error en su razonamiento, lo que le suscitó su primera gran decepción, aunque este hecho le motivaría para reconducir su estrategia en la dirección correcta. Abel se dio cuenta de que su estrategia no era la adecuada y no había tenido éxito en su empresa y aparcó de momento el problema de la quíntica. Entonces centró su atención y sus energías en las integrales elípticas y se dio cuenta de que las funciones inversas de las integrales elípticas, esto es las funciones elípticas, tenían propiedades muy interesantes.

Con respecto a sus gustos, aficiones y carácter, Abel mostraba un gran interés por el teatro, pero nulo por la música. A veces mostraba un espíritu impetuoso, mientras que otras entraba en profundas depresiones; todo esto sugiere que sufría cambios de humor con tendencias maníaco depresivas. Era muy modesto y aparentemente amable, y siempre estaba dispuesto a ayudar a sus amigos cuando fuera necesario. Abel no ofrecía nada notable en su aspecto general. Era de estatura media, complexión delicada y ojos azul claro, y vestía siempre con un atuendo simple y descuidado. Quizás lo único destacable de su carácter era que no resultaba ser una persona demasiado extrovertida. En 1822 conseguiría la graduación.

[7] Esto hizo que Abel se iniciara en la que sería su segunda contribución fundamental para las matemáticas, que le condujo a su famosa memoria de París y su posterior competición con Jacobi.

Residencia de estudiantes en Oslo

Antigua Universidad de Cristianía (a finales del siglo XIX)

Durante su estancia en la Universidad, fueron los propios profesores quienes le ayudaron a su manutención. Abel había encontrado en cierto modo una acogida lo más similar posible a un ambiente familiar en la casa del científico, explorador, catedrático de Oslo y profesor de Astronomía Christopher Hansteen, quien le había dado un techo en una habitación del ático de su vivienda, y consideraba a su esposa como una segunda madre, ya que ésta cuidó de él como si de un hijo se tratara, y en estos años difíciles le ayudó enormemente. Abel publicó su primer artículo en una revista de Ciencias Naturales (*Magazin for Naturvidenskaben*) impresa en Noruega, y de la que Hansteen era uno de sus editores. Se publicaron algunos breves trabajos de Abel, pero pronto se comprobó que aquel material que Abel presentaba no era muy común. En 1823, escribió un ensayo en francés titulado *"Solution de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies"*, aparece por primera vez el planteamiento y la solución de una ecuación integral. Buscó financiación en la Universidad para poder publicarlo, sin embargo el trabajo se perdió mientras estaba siendo revisado.

Christine Kemp, retrato de Johan Gørbitz, 1835

Al contrario que Noruega, Dinamarca contaba con una buena escuela de matemáticas. Por ello en el verano de 1823, con la edad de veintiún años, y a instancias de su benefactor Hansteen, el profesor Rasmussen concedió a Abel una modesta beca de 100 *speciedaler*[8] (propulsada con la ayuda de profesores de la Universidad) para visitar a Ferdinand Degen o von Schmidten entre otros célebres matemáticos daneses en Copenhague. Una vez allí, Abel realizó algunos estudios acerca del último teorema de Fermat. El tío de Abel, Peder Mandrup Tuxen, trabajaba en la base naval de Christianshavn, en Copenhague, donde conoció a una joven llamada Christine Kemp, hija de un comisario de guerra en Dinamarca, con quien entabló una relación sentimental. Se dice de ella que no era especialmente bella, pero gozaba de un

[8] Moneda Noruega en circulación entre 1816 y 1875. Más tarde sería sustituida por el *rigsdaler specie*, y este a su vez por la corona noruega. Al cambio 1 corona noruega = $^1/_4$ *speciedaler*.

excepcional buen carácter. En 1824, Christine se mudaría a Son en Noruega donde trabajó como institutriz para estar cerca de su novio, y en las navidades de ese mismo año se prometerían.

Tras su retorno de Copenhague, Abel retomó nuevamente el problema de la ecuación quíntica. Ya a finales de 1823, fue capaz de demostrar correctamente que en general, ésta no podía ser resuelta mediante radicales, resultado ampliado más tarde por Galois a las ecuaciones de grado mayor. Publicó su primera demostración en una memoria en 1824 que comenzaba así:

> *"Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora."*

y seguía,

> *"Uno de los problemas más interesantes del Álgebra es el de la solución algebraica de las ecuaciones, y observamos que casi todos los matemáticos distinguidos se han ocupado de este tema. Llegamos sin dificultad a la expresión de las raíces de las ecuaciones de los cuatro primeros grados en función de sus coeficientes. Fue descubierto un método uniforme para resolver estas ecuaciones, y se creyó sería aplicable a las ecuaciones de cualquier grado, pero, a pesar de todos los esfuerzos de Lagrange y de otros distinguidos matemáticos, el fin propuesto no fue alcanzado. Esto llevó a la creencia de que la solución de las ecuaciones generales era algebraicamente imposible; pero esta creencia no podía ser comprobada, dado que el método seguido sólo llevaba a conclusiones decisivas en los casos en que las ecuaciones eran solubles. En efecto, los matemáticos se proponían resolver ecuaciones sin saber si era posible. Así se podía llegar a una solución, pero si por desgracia la solución era imposible, podríamos buscarla durante una eternidad sin encontrarla. Para llegar infaliblemente a una conclusión debemos por tanto seguir otro camino. Podemos dar al problema tal forma que siempre sea posible resolverlo, cosa que podemos hacer con cualquier problema. En lugar de preguntarnos si existe o no una solución de relación que no nos es conocida, debemos preguntarnos si tal relación es en efecto posible... Cuando se plantea un problema de esta forma, el enunciado contiene el germen de la solución e indica el camino que debe seguirse, y yo creo que habrá pocos ejemplos donde seamos incapaces de llegar a proposiciones de más o menos importancia, hasta cuando la complicación de los cálculos impida una respuesta completa al problema."*

Abel sigue diciendo que debe seguirse el método científico, pero ha sido poco usado debido a la extraordinaria complicación de los cálculos algebraicos que supone.

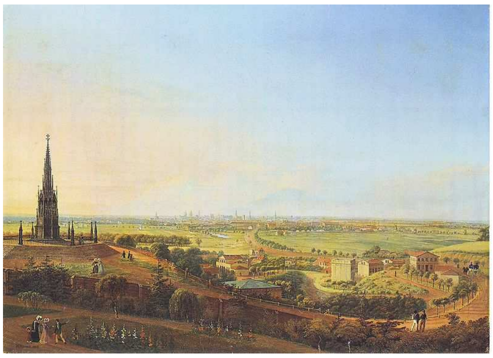
> *"Pero en muchos ejemplos esta complicación es sólo aparente y se desvanece en cuanto se aborda."*

y añade,

"He tratado de esta forma diversas ramas del Análisis, y aunque muchas veces me he encontrado ante problemas más allá de mi capacidad, he llegado de todos modos a gran número de resultados generales que aclaran la naturaleza de esas cantidades cuya dilucidación es el objeto de las Matemáticas. En otra ocasión mencionaré los resultados a que he llegado en esas investigaciones y el procedimiento que me ha conducido a ellos. En la presente memoria trataré el problema de la solución algebraica de las ecuaciones en toda su generalidad."

Desafortunadamente el resultado de la impresión de este trabajo dejó mucho que desear, fundamentalmente debido a que Abel sólo utilizó seis páginas para ello con el objetivo de ahorrar costes de impresión, lo que le infirió un carácter bastante ecléctico e incluso ilegible en ocasiones. Una versión mucho más elaborada aparecería más tarde en 1826, en el primer volumen del *Journal* de Crelle (del que hablaremos más adelante).

Para entonces el Senado de la Universidad de Cristianía, reconoció la excepcional habilidad de Abel, y decidió que debía ser considerado receptor de una beca para estudiar alemán y francés, y visitar los centros matemáticos más importantes del continente (en Alemania y Francia). Los fondos necesarios provendrían del Estado (200 speciedaler anuales por un periodo de dos años). En agosto de 1825, Abel junto a otros cuatro jóvenes científicos de la universidad (Christian P. B. Boeck, Balthazar M. Keilhau, Nicolay B. Møller y Otto Tank) emprendieron su viaje por las universidades de Francia y Alemania. El plan original consistía en que primeramente Abel debía visitar a Degen en Dinamarca, pero a su llegada encontró que éste ya había fallecido.



Berlín, Heinrich Hintze, 1829

En su viaje por tierras germanas, Abel decidió acompañar a sus compañeros que se dirigían a Berlín. Previamente hizo un alto en las proximidades de Hamburgo, en Altona, donde contactó con el astrónomo Heinrich Christian Schumacher (amigo de Gauss). Una vez llegaron a Berlín, decidieron que pasarían allí el invierno. Abel gastó gran parte de sus fondos en Berlín, pero tuvo la gran suerte de que entró en contacto, previa misiva de recomendación de von Schimidten, con August Leopold Crelle (1780-1855), quien se convertiría en un personaje vital en su vida tanto personal como profesional.

Crelle era un exitoso ingeniero civil que dirigía grandes obras públicas de ferrocarril en Prusia, y gozaba de un mayor peso específico en el mundo matemático que su gran benefactor hasta el momento Holmboë. Nacido en 1780, había desarrollado un temprano interés por las matemáticas, y publicado algunas obras sobre matemáticas aplicada y escolar. En 1826, cuando llegó Abel, Crelle acababa de fundar el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Diario sobre matemática pura y aplicada), llamado comúnmente *Journal* de Crelle.

ISSN 2174-0410

Este hecho provocó que debido a la emisión regular del diario, Berlín fuera considerada una importante ciudad en el mundo matemático. Aunque su objetivo era cubrir también aspectos formales de matemáticas aplicadas, pronto se centra prácticamente de forma exclusiva en la matemática pura. Crelle sostenía que:

> *"... las matemáticas puras deberían ser explicadas en primera instancia sin prestar atención a sus aplicaciones. Debería desarrollarse puramente desde y para sí misma, para que sólo de esta manera pueda ser libre para moverse y evolucionar en cualquier dirección. En la enseñanza de las aplicaciones matemáticas, éste es el resultado particular que la gente busca. Serán extremadamente sencillas de encontrar para aquellos que estén científicamente entrenados, y los que hayan captado su espíritu."*

En el prefacio del primer número de su *Journal*, Crelle declaró sus objetivos: no sólo se publicarían nuevos artículos sino que una selección de artículos publicados en otras lenguas serían traducidos al alemán. El propio Crelle había traducido al alemán el libro de geometría de Legendre y algunos de los trabajos de Lagrange. Pronto, el *Journal* adquirió carácter internacional, gracias a los contactos de Crelle en París entre otros lugares. Tenía un don extraordinario para descubrir jóvenes prometedores matemáticos y animarlos. Los primeros trabajos de Abel, Dirichlet, Eisenstein, Grassmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevski, Möbius, Plücker, von Staudt, Steiner y Weierstrass fueron todos publicados en el *Journal* de Crelle.

August Leopold Crelle

Crelle era un hombre de carácter afable y sociable. Después de que Abel lo conociera en Enero de 1826, éste escribió a su antiguo profesor Holmboë:

> *"No puede usted imaginar qué hombre tan excelente es, exactamente tanto como uno mismo debería ser; pensativo y sin embargo terriblemente cortés como muy poca gente, bastante honesto llegado el caso. Cuando me encuentro con él, me siento tan agusto como cuando estoy con usted o con otros buenos amigos."*

Cuando Abel llegó a Berlín, Crelle estaba pensando en lanzarse a esta gran aventura con sus propios medios económicos y Abel tuvo una parte en que tomara la decisión. Existen dos relatos acerca de la primera visita de Abel a Crelle, ambos interesantes. Por aquella época Crelle desempeñaba un cargo del gobierno para el que tenía poca aptitud y menos gusto: el de examinador del Instituto de Industria (Gewerbe-Institut) en Berlín. El relato de Crelle, de tercera mano (Crelle a Weierstrass y éste a Mittag-Leffler), de esta visita histórica es el siguiente:

> *"Un buen día, un joven muy desconcertado, con un rostro juvenil e inteligente, penetró en mi habitación. Creyendo que se trataba de un candidato para ingresar en el Instituto le expliqué que eran necesarios diversos*

> *exámenes. Al fin, el joven abrió su boca y dijo en muy mal alemán: ¡No exámenes, sólo Matemáticas!."*

Con los ánimos, el apoyo y la amistad de Crelle, Abel publicó sus trabajos de forma regular en el *Journal*; para entonces Crelle ya se había percatado de que estaba ante un auténtico genio matemático. El primer volumen por sí sólo contenía siete de sus trabajos, y los siguientes volúmenes muchos más la mayoría de ellos de importancia suprema. En total llegó a publicar 22.

La estancia de Abel en Berlín, de unos cinco meses, influyó sobremanera en su vida profesional. Allí leyó el *Analyse Algébrique* de A. L. Cauchy por quien manifestaría más adelante una gran admiración por el conjunto de sus trabajos. En uno de sus artículos sobre la quíntica, Abel ya había usado resultados de Cauchy sobre permutaciones.

En una carta a Hansteen, Abel habla fundamentalmente de dos temas, el primero la necesidad de inferir al Análisis Matemático un fundamento firme, y el segundo una imagen de su humanidad y optimismo a pesar de todas las contrariedades con las que se había encontrado a lo largo de su vida.

> *"En el análisis superior pocas proposiciones han sido demostradas con un rigor suficiente. En todas partes encontramos el desgraciado procedimiento de razonar desde lo especial a lo general, y es un milagro que esta forma de razonar sólo rara vez nos haya llevado a la paradoja. Es en efecto extraordinariamente interesante buscar la razón de esto. Esta razón, en mi opinión, reside en el hecho de que las funciones que hasta ahora se presentan en el Análisis pueden ser expresadas en su mayor parte por potencias.... Cuando seguimos un método general ello no es muy difícil [para evitar trampas]; pero tengo que ser muy circunspecto, pues las proposiciones sin prueba rigurosa (es decir sin prueba alguna) se han apoderado de mí en tal grado que constantemente corro el riesgo de usarlas sin nuevo examen. Estas bagatelas aparecerán en el Journal publicado por el Sr. Crelle."*

Expresa luego la gratitud a como fue tratado en Berlín.

> *"Cierto es que pocas personas se interesaron por mí. Pero estas pocas han sido infinitamente cariñosas y amables. Quizá pueda responder en alguna forma a las esperanzas que han puesto en mí, pues es desagradable para un bienhechor ver perderse todos sus esfuerzos."*

En la primavera de 1826, era el momento de que Abel se dirigiera a París. Crelle prometió acompañarle e intentar realizar una parada en Gotinga y concertar una visita con Gauss. Desafortunadamente asuntos de negocios impidieron a Crelle dejar Berlín. Previamente Abel había enviado a C. F. Gauss una copia de sus trabajos con la demostración del problema de la quíntica, motivo principal por lo que en el viaje se había planificado hacer un alto en Gotinga para tener una entrevista con él. Cabe destacar la gran decepción y desengaño que sufrió Abel cuando se enteró de la noticia de que Gauss, sin ni siquiera echar un vistazo al breve folleto con la demostración de la resolución de la quíntica por radicales, manifestaba textualmente:

"¡He aquí otra de esas monstruosidades!"

Es claramente evidente que si Gauss se hubiera dignado a enterarse de algunos de los párrafos de la obra, hubiera mostrado otro interés por el trabajo que llegó a sus manos. Quizás no atribuyó la importancia que merecía a la resolubilidad por radicales, y no supo vislumbrar que estaba ante el nacimiento del álgebra moderna, de la que tanto Abel como Galois deben ser considerados los padres naturales. Cuando Abel se enteró de la reacción de Gauss, decidió no visitarlo, no ocultando desde entonces su antipatía por aquél, que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Así, Abel llegaría a decir de Gauss:

> *"Jamás en sus grandes trabajos descubre la idea generadora. Es como el zorro, que con la cola va borrando el camino que sigue, para que nadie pueda ir detrás."*

Christopher Hansteen

Durante la estancia de Abel en Berlín, surgió un puesto vacante de profesor en su *alma mater*[9] de forma inesperada, pero antes incluso de que Abel conociera este hecho la vacante fue ocupada por su mentor Holmboë. Abel fue considerado demasiado joven e inexperto. Una vez conoció la noticia se sintió terriblemente desdichado, puesto que sería bastante difícil que volviera a surgir una oportunidad similar en bastante tiempo. Quería casarse pero difícilmente podría hacerlo sin una posición asegurada. Quizás el querer resarcirse de esta decepción fue el motivo por el que en lugar de encaminarse a París, Abel decidió prolongar su viaje (a todas luces, en perjuicio de su salud y de su carrera, además de tratarse de un viaje que poco tenía que ofrecerle desde el punto de vista científico) para disfrutar en algunas "juergas" con sus compañeros estudiantes, dirigiéndose hacia Venecia y el norte de Italia, para atravesar los Alpes en su ruta hacia la capital francesa. Como justificación, Abel escribiría a Hansteen:

> *"Pensé al principio marchar directamente desde Berlín a París, satisfecho con la promesa de que el Sr. Crelle me acompañaría. Pero el Sr. Crelle tuvo dificultades, y tendré que viajar solo. Estoy constituido de tal modo que no puedo tolerar la soledad. Cuando estoy solo me hallo deprimido, me siento pendenciero, y tengo poca inclinación para el trabajo. Por tanto me he dicho a mí mismo que sería mucho mejor ir con el Sr. Boeck a Viena, y este viaje me parece injustificado por el hecho de que en Viena hay hombres como Litrow, Burg, y otros, todos ellos excelentes matemáticos; añádase también que será la única ocasión en mi vida de hacer este viaje. ¿Hay algo que no sea razonable en este deseo mío de ver algo de la vida del Sur? Puedo trabajar activamente mientras viajo. Una vez en Viena, existe para ir a París, una vía directa por Suiza. ¿Por qué no ver un poco todas estas cosas? ¡Dios mío! también a mí me gustan las bellezas de la naturaleza*

[9] *Alma mater* es una expresión procedente de la locución latina, que significa literalmente "madre nutricia" (que alimenta) y que se usa para referirse metafóricamente a una universidad, aludiendo a su función proveedora de alimento intelectual, generalmente para referirse al sitio en donde determinada persona cursa o cursó sus estudios universitarios.

como a cualquier otro. Este viaje me hará llegar a París dos meses más tarde, esto es todo. Podré rápidamente recuperar el tiempo perdido. ¿No le parece que este viaje me hará mucho bien?."

Visitaron Leipzig, Freiburgo, Dresden, Praga, Viena, Graz, Trieste, Venecia, Verona, Innsbruck, Lucerna, Zurich, y Basilea. En Freiburgo, visitó a Georg Amadeus Carl Friedrich Naumann y su hermano el matemático August Naumann, y fue aquí donde Abel llevó a cabo descubrimientos interesantes sobre teoría de funciones, sobre todo elípticas e hiperelípticas, y unas clases de funciones que son ahora conocidas como *funciones abelianas*.

París, Seyfert, 1818

Era Julio cuando Abel llegó a París y con la ayuda de su amigo Johan Gørbitz encontró acomodo con una familia pobre pero codiciosa que le proporcionaba dos malas comidas por día y un inmundo aposento a cambio de un elevado alquiler. Había mandado a Berlín la mayoría de sus trabajos para la publicación en el *Journal*, pero se había reservado el que consideraba el más importante para presentarlo en la Academia de Ciencias de Francia. El trabajo en cuestión era un teorema sobre funciones trascendentales. Las vacaciones de verano habían comenzado recientemente, por lo que aquellos matemáticos con los que esperaba entrevistarse estaban fuera de la ciudad. Por lo tanto Abel continuó trabajando en su teorema hasta Octubre momento en el que lo finalizó para su presentación en la Academia. Cuando los profesores regresaron, Abel sintió que éstos eran demasiado inaccesibles, además de que difícilmente le entendían quizás porque su francés no era lo suficientemente fluido. Legendre, cuya principal especialidad eran las integrales elípticas, tuvo su primer encuentro efímero con Abel antes de subir a un carruaje, y sólo tuvo tiempo de saludarle cortésmente y presentarle sus excusas pues debía marcharse. Cauchy también lo recibió con su característica descortesía. Abel comentó sobre este encuentro en una carta fechada el 24 de octubre de 1826, dirigida a Holmboë:

"Le diré que esta ruidosa capital del continente me ha producido por el momento el efecto de un desierto. Prácticamente no conozco a nadie, a pesar de hallarnos en la más agradable estación cuando todos se hallan en la ciudad . . .. Hasta ahora he conocido al Sr. Legendre, al Sr. Cauchy, al Sr. Hachette y a algunos matemáticos menos célebres, pero muy capaces: el Sr. Saigey, editor del Bulletin des Sciences y el Sr. Lejeune-Dirichlet, un prusiano que vino a verme el otro día creyéndome compatriota suyo. Es un matemático de gran penetración. El Sr. Legendre ha probado la imposibilidad de resolver la ecuación

$$x^5 + y^5 = z^5$$

en enteros, y otras cosas importantes. Legendre es un hombre extraordinariamente cortés, pero desafortunadamente tan viejo como las piedras.

ISSN 2174-0410

> *Cauchy es un excéntrico, y no se puede llegar a ningún lado con él, aunque es el matemático que sabe en estos momentos cómo desarrollar la matemática. Al principio no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con más claridad. Cauchy es extremadamente Católico y fanático. Una cosa muy extraña en un matemático (...). Es el único que se preocupa de las matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras materias físicas. El Sr. Laplace creo que ahora no escribe nada. Su último trabajo fue un complemento a su teoría de las probabilidades. Muchas veces le veo en la Academia. Es un buen sujeto (...) Poisson es un hombre bajo con una tripita muy graciosa. Es un agradable camarada y sabe comportarse con dignidad. También Fourier (...) Lacroix es extremadamente viejo. El lunes el Sr. Hachette me presentará a varios de estos caballeros. Por otro lado, los franceses no me gustan tanto como los alemanes; los franceses son anormalmente reservados hacia los extranjeros. Es difícil acercarse a ellos. Y no me atrevo a presentar mis pretensiones. Todo el mundo trabaja en sus propios asuntos sin importarle los otros. Todo el mundo quiere enseñar y nadie aprender. El más absoluto egoísmo prevalece por todos los sitios. Lo único que buscan los franceses de los extranjeros es la práctica (...) puede imaginar qué difícil es hacerse notar, especialmente para un principiante (...) He realizado un trabajo sobre ciertas clases de funciones trascendentes, para presentarlo a la Academia (...). Se lo mostré a Cauchy, pero seguramente ni se dignará a mirarlo. Y me atrevo a decir sin jactancia, que es un buen trabajo. Siento gran curiosidad por conocer el juicio de la Academia."*

Luego cuenta lo que está haciendo, y añade un resumen de sus proyectos no muy optimistas.

> *"Lamento haber pedido dos años para mis viajes, pues año y medio habrían sido suficientes."*

El estudio fue presentado al Secretario de la Academia de Ciencias de París, Joseph Fourier, el 30 de octubre de 1826, para ser publicado en su revista. El trabajo se remitió a Cauchy y Legendre, con Cauchy como responsable principal, para que fuera evaluado. Para aquel entonces, Legendre, que contaba ya con 74 años, consideró pobre y difícilmente legible el manuscrito, manifestando:

> *"... percibimos que la memoria era apenas legible; estaba escrita con una tinta casi blanca y los caracteres algebraicos a menudo mal formados; estuvimos de acuerdo en que el autor debió proporcionarnos una copia más limpia para ser leída."*

por lo que confió a Cauchy (con 37 años) para que se encargara del informe, informe que Abel esperaba lleno de esperanza pero que nunca llegaba. Lamentablemente como más tarde se confirmaría, no recibió respuesta en vida sobre el trabajo presentado. Sumergido en su propia tarea, Cauchy quizás no le prestó la atención merecida, tal vez porque vislumbrara en aquel mísero estudiante noruego un pobre diablo con ensoñaciones imposibles o incluso quizás por indiferencia al principiante. Al igual que Legendre, Cauchy extravió y olvidó aquel ensayo del que era depositario. Al parecer, cuando Abel se enteró de que Cauchy no lo había leído, aguardó con paciente resignación el veredicto de la Academia (que nunca recibiría), como así reveló a Holmboë en otra carta:

> *"Espero todos los días la decisión sobre los trabajos que presenté a la Academia. Pero los lentos nunca acaban. Legendre y Cauchy fueron los jueces, Cauchy es el principal y Legendre simplemente se deja llevar."*

Pero cuando tuvo constancia de que su manuscrito se había extraviado, hizo además otra cosa, redactar de nuevo el principal resultado. El artículo, aún siendo el más profundo de todos sus trabajos, constaba tan sólo de dos breves páginas. Abel lo llamó estrictamente teorema; no tenía introducción alguna, ni contenía observaciones superfluas, ni aplicaciones.

Como hemos comentado antes, Holmboë había sido contratado como profesor de la Universidad de Oslo. Holmboë no quería el puesto, pensando en que Abel era verdaderamente merecedor de él, pero lamentablemente no tuvo elección, ya que la Universidad de Oslo no podía aguardar la decisión, y en caso de no contestar (Abel para entonces se encontraba en Berlín), se lo ofrecerían a otro candidato. Desafortunadamente este hecho significó la imposibilidad de que Abel pudiera ocupar un puesto apropiado regular en la enseñanza superior de matemáticos.

Después del tiempo transcurrido en Berlín con Crelle, Abel se había cargado de deudas y, aunque su colega y amigo quiso que volviera a Berlín con algunas ofertas para intentar retenerle, una vez agotado incluso el préstamo de Holmboë, Abel quería volver a casa. Sobre todo porque la situación familiar, especialmente la de sus hermanos, era ya desesperada.

En una carta, Abel expresa su necesidad de abandonar la Europa Continental, pues quería dedicarse en profundizar en su matemática.

> *"Muchas cosas me quedan por hacer, pero en tanto me halle en el extranjero todo lo que haga será bastante malo. ¡Si yo tuviera mi cátedra como el Sr. Kielhau tiene la suya!. Mi posición no está asegurada, pero no me inquieto acerca de esto; si la fortuna no me acompaña en una ocasión, quizá me sonría en otra."*

Regresó a Cristianía en Mayo de 1827, y para ganar algún dinero tuvo que dar instrucción a algunos escolares. Su novia Christine se empleó como institutriz en casa de unos amigos de su familia en Frøland. Abel pasó el verano con su novia en esa ciudad. Estaba a la sazón, dedicado a la teoría de funciones elípticas, en su competición con Jacobi, escribiendo algunos artículos sobre la misma. En la Navidad de ese año, hubo de viajar en trineo para visitar a su novia en Frøland, llegando tras su viaje bastante enfermo. El riguroso clima noruego ya le había hecho desde hacía tiempo padecer tuberculosis pulmonar, de la que tuvo conocimiento médico durante su estancia en París y que Abel había atribuido a un frío persistente. Quizás el trajín y la excesiva tensión de aquel largo viaje al extranjero de más de año y medio de duración, contribuyeron a que esa enfermedad le llevara más tarde a su fatal desenlace.

En 1828, Hansteen recibió una subvención para investigar el magnetismo terrestre en Siberia y se nombró entonces a Abel para que lo sustituyera en su puesto docente en la Universidad y también en la Academia Militar. Este hecho mejoró su precaria situación económica. Pero Abel continuaba entregado en cuerpo y alma a su investigación matemática, si bien su salud se iba deteriorando cada día. Las vacaciones veraniegas de 1828 las pasó junto a su novia en Frøland y volvería a viajar de nuevo a esta ciudad para celebrar la Navidad de ese año. A mediados de enero de 1829, Abel empeoró notablemente. Supo que no viviría mucho tiempo, a causa de una hemorragia que no fue posible detener. Con anterioridad ya había escrito a su amigo Keilhau, con quien Abel se sentía profundamente unido, implorándole que se hiciera cargo de la asistencia de su madre; y además de aquel requerimiento, al visitarle le aconsejó que entablara una relación seria con Christine (a quien Keilhau no conocía), manifestándole:

> *"No es bella; tiene el cabello rojo y es pecosa, pero se trata de una mujer admirable."*

(un tiempo después de que Abel muriera, resultó que ambos se casaron). Así fueron los últimos días de Abel en Frøland en el hogar de la familia inglesa en la que Christine era institutriz. La debilidad y la creciente tos hicieron que sólo pudiese estar fuera de la cama unos pocos minutos. Ocasionalmente intentaba trabajar en su matemática, pero ya no podía escribir. A veces revivía el pasado, hablando de su pobreza y de la bondad de la Señora Hansteen. Padeció su peor agonía durante la noche del 5 de abril. En la madrugada llegó a sentirse más tranquilo, y durante la mañana a las once en punto del 6 de abril de 1829, exhaló su último suspiro. Tenía 26 años y ocho meses.

Casa donde murió Abel en Frøland

Dos días más tarde de la muerte de Abel llegaba una carta de Crelle, quien se había encargado de intermediar con el ministro de educación en Berlín para que Abel obtuviera una plaza definitiva como profesor de la Universidad de Berlín en un nuevo Instituto Tecnológico. Allí tendría por compañeros de trabajo a Dirichlet, Jacobi y Steiner. Lamentablemente la carta llegaba demasiado tarde. El propio Gauss, con el fin de reparar dignamente su anterior comportamiento para con Abel, había intermediado junto a Humboldt, solicitando una cátedra para él. Legendre, Poisson y Laplace, habían escrito asimismo al rey de Suecia para que Abel ingresara en la Academia de Estocolmo. Para entonces Cauchy no había aún emitido informe alguno sobre el primer ensayo de Abel, a pesar de que Legendre había emitido varias protestas al respecto, pero para este momento ya se conocía la esencia de la misma a través del *Journal* de Crelle.

El propio Crelle escribió un largo elogio en su *Journal* en el que decía:

> *"Todo el trabajo de Abel lleva la imprenta de la genialidad y la fuerza de*

ISSN 2174-0410

su intelecto que es extraordinario y en ocasiones increíble, aún cuando la juventud del mismo no fuera tomada en consideración. Se puede decir que fue capaz de salvar todos los obstáculos hasta llegar a la raíz de los problemas con un vigor que parecía inagotable. Atacaba los problemas con extraordinaria energía; él los consideraba desde su superficie y era capaz de vislumbrar con tal perspectiva su estado, que todas las dificultades parecían desvanecerse bajo el victorioso ataque de su genio.... Pero no sólo era su gran talento lo que fomentó el respeto de los demás por Abel y lo que hace infinitamente lamentable su pérdida. Se distinguió por la pureza y la nobleza de su carácter y por una rara modestia que le hizo ser una persona tan apreciada como su genialidad."

Al final de sus días, ajeno al conocimiento de Abel y otras instituciones noruegas competentes, ocurrió que C. G. J. Jacobi (1804-1851) tuvo noticias del teorema de Abel por el propio Legendre (con quien Abel sostuvo correspondencia después de su regreso a Noruega) y en una carta a Legendre fechada el 14 de marzo de 1829, éste comentó:

"¡Qué descubrimiento es ese Abel!(...) ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?."

Esta noticia llegó hasta Noruega, lo que unido a las expectativas que en su momento se habían depositado en la figura de Abel, hizo que el propio cónsul de Noruega en París interpusiera una reclamación diplomática con la firme intención de que el manuscrito perdido se recuperara. La Academia indagó en el asunto y Cauchy encontró finalmente dicho manuscrito en 1830. En una carta fechada en abril de 1829 que contestaba a la del 14 de marzo a Jacobi, Legendre comentaba:

"Esta memoria ha sido encargada en principio al señor Legendre que la ha examinado, pero viendo que la escritura era poco legible y los caracteres algebraicos a menudo mal formados, la remitió a su colega, el señor Cauchy, con el ruego de que se encargara del informe (...). El Sr. Cauchy (...) olvidó durante mucho tiempo la memoria del Sr. Abel, de la cual era depositario. No fue hasta el mes de marzo de 1829 que los dos comisarios supieron, por el aviso que uno de ellos recibió de un sabio de Alemania, que la memoria del Sr. Abel, que había sido presentada a la Academia, contenía o debía contener unos resultados de análisis muy interesantes y que estaba sorprendido de que no se hubiera hecho un informe de este en la Academia."

Una vez hallado el manuscrito, Cauchy se dispuso a redactar el correspondiente informe, pero ambos (Legrende y Cauchy), se vieron retenidos al sopesar que Abel ya había publicado parte de la memoria en el *Journal* de Crelle. En palabras de Legendre:

"Bajo ese aviso, el Sr. Cauchy buscó la memoria, la encontró y se dispuso a hacer un informe sobre ella, pero los comisarios se vieron retenidos considerando que el Sr. Abel había publicado ya una parte de la memoria en

ISSN 2174-0410

> *el Journal de Crelle, y que el autor probablemente continuaría hasta hacer aparecer el resto, y que entonces el informe de la memoria, que no podía ser sino verbal, estaría fuera de lugar. En este estado de cosas sabemos súbitamente de la muerte del Sr. Abel, pérdida muy penosa para la ciencia y que puede hacer ahora el informe necesario para conservar, si ha lugar, este trabajo, que es de los principales de su autor, en la colección de títulos de sabios extranjeros."*

Cuando, tras su muerte, la fama de Abel ya estaba cimentada, su apreciadísima memoria afortunadamente no se había extraviado, sin embargo no fue publicado hasta el año 1841 en *Mémoires des savants etrangers*, vol.7, 176-264. Para colmo de desgracias, editor, impresor, o ambos, perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta. La Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel, concediéndole el Gran Premio de Matemáticas, en unión con Jacobi, pero Abel ya había fallecido.

Los siguientes párrafos de la memoria muestran su objeto:

> *"Las funciones trascendentes hasta ahora consideradas por los matemáticos son escasas en número. Prácticamente toda la teoría, de funciones trascendentes se reduce a la de funciones logarítmicas, circulares y exponenciales, funciones que en el fondo forman una sola especie. Tan sólo recientemente se ha comenzado a considerar algunas otras funciones. Entre las últimas, las trascendentes elípticas, algunas de cuyas notables y elegantes propiedades han sido desarrolladas por el Sr. Legendre, ocupan el primer lugar. El autor [Abel] considera, en la memoria que tiene el honor de representar a la Academia, una clase muy extensa de funciones, todas aquellas cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes sean funciones racionales de una variable, y ha demostrado para estas funciones propiedades análogas a la de las funciones logarítmicas y elípticas . . . y ha llegado al siguiente teorema*[10]*:*
>
> *"Si tenemos varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una, y la misma ecuación algebraica cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable, podemos siempre expresar la suma de cualquier número de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre que establezcamos cierto número de relaciones algebraicas entre las variables de las funciones en cuestión."*
>
> *El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares."*

Realmente, y aparte de la escasez de sus recursos, lo más razonable es deducir que después del episodio acaecido, la estancia de Abel en París sólo pudo proporcionarle una amarga tristeza en todos los sentidos. Resulta evidente que a Abel, resumiendo, le sobrarían razones para sentir resentimiento de la actitud de Cauchy, aún cuando jamás dudase de que éste fuera indiscutiblemente un gran maestro del análisis.

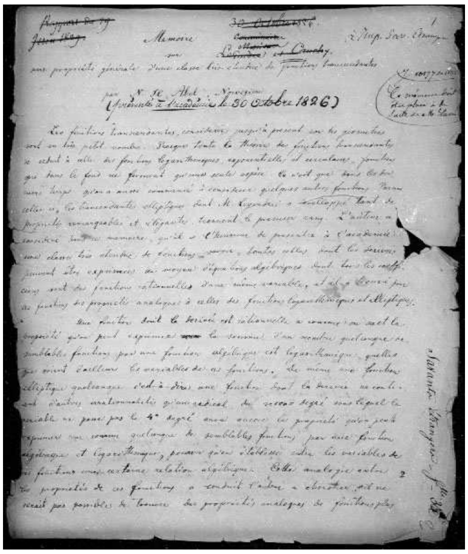
Cabe destacar, que para mayor gloria de la ciencia, fue determinante la atención que Jacobi solicitó para con Abel, como muestra de su noble rivalidad,

[10] Conocido hoy en día como *Teorema de Abel-Ruffini*.

ISSN 2174-0410

además del mismo requerimiento por parte de toda la Alemania científica, para que se buscase con empeño la admirable memoria de Abel. Con todo lo escrito anteriormente, no acabaron aún las peripecias habidas con el manuscrito de Abel. Cuando los matemáticos noruegos Ludwing Sylow y Sophus Lie elaboran en la década de 1870-1880 la publicación de las obras completas de Abel, se encontraron con la desagradable sorpresa de que el manuscrito que Abel había presentado a la Academia de París se había perdido. ¿Qué había ocurrido esta vez?. Según se pudo averiguar más adelante, a un profesor matemático italiano rival de Cauchy para el puesto de profesor en el Colegio de Francia, de nombre Guglielmo Bruto Icilio Timoleone, conde Libri-Carucci della Sommaia, alumno de Legendre, le fue asumida la responsabilidad de seguir la impresión de *Mémoires des savants* antes citadas.

Al parecer Libri llegó a ser un especialista consumado en el arte de expoliar importantes legados de las bibliotecas aprovechando su privilegiado puesto como inspector de bibliotecas. Hacia 1846 se empezó a sospechar de sus hurtos, pero el presidente del consejo de ministros, François Guizot, amigo de Libri, archivó las investigaciones. En 1952, siglo y cuarto después de que Abel presentara la Memoria sobre funciones elípticas a la Academia de París fue finalmente encontrada por Viggo Brun, de Oslo, en la biblioteca Moreniana de Florencia (Italia). Brun, que visitaba la ciudad, aprovechó para saber si en la biblioteca matemática había legados de Guglielmo Libri, sospechando la implicación de éste en la desaparición del manuscrito. Después de realizar algunas pesquisas, Brun encontró lo que buscaba, es decir la Memoria original de Abel que el pícaro de Libri habría logrado llevarse consigo. Sobre este hecho, Brun escribía:



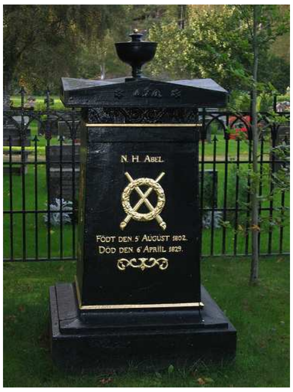
Primera página de la Memoria que Abel presentó a la Academia de París (la segunda, escrita en 1826)

> *"Fue un momento de gran intensidad cuando con ayuda del catedrático Procissi abrí el antiguo manuscrito en la biblioteca Moreniana. Ahí se encontraban las hojas de amarillo pardo, densamente escritas "par N. H. Abel, norvegian" según constaba bajo el título. ¡No conocía yo bien esa letra! ¡Con toda seguridad era Abel! Las letras eran pequeñas, el espacio aprovechado al máximo, las dos caras de la hoja escritas. Al final se leía la dirección de Abel en París "Rue St. Margherite, n. 41 faub. St. Germain" (ahora Rue Gozlin)."*

La narración de la vida de Abel es terriblemente triste, claro ejemplo como en muchos casos, de la íntima conexión entre la pobreza y la tragedia. Su corta vida y su trágica muerte ha dado lugar a numerosos mitos sobre su persona. Algunos lo han considerado como el Mozart de la ciencia. Junto a Galois, ambos son considerados como los precursores del álgebra moderna. Ambos vi-

vieron la época del Romanticismo en su plenitud, y como otros tantos jóvenes incomprendidos dejaron su existencia terrenal a muy corta edad. Sin embargo su legado fue tan inmenso que será imposible que sus nombres queden en el olvido. Como dijo Charles Hermite en referencia a Abel, *"Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años"*.

En Noruega, Abel es considerado un héroe nacional. El centenario de su nacimiento es ampliamente celebrado, y varios han sido los honores a título póstumo otorgados al joven sabio, como un cráter lunar o un asteroide que llevan su nombre, una calle del distrito duodécimo de París denominada "rue Abel", una estatua en bronce realizada por el escultor Gustav Vigeland en 1908 que se encuentra en el "Jardín Abel" del Royal Park de Oslo, y que constituye hoy día una de las imágenes más representativas de la ciudad, o una estatua en la Universidad de Oslo. Además de todas estas muestras de afecto, su rostro aparece en multitud de tiradas de sellos filatélicos, o en antiguos billetes noruegos.



Tumba de Abel en Frøland

Escultura de Abel en el Royal Park de Oslo

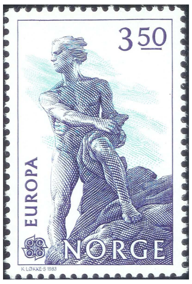
Estatua de Abel en la Universidad de Oslo

Sello conmemorativo de Abel (2002)

Billete de 500 coronas noruegas (1978)

ISSN 2174-0410

Sellos conmemorativos del centenario de la muerte de Abel (Noruega-1929)



Sello conmemorativo de Abel (Noruega-1983)

De estudiante, Abel vivió en Lille Grensen 5. En 2002 la Sociedad Patrimonial de Oslo colocó una placa en su recuerdo.

Busto de Abel en Gjerstad

Estatua de Abel en Frøland

3. Memoria sobre ecuaciones algebraicas, en la que se demuestra la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado (1824)

Nuestros comentarios a lo descrito por Abel irán de aquí en adelante en cuadros de texto similares a éste. Adicionalmente se le han añadido a las ecuaciones un número para facilitar su referencia.

Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora. Por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de ecuaciones algebraicas.

Sea

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \tag{1}$$

la ecuación general de quinto grado y supongamos que es resoluble algebraicamente, es decir, y puede ser expresada por una función formada por radicales de las cantidades a, b, c, d y e.

Hemos seguido una notación para los coeficientes ligeramente distinta a la utilizada por Abel en su Memoria. El consideró los coeficientes a como la suma de las raíces, b la suma de sus productos tomados dos a dos, c la suma de sus productos tomando las raíces de tres en tres, así sucesivamente, de acuerdo a las identidades de Girard, esto es, considérese la ecuación cúbica cuyas raíces son x_1, x_2, x_3. La ecuación puede ser escrita de la forma $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Multiplicando esta expresión, tendremos $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$. Obsérvese que el coeficiente del término x^2, es la suma con signo negativo de las tres raíces, mientras que el coeficiente del término x es el producto simétrico de todas las raíces, tomadas de dos en dos de una vez: $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$. Finalmente, el término constante de la ecuación es el producto negativo de las tres raíces: $-x_1x_2x_3$. Podemos aplicar el mismo razonamiento a cualquier ecuación de grado n, de forma que el coeficiente desconocido correspondiente al grado $n - 1$ debe ser la suma con signo negativo de todas las raíces, el siguiente coeficiente debe ser la suma simétrica de todas las raíces tomadas de dos en dos de una vez, y así sucesivamente. A estas relaciones las denominamos *identidades de Girard*, las cuales Newton generalizó acertadamente mediante expresiones que obtuvo de la suma del cuadrado de todas las raíces, o la suma de sus n-ésimas potencias, denominadas *identidades de Newton*.

Claramente en este caso podemos expresar y de la forma:

$$y = p + p_1R^{\frac{1}{m}} + p_2R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{2}$$

siendo m un número primo y R, p, p_1, p_2, etc., funciones similares a y, y así hasta que obtenemos funciones racionales expresadas en función de los términos a, b, c, d, y e.

ISSN 2174-0410

Esencialmente Abel muesta que una suma de radicales, que por su parte están interrelacionados, pueden siempre ser expresados de la forma de la ecuación (2), incluso poniendo todos los términos en un denominador común, de tal modo que uno consiga únicamente funciones racionales dentro de los radicales más íntimos de la expresión. Abel utiliza (2) por lo tanto para llevar a cabo una reducción al absurdo en su demostración. Recordemos que había asumido que y podía ser expresado como una serie finita de términos algebraicos, en donde R, p, p_1, p_2,... eran cada uno funciones algebraicas de los coeficientes a, b, c, d, e, entendido en términos de los sucesivos órdenes de las funciones como radicales interrelacionados.

Podemos también asumir que es imposible expresar $R^{\frac{1}{m}}$ mediante una función racional en términos de a, b, etc. p, p_1, p_2, y considerando $\frac{R}{p_1^m}$ en lugar de R, está claro que podemos hacer que $p_1 = 1$. Entonces

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \tag{3}$$

Abel simplifica (2) deshaciéndose de p_1, redefiniendo $R \to \frac{R}{p_1^m}$, de modo que $p_1 \left(\frac{R}{p_1^m}\right)^{\frac{1}{m}} = R^{\frac{1}{m}}$. En lo que sigue, Abel asume que esto se ha hecho para eliminar p_1.

Sustituyendo este valor de y en la ecuación propuesta (1) y reduciendo, obtenemos un resultado de la forma:

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{4}$$

siendo q, q_1, q_2, etc, racionales de funciones enteras (p. ej. polinomiales) de los términos $a, b, c, d, e, p, p_2, \ldots$ y R.

Abel sustituye la presunta solución (3) nuevamente en la ecuación principal (1). De este modo llega a (4), donde las nuevas funciones q, q_1, q_2,... dependen de todos los términos anteriores: los coeficientes a, b, c, d, e y las cantidades que acaba de utilizar p, p_1, p_2,..., R. Obsérvese que de igual modo que (1) representa un polinomio igualado a 0, esta nueva ecuación también lo hace, de forma que $P = 0$. Obsérvese también que, Abel ha definido q, q_1, q_2,... de modo que cada uno multiplique la potencia apropiada de $R^{\frac{1}{m}}$. Obsérvese también que la mayor potencia de R en (4) será $\frac{m-1}{m}$.

En realidad, denominando $R^{\frac{1}{m}} = z$, tenemos dos ecuaciones

$$z^m - R = 0 \quad \text{y} \quad q + q_1 z + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0. \tag{5}$$

Abel trata de demostrar que $q = 0, q_1 = 0, q_2 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$; su demostración requiere de varios pasos, finalizando con la expresión (8). Comienza definiendo $z = R^{\frac{1}{m}}$, de modo que $z^m = R$ o $z^m - R = 0$. Entonces, en (4) sustituye $z = R^{\frac{1}{m}}$, resultando $q + q_1 z + \cdots + q^{m-1} z^{m-1} = 0$. Estas dos partes de (5) delimitan z.

Si los términos q, q_1,... no son igual a cero, las ecuaciones expresadas en (5) tienen necesariamente uno o más raíces en común. Si k es el número de estas raíces comunes, sabemos que podemos encontrar una ecuación de grado k que tenga tantas como las k raíces mencionadas y en la cual todos los coeficientes sean funciones racionales de R, q, q_1, y q_{m-1}. Sea

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_1 z^k = 0 \tag{6}$$

dicha ecuación. Esta tiene raíces en común con la ecuación $z^m - R = 0$; así, todas las raíces de esta ecuación tienen la forma $\alpha_\mu z$, donde α_μ designa una de las raíces de la ecuación $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. Entonces sustituyendo (en (6) $z \rightarrow \alpha_\mu z$), tenemos las siguientes ecuaciones,

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k = 0 \tag{7.1}$$

$$r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha^k r_k z^k = 0 \tag{7.2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$r + \alpha_{k-2} r_1 z + \alpha_{k-2}^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha_{k-2}^k r_k z^k = 0. \tag{7.k}$$

En la expresión $z = \alpha_\mu z$, el subíndice μ es un índice que varía desde 1 a k (el total de raíces comunes de (5), z, αz, $\alpha_1 z$, $\alpha_2 z$,. . ., $\alpha_{k-2} z$). Sustituyendo $z = \alpha_\mu z$ de nuevo en $z^m - R = 0$ resulta $\alpha_\mu^m z^m - R = 0$, pero $z^m = R$ y esto significa que $\alpha_\mu^m R - R = 0$. Dividiendo por R (que es distinto de 0) se muestra que α_μ es una raíz de la ecuación $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. Ahora α_μ es sinónimo de toda la serie de valores 1, α, α_2,. . ., α_{k-2}, donde Abel observa que 1 es una raíz de esta ecuación y la denomina $\alpha_1 = \alpha$. Obsérvese que entonces existen sólo $k - 2$ valores de α_μ, ya que de las k raíces, la primera y la segunda son 1 y α). Abel sustituye ahora los valores sucesivos $\alpha_\mu z = z, \alpha z, \alpha_2 z,\ldots, \alpha_{k-2} z$ nuevamente en la expresión (6). Sustituyendo 1 por α_μ nos da la expresión (7.1); sustituyendo α nos da (7.2),. . . así hasta sustituir α_{k-2} que nos da (7.k).

En estas k ecuaciones, uno puede siempre encontrar el valor de z expresado mediante una función racional de los términos r, r_1, r_2,. . ., r_k, y, como los términos son en sí mismo funciones racionales de a, b, c, d, e, R,. . ., p, p_2,. . ., se deduce que z es también una función racional de estos mismos términos, lo cual es contrario a la hipótesis. Por lo tanto, tiene que cumplirse necesariamente que

$$q = 0,\ q_1 = 0,\ \ldots,\ q_{m-1} = 0. \tag{8}$$

Ahora Abel realiza una observación crítica: de las k ecuaciones (7.1-7.k), siempre podemos encontrar un z como una función racional de r, r_1, r_2,. . ., r_k, y α, ya que tenemos simultáneamente k ecuaciones para determinar k incógnitas, z_1, z_2,. . ., z_k. Obsérvese que esto difiere de la situación de la ecuación original (1), la cual era una ecuación para determinar cinco valores de y; (7.1-7.k) son k ecuaciones lineales para determinar k incógnitas, y pueden ser resueltas por eliminación, tratando cada potencia de z como una incógnita separada y resolviendo las k ecuaciones como si fueran ecuaciones lineales simultáneas para esas k incógnitas. Pero asumimos que $z = R^{\frac{1}{m}}$ no es una función racional de sus variables, por lo que la única alternativa es que $q = q_1 = \cdots = q_{m-1} = 0$, concluyendo la demostración de (8).

Si ahora estas ecuaciones son válidas, está claro que la ecuación propuesta (1) es satisfecha por todos los valores que se obtienen para y dándole a $R^{\frac{1}{m}}$ todos los valores

$$R^{\frac{1}{m}},\ \alpha R^{\frac{1}{m}},\ \alpha^2 R^{\frac{1}{m}},\ \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \ldots,\ \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}, \tag{9}$$

siendo α una raíz de la ecuación

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0. \tag{10}$$

Si $y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ (3), entonces $q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0$. Esto sucede porque, al sustituir esta expresión de y_1 en (1), obtenemos términos como (productos de p, p_2,...) $(R^{\frac{1}{m}})^a (R^{\frac{2}{m}})^b \cdots$. Agrupando potencias, resulta (productos de p, p_2,...) $(R^{\frac{1}{m}})^{a+2b+\cdots}$. Por lo tanto el exponente $a + 2b + \cdots$ puede ser siempre expresado como $mi + j$, donde i y j son enteros $(j \leq m-1)$, entonces las potencias enteras de $R^i = (R^{\frac{1}{m}})^{mi}$ puede ser sacadas fuera e incluso tanto los productos de p, p_2,... como q, q_1, ... en (4). Abel acaba de demostrar que todas estas q_s son iguales a cero. Ahora si consideramos y_2, en la cual $R^{\frac{1}{m}} \rightarrow \alpha R^{\frac{1}{m}}$, puede aplicarse un argumento similar, excepto que haya un factor de α elevado a la misma potencia $(a + 2b + \cdots)$ multiplicando a estos factores previos de q y R. Pero como q_s son cero, entonces cada término desaparece e y_2 también satisface $P = 0$ en (4). El mismo argumento también se aplica a y_3 $(R^{\frac{1}{m}} \rightarrow \alpha^2 R^{\frac{1}{m}})$ y todos los otros valores de (9).

Tenemos entonces que todos los valores de y son diferentes, por el contrario en el caso de que tuviéramos un ecuación de la misma forma que la ecuación $P = 0$, ésta nos llevaría, como hemos visto, a un resultado que no puede ser válido. El número m por lo tanto no puede exceder de 5. Por lo tanto designando y_1, y_2, y_3, y_4, y y_5 como las raíces de la ecuación propuesta (1), tendremos

$$y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{11.1}$$

$$y_2 = p + \alpha R^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{11.2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_m = p + \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \tag{11.m}$$

Obsérvese que, si por el contrario $y_1 = y_2$ (por poner un ejemplo), entonces (11.1)=(11.2), lo cual requiere que $\alpha - 1 = 0 = \alpha^2 - 1 = \alpha^3 - 1 = \cdots$, lo cual contradice (10). Por lo tanto todos los valores de y son diferentes. Por supuesto, hay casos especiales de ecuaciones quínticas que tienen raíces iguales, pero se puede comprobar que sus soluciones son racionales simples. Por ejemplo, si todas las raíces son iguales, $y = y_0$, entonces la ecuación quíntica puede ser factorizada como $(y - y_0)^5 = 0$, y claramente puede verse que esa situación se puede dar únicamente si los coeficientes son muy restringidos. Abel también nos recuerda que las raíces no pueden ser nunca más de cinco.

De estas ecuaciones, deducimos fácilmente que:

$$p = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \cdots + y_m), \tag{12.1}$$

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-1}y_2 + \cdots + \alpha y_m), \tag{12.2}$$

$$p_2R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-2}y_2 + \cdots + \alpha^2 y_m), \tag{12.3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha y_2 + \cdots + \alpha^{m-1}y_m). \tag{12.m}$$

Vemos de esto que p, p_2,..., p_{m-1}, R, y $R^{\frac{1}{m}}$ son funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta (1).

Ahora hace uso de estas cinco raíces y_1, y_2,..., y_5 y utiliza (3) y el resultado obtenido de (9-10) para expresar explícitamente las ecuaciones (11.1-11.m). Entonces suma estas ecuaciones y obtiene

$$\begin{aligned} y_1+y_2 + \cdots + y_m = mp &+ (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})R^{\frac{1}{m}} \\ &+ p_2(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})R^{\frac{2}{m}} + \cdots \\ &+ p_{m-1}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Pero por (10) esto nos lleva inmediatamente a (12.1), por lo que todas las sumas $(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})$ desaparecen. Ahora Abel dirige sus esfuerzos a los términos de (4) multiplicando cada ecuación de tal modo que aísla cada término. Para obtener el término $R^{\frac{1}{m}}$, multiplica (11.1) por 1, (11.2) por α^{m-1}, (11.3) por α^{m-2},..., (11.m) por α. Entonces sumándolas todas, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1+\alpha^{m-1}y_2 + \alpha^{m-2}y_3 + \cdots + \alpha y_m = mp &+ (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})p \\ &+ m\alpha^m R^{\frac{1}{m}} + p_2\alpha^m(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})R^{\frac{2}{m}} + \cdots \\ &+ \alpha^m p_{m-1}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{m-1})R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Como $\alpha^m = 1$, entonces $mR^{\frac{1}{m}} = y_1 + \alpha^{m-1}y_2 + \alpha^{m-2}y_3 + \cdots + \alpha y_m$, (12.2). Se utiliza la misma estrategia para el resto de ecuaciones (12.2-12.m).

Consideremos ahora uno de estos términos, por ejemplo R. Sea

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + S_{n-1}v^{\frac{n-1}{n}}. \tag{13}$$

Tratando este término del mismo modo que y, obtenemos un resultado similar, mostrando que los términos $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2,..., son funciones racionales de los diferentes valores de la función R, y como estos valores son funciones racionales de y_1, y_2, etc., entonces también lo son las funciones $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2,....

Siguiendo este razonamiento, concluimos que todas las funciones irracionales contenidas en la expresión de y son funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta.

Con esto finaliza el segundo paso de toda la demostración.

Siendo establecido este resultado, no es difícil completar la demostración. Consideremos primero las funciones irracionales de la forma $R^{\frac{1}{m}}$, siendo R una función racional de a, b, c, d, y e. Sea $R^{\frac{1}{m}} = r$, donde r es una función racional de las raíces y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 y R una función simétrica de estos términos. Ahora como el caso en cuestión es la solución general de la ecuación de quinto grado, está claro que uno puede considerar y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 como variables independientes; por lo tanto la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$ puede mantenerse bajo esta suposición. En consecuencia, podemos intercambiar los términos y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 entre ellos en la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$, ya que por el intercambio, $R^{\frac{1}{m}}$ necesariamente toma m diferentes valores ya que R es una función simétrica.

En este último paso de la demostración comienza la reducción al absurdo. Abel establece que $R^{\frac{1}{m}} = r$ y nos recuerda que acaba de mostrar que es una función racional de las raíces y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5. Es más, R es una función simétrica de estas raíces. Esto significa que podemos permutar las raíces entre ellas sin cambiar R. Esto también significa que la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$ puede ser permutada entre las m raíces, y se asumirá entonces que r toma los diferentes m valores.

La función r debe tomar también los m diferentes valores de la permutación de las cinco variables que contiene de todas las formas posibles. Para mostrar esto, es necesario que $m = 5$ o $m = 2$, ya que m es un número primo. (Ver la memoria del Sr. Cauchy en el *Journal de l'École Polytechnique*, vol. 17.)

En este paso, Abel hace referencia al trabajo de Cauchy. El Teorema de Cauchy establece que si $m = 5$, nuestra función $r = R^{\frac{1}{m}}$ puede sólo tomar los valores cinco o dos, nunca dos o cuatro. El Teorema de Cauchy establece que r sólo puede tomar un valor, pero esto contradice la suposición inicial de que todas las raíces eran diferentes.

Primeramente, sea $m = 5$. La función r por lo tanto tiene cinco valores diferentes y consecuentemente puede ser expresada de la forma

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1y_1 + p_2y_1^2 + p_3y_1^3 + p_4y_1^4, \tag{14}$$

siendo p, p_1, p_2,... funciones simétricas de y_1, y_2, ... Intercambiando y_1 e y_2, la ecuación nos da,

$$p + p_1y_1 + p_2y_1^2 + p_3y_1^3 + p_4y_1^4 = \alpha p + \alpha p_1y_2 + \alpha p_2y_2^2 + \alpha p_3y_3^2 + \alpha p_4y_2^4 \tag{15}$$

donde

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \tag{16}$$

Pero esta ecuación resulta imposible, por lo que consecuentemente m debe ser igual a 2.

ISSN 2174-0410

En su artículo de 1826, Abel ofrece una demostración más profunda y más simple de esta afirmación. Primero, considera expresar una de las raíces y_1 como en (11a), $y_1 = p + R^{\frac{1}{5}} + p_2 R^{\frac{2}{5}} + \cdots + p_4 R^{\frac{4}{5}}$ y entonces obtiene la expresión para $R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5)$, como en (12.2), donde el caso $m = 5$ es considerado. Sin embargo, esta expresión es imposible, ya que el lado izquierdo de la igualdad toma cinco valores (los posibles valores de las cinco raíces), mientras que la parte derecha tiene 120 (las permutaciones de las cinco raíces). Por lo tanto el caso $m = 5$ debe ser excluido.

Entonces sea

$$R^{\frac{1}{2}} = r, \tag{17}$$

donde r debe tomar dos valores diferentes de distinto signo. Entonces tenemos (ver la memoria del Sr. Cauchy)

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_2 - y_3) \cdots (y_4 - y_5) = vS^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

siendo v una función simétrica.

Abel considera dos posibles valores para r de la ecuación (17), recordando que la raíz cuadradada toma siempre los signos $\pm$. El Teorema de Cauchy establece en este caso que r puede ser expresado de la forma de la ecuación (18), donde v es una función simétrica (dependiente de los coeficientes) y $S^{\frac{1}{2}}$ es una función especial, $S^{\frac{1}{2}} = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_2 - y_3) \cdots (y_4 - y_5)$. Obsérvese que S no puede ser cero, ya que ninguna de las dos raíces son iguales.

Consideremos ahora las funciones irracionales de la forma

$$\left(p + p_1 R^{\frac{1}{\nu}} + p_2 R_1^{\frac{1}{\mu}} + \cdots\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{19}$$

siendo p, p_1, p_2, etc., R, R_1, etc., funciones racionales de a, b, c, d, y e y consecuentemente funciones simétricas de y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5. Como hemos visto, debemos tomar $\nu = \mu =$ etc. $= 2$, $R = v^2 S$, $R_1 = v_1^2 S$, etc. La función procedente de (19) puede por lo tanto ser expresada de la forma

$$\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{20}$$

Sean

$$r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{21}$$

$$r_1 = \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{22}$$

Multiplicándolas, obtenemos

$$rr_1 = \left(p^2 - p_1^2 S\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{23}$$

Abel nos recuerda que ahora sabemos que estamos manejando $R^{\frac{1}{2}}$, en lugar de $R^{\frac{1}{5}}$. Utilizando las definiciones $R = v^2 S$, $R_1 = v^2 S, \ldots$, puede expresar las funciones irracionales como (19), de la forma $r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, (21), donde ha eliminado los otros términos de (19) ya que su objetivo es mostrarnos la forma general que tomarán. Igualmente, expresa el otro término irracional del mismo modo $r_1 = \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, (22). Multiplicando ambos, obtiene la expresión (23), eligiendo convenientemente el signo negativo para r_1.

Ahora si rr_1 no es una función simétrica, m debe ser igual a 2, pero en este caso r tendría cuatro valores diferentes, lo cual es imposible; por lo tanto rr_1 debe ser una función simétrica.

Abel argumenta que el producto rr_1 es una función simétrica, por que si no, entonces por el Teorema de Cauchy, $m = 2$. ¿Qué significa esto?. En (21), r tendría cuatro valores, ya que esto implica que la raíz cuadrada de los términos incluye a su vez raíces cuadradas. Esto no es posible; sólo son posibles los valores $m = 5$ y $m = 2$. Por lo tanto, rr_1 es una función simétrica (23).

Sea v esta función simétrica $(v = rr_1)$, entonces

$$r + r_1 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}} = z. \tag{24}$$

Esta función tiene m diferentes valores, entonces m debe ser igual a 5, ya que m es un número primo. Por lo tanto, tenemos

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{5}}, \tag{25}$$

siendo q, q_1, q_2, etc., funciones simétricas de y_1, y_2, y_3, etc. y por lo tanto funciones racionales de a, b, c, d y e.

Como ha excluido la posibilidad de que $m = 2$, entonces por eliminación $m = 5$. Abel expresa z en (25) en términos de las raíces de la quíntica.

Combinando esta ecuación con las ecuación propuesta, podemos expresar y en términos de una función racional de z, a, b, c, d y e. Ahora tales funciones son siempre reducibles a la forma

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}}, \tag{26}$$

donde P, R, P_2, P_3, y P_4 son funciones de la forma $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$, siendo p, p_1, y S funciones racionales de a, b, c, d y e.

De esta expresión para y obtenemos que

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}, \tag{27}$$

donde

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \tag{28}$$

ISSN 2174-0410

Ahora el lado izquierdo de la igualdad (27) tiene 120 valores diferentes y el lado derecho sólo 10; consecuentemente, y no puede tener la forma que hemos considerado, pero hemos demostrado que y debe ser necesariamente de esta forma si la ecuación propuesta es resoluble.

Por lo tanto concluimos que *es imposible resolver por radicales la ecuación general de quinto grado*.

De este teorema se deduce inmediatamente que resulta también imposible resolver por radicales ecuaciones de grado superior a cinco.

Esta última deducción es muy sencilla, ya que si se multiplica la ecuación quíntica por y, entonces tendremos una ecuación de sexto grado, donde una de sus raíces es precisamente $y = 0$, y las otras raíces son irresolubles por radicales, por lo tanto para grados superiores a cinco, es imposible resolverlas mediante radicales.

Referencias

[1] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 307–326, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

[2] DURÁN, Antonio José. *Cauchy. Hijo rebelde de la revolución*, pp. 106–111, 172–175, Editorial Nívola, Colección *La matemática en sus personajes*, Tres Cantos, Madrid, 2009.

[3] HAYEK, Nácere. *Una Biografía de Abel*, Revista *Números*, Vol. 52, pp. 3–26, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, diciembre 2002.

[4] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 91–97, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[5] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 665–666, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[6] PESIC, Peter. *Abel's Proof*, The MIT Cambridge Press, Massachusetts, Londres, 2003.

[7] ROUSE BALL, Walter William. *A Short Account of The History of Mathematics*, 4th. Ed., pp. 461–462, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. *Abel y las ecuaciones integrales*, *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, Nº. 42, marzo - junio, 2011.

[9] STEWART, Ian. *Historia de las Matemáticas (En los últimos 10.000 años)*, 1ª.Ed. pp. 190–193, Crítica Editorial, Colección Drakontos, 2008.

[10] THE ABEL PRIZE WEBSITE. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[11] WIKIPEDIA
Niels Henrik Abel, http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Paolo Ruffini, http://en.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.