Investigación
Luz y gravedad
(Reflexiones geométricas sobre cáusticas y lentes gravitacionales)

José Rojo Montijano
Juan Carlos Garro Garro
Elena Ortiz García
Gonzalo Cañadas Echagüe

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de Abril de 2011

Resumen

Cuando los rayos de luz iluminan una taza de café en una tarde soleada, podemos observar la curva que más brilla sobre la superficie del líquido. Quizá sea ésta una oportunidad para plantearse el siguiente experimento mental: ¿cómo juegan los rayos de luz al reflejarse en diferentes "tazas" geométricas? Esta comunicación pretende proseguir esta discusión con algunas consideraciones sencillas que nos sitúen ante el fenómeno de las lentes gravitacionales, allí donde los efectos de la gravedad afectan, incluso, a la manera de propagarse de la luz, mostrando un sistema dinámico idealizado que resulta, a la vez, sencillo y (matemáticamente) caótico.

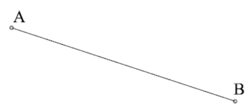
Palabras Clave: Cáusticas; envolventes; singularidades; lentes gravitacionales; grado topológico.

1. Sobre la geometría de los rayos de luz

Vamos, primero, a discutir un poco la geometría de los rayos de luz, destacando cómo éstos se focalizan formando cáusticas (ver la sección 2). Este comportamiento puede ser estudiado tanto en el marco de la geometría euclídea como en el de la riemanniana, semirriemanniana, e incluso finsleriana.

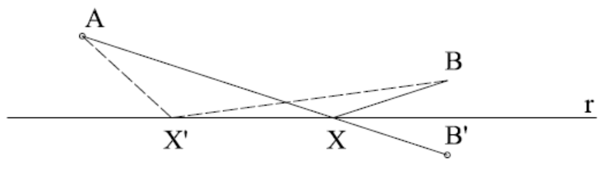
Vamos a desarrollar estas ideas progresivamente, encadenándolas mediante una serie numerada de etapas, que buscan explicar finalmente por qué la existencia de cáusticas asociadas con lentes gravitacionales es, hoy en día, motivo de especulación y fuente de conjeturas en el estudio de la gravitación:

1. Según el *Principio de Fermat*, la luz se propaga entre dos puntos *A* y *B* usando el mínimo tiempo posible.



En una geometría euclídea, o sea, en un medio homogéneo e isótropo, esto implica que la luz elige viajar en línea recta entre *A* y *B*.

2. Consideremos ahora una reflexión en un espejo, que supondremos que es una recta *r*, en el plano.

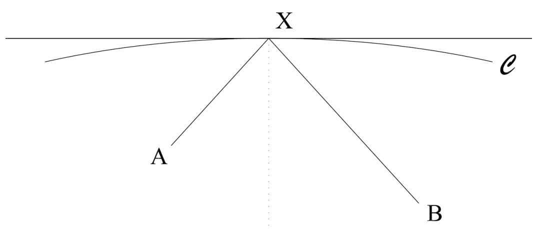


Estamos buscando una línea quebrada *A X B*, cuya longitud resulte mínima entre las quebradas $A\ X'\ B$ tales que $X' \in r$. Para hallar X reflejemos B en B' respecto del espejo y conectemos mediante un segmento A y B'. El punto X buscado está en la intersección de r con AB'.

Esta construcción implica la conocida *ley del billar*: "el ángulo que forma con r el rayo que llega, AX ,coincide con el ángulo que forma con r el rayo reflejado, XB". Esta ley se sigue, por tanto, de un principio variacional, el aludido principio de Fermat.

3. Supongamos ahora que el espejo es una curva regular, C, en un plano.

El mismo principio variacional también produce la misma conclusión en este nuevo marco: el punto de reflexión, X, optimiza las longitudes de las quebradas $A\ X'\ B$, para $X' \in C$ (donde la reflexión tiene como espejo a la tangente a C en X).



Recurramos a unas nociones del cálculo diferencial para justificar esta generalizada ley de reflexión:

Sea $f = f_A + f_B$, donde $f_P(X)$ es la distancia euclídea entre los puntos X y P del plano.

Como el gradiente de f_P en un punto X es el vector PX normalizado, el gradiente de f en X es la suma de los vectores AX y BX normalizados.

Nos interesamos por los puntos críticos de f que estén sujetos a la condición de pertenecer a C. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, podemos afirmar que los puntos buscados tienen su vector gradiente ortogonal a C.

Esto prueba nuestra ley de reflexión del billar con borde curvilíneo, pues la suma de los vectores AX y BX normalizados resulta ser perpendicular a C en X si y sólo si estos vectores forman el mismo ángulo con la tangente a C en X.

4. Naturalmente, este tipo de argumentación sigue funcionando también cuando el espejo es alguna hipersuperficie regular en el espacio

multidimensional, y cuando la geometría subyacente, en lugar de la euclídea, es la geometría riemanniana.

5. Consideremos que, como ocurre en la naturaleza, los rayos emergen en diferentes direcciones. Si tomamos una fuente de luz puntual y reflejamos los rayos que lanza sobre un espejo, la envolvente de la familia de rayos reflejados (fig.1 y fig.2*)* es una cáustica (véase la sección 2*).*

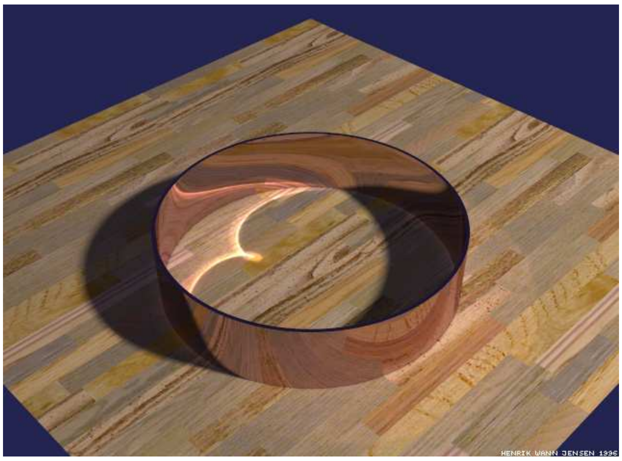
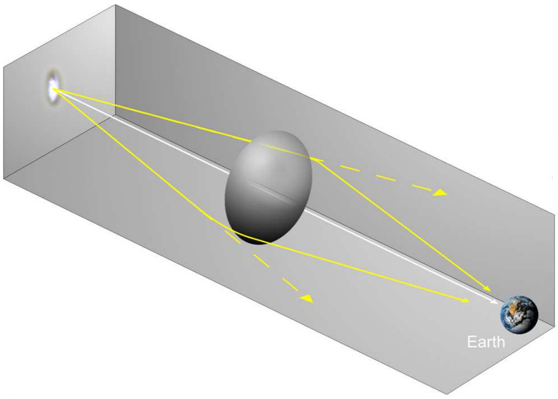


Figura 1

La existencia de tales cáusticas explica los nacimientos y desapariciones de puntos brillantes en los patrones que el juego de la luz ofrece a nuestro alrededor. Al ser envolvente de la familia de rayos reflejados, una cáustica es muy brillante, pues la energía que se concentra entre pares de rayos se va contrayendo y concentrando más y más al llegar a sus puntos.

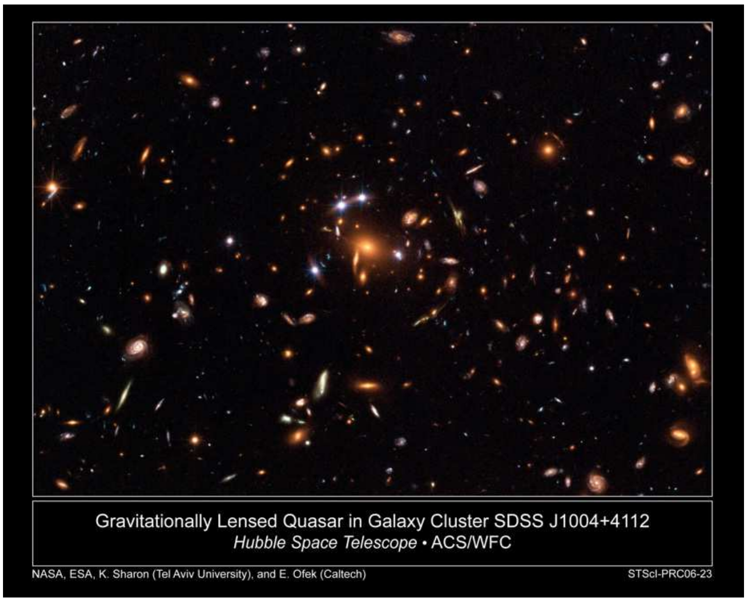
Figura 2

6. Usando la teoría de la relatividad , Raychaudhari [9] dedujo el ángulo de deflexión de la luz en la métrica de Schwarzschild, recurriendo al mismo principio variacional para geodésicas nulas.



Durante muchos años, el estudio teórico sobre lentes gravitacionales se realizó casi exclusivamente en el marco de estas dos hipótesis: los campos gravitacionales considerados eran "débiles" y los ángulos deflectados eran "pequeños". El citado trabajo de Raychaudhuri abrió el camino a la consideración de campos gravitatorios muy intensos, en los que las aproximaciones anteriores pierden sentido. El descubrimiento en los últimos años de que existe un agujero negro en la zona central de nuestra galaxia ha suscitado un enorme interés por investigar la deflexión de la luz cerca de un agujero negro. El ángulo de deflexión de tales rayos de luz puede hacerse arbitrariamente grande, pues los rayos pueden ser violentamente obligados a dar vueltas alrededor del horizonte de sucesos del agujero negro.

En estas situaciones, los rayos de luz se describen matemáticamente como geodésicas nulas de una variedad lorentziana. Cuando la ecuación de las geodésicas no es completamente integrable, cobran un papel primordial los métodos cualitativos de la topología diferencial para estudiar el comportamiento de las geodésicas. En la sección 2 se prueba un conocido teorema de Burke [4] (sobre el número de imágenes que produce una lente gravitatoria, en un modelo sencillo de lente gravitacional), como aplicación de la teoría del grado topológico.



7. Sin embargo, hasta hace pocos años [6] [12], escasa atención se había prestado a las propiedades de los frentes de ondas ópticas y las superficies cáusticas asociadas con las lentes gravitatorias.

Como el punto de vista de los frentes de ondas resulta muy natural en la relatividad general, recientemente se ha logrado un enorme progreso en esta área: Petters [12] ha estudiado las ecuaciones que gobiernan la formación de superficies cáusticas sobre conos de luz relacionándolos con el potencial de la lente.

8. Especulaciones con modelos de universos con dimensiones extra, que contribuyen a esclarecer problemas cosmológicos, han atraído gran interés en los últimos años. Se considera, en particular, la posibilidad de producir mini-agujeros negros en choques entre partículas elementales en (futuros) colisionadores. Cabe esperar que la mayoría de estos agujeros negros estén en rotación.

El reciente trabajo de Frolov [7] analiza el movimiento de la luz en un espacio-tiempo de un agujero negro pentadimensional en rotación (*la métrica de Myers-Perry)* , y demuestra que esta métrica posee tres campos vectoriales Killing y un campo tensorial Killing. Usando las integrales primeras asociadas a éstos, Frolov propone las ecuaciones de movimiento y prueba que no existen órbitas circulares estables en los planos ecuatoriales de esta métrica. De hecho, una conjetura abierta en este campo afirma que la inexistencia de órbitas acotadas estables es propia de los agujeros negros de dimensión superior.

9. Mediante observaciones que exploren la dinámica del disco de acreción en el entorno del horizonte de sucesos, se planea verificar algunas propiedades del espacio-tiempo. En el contexto de las teorías de la gravedad con alta energía en las que se recurre a dimensiones extra, la existencia o no de éstas podría verificarse por sus efectos de lente gravitatoria en nuestra *brana* (la sección espacio-temporal de dimensión 4 en la que están las interacciones que se experimentan).

2. Cáusticas por reflexión

Una superficie cáustica es la envolvente de una familia de rayos reflejados por una superficie. Así pues, inicialmente es un concepto asociado a la óptica. La palabra "cáustica" proviene del griego *kaustikós*, quemar, y hace referencia a que la intensidad de la luz se hace mayor cerca de una cáustica: allí donde la luz "brilla más".

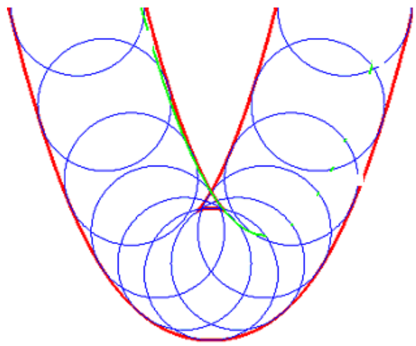
En el plano, una cáustica (por reflexión) es:

- La envolvente de los rayos que emitidos por una fuente de luz desde un punto, son reflejados por un "espejo" (una curva regular del plano) .

- La envolvente de las normales a la ortotómica del "espejo" respecto del punto de luz, es decir, la evoluta de la ortotómica.

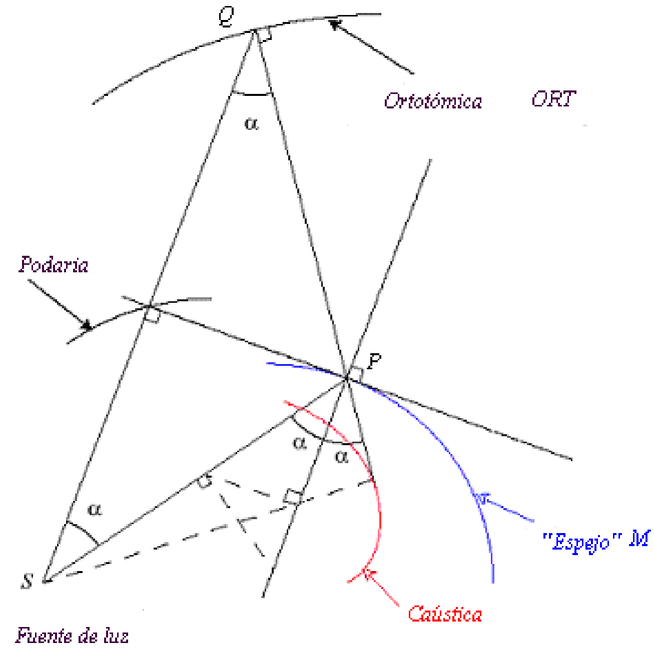
¿Qué es una envolvente? ¿Y una evoluta? ¿Y una ortotómica?

- Envolvente de una familia de curvas: es una "curva" tal que cada uno de sus puntos está en una curva de la familia y además en éstos la tangente a la curva de la familia y la tangente a la envolvente coinciden.



- Evoluta de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura o, equivalentemente, la envolvente de la familia de normales a la curva.

- Ortotómica de una curva respecto a un punto (fuente de luz) es el lugar geométrico de las reflexiones del punto (f. de luz) respecto de las tangentes a la curva (espejo) o, equivalentemente, la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por la fuente de luz, centradas en los puntos de la curva.



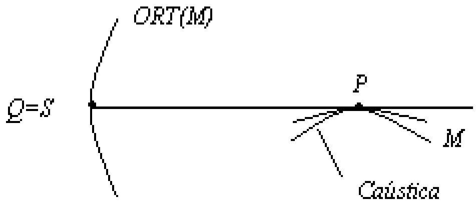
El siguiente resultado establece una relación entre la regularidad o la existencia de **singularidades de una cáustica** con la posición de la fuente de luz *S* .

Proposición.-

Si *S* está sobre la tangente a la curva "espejo", *M*, en un punto *P* entonces:

a) S coincide con el punto *Q* sobre la ortotómica de *M* respecto de *S* (*ORT(M))*asociado a *P* y el radio de curvatura de *ORT(M)* en *Q* coincide con la distancia desde *P* hasta *Q* , de modo que el punto de la cáustica asociado a *P* es él mismo.

b) La cáustica es una curva regular en *P* y "toca" a *M* en *P*



La localización de singularidades de una cáustica tiene que ver con la búsqueda de cónicas que tengan uno de sus focos en la fuente de luz *S* y el otro foco, si la correspondiente cónica es una elipse o una hipérbola, en un punto de la cáustica.

Proposición.-

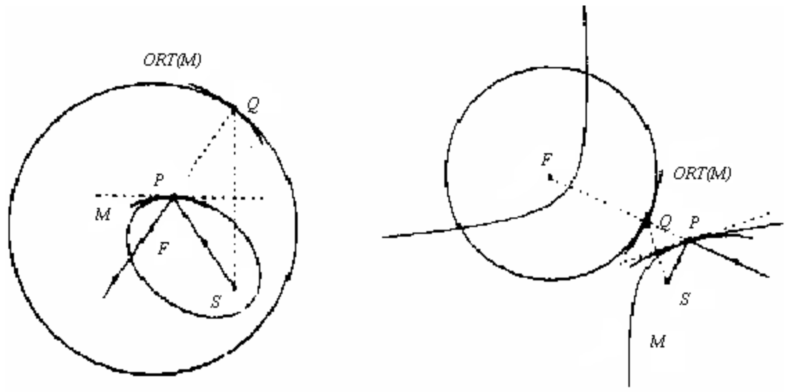
Si *S* no está sobre la tangente a *M* en *P* entonces:

a) La cónica con foco en *S* que tiene como ortotómica respecto de *S* (si *Q* no es punto de inflexión de *ORT(M)*), a la circunferencia osculatriz de *ORT(M)* en *Q* , o, si *Q* es punto de inflexión (la cónica es una parábola en este caso y la circunferencia degenera en recta), la recta tangente en *Q* , tiene orden de contacto al menos 3 con *M* en *P*.

b) El otro foco de la cónica anterior es el punto de la cáustica correspondiente a *P*. Si la cónica es una parábola , el foco está en "el infinito" en el rayo reflejado *QP* (el orden de contacto entre la cónica y *M* en *P* coincide con el orden de contacto entre sus ortotómicas en *Q*)

c) Si la cónica y *M* tienen orden de contacto 3, entonces cerca del foco, si éste es finito, la cáustica es regular

d) Si la cónica y *M* tienen orden de contacto 4 y el foco es finito, *ORT(M)* tiene un vértice en *Q* y la cáustica una cúspide en el foco.



Teniendo en cuenta este resultado, la pregunta que se plantea es: ¿Qué posición habrá de ocupar la fuente de luz *S*, para que la cáustica tenga en el punto asociado a $P \in M$ una singularidad? Habrá que buscar entre las cónicas con uno de sus focos en *S* y que tengan orden de contacto 4 con *M* en *P* (el otro foco de la cónica será el punto sobre la cáustica o el "infinito").

Proposición.-

Si se elige un sistema de referencia que tiene como origen a *P* y como ejes a las rectas tangente y normal a *M* en *P*, el lugar geométrico de los focos de las cónicas que tienen orden de contacto al menos 4 con *M* en *P* es la cúbica

$$(x^2 + y^2)(2a^2 x + by) = axy$$

con a y b tales que

$$\alpha(t) = (t, at^2 + bt^3 + t^4 f(t)), \quad t \in \Re .$$

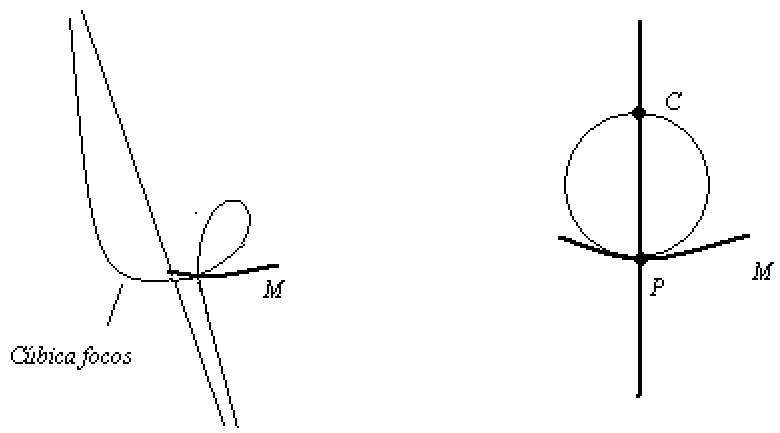
es una trayectoria que describe M

- La cúbica anterior es una curva nodal, con nodo en P y las tangentes de la misma en P son los ejes.

- La cúbica es irreducible (no contiene ninguna recta como componente) si y sólo si P no es un vértice de M. En caso contrario la cúbica se factoriza como

$$x\left(x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{16a^2}\right) = 0$$

esto es, la normal a M en P y la circunferencia que pasa por P y por el centro de curvatura de M en P, $C = \left(0, \frac{1}{2a}\right)$.



Como consecuencia si el "espejo" M es una circunferencia, en la que todos los puntos son vértices, la correspondiente cúbica nodal en cada punto P se compone de un diámetro y de la circunferencia que tiene al segmento que une el centro del espejo con el punto P. Si S es un punto interior a M (no siendo C) hay cuatro posiciones de P de modo que la cúbica contiene a S.

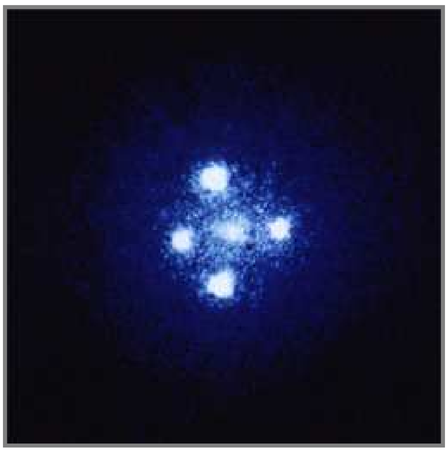
Como no hay otra cónica salvo la propia M que tenga orden de contacto 4 con M, la correspondiente cáustica tiene exactamente cuatro cúspides, todas ordinarias. Este mismo razonamiento es válido si M es cualquier otra cónica, de modo que se puede inferir que las cáusticas de cualquier cónica son cúspides ordinarias. Si M fuera una elipse, la correspondiente cáustica tiene cuatro cúspides, si S está en el interior de M, y dos, si S estuviera en el exterior.

3. Una aplicación del grado topológico a la teoría de lentes gravitacionales.

El siguiente teorema establece, esencialmente, que una lente gravitacional con una distribución de masa regular produce un número impar de imágenes de una fuente puntual. Simplificando: consideremos una masa que deflexiona los rayos de luz que pasan cercanos a su centro, mientras que no interacciona significativamente con los más alejados; supongamos, además, que colocamos una fuente puntual sobre un plano -"el plano fuente"- perpendicular a la línea de visión. Consideremos la siguiente "lente" L: la función que asigna la posición real, "y", en el plano fuente a un punto observado en la posición "x". Supondremos también que L es una función de clase 1 (lo que se justifica con la hipótesis de que la distribución de masa es "regular"). L es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva (un punto fuente puede tener varias imágenes). Con estas convenciones, enunciamos el siguiente

Teorema (de no paridad):

Una lente gravitacional L produce (para casi todo punto fuente) un número impar de imágenes.



La demostración se basa en el siguiente

Lema: "Sea f una función continua entre B (la bola abierta de centro el origen y radio R del n-espacio euclídeo E) y E. Supongamos que existe d (real positivo menor que R) tal que la distancia entre x y $f(x)$ no llega a d para cada x de la frontera de B. Entonces deg(f, B, y) = 1 para cualquier y de la bola centrada en el origen de radio R-d (donde deg es el grado topológico)".

Dem. del tma.:

A causa de que $L(x) = x + o(1)$ para x con módulo grande, podemos aplicar el lema para bolas de radio R suficiente, de modo que

$$\deg(L,y) = 1 \quad \text{para todo y.}$$

Según el teorema de Sard, el conjunto de valores singulares de L tiene medida de Lebesgue nula. Por las propiedades del grado [10], podemos asegurar que la anti-imagen por L de y no sólo es un conjunto finito, sino que tiene la misma paridad que el grado topológico de L en y, es decir, es un número impar.

Referencias

[1] ARNOLD, V.I. *"Singularities of wavefronts and caustics"*, Kluwer A.P., 1991.

[2] BERRY,M. *"Catastrophe optics"*, Progress in Optics, 18, 1980.

[3] BRIËT, J. y otros, *"Determining the dimensionality of space-time by gravitational lensing"*, preprint, 2008.

[4] BRUCE, J.W.; Giblin, P.J. *"Curves and singularities"*, Cambridge U.P., 1992.

[5] BURKE, W.L. *"Multiple gravitational imaging by distributed masses"*, Astrophysical Journal Letters 244, 1981.

[6] FRITELLI, S.; PETERS, A.O. *"Wavefronts, caustic sheets and caustic surfing in gravitational lensing"*, ArXiv: astro-ph/020813, 2002.

[7] FROLOV, V.; GOODING, C. *"Five-dimensional black holes capture cross-sections"*, 2004.

[8] GARRO, J.C.;ROJO, J. *"¿Dónde brilla más la luz?"* Terceras Jornadas Internacionales de Matemática y Diseño, Argentina, 2008.

[9] KAR, S.; SENGUPTA, S. *"The Raychaudhuri equations: a brief review"*, Pramana Journal of Physics, 2008.

[10] LLOYD, N.G. *"Degree theory"*, Cambridge Tracts on Mathematics, 1979.

[11] OUTERELO, E.; RUIZ, J. *"Mapping degree theory"*, A.M.S., 2009.

[12] PETERS, A.O. *"Singularity theory and gravitational lensing"*, Birkhäuser, 2001.

Sobre los autores:

Nombre: José Rojo Montijano
Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Juan Carlos Garro Garro
Correo Electrónico: garro.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Elena Ortiz García
Correo Electrónico: ortiz.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Gonzalo Cañadas Echagüe
Correo Electrónico: gcanadas.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.