Soluciones numéricas de la Schrödinger Map

Francisco de la Hoz Méndez
Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

Resumen

Consideremos la denominada "Schrödinger map"

$$\mathbf{T}_t = \mathbf{J}\mathbf{D}_s\mathbf{T}_s, \qquad \mathbf{T} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}, \tag{1}$$

con $\mathcal{M}$ la esfera o el plano hiperbólico. Esta ecuación se puede reescribir como

$$\mathbf{T}_t = \mathbf{T} \wedge_{\pm} \mathbf{T}_{ss}. \tag{2}$$

El signo "$\pm$" designa, respectivamente, los casos euclídeo e hiperbólico. Dicha ecuación aparece de forma natural en ferromagnetismo (ecuación de Landau-Lifshitz) y en la dinámica de filamentos de vorticidad (Localized Induction Approximation).

En el caso euclídeo, S. Gutiérrez, J. Rivas y L. Vega consideraban una familia de soluciones autosemejantes (y por tanto, con norma infinita en $\mathcal{L}^2$) que desarrollaban una singularidad en tiempo finito. F. de la Hoz hacía lo propio con el caso hiperbólico. La singularidad se produce porque la energía viaja desde $s = \pm\infty$ hasta $s = 0$ en tiempo finito.

En esta comunicación analizaremos diversas técnicas para resolver numéricamente (2). El principal problema es la imposibilidad de considerar la totalidad de $s \in \mathbb{R}$, por lo que nos tenemos que limitar a $s \in [-L, L]$, habiendo de determinar las condiciones de contorno adecuadas.

Los esquemas en diferencias finitas requieren unas restricciones muy fuertes sobre Δt; además, un mallado equiespaciado no es conveniente, ya que se pierde información importante en la frontera. Sin embargo, la proyección estereográfica de $\mathbf{T}$ convierte (2) en

$$z_t = iz_{ss} \mp \frac{2i\bar{z}}{1 \pm |z|^2} z_s^2, \tag{3}$$

que se presta a un esquema implícito-explícito (IMEX) en tiempo. Dicho esquema permite resolver eficientemente (3) con polinomios de Chebyshev, pudiendo utilizarse un mallado variable y obteniéndose exactitud espectral en el espacio.

Por las transformaciones de Hasimoto, (2) se transforma en la cúbica de Schrödinger

$$\psi_t = i\psi_{ss} \pm \frac{i}{2}\left(|\psi|^2 + a(t)\right)\psi. \tag{4}$$

Las soluciones que nos interesan no son de cuadrado integrable. Un cambio adicional da

$$u_t = iu_{ss} \pm i\left[|u|^2 - \frac{|a|^2}{t}\right]u, \tag{5}$$

donde las soluciones sí tienen energía finita y están cerca de $u \equiv$ cte.

Palabras clave: Schrödinger Map, Chebyshev.