Sistemas dinámicos continuos

Adela Salvador

Universidad Politécnica de Madrid

Esquema

Esquema

- Introducción
- Conceptos previos
- Sistema lineal de dimensión uno
- Sistema lineal de dimensión n
- Sistema lineal de dimensión dos
- Sistema casi lineal
- El péndulo
- Modelo presa depredador
- Sistema de Lorenz

Introducción

Introducción

- Términos como caos, atractores extraños, efecto mariposa, impredecibilidad del tiempo atmosférico has estado dentro de la literatura científica, del cine, de la ciencia ficción e incluso de la divulgación científica. Recordemos por poner un único ejemplo la película "Efecto mariposa" de *Fernando Colomo*.
- La palabra caos proviene de la palabra griega χασζ que significa abertura, o el espacio vacío que existía antes que todo naciera. Actualmente caos es contrapuesto a orden y significa confusión, desorden.
- Las ideas sobre el caos provienen del siglo XIX y puestas en actualidad hacia los años 70 con intereses distintos en la Física y las Matemáticas. La idea de atractores extraños sí es realmente nueva, de los años 70, y ha impulsado a abordar nuevos problemas como el problema de la turbulencia en fluidos.

Introducción

- En el estudio de un sistema dinámico, un universo en evolución, resulta natural interesarse por la geometría de sus órbitas, la historia de cada partícula, su generación y su ocaso, el bosquejo del diagrama de cada trayectoria particular, y el global de su flujo.
- La teoría de los sistemas dinámicos tiene ya más de cien años.
- Para sistemas dinámicos continuos, regidos por sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, las bases de la teoría fueron cimentadas por *Poincaré* y desarrolladas posteriormente en las escuelas de *Birkhoff* en Estados Unidos y de *Lyapunov* y *Pontryagin* en Rusia.
- El trabajo de A. M. *Lyapunov* (1857-1918) sobre estabilidad y ecuaciones diferenciales no lineales, que ahora se sabe de gran importancia, no fue apreciado por completo durante su vida.

Introducción

- A partir de los años 50 recibe un gran impulso debido a los trabajos de *Arnold, Kolmogorov, Moser, Peixoto, Sinai, Smale* y otros, que sentaron las bases para su posterior desarrollo.
- Se observa que es muy difícil, cuando no es imposible, encontrar una solución de una ecuación diferencial, especialmente cuando esta es no lineal, por lo que es importante investigar si es posible obtener información cualitativa sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales, especialmente de las no lineales, sin necesidad de resolverlas previamente.

Introducción

- Incluso en muchas ocasiones de las ecuaciones diferenciales ordinarias interesa, más que conocer explícitamente las soluciones, conocer determinadas propiedades de carácter cualitativo tales como periodicidad, si sus valores pertenecen, o no, a un conjunto acotado al variar el tiempo, o si para algunas soluciones del sistema existe el límite cuando el tiempo tiende a infinito (o a menos infinito) para conocer en la práctica el comportamiento a largo plazo del sistema físico.
- Los resultados que sepamos obtener para los sistemas lineales nos serán de gran valor también para los sistemas no lineales en el caso en que estos se aproximen a un sistema lineal de forma local.

Introducción

- En aplicaciones como control automático, donde el valor inicial se considera la "entrada", es importante saber si pequeños cambios en las condiciones iniciales conducen a pequeños cambios (estabilidad) en el resultado final o "salida", o a grandes cambios o inestabilidad.

Poincaré, Chance: *"Incluso cuando las leyes naturales parecen no tener ningún secreto para nosotros, sólo podemos conocer la situación inicial aproximadamente... Puede ocurrir que... un pequeño error en la entrada nos produzca un enorme error en la salida. La predicción resulta imposible"*.

Introducción

- Un sistema dinámico es un sistema que varía con el tiempo. Cambian los estados del sistema. Viene descrito por un espacio de estados junto con la regla que determina la dinámica del sistema. El sistema más estudiado ha sido el cosmos. Los sistemas físicos y matemáticos se clasifican en lineales y en no lineales. Un sistema dinámico puede venir formulado por una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, una ecuación en diferencias finitas, una ecuación integral o un sistema combinación de los anteriores. Si el sistema viene modelado por una ecuación diferencial o de cualquiera de los tipos anteriores se dice que es determinista, pues permite conocer el estado del sistema para cualquier tiempo futuro, (o del pasado).

Introducción

- Sin embargo ya *Poincaré* en 1892 descubrió que sistemas de la Mecánica gobernados por las ecuaciones de *Hamilton* no tienen el comportamiento regular esperado sino que su comportamiento futuro resulta impredecible. Precisamente el término caótico va a indicar que puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.

Introducción

- En la época de *Newton* se pensaba que si se encontraban las leyes generales que regían los fenómenos, la ley de la gravitación universal, y se conocía un estado, entonces podían conocerse todos los estados presentes, pasados y futuros. Es lo que conocemos como determinismo, y que queda muy bien explicado en la frase de *Laplace*.
- Pero en el siglo XIX empezaron a descubrirse sistemas en los que esto resultaba imposible. Los sistemas no lineales como las ecuaciones de *Navier-Stokes* para el movimiento de los fluidos, las ecuaciones de *Newton* para tres o más partículas que interactúen, no admiten una solución en forma cerrada, por lo que los estudios que se realizan suelen ser numéricos.

Introducción

- El uso de los ordenadores ha sido crucial, con sus dispositivos gráficos de alta resolución, ya que han permitido una cierta síntesis entre la simulación numérica y los estudios analíticos, dando lugar a la dinámica no lineal, cuyas técnicas de han aplicado en los más diversos campos: interacción del corazón a impulsos eléctricos, interacción de poblaciones (físicas, biológicas, químicas, monetarias,...).
- Los sistemas no lineales (de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones en diferencias) deterministas presentan en ocasiones un comportamiento impredecible, que será lo que entenderemos como caos.
- Resulta sorprendente que este comportamiento se presente en sistemas discretos con un grado de libertad, es decir, regidos por una única ecuación en diferencias, y que en sistemas continuos con *n* grados de libertad, descritos por sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, el caos sólo pueda presentarse para *n* mayor o igual a tres y si el sistema es no lineal.

Introducción

- *Jacques Hadamard* (1868-1963) consideró una especie de billar que lleva su nombre, en el que la mesa se ha sustituido por una superficie con curvatura negativa. Al estudiar el movimiento de un punto que se moviera por dicha superficie sin rozamiento, se estaba encontrando un modelo del flujo geodésico. El siguiente teorema demostrado por *Lobatchevsky* se puede enunciar en variedades riemanianas: Sea V una variedad riemaniana compacta y conexa de curvatura negativa. Entonces el flujo geodésico en el espacio tangente en cada punto a la variedad es un C-flujo[1]. Un C-flujo significa que las órbitas del sistema son altamente inestables, en el sentido de que dos órbitas con estados iniciales próximos se separan exponencialmente con el tiempo.
-

[1] Balibrea F. (1999): *Caos y atractores extraños. Dos problemas no lineales en matemáticas*. La Gaceta de la R. S. M. E. Vol. 2, nº 1, pp 99-116.

Introducción

- El matemático soviético *Jakob Sinai* probó la misma propiedad para los billares que llevan su nombre, que son planos pero con obstáculos convexos.

Introducción

- El meteorólogo *E. N. Lorenz* había descrito fenómenos y había usado ya el término caos para describir modelos de sistemas físicos en los que, suprimida la aleatoriedad, siguen aparentando un comportamiento aleatorio. *Lorenz* hacia 1963 encontró para su máquina del tiempo un sistema autónomo formado por tres ecuaciones diferenciales sencillas, no lineales, en las que aparecen tres parámetros. Para determinados valores de los parámetros observó que las trayectorias verifican ese fenómeno de ser impredecibles. Cambios muy pequeños en las condiciones iniciales podían producir trayectorias muy dispares. Este tipo de comportamiento era inesperado y probaba la imposibilidad de predecir los cambios atmosféricos con una antelación media. La no linealidad va a ser una condición necesaria, pero no suficiente, para la presencia de caos determinista. *Lorenz* publicó sus resultados en el artículo "Deterministic nonperiodic flow"

Introducción

- A *Henry Poincaré* (1854-1912) se le consideró hacia 1900 como el matemático más grande del mundo. Hizo contribuciones importantes a distintas ramas de la Matemática. Fue el padre de la topología moderna, y de la dinámica topológica. En su trabajo sobre la mecánica celeste expone la teoría sobre desarrollos asintóticos que es actualmente una de las más poderosas herramientas del matemático aplicado.
- El matemático *Henry Poincaré* en 1908 hace uso de algunas observaciones que ya había realizado sobre el problemas de los tres cuerpos, es decir, sobre un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales que modeliza al movimiento de tres cuerpos sometidos a las fuerzas gravitatorias ejercidas entre ellos. Define punto homoclínico como un punto fijo en el que las variedades estables e inestables de los mismos se cortan. La órbita que pasa por un punto homoclínico se llama órbita homoclínica. Cualquier órbita homoclínica tiende hacia el punto fijo tanto para valores del tiempo hacia delante como hacia atrás. *Poincaré* descubrió que cuando este fenómeno ocurre las órbitas que pasan cerca de los puntos de intersección se comportan de una forma muy complicada.

Introducción

- *Poincaré* discutió entonces el problema de la impredecibilidad relacionando determinismo y azar. Estudió la impredecibilidad del movimiento de las partículas de un gas y de los fenómenos meteorológicos.
- Algunos sistemas no lineales que presentan caos determinista son:
- el péndulo forzado
- los fluidos cerca de una turbulencia
- la óptica no lineal
- uniones de *Josehson*
- algunas reacciones químicas
- el clásico problema de los tres cuerpos, y en general de *n* cuerpos
- aceleradores de partículas
- dinámica de poblaciones biológicas

Introducción

- El biólogo *R. M. May* escribe "Simple Mathematical models with very complicated dynamics" donde ilustra la complejidad que pueden alcanzar sistemas dinámicos unidimensionales regidos por leyes cuadráticas. Observamos pues, como estos sistemas dinámicos caóticos entran en otras ciencias. Junto a publicaciones meramente matemáticas aparecen otras menos formales o con resultados experimentales. Una bibliografía bastante completa sobre el tema aparecen en *Zhang* y consta de 269 libros y 7.157 artículos.

Conceptos previos

Conceptos previos

Sistemas dinámicos continuos

- Sistema dinámico (X, $y'=f(t, y)$)
- Espacio de estados + sistema de ecuaciones diferenciales
- Trayectoria o órbita
- Serie temporal
- Solución
- Diagrama de fases
- Flujo
- Punto fijo, punto crítico o punto de equilibrio y_0: $y'=f(t, y_0)=0$
- Ciclo límite: trayectoria formada por una curva cerrada periódica.
- Punto de equilibrio estable, asintóticamente estable e inestable
- atractor; repulsor; cuencas y separatrices
- alfa-límite; omega-límite

Conceptos previos

- Un geómetra se plantea una ecuación diferencial como un flujo.
- El estado del sistema se describe por un punto de un espacio de fases y, cuando el tiempo fluye en el reloj, así lo hace el punto en el espacio.
- El camino trazado por el punto en el espacio de fases representa, pues, la evolución del estado del sistema a partir de una condición inicial particular.
- Así, el conjunto de todos esos caminos, o **diagrama de fases**, nos da una idea cualitativa de lo que le sucede a cualquier condición inicial posible.

Conceptos previos

- **Espacio de estados** es el conjunto E donde nos movemos, que puede tener estructura de espacio topológico, o métrico o ser una variedad diferencial. Puede ser $\mathfrak{R}$, S1 (esfera), $\mathfrak{R}$n, T (toro) o Tn, C...
- Se puede definir un **campo vectorial** V sobre una variedad M. Una **trayectoria** de V es una curva, o correspondencia de un segmento de $\mathfrak{R}$ sobre M, que sea continua y diferenciable a trozos.

Conceptos previos: **Definición de sistema dinámico**

- Llamamos **sistema dinámico** a una terna (*E, G, f*) donde *E* es un **espacio de fases** o **espacio de estados**, donde *G* es un semigrupo de escalares o conjunto de tiempos, y donde *f* es el flujo del sistema, que es una aplicación de *GxE* en *E*, con las siguientes propiedades:
- *f* es una aplicación continua
- $f(0, y)=y$ para todo $y \in E$
- $f(t, f(s, y))=f(t+s, y)$ para todo $t, s \in G$ y todo $y \in E$.
- Si *G* es un subconjunto de los números enteros tenemos un sistema dinámico **discreto**, y si *G* es $\Re$**+** o $\Re$ decimos que el sistema dinámico es **continuo**.
- Por tanto en un sistema dinámico continuo el tiempo fluye continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, y pasa por todo el intervalo intermedio.

Conceptos previos:

- Sistema dinámico continuo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1,\ldots,y_n,t) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(y_1,\ldots,y_n,t) \end{cases}$$

- Solución:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t) \\ \ldots \\ y_n = y_n(t) \end{cases}$$

- Ejemplo de punto de equilibrio

$$\frac{dy}{dt} = 8y - 2)(y+3) \Rightarrow y = 2; y = -3 \; puntos\, de\, equilibrio$$

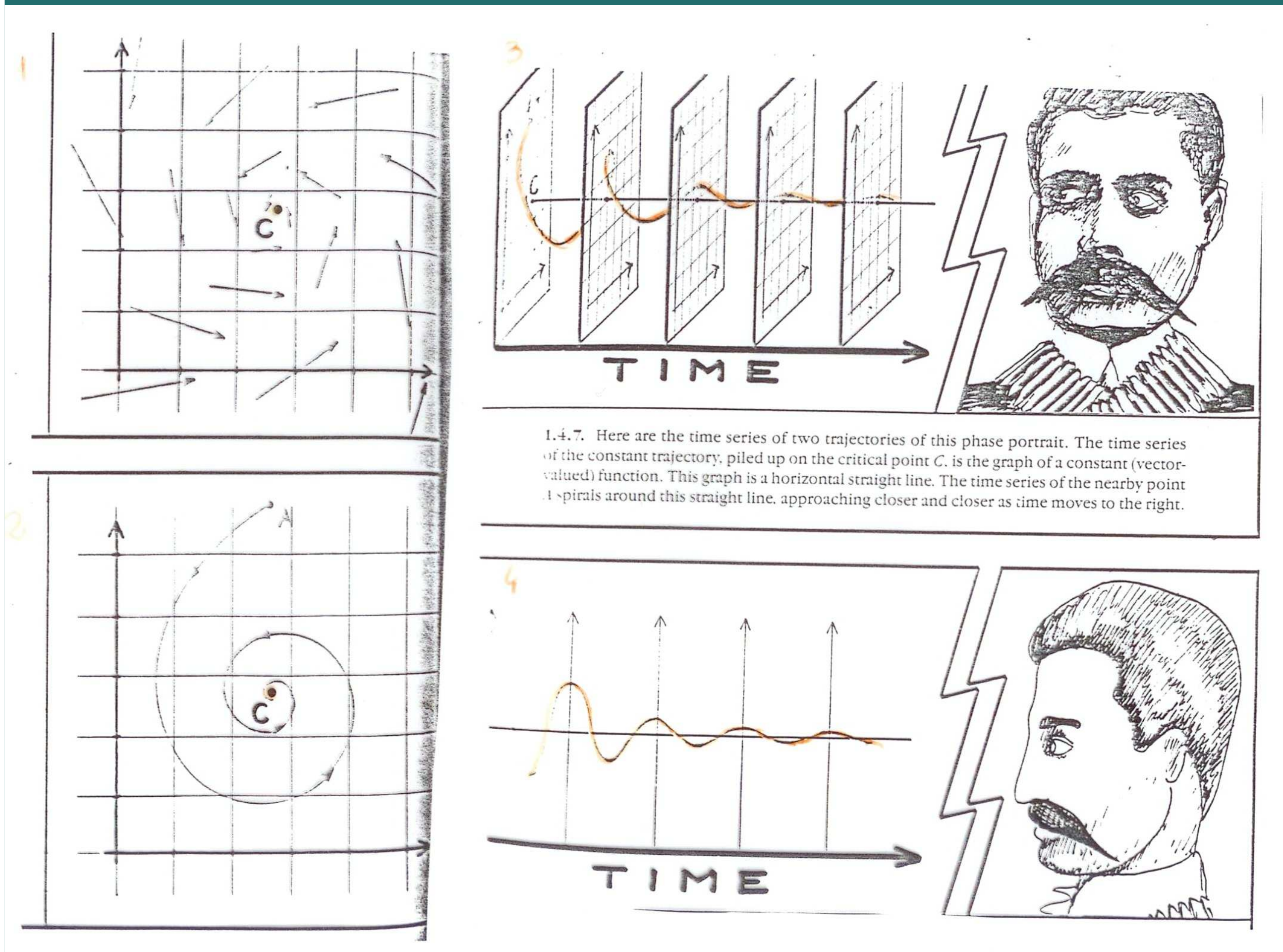
Conceptos previos

- Los ejemplos más interesantes de sistemas dinámicos continuos nos los proporcionan los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que son autónomos, donde $y'=f(y)$ donde f no depende del tiempo.

Conceptos previos

- En $y'=f(y)$ un punto y_0 tal que $y'(y_0) = f(y_0)=0$ se denomina un **punto crítico**, punto estacionario o **punto de equilibrio**. Es una solución constante.
- La importancia de los puntos de equilibrio en los sistemas autónomos se debe a que son soluciones constantes del sistema y a que determinan el comportamiento cualitativo de las soluciones.
- Por tanto nos interesará determinar los puntos críticos y el comportamiento de las trayectorias cerca de ellos, ya que, debido a los teoremas de existencia y unicidad sabemos que para cada punto del espacio de fases existe una trayectoria; que si el instante inicial no es un punto crítico, dicha trayectoria no podrá alcanzar dicho punto en un tiempo finito; y que una trayectoria no puede cruzarse a sí misma, y no puede volver al punto del espacio de fases de partida a menos que la trayectoria sea una curva cerrada, y esto corresponde con las **soluciones periódicas** del sistema.
- Esto indica que el estudio de puntos críticos y soluciones periódicas va ha resultar de gran interés.

Conceptos previos



- Dos trayectorias u órbitas: Una trayectoria constante, en el punto crítico, y otra con forma de espiral
- Diagrama de fases
- Proyección (x, t)

Conceptos previos

- Sea *x* un punto de M. Sea *c* una trayectoria completa (el dominio de *c* sea todo $\Re$) de un campo V que pasa por *c*=*c*(0).
- Se llama ***w*-límite** de *x* al conjunto:

$$w(x) = \bigcap_{n \in N} \overline{c([n,\infty))}$$

- y **α-límite** de *x* a: $\alpha(x) = \bigcap_{n \in N} \overline{c((-\infty,-n])}$

Conceptos previos

- L es un **conjunto atractivo** si L tiene algún entorno abierto U tal que $L \subset U \subset In(L) \subset M$.
- A In(L) se le denomina entonces **cuenca de atracción** del conjunto atractivo L.
- Un **atractor** es un conjunto atractivo $A \subset M$ que no posee ningún subconjunto propio atractivo.
- Un atractor es un conjunto cerrado y acotado hacia el que se aproximan las órbitas de las soluciones. Por ejemplo, un punto crítico o un ciclo.
- La **separatriz** es el complementario de todas las cuencas de atracción:

$$Sep(V)=\{x \in M: \omega(x) \text{ no está contenido en ningún atractor}\}$$

Conceptos previos

- Fijado un punto *x* la función *x=x(t)* es una solución del sistema dinámico que pasa por él.
- Si se elimina el tiempo tendremos la proyección de esta solución sobre el espacio de estados, que es lo que se llama **órbita** o **trayectoria**.

Conceptos previos

- Un punto de equilibrio es la trayectoria de una solución constante.
- El diagrama de fases es el conjunto de trayectorias de sus soluciones.
- El objetivo de la teoría cualitativa es la descripción del diagrama de fases.

Conceptos previos

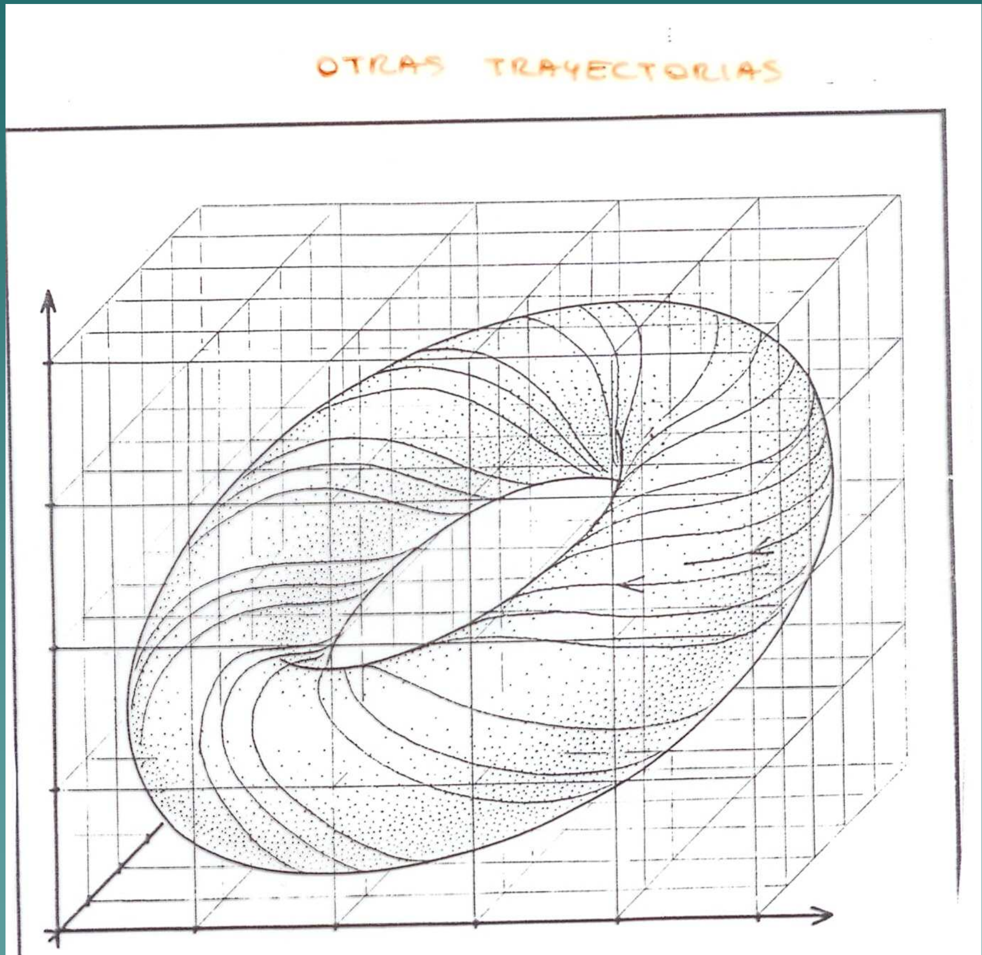
- Por cada punto de R^n pasa una única trayectoria.
- Dos trayectorias distintas no se pueden cortar nunca.
- Tampoco una trayectoria puede cortarse a si misma.
- Las trayectorias de dos soluciones o bien no tienen ningún punto en común, o bien coinciden.

Conceptos previos

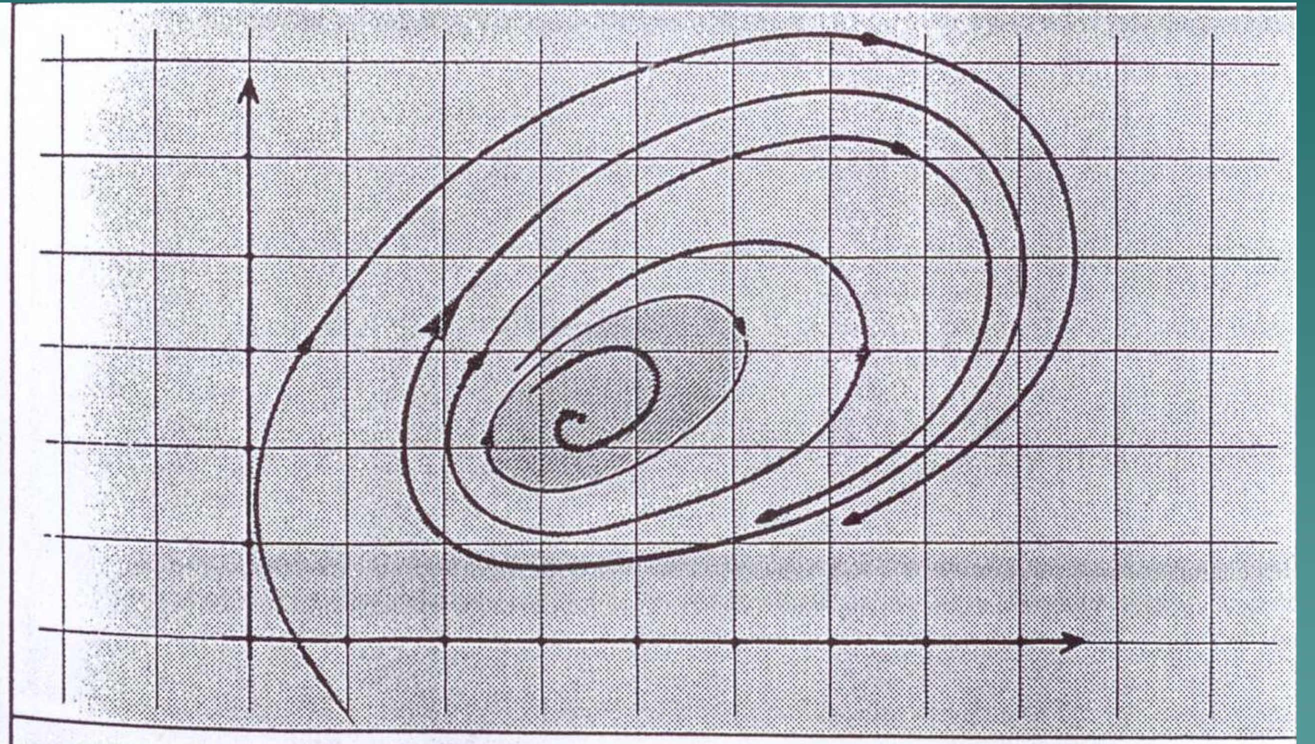
- Luego un diagrama de fases consta de trayectorias que no se cortan de tres tipos:

1. Curvas abiertas simples
2. Curvas cerradas simples
3. Puntos (de equilibrio)

Conceptos previos



Conceptos previos



1.5.8. In this example, there are two attractors: a point and a cycle. A third limit set, a cycle, comprises the separatrix.

- Dos atractores, un punto y una circunferencia.
- Otro conjunto límite, otra circunferencia, es una separatriz entre dos cuencas de atraccción

Conceptos previos

- Hace ahora unas tres décadas un matemático americano, *S. Smale*, se planteó hasta qué punto una ecuación diferencial se comporta de modo predecible.
- Hoy sabemos bien que "determinismo" no es lo mismo que "predectibilidad", pues una ecuación diferencial perfectamente "determinista" puede tener soluciones que aparezcan como perfectamente "aleatorias". Los resultados de *Smale* muestran cómo el campo de las ecuaciones diferenciales típicas gobierna mundos ("espacios de fase") repletos de escenarios sobre los que los comportamientos de las soluciones no son predecibles.

Conceptos previos

- Los sistemas más sencillos son los que desembocan en un estado de equilibrio: todos los caminos convergen en un solo punto; todas las historias finalizan en el mismo estado.
- Este punto es un **atractor**.
- Un atractor, hablando informalmente en una primera aproximación, una región del espacio de fases tal que todos los puntos cercanos se mueven de modo que, antes o después, se acercan a él. Podemos por tanto decir que los atractores describen la evolución a largo plazo del sistema.

Conceptos previos

- El atractor que sigue en sencillez al anterior “punto fijo” es el “ciclo límite”, que aparece cuando las “órbitas” o caminos del flujo convergen sobre una línea cerrada. Este caso corresponde a la idea dinámica de una oscilación periódica del estado del sistema.

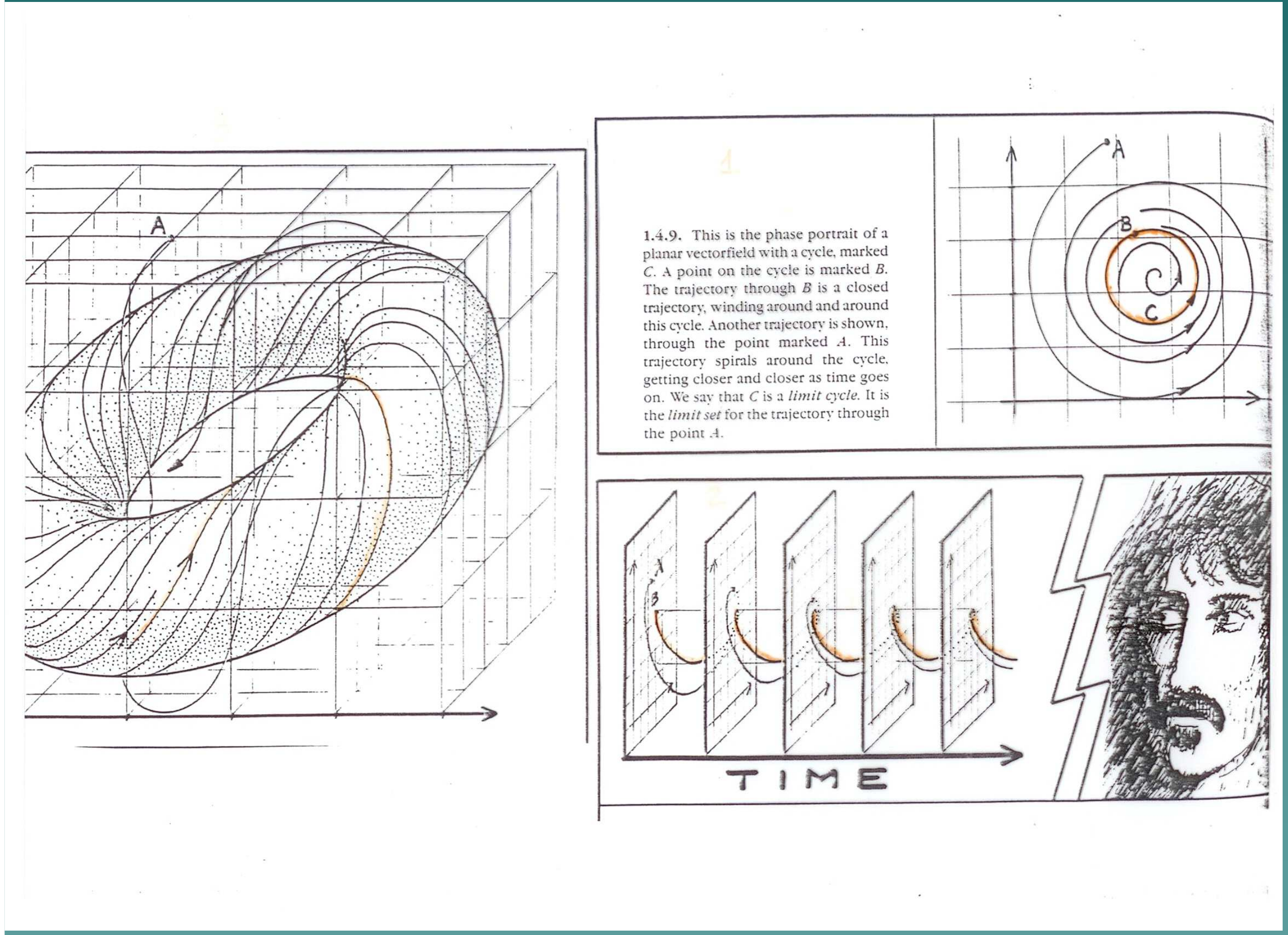
Conceptos previos

- Hasta aquí hemos enumerado los comportamientos familiares, ya muy estudiados en los trabajos clásicos de ecuaciones diferenciales. Cada modelo es determinista, en el sentido en que las ecuaciones diferenciales correspondientes tienen soluciones únicas para unas condiciones iniciales dadas; y también es predecible en el sentido de que, conocidas las condiciones iniciales con suficiente exactitud el sistema permanecerá próximo a donde hubiera estado si esas condiciones hubieran sido totalmente exactas.

Conceptos previos

- Pero en la práctica es imposible saber si nuestras condiciones iniciales son totalmente exactas, por lo que en la práctica debemos hacer predicciones con datos algo imprecisos, y esperamos que nuestras predicciones resulten al menos suficientemente acertadas. Resulta que esto es así en el caso de los anteriores “atractores clásicos”. Pero el trabajo de *Smale* (entre otros) desvela que existen otros tipos de atractores. Hay **atractores extraños**. “Extraños” porque, a diferencia de los atractores clásicos tienen estructura en todas las escalas. Veamos esta idea con más detalle. Si agrandamos un arco de circunferencia, este parece casi un segmento de recta; un trozo de toro parece un trozo de plano; ...; los atractores clásicos son variedades y, localmente son como espacios euclídeos: rectas, planos... Pero si agrandamos un atractor extraño este retiene su estructura detallada.

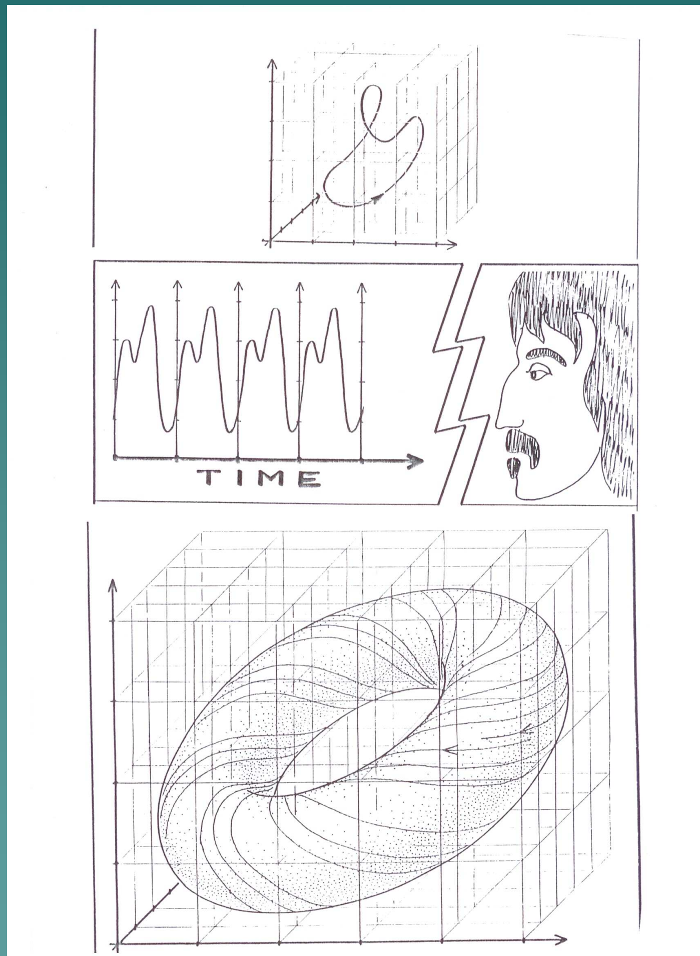
Conceptos previos



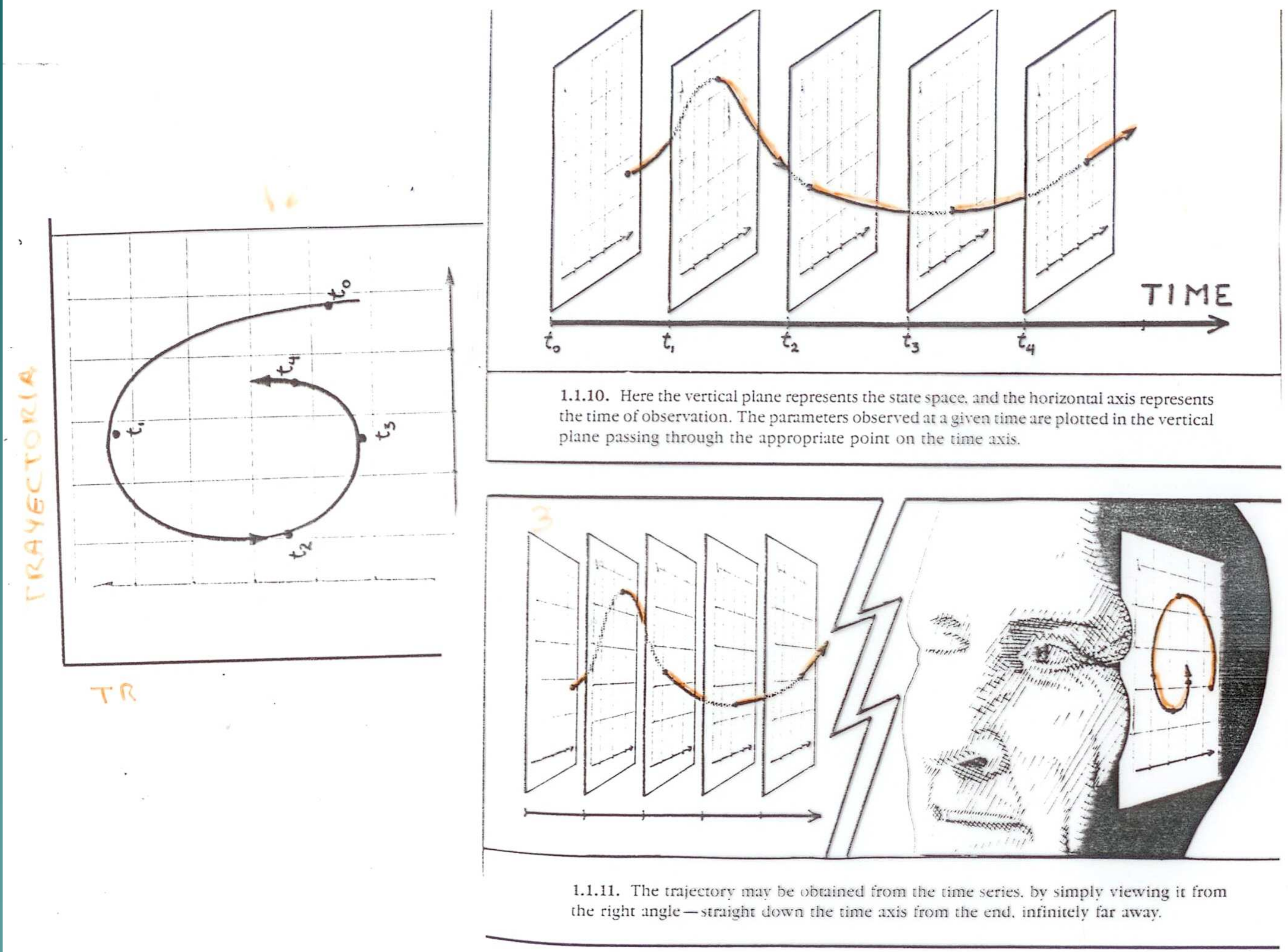
- Una solución periódica y otras no periódicas
- Su diagrama de fases o proyección (x, y)
- Su proyección (x, t)

Conceptos previos

- Una solución periódica
- Su proyección (x, t)
- Conjunto de soluciones periódicas.



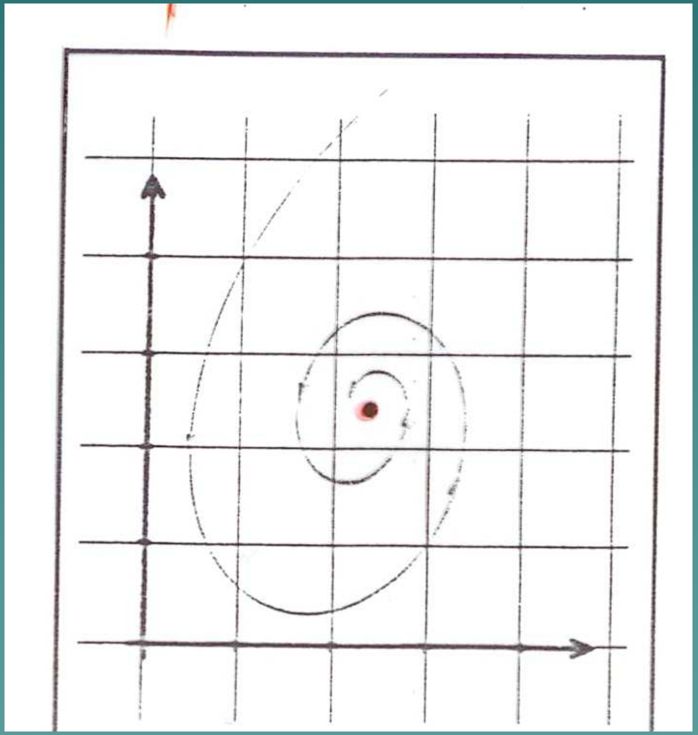
Conceptos previos



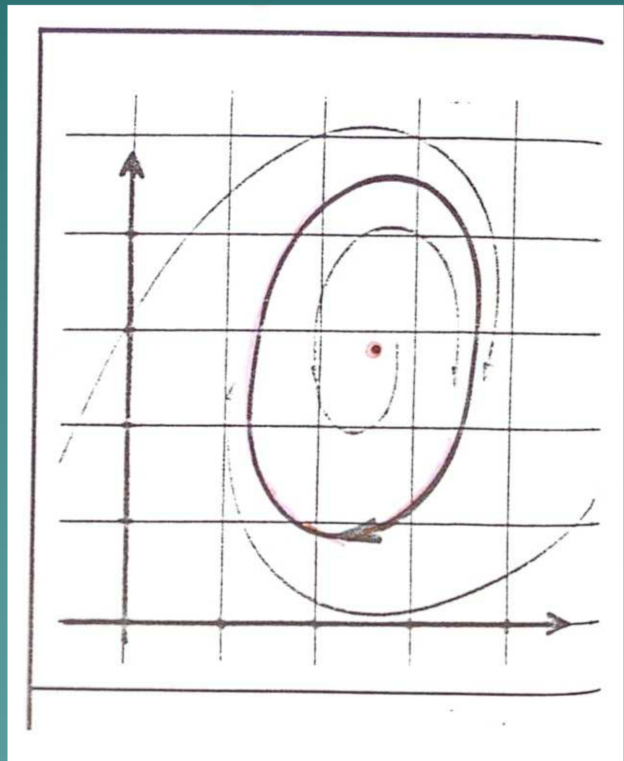
1.1.10. Here the vertical plane represents the state space, and the horizontal axis represents the time of observation. The parameters observed at a given time are plotted in the vertical plane passing through the appropriate point on the time axis.

1.1.11. The trajectory may be obtained from the time series, by simply viewing it from the right angle—straight down the time axis from the end, infinitely far away.

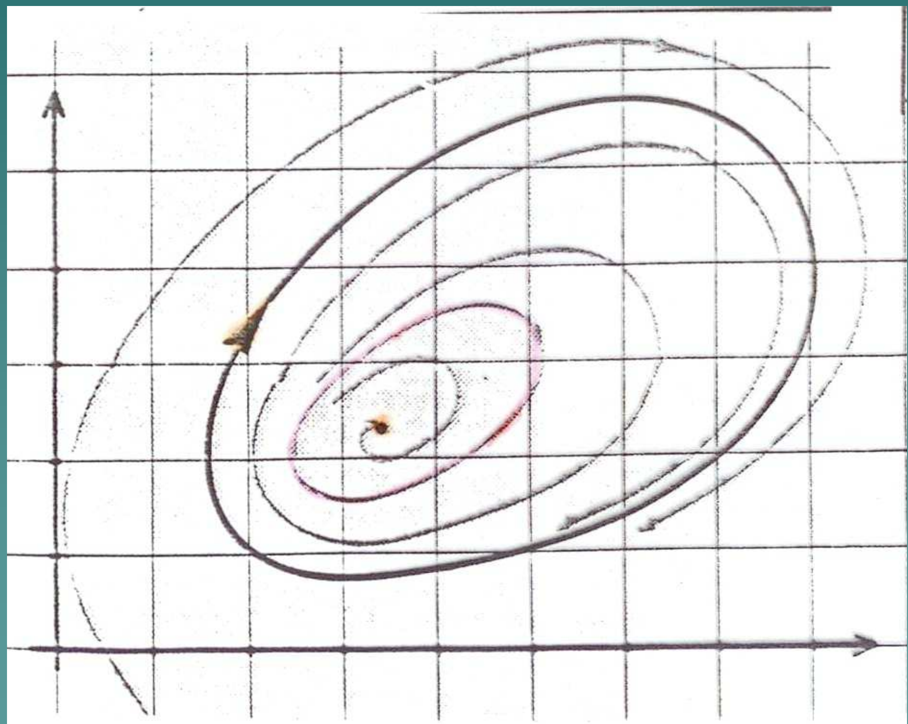
Conceptos previos



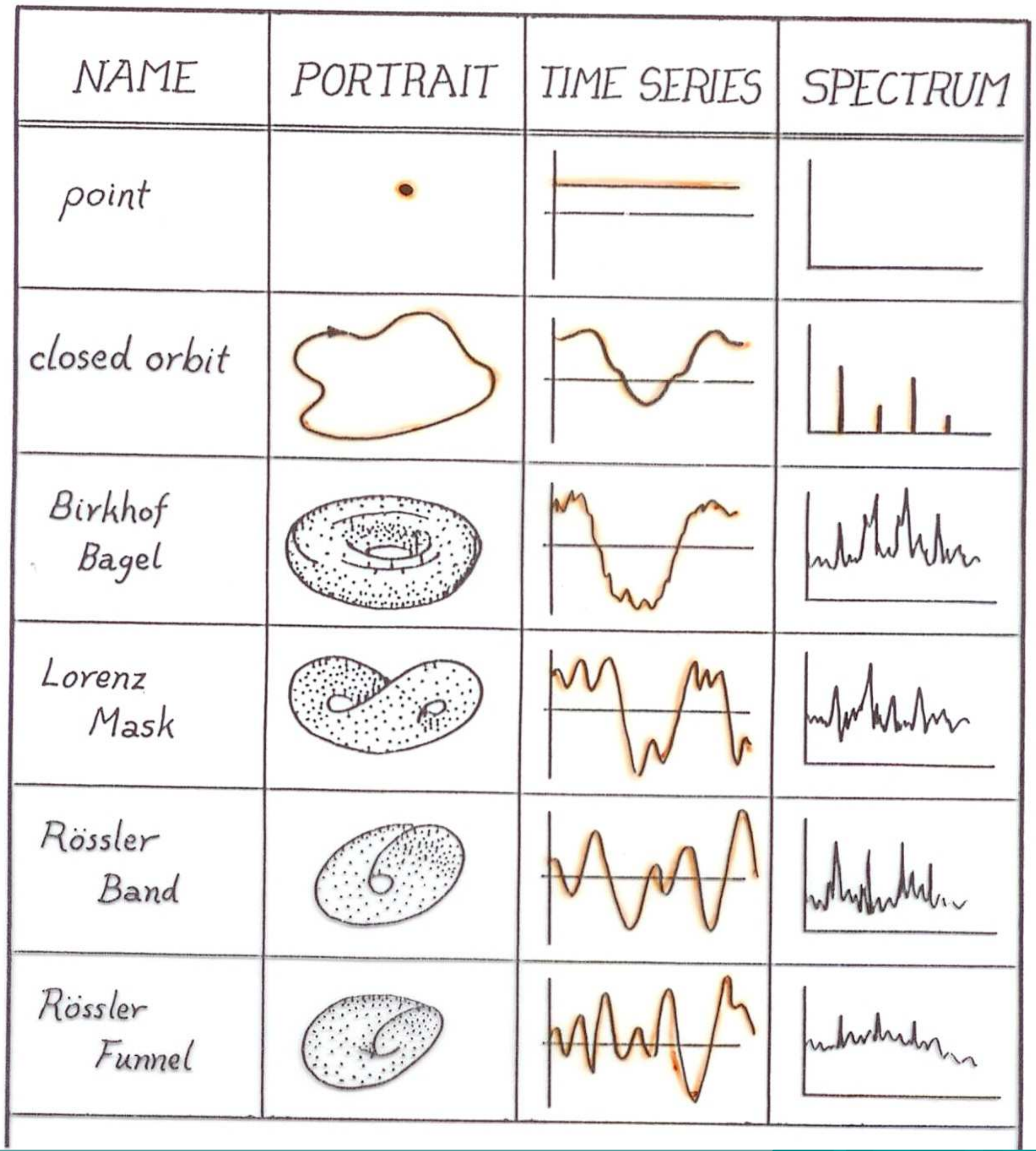
Conceptos previos



Conceptos previos



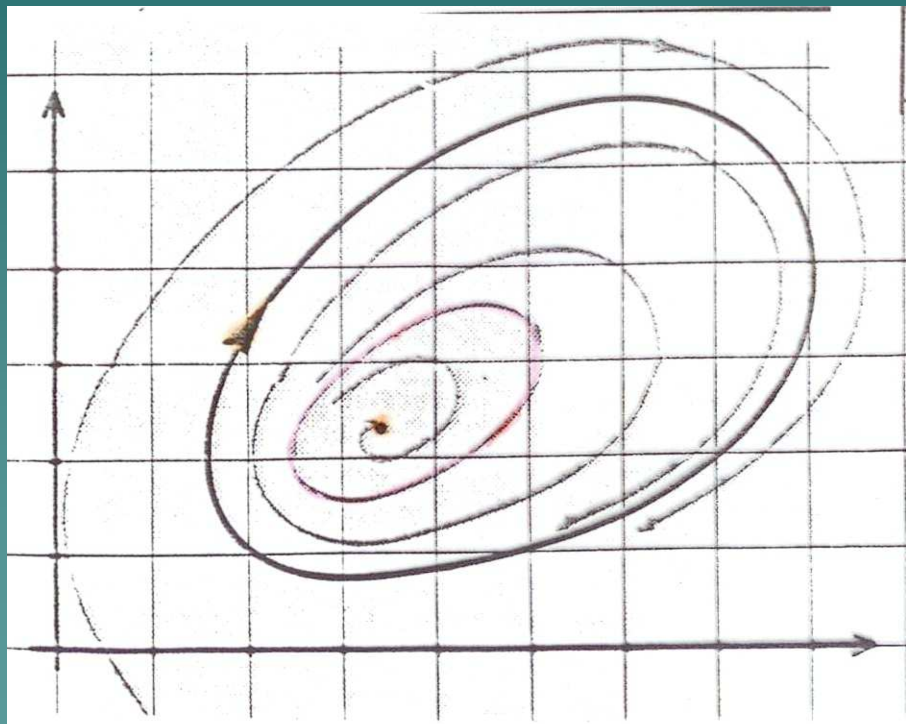
ESEMPLOS DE ATRACTORES



Conceptos previos

- En ocasiones un sistema autónomo no lineal tiene soluciones periódicas, cuyas trayectorias son curvas cerradas.
- Una curva cerrada con trayectorias no cerradas que se acercan en espiral hacia ella cuando *t* tiende a infinito se llama un **ciclo límite.**
- Un ciclo límite es una curva cerrada que atrae las órbitas de cualquier solución que en el instante inicial esté suficientemente próxima. Éste puede ser estable o inestable.

Conceptos previos

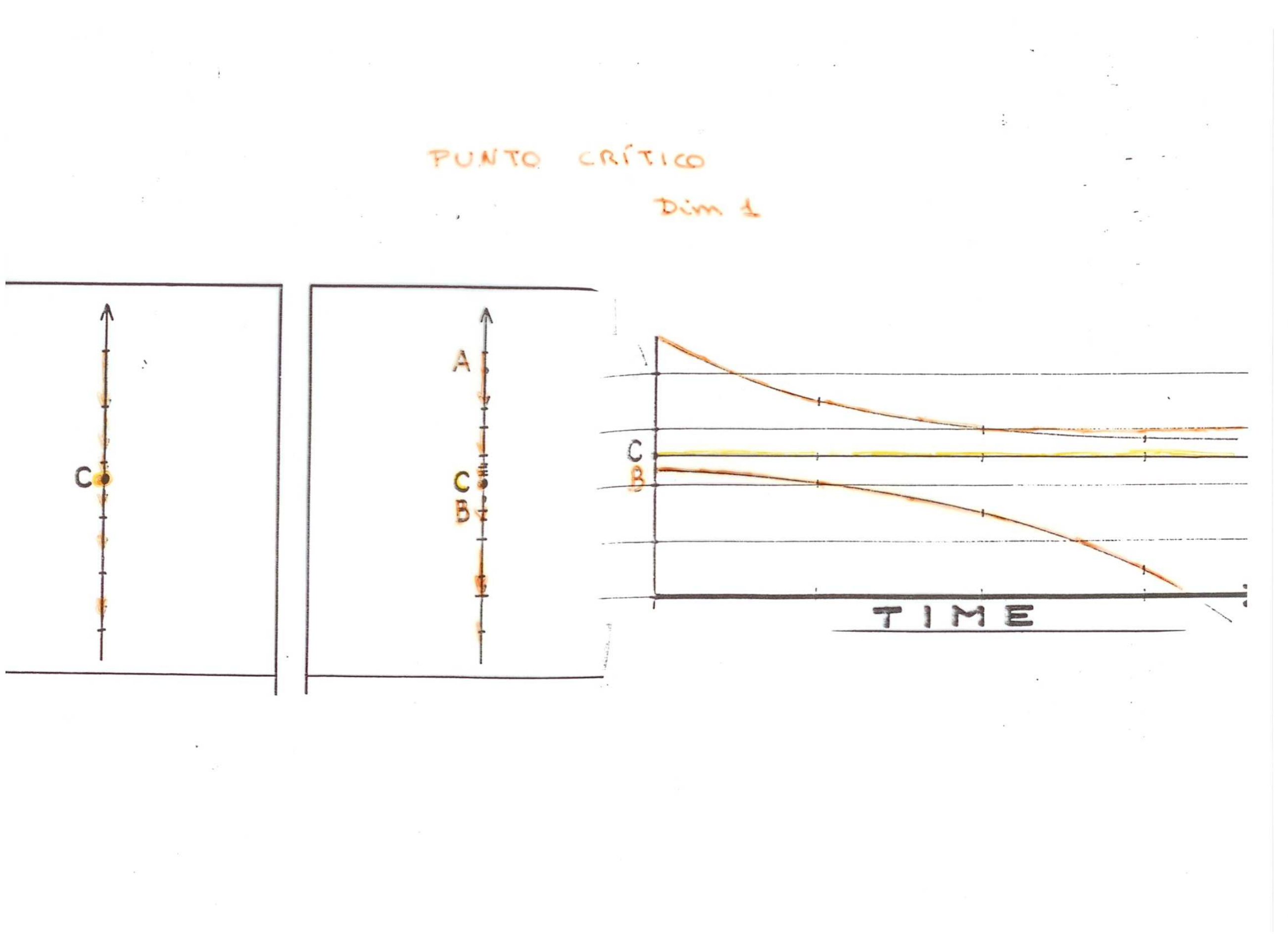


Sistema lineal de dimensión uno

Sistema lineal de dimensión uno

- $y' = ay;\ y(0) = y_0$.
- Punto de equilibrio: $ay = 0 \Rightarrow y = 0$.
- Solución: $y = y_0 e^{at}$.
- Si $a > 0 \Rightarrow e^{t}, e^{2t}, \ldots$
- Si $a < 0 \Rightarrow e^{-t}, e^{-2t}, \ldots$

Sistema lineal de dimensión uno



Sistema lineal de dimensión n

Sistema lineal de dimensión n

- Si tenemos el sistema lineal *y'=Ay*, el origen es un punto crítico, y que si |*A*| es distinto de cero, entonces es el único punto crítico.
- Probamos un teorema que dice que:
- El origen es el único punto crítico si y sólo si todos los autovalores son distintos de cero.
- Cálculo de autovalores y autovectores.

Sistema lineal de dimensión n

- Se tienen las siguientes propiedades:
- Si todos los autovalores de la matriz *A* tienen su parte real menor que cero, es decir, Re$\lambda<-\eta$, para $\eta>0$, existe una constante M>0 tal que: $|e^{tA}|\leq M^{e-\eta t}$, para todo $t\geq 0$.
- Luego como consecuencia se obtiene que cuando *t* tiende a más infinito el limite de y*(t)* es cero para toda solución de y'=*Ay* si y sólo si Re$\lambda<0$ para todo autovalor λ de *A*.
- El origen de $\Re^n$ (o el sistema lineal) se dice que es un atractor del sistema si $e^{tA\cdot y}$ tiende a cero cuando *t* tiende a más infinito, para todo y de $\Re^n$.
- Esta propiedad algebraica caracteriza una propiedad cualitativa de las soluciones de la ecuación diferencial.

Sistema lineal de dimensión n

- Si todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real mayor que cero, es decir, Re$\lambda>\eta$, para $\eta>0$, existe una constante $M_1>0$ tal que: $|e^{tA}\cdot y|\geq M_1 e^{\eta t}\cdot|y|$, para todo $t\geq 0$ y para todo y de $\Re^n$.
- Como consecuencia se obtiene que cuando t tiende a más infinito el limite de $|e^{tA}\cdot y|$ es infinito para toda solución de $y'=Ay$ de y distinto de cero, si y sólo si Re$\lambda>0$ para todo autovalor λ de A.
- El origen de $\Re^n$ (o el sistema lineal) se dice que es una fuente del sistema si $|e^{tA}\cdot y|$ tiende a infinito cuando t tiende a más infinito, para todo y, distinto de cero, de $\Re^n$.

Sistema lineal de dimensión n

- La aplicación de los resultados anteriores, en particular la caracterización de los atractores, requiere conocer las raíces de la ecuación característica, lo que puede ser complicado si *n* es grande, pero observamos que lo que nos importa es el signo de dichas raíces, lo que se facilita aplicando por ejemplo el criterio de *Routh-Hurwitz*.

Sistema lineal de dimensión n

- Se dice que un sistema lineal es **hiperbólico** si todos los autovalores de A tienen parte real distinta de cero.
- Se llama **índice de estabilidad** del sistema al número de autovalores que tienen la parte real negativa, contados con su orden de multiplicidad.
- Los atractores y las fuentes son hiperbólicos.
- Un atractor tiene índice de estabilidad *n*, y una fuente cero.

Sistema lineal de dimensión n

- Sea $y' = A \cdot y$ un sistema lineal hiperbólico de índice de estabilidad n_s.
- Entonces podemos descomponer al espacio euclídeo $\Re^n$ en suma directa de dos subespacios, el subespacio estable E_s y el subespacio inestable E_u, invariantes para el sistema, siendo n_s la dimensión de E_s y $n-n_s$ la de E_u.
- Aunque pueda parecer que estos subespacios dependen de la matriz de paso, son intrínsecos del sistema y dependen del comportamiento asintótico de éste, pues un punto pertenece a E_s si y sólo si $e^{tA \cdot y}$ tiende a cero cuando el tiempo crece, y pertenece a E_u si y sólo si $e^{tA \cdot y}$ tiende a cero cuando el tiempo tiende a menos infinito.
- Utilizando estas ideas es fácil estudiar los diagramas de fases de los sistemas hiperbólicos.

Sistema lineal de dimensión n

- Observamos que en un sistema hiperbólico no existen soluciones acotadas para todo $t\in(-\infty, \infty)$, luego para que todas las soluciones de $y'=Ay$ estén acotadas es necesario que todos los autovalores tengan su parte real nula, pero esto no es suficiente, como se comprueba cuando algún autovalor tiene una multiplicidad algebraica mayor que el número de autovalores linealmente independientes que le corresponden (es decir, cuando la matriz de *Jordan* asociada tiene unos en la segunda subdiagonal).
- Tenemos por tanto el siguiente teorema:
- Para que todas las soluciones de $y'=A\cdot y$ estén acotadas en $(-\infty, \infty)$, es necesario y suficiente que todos los autovalores de A tengan su parte real nula y la dim Ker$(A-\lambda I)$ coincida con la multiplicidad algebraica de λ, es decir A sea diagonalizable en el campo complejo.

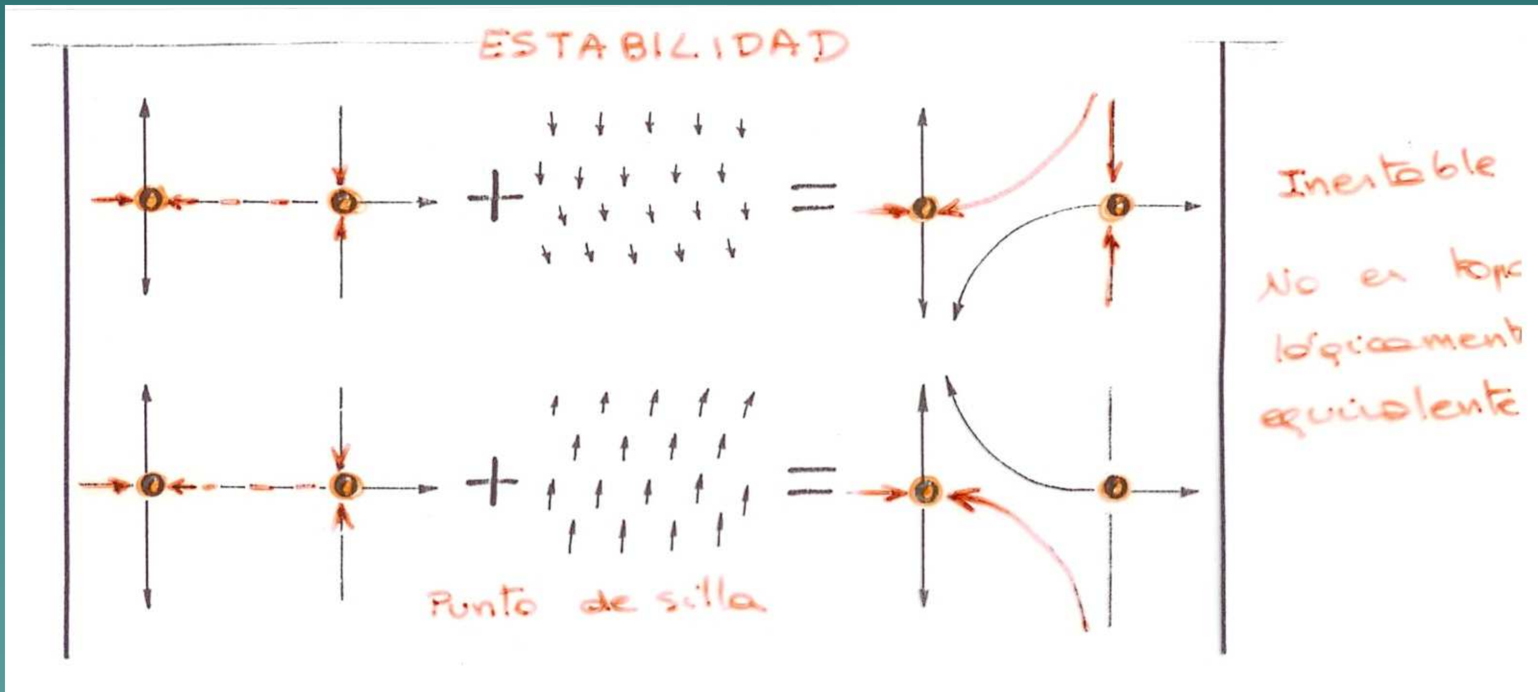
Sistema lineal de dimensión n

- Si $\lambda=bi$ es un autovalor no nulo de la matriz A y d=dim(Ker(A–λI)) como subespacio sobre el cuerpo de los complejos, entonces el conjunto de soluciones periódicas de $y'=A\cdot y$ de periodo $2\pi/b$ es un subespacio vectorial de periodo 2d.
- El conjunto de soluciones acotadas en $(-\infty, \infty)$ resulta ser un subespacio vectorial de dimensión igual al número de bloques elementales de la forma canónica de Jordan correspondientes a autovalores de la forma $\lambda=\pm bi$, con $b>0$.
- Podemos denominar a este nuevo subespacio, subespacio centro: E_c, que es un subespacio invariante para el sistema, siendo $\Re^n$ suma directa ahora del subespacio estable E_s, del subespacio inestable E_u y del subespacio centro E_c.

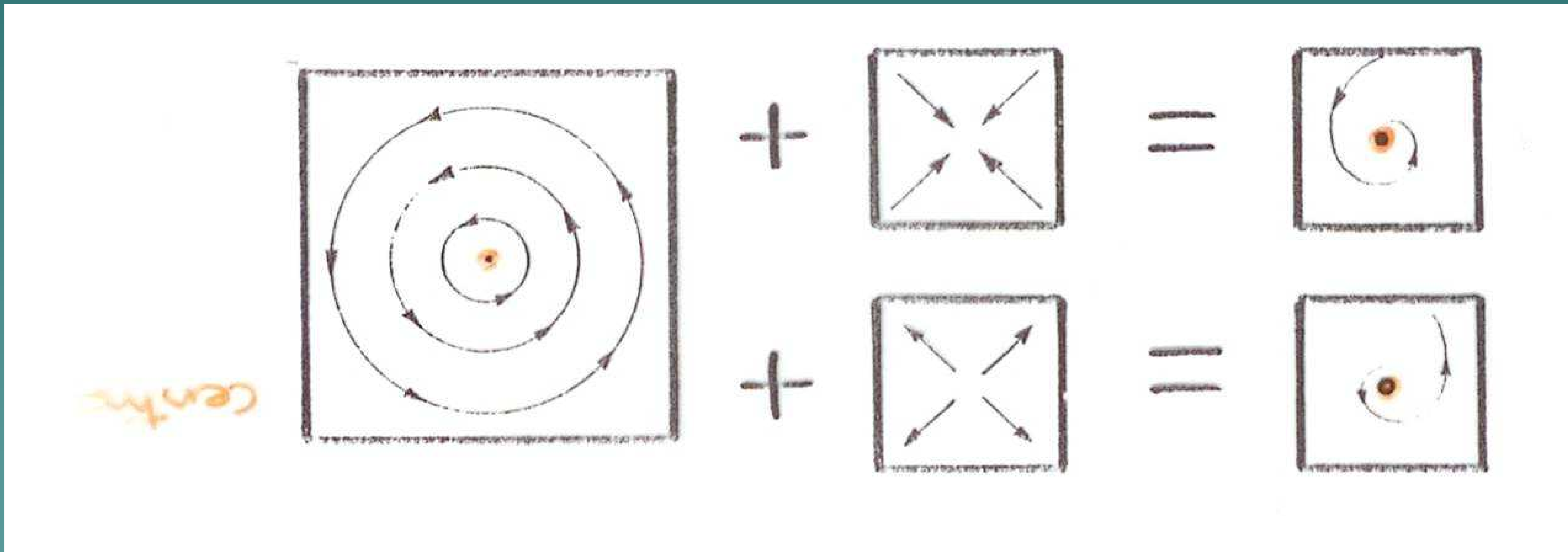
Sistema lineal de dimensión n

- Si se produce una pequeña perturbación en los coeficientes de la matriz A, tendremos pequeñas perturbaciones en las raíces.
- Si los autovalores tienen su parte real positiva (o negativa) esto no cambiará, luego un punto crítico asintóticamente estable, o inestable lo seguirá siendo.
- Pero un **centro** puede convertirse en un punto estable o en un punto inestable.
- Otro caso sensible es si dos raíces son iguales, y al modificar los coeficientes se separan. Si estas son reales puede convertirse un nodo en un punto espiral, pero no cambiará el carácter de su estabilidad.
- En los demás casos no cambia la estabilidad o inestabilidad del sistema, ni se altera el tipo de punto crítico.

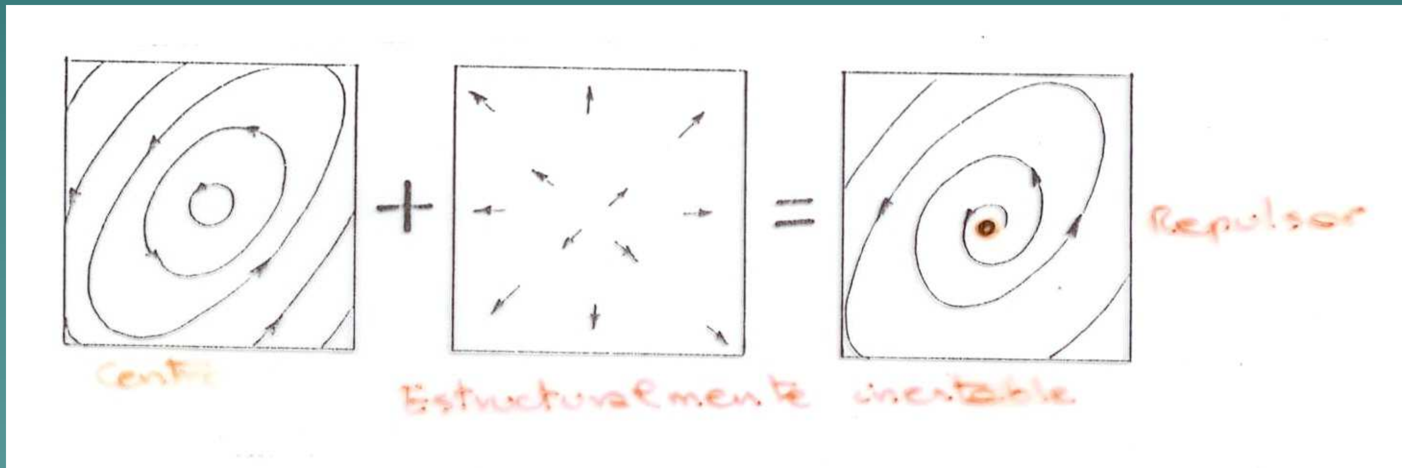
Sistema lineal de dimensión n



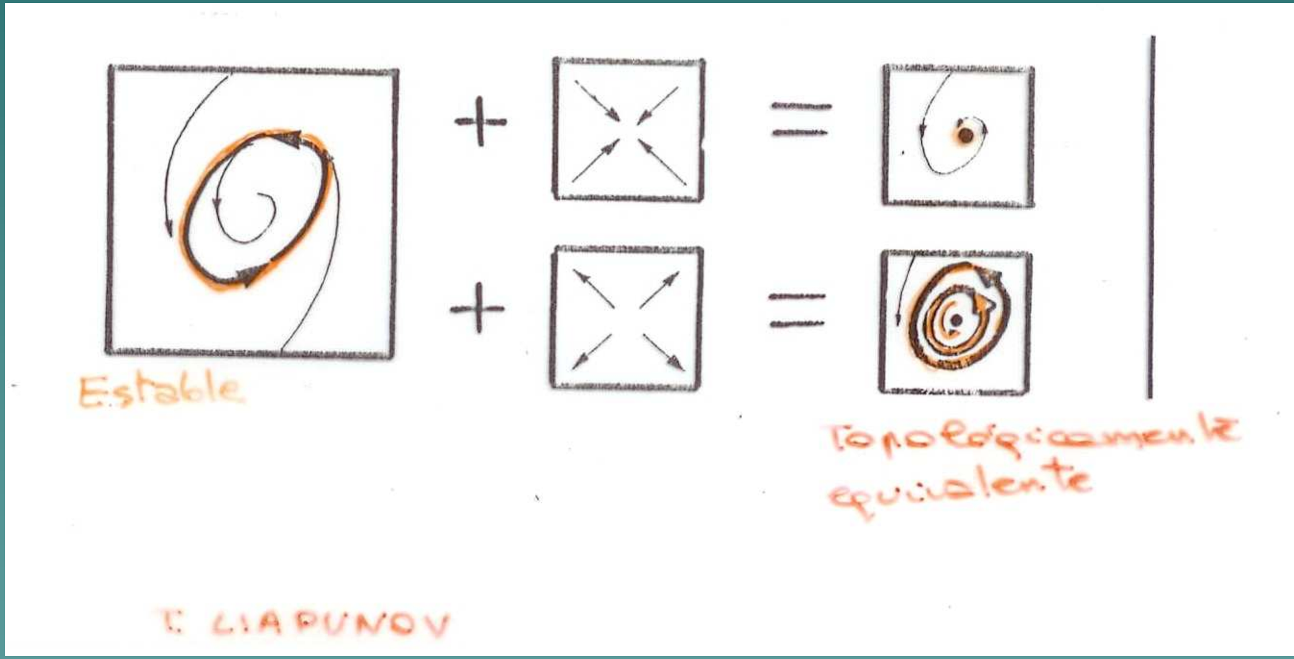
Sistema lineal de dimensión n



Sistema lineal de dimensión n



Sistema lineal de dimensión n

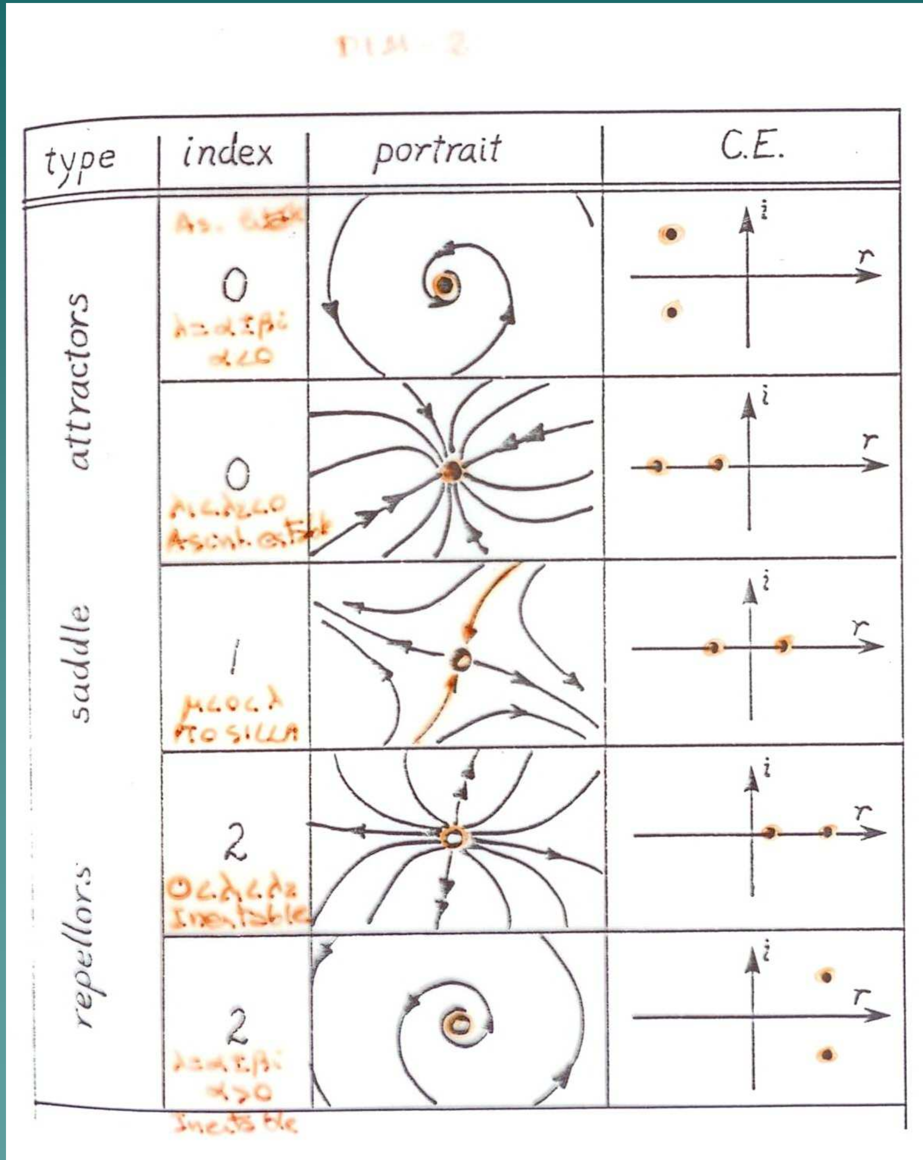


Sistema lineal de dimensión dos

Sistema lineal de dimensión dos

- En un sistema plano el índice de estabilidad de los nodos y focos estables es dos, el de un punto de silla es uno, y el de los nodos y focos inestables es cero. Un centro no es un sistema hiperbólico.

Sistema lineal de dimensión dos



Sistema lineal de dimensión dos

$\lambda = \mu < 0$

Nodo degenerado Asint. Estable

$0 < \lambda = \mu$

Nodo degenerado Inestable

$\lambda = \alpha \pm \beta i$

$\alpha = 0$

Centro

Estable. No as. est.

$\lambda = \mu = 0$

Todo el plano pts. críticos

$\lambda = 0 < \mu$ Recta de pts críticos

Repulsora

$\mu < \lambda = 0$ Recta de punto crítico atractora

Sistema lineal de dimensión dos

- Si el sistema autónomo

$$x'=F(x, y);\ y'=G(x, y)$$

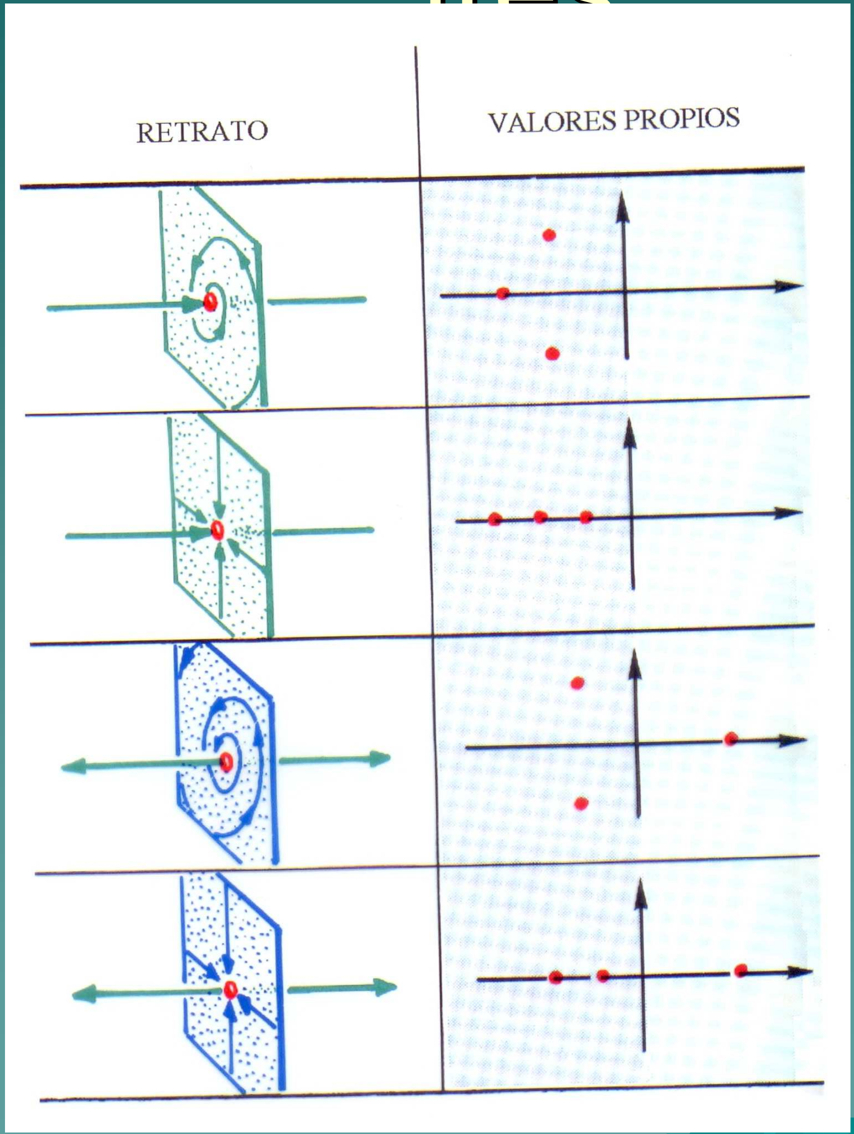
- tiene un punto crítico aislado en el origen, y existe una función V continua y con derivadas parciales continuas y tal que su derivada (con respecto a *t*) vale: $V_x \cdot F + V_y \cdot G$.
- Si es definida negativa en algún dominio que contenga al origen, entonces el punto crítico es asintóticamente estable.
- Si fuese semidefinida negativa entonces el punto crítico sería estable. Si fuese definida positiva el origen sería inestable.
- La función V se llama función de *Liapounov*.
- El problema es que nada nos dice como construir dicha función. En determinados problemas físicos es natural considerar la energía total, aunque estos teoremas son aplicables cuando no tiene este significado.
- En ocasiones un sistema autónomo no lineal tiene soluciones periódicas, cuyas trayectorias son curvas cerradas. Una curva cerrada con trayectorias no cerradas que se acercan en espiral hacia ella cuando *t* tiende a infinito se llama un **ciclo límite.** Un ciclo límite es una curva cerrada que atrae las órbitas de cualquier solución que en el instante inicial esté suficientemente próxima. Éste puede ser estable o inestable.

Sistema lineal de dimensión dos

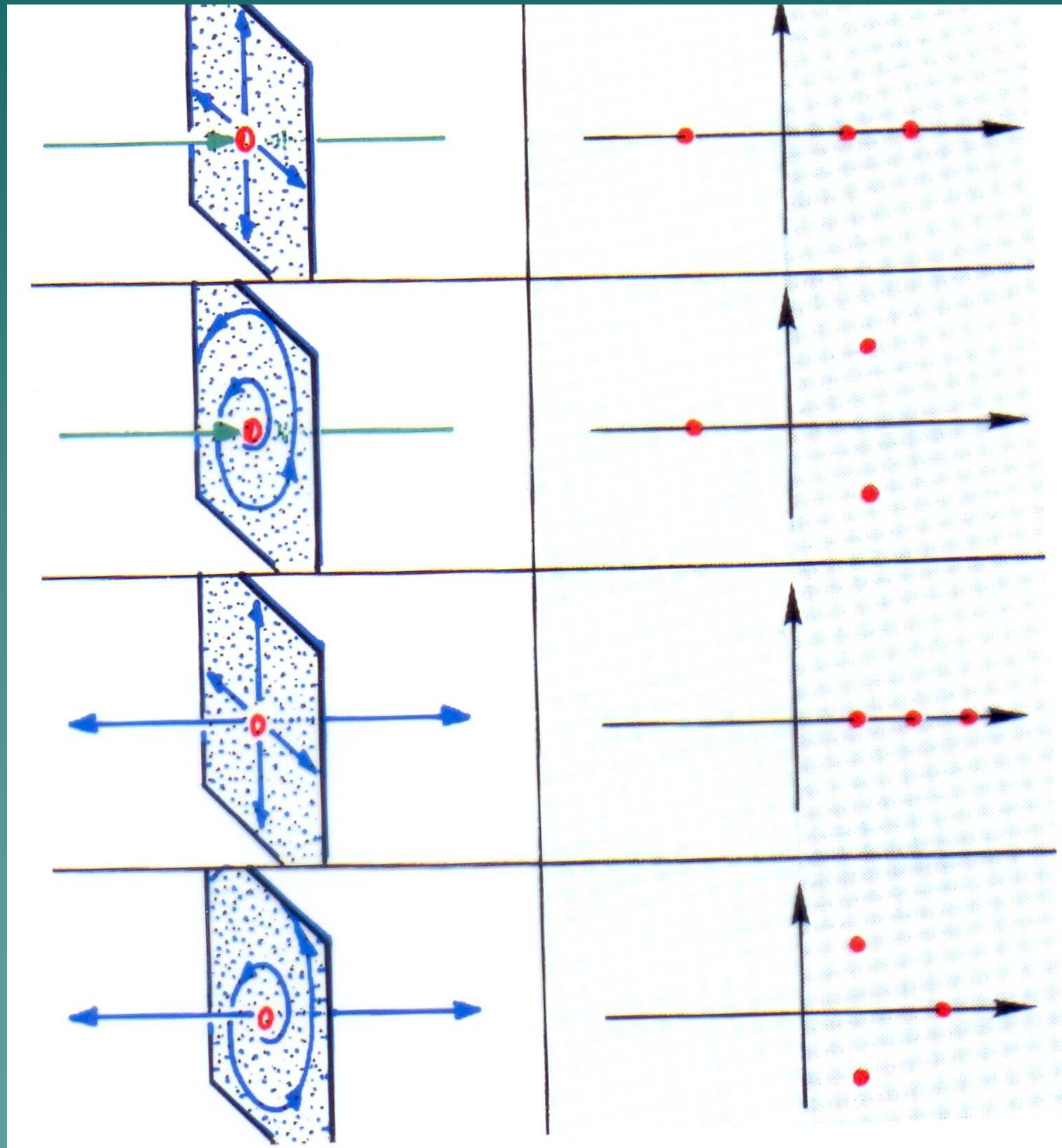
- El **teorema de *Poincaré-Bendixson*** dice:
- Sea un sistema autónomo de dimensión dos con funciones F y G con derivadas parciales continuas en un dominio D del plano xy. Sea D1 un subdomino de D y sea K dicho dominio más su frontera. Supongamos que K no contiene ningún punto crítico del sistema. Si existe un valor t_0 tal que la solución $x=x(t), y=y(t)$ permanece en K para todo $t \geq t_0$, entonces o $x=x(t), y=y(t)$ es una solución periódica (es una trayectoria cerrada), o se mueve en espiral hacia una trayectoria cerrada cuando t tiende a infinito. En cualquier caso en K existe una trayectoria cerrada (y el sistema tiene una solución periódica).
- Observamos que si K contiene una trayectoria cerrada entonces dicha trayectoria debe encerrar un punto crítico, luego la región K no puede ser simplemente conexa.
- En dimensión dos por tanto en un sistema autónomo cualquier atractor o es un punto crítico, o es un ciclo límite, o es unión de puntos límites y ciclos límites, pero nunca puede ser un atractor extraño.

Sistema lineal de dimensión tres

Sistema lineal de dimensión tres



Sistema lineal de dimensión tres



Sistema casi lineal

Sistema casi lineal. Definición

- Un sistema *y′=F(y)* es un **sistema casi-lineal** en el origen si podemos escribirlo como *y′=A·y+G(y)* donde:
- el determinante de *A* es distinto de cero,
- *G*(0)=0,
- sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en un entorno del origen y dichas derivadas son nulas.

Sistema casi lineal

- El origen es un punto crítico, y su tipo y estabilidad está íntimamente relacionado con el tipo y estabilidad del sistema lineal correspondiente, pues los nodos, puntos de silla, los puntos espirales... se heredan.
- No se heredan nodos degenerados y centros.

El péndulo

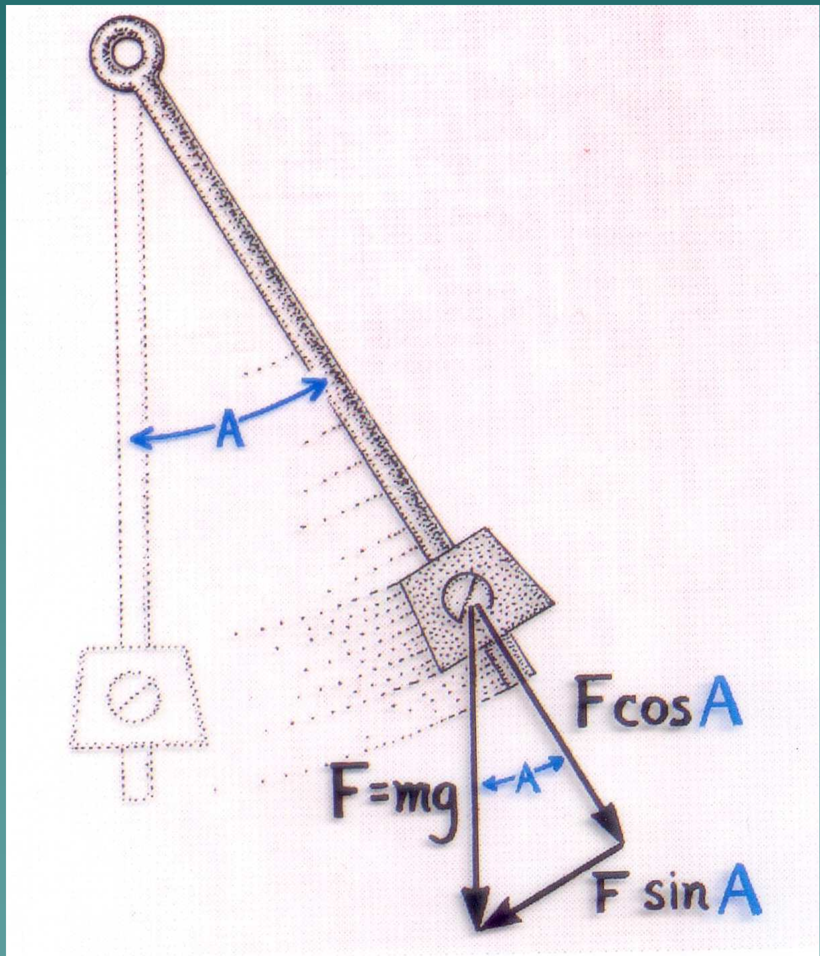
El péndulo

- Usaremos la teoría de los sistemas casi.lineales para estudiar la dinámica de un péndulo, cuando:
- I.- Péndulo sin rozamiento, ni fuerza externa.
- II.- Péndulo con rozamiento
- Iii.- Péndulo con fuerza externa sinusoidal

El péndulo

- I. Se supone un péndulo en movimiento de longitud L y masa m. Se denota $\theta(t)$ el ángulo que forma con la vertical en un tiempo t. Sea g la aceleración de la gravedad y se supone que no existe rozamiento ni fuerza externa, es decir, está en el vacío y únicamente sometido a la gravedad.

El péndulo



El péndulo

- Entonces el movimiento del péndulo viene dado por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\,L^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + m\,g\,L\,sen\,\theta = 0$$

- Y llamando x = θ y y = x′ se transforma en un sistema casi-lineal:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{-g}{L}\,sen\,x = \dfrac{-g}{L}\,x + \dfrac{g}{L} - \dfrac{g}{L}\,sen\,x \end{cases}$$

- Que se denomina el sistema del péndulo simple. Es un sistema no lineal pues depende de senx. No es fácil encontrar soluciones. Sin embargo es un sistema casi-lineal en el origen.

El péndulo

- Teorema: El sistema del péndulo simple es casi-lineal en el origen.
- Demostración: La primera ecuación es lineal. La segunda ecuación se puede reescribir como

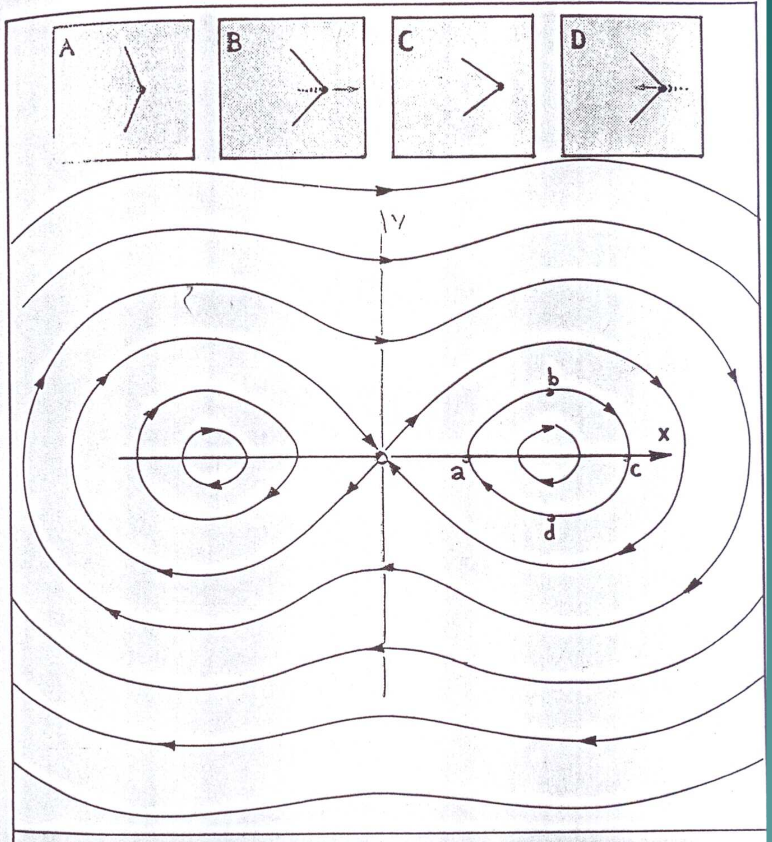
$$\frac{dy}{dt}=\frac{-g}{L}x+G(x,y)=\frac{-g}{L}x+\frac{g}{L}x-\frac{g}{L}senx$$

- G(x, y) es una función continua que se anula en el origen, con derivadas parciales continuas que también se anulan en el origen

El péndulo

- Cálculo de los puntos críticos:
- $y = 0$, $(-g/L)\operatorname{sen}x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = 0$, $x = n\pi \Rightarrow (0, 0)$, $(n\pi, 0)$ con n entero.
- Veremos que:
- Los puntos $(2k\pi, 0)$ son centros.
- Los puntos $((2k+1)\pi, 0)$ son puntos de silla inestables.
- Dibujamos el plano de fases.

El péndulo



2.2.5. This is the phase portrait for the frictionless system, with the heavier weight. The sequence of states—A,B,C,D,A—describes an oscillation around an average displacement to the right. The *equilibrium point* at the origin is a *saddle.*

El péndulo

- Se estudia el sistema auxiliar, para analizar la naturaleza del punto crítico (0, 0):

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{-g}{L}x \end{cases}$$

- La matriz auxiliar es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-g}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

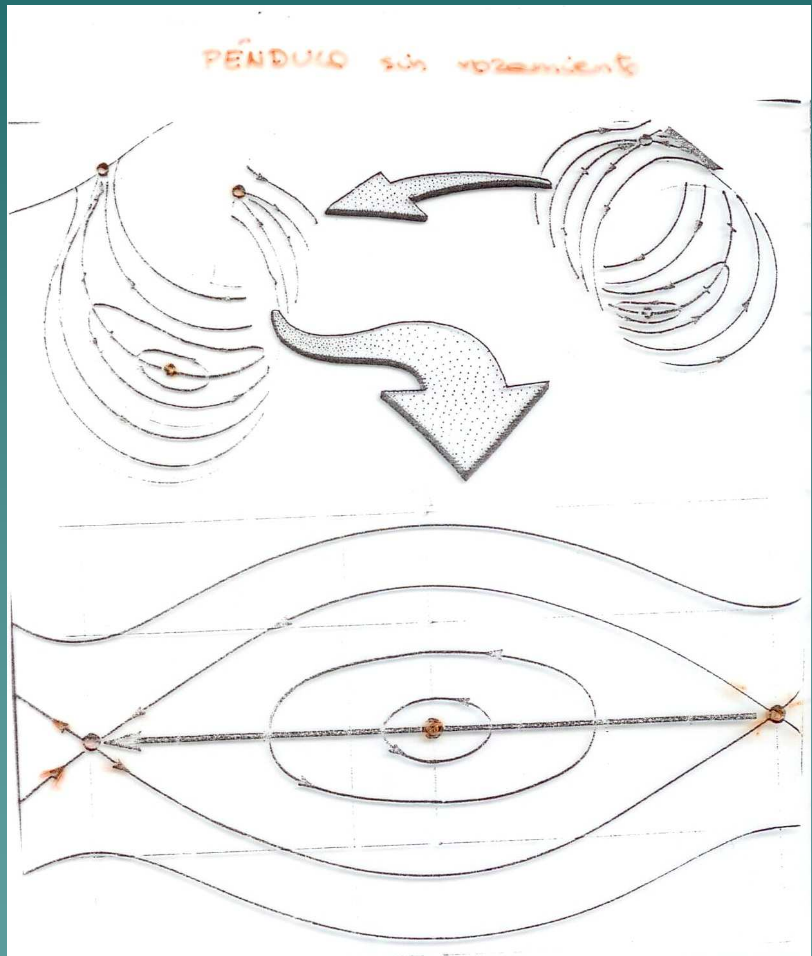
- Y los autovalores:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}i$$

El péndulo

- Luego el origen es un centro para el sistema auxiliar. Es un punto crítico estable, aunque no asintóticamente estable.
- Las órbitas de las soluciones son elipses.
- Es una representación razonable para un péndulo sin rozamiento y con un desplazamiento angular pequeño y una velocidad angular pequeña.

El péndulo



El péndulo

- La velocidad angular es positiva cuando el péndulo se mueve hacia la derecha y negativa, hacia la izquierda.
- Este tipo de punto no se conserva en sistemas casi-lineales, puede convertirse en un atractor o en un repulsor.

El péndulo

- II.- Se considera un péndulo con rozamiento (debido a la fricción del aire o de otro medio), que sea constante:

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + cL\frac{d\theta}{dt} + m \cdot g \cdot L sen\theta = 0$$

- Se vuelve a transformar en sistema casi-lineal llamando x = θ y y = x'

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{-g}{L} senx - \dfrac{c}{mL} y \end{cases}$$

El péndulo

- Se estudia el sistema auxiliar, para analizar la naturaleza del punto crítico (0, 0):

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{-g}{L}x - \dfrac{c}{mL}y \end{cases}$$

- La matriz auxiliar es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-g}{L} & \dfrac{-c}{mL} \end{pmatrix}$$

- La naturaleza del punto crít depende de c, g, m y L.

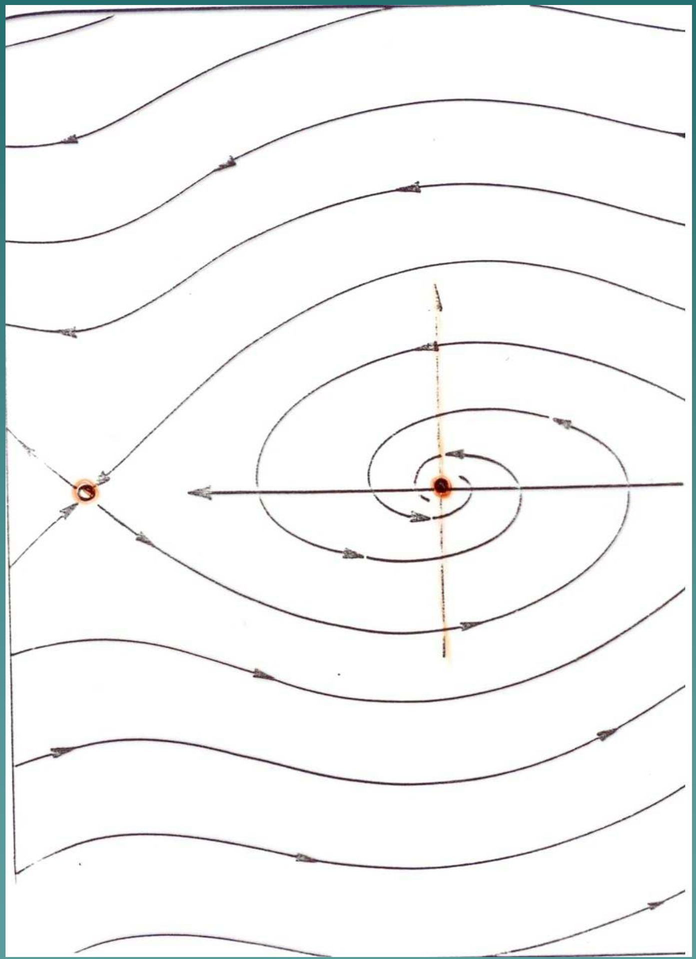
$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4gm^2L}}{2mL}$$

- Es un atractor.

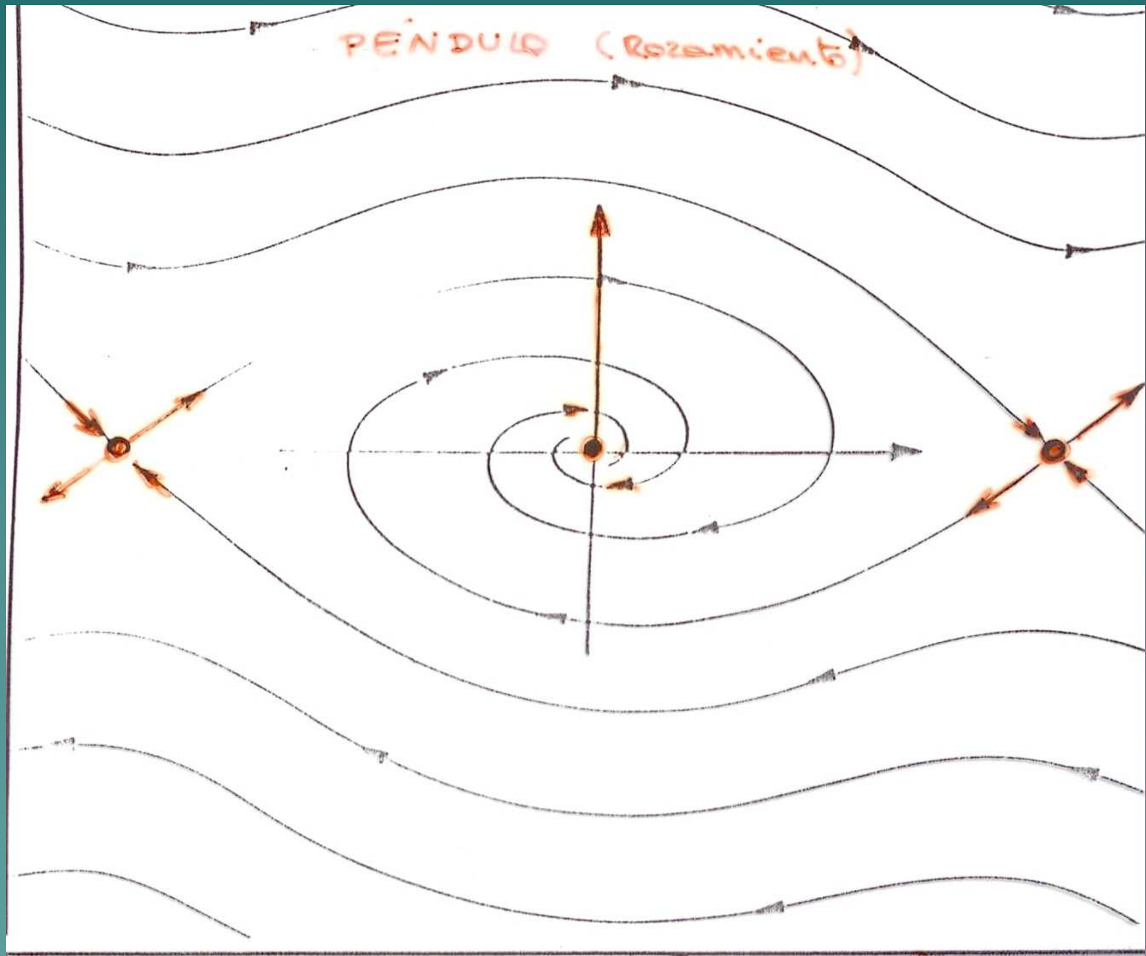
El péndulo

- Estudiamos el péndulo con amortiguamiento, transformando su ecuación en un sistema casi-lineal en el que de nuevo buscamos y estudiamos los puntos críticos, obteniendo de nuevo que (0, 0), y ($n\pi$, 0) con n entero son puntos críticos.
- Ahora los puntos ($2k\pi$, 0) son puntos asintóticamente estables, mientras que los puntos ($(2k+1)\pi$, 0) siguen siendo puntos de silla inestables.
- Dibujamos el plano de fases y observamos que las trayectorias que entran en los puntos de silla son separatrices.

El péndulo



El péndulo



El péndulo

- Para estudiar los puntos críticos diferentes del (0,0) se hace un cambio de variables: $(n\pi, 0)$
- $x = u + n\pi$; $y = v$.
- Se estudia el nuevo sistema y se observa que si n es par el sistema es el casi.lineal estudiado. Si n es impar también es un sistema casi lineal

El péndulo

- Se estudia el sistema auxiliar, para analizar la naturaleza del punto crítico:(π, 0):

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \dfrac{-g}{L}u - \dfrac{c}{mL}v \end{cases}$$

- La matriz auxiliar es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{L} & \dfrac{-c}{mL} \end{pmatrix}$$

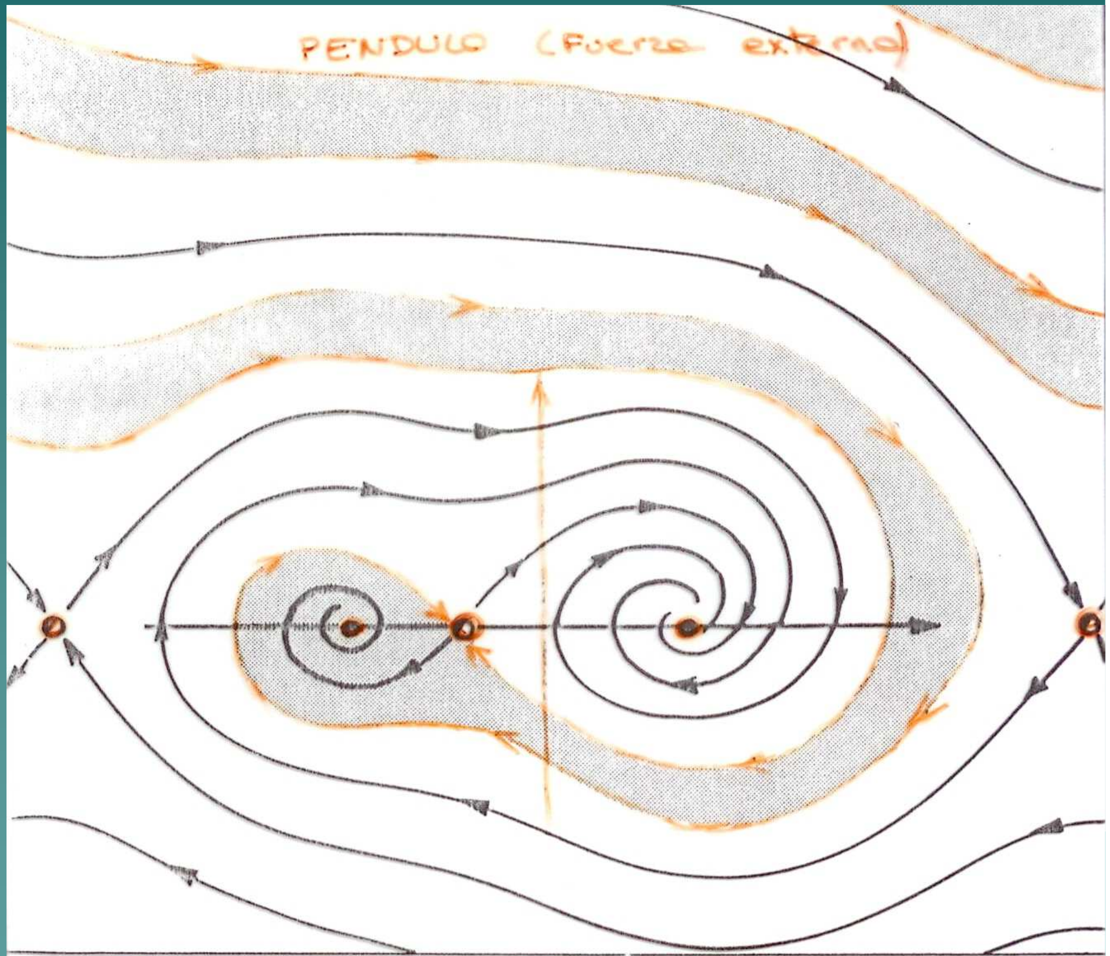
- La naturaleza del punto crítico depende de los autovalores, que son reales, uno positivo y el otro negativo.

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4gm^2L}}{2mL}$$

- Es un punto de silla. Punto crítico inestable.

El péndulo

- Ahora se aplica una fuerza externa.
- Con el ordenador se pueden ver soluciones.
- Hay dos puntos críticos y para cambios del parámetro se tienen distintos comportamientos.
- Bifurcación



Modelo presa depredador

Modelo presa depredador

- Otros ejemplos a estudiar son los modelos de especies competidoras y de presa-rapaz.
- Los pasos a seguir son los mismos: primero se determinan los puntos críticos. Se traslada el sistema a cada punto crítico y se estudia el sistema casi-lineal por medio del sistema lineal asociado, con lo que conocemos el comportamiento local, en un entorno de dicho punto crítico, estudiando su tipo y estabilidad.
- Se lleva esta información al plano de fases.

Modelo presa depredador

- Si sólo hubiera presas, estas crecerían con tasa constante:

$$x' = ax, \ a>0.$$

- Si sólo depredador, estos se extinguen por falta de alimento:

$$y' = -cy, \ c>0$$

- Si las dos especies están presentes la población de depredadores se incrementa por unidad de tiempo proporcionalmente al número de presas susceptibles de ser devoradas:

$$y' = -cy + dxy, \ d,c>0$$

- La caza provoca un descenso de las presas:

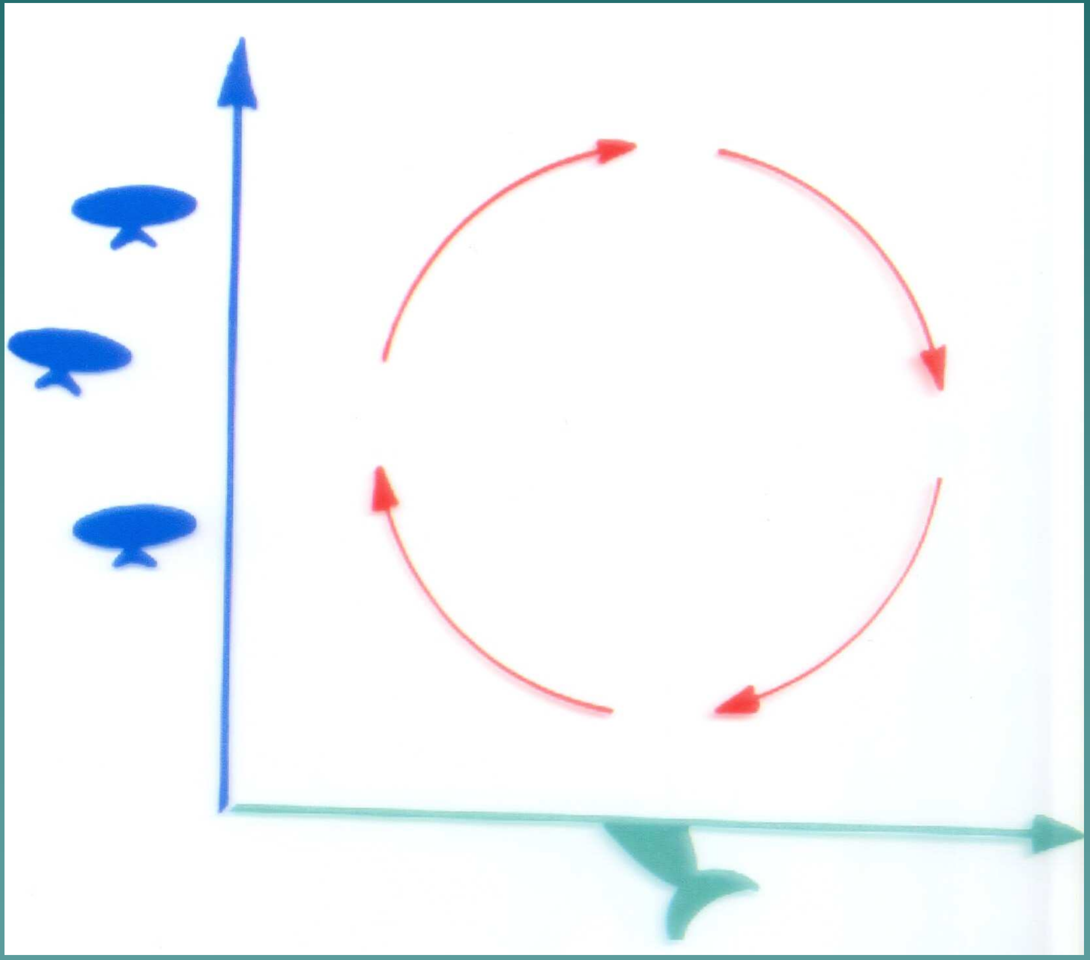
Modelo presa depredador

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

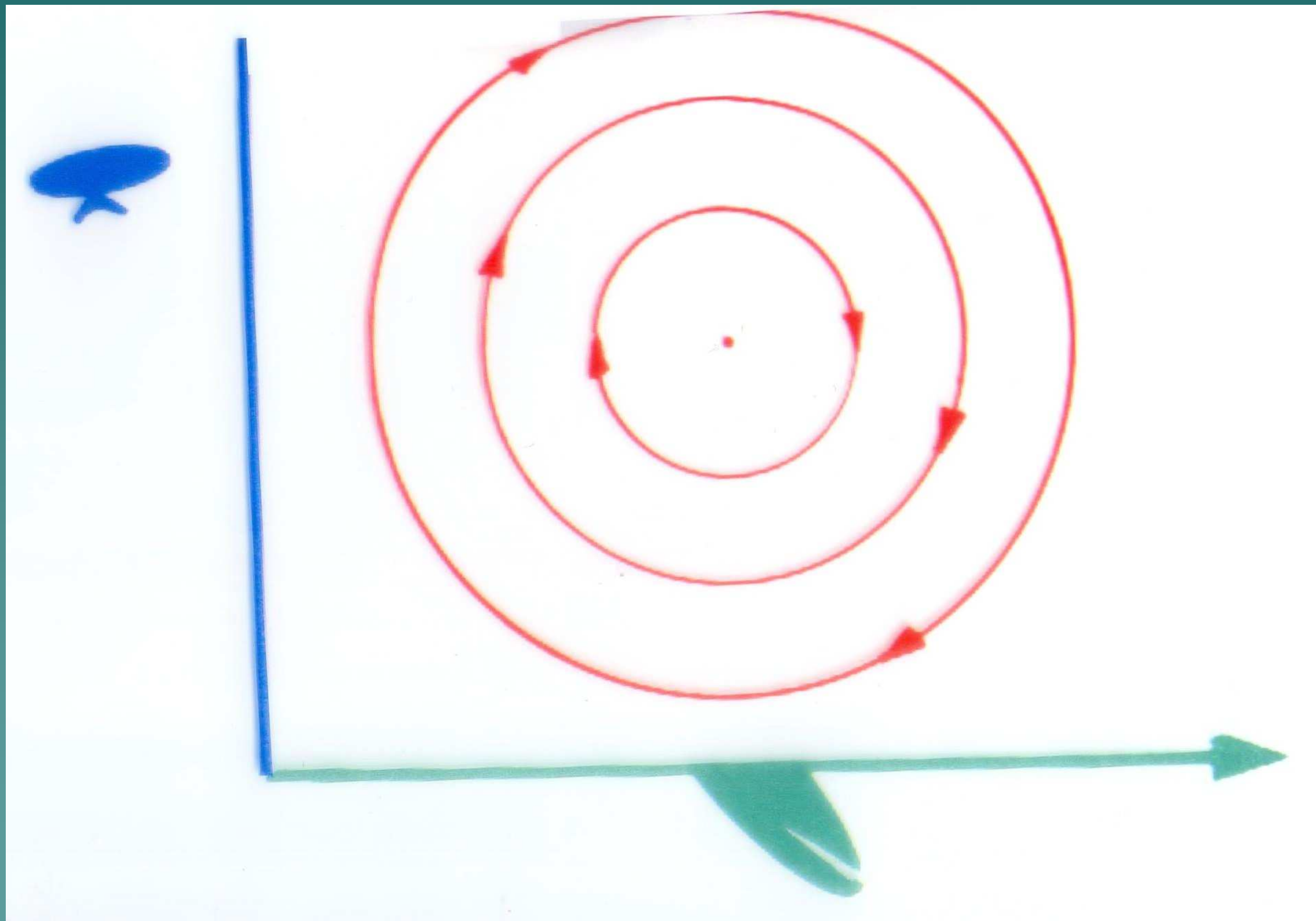
Sistema de Lotka-Volterra

- Se observan tres tipos de soluciones espaciales de claro significado biológico:
- Puntos de equilibrio:
- x(t) = 0, y(y) = 0, para todo t.
- x = c/d; y = a/b.

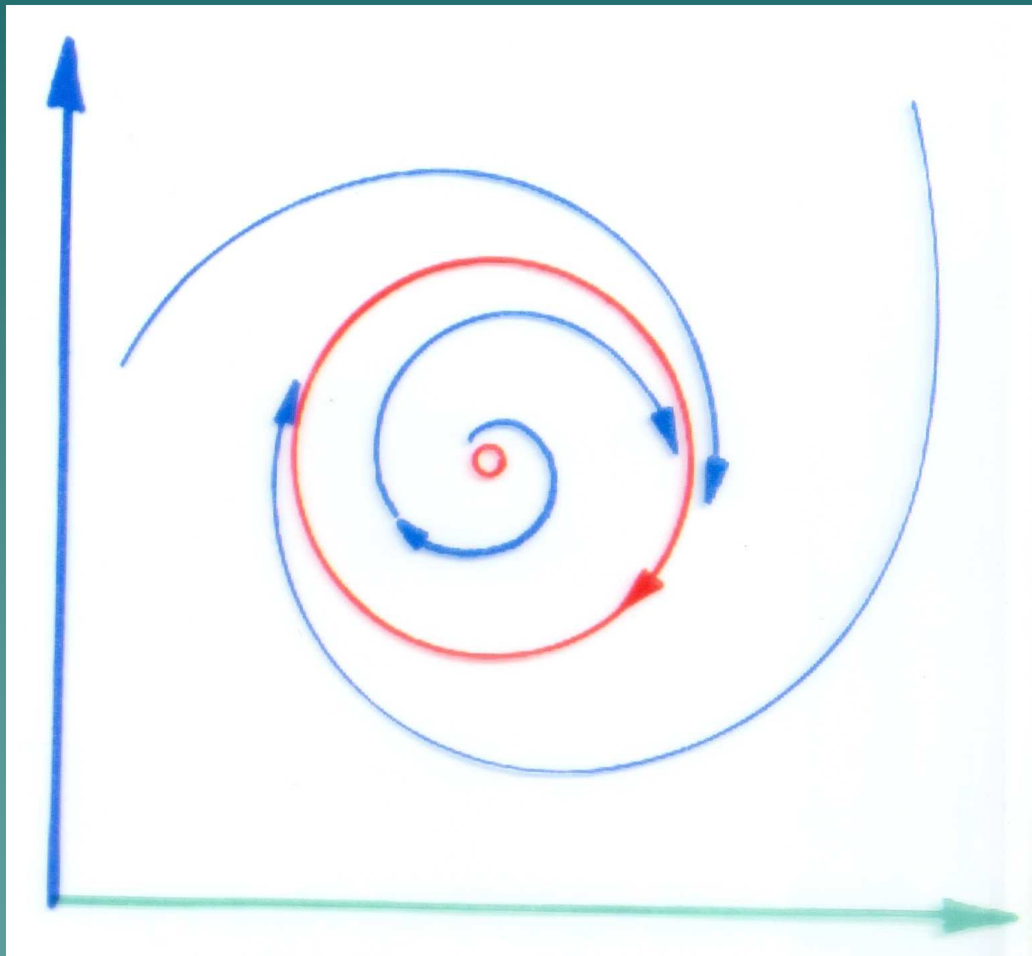
Modelo presa depredador



Modelo presa depredador



Modelo presa depredador



Modelo presa depredador

- Para un punto crítico asintóticamente estable puede ser importante investigar la región de estabilidad asintótica; es decir, el dominio tal que todas las soluciones con valor inicial en él se aproximen a un punto crítico dado. Como la teoría de los sistemas casi-lineales es local no nos proporciona información sobre este problema.

Sistema de Lorenz

Sistema de Lorenz

- Si calentamos un cacharro con agua las partículas próximas al foco de calor tienden a subir. Si la diferencia de temperatura es grande se produce una circulación circular o convención. Igual ocurre en la atmósfera.
- Para estudiarlo tendremos que conocer unos coeficientes, que son constantes positivas:
  - de expansión térmica,
  - de viscosidad,
  - de conductividad térmica.
- *Lord Rayleigh* descubrió el número que lleva su nombre en 1916.
- Cuarenta años más tarde *Barry Saltzman* (1962) obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la convención.
- Un año más tarde *Edward Lorenz* crea su famosa versión.

Sistema de Lorenz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

- donde *t* se refiere al tiempo, pero las coordenadas (*x, y, z)* no son espaciales, pues:
- *x* es proporcional a la intensidad del movimiento de convención,
- *y* es proporcional a la diferencia de temperaturas entre las corrientes ascendentes y descendentes
- *z* es proporcional a la distancia.
- Los coeficientes σ, *r* y *b* son positivos.

Sistema de Lorenz

- *Lorenz* estudió su sistema con ayuda del ordenador.
- Nosotros ahora podemos observar que es un sistema casi-lineal en el origen.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x + F(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y + G(x.y.z) \\ \dfrac{dz}{dt} = -bz + H(x,y,z) \end{cases}$$

- Donde F(x,y,z) = 0; G(x,y,z) = -xz; H(x,y,z) = xy. Se anulan en el origen así como sus derivadas parciales.

Sistema de Lorenz

- El sistema lineal asociado es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = -bz \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

- Autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-(\sigma+1)-\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}{2} \qquad \lambda_3 = -b$$

- Si todos los autovalores tienen la parte real negativa, el origen es punto asintóticamente estable. Si alguno la tuviese positiva sería inestable

Sistema de Lorenz

- Caso 1º: $0<r<1$. Todos los autovalores son reales y negativos, luego el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Al cabo del tiempo la convención se anula.
- Caso 2º: $r = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, y los otros son negativos. El origen es un punto estable.
- Caso 3º: $r>1 \Rightarrow \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. El origen es un punto crítico inestable.
- Por tanto $r = 1$ es una bifurcación

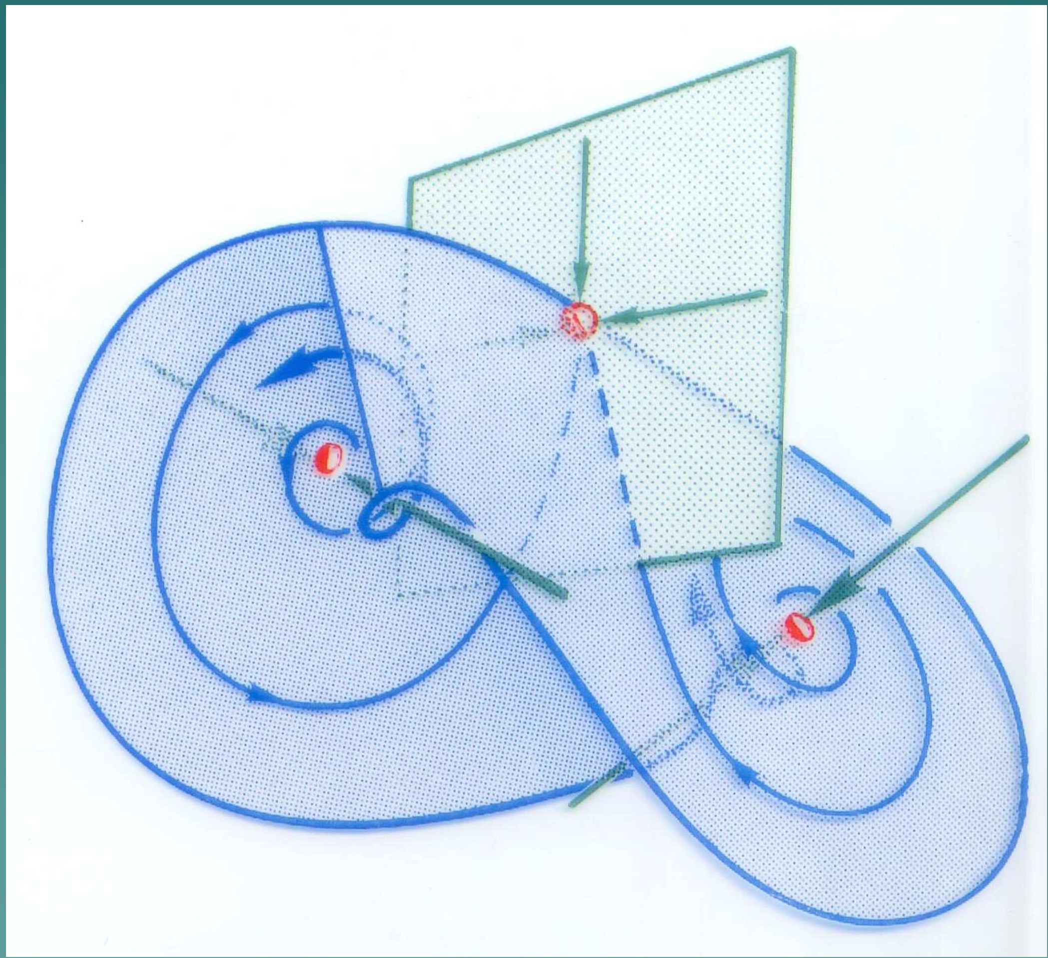
Sistema de Lorenz

- Además probamos que para r>1 aparecen otros dos puntos críticos, *p* y *q* de coordenadas:
- $(\pm x, \pm x, r-1)$, $x = \sqrt{b(r-1)}$
- que por simetría serán a la vez asintóticamente estables o inestables.

Sistema de Lorenz

- Si trasladamos el origen a uno de ellos comprobamos que:
- Si $r^*=(\sigma(\sigma+b+3))/(\sigma-b-1)>r>1$ los tres autovalores tienen la parte real negativa, luego los puntos *p* y *q* son asintóticamente estables.
- Si $r>r^*$ y $r>1$ dos raíces tienen la parte real positiva, luego *p* y *q* son inestables. En este caso el sistema tiene tres puntos críticos y los tres son inestables.

Sistema de Lorenz



Sistema de Lorenz

- Observamos una nueva bifurcación para r=r*.
- Por ejemplo para r=28>r*=24'74 los tres puntos críticos son inestables.
- La superficie en la que la órbita reside es lo que se denomina atractor de *Lorenz*. Es un fractal de dimensión 2,07.
- Pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden dar al cabo de un cierto tiempo valores muy diferentes. Es caótico.
- De nuevo comentamos frases como efecto mariposa y dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.
- El sistema de *Lorenz* ha sido estudiado durante dos décadas y han sido localizadas bifurcaciones para r>28.
- Por ejemplo *Francheschini* en 1980 localizó una órbita tipo ab2 (gira una vez alrededor de un punto crítico y dos alrededor del otro) estable para r=100'75.[1]
- Este sistema sirvió de catalizador para estudiar los sistemas dinámicos.
-

[1] Ver Gullick página 283.

Sistema de Lorenz