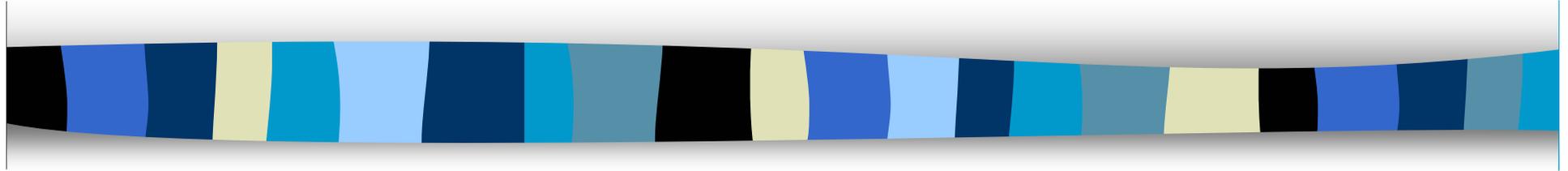
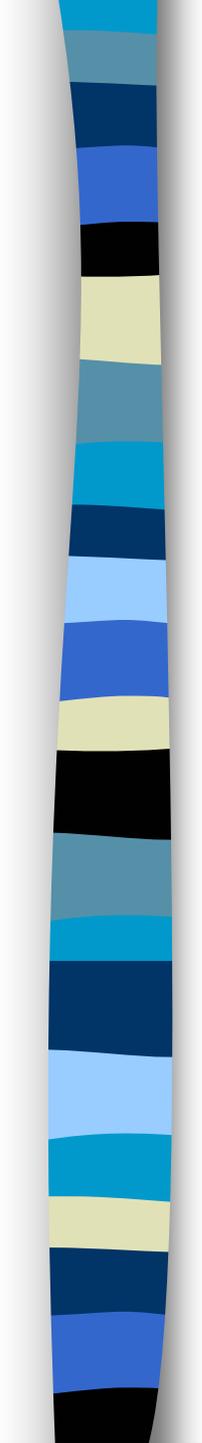


# Geometría de lo irregular: Sistemas dinámicos discretos



*Adela Salvador*

*Universidad Politécnica de Madrid*



# Esquema del curso

## ■ Fractales

## ■ Sistemas dinámicos discretos

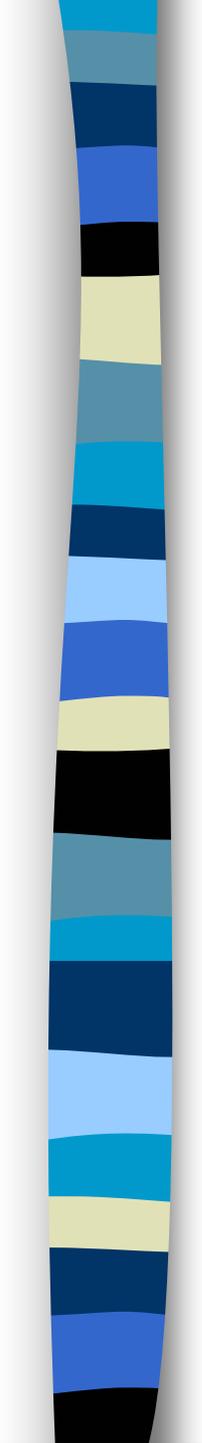
– En  $\mathbb{R}$

– En  $\mathbb{C}$ :

- Conjuntos de Juliá y conjunto de Mandelbrot

## ■ Sistemas dinámicos continuos

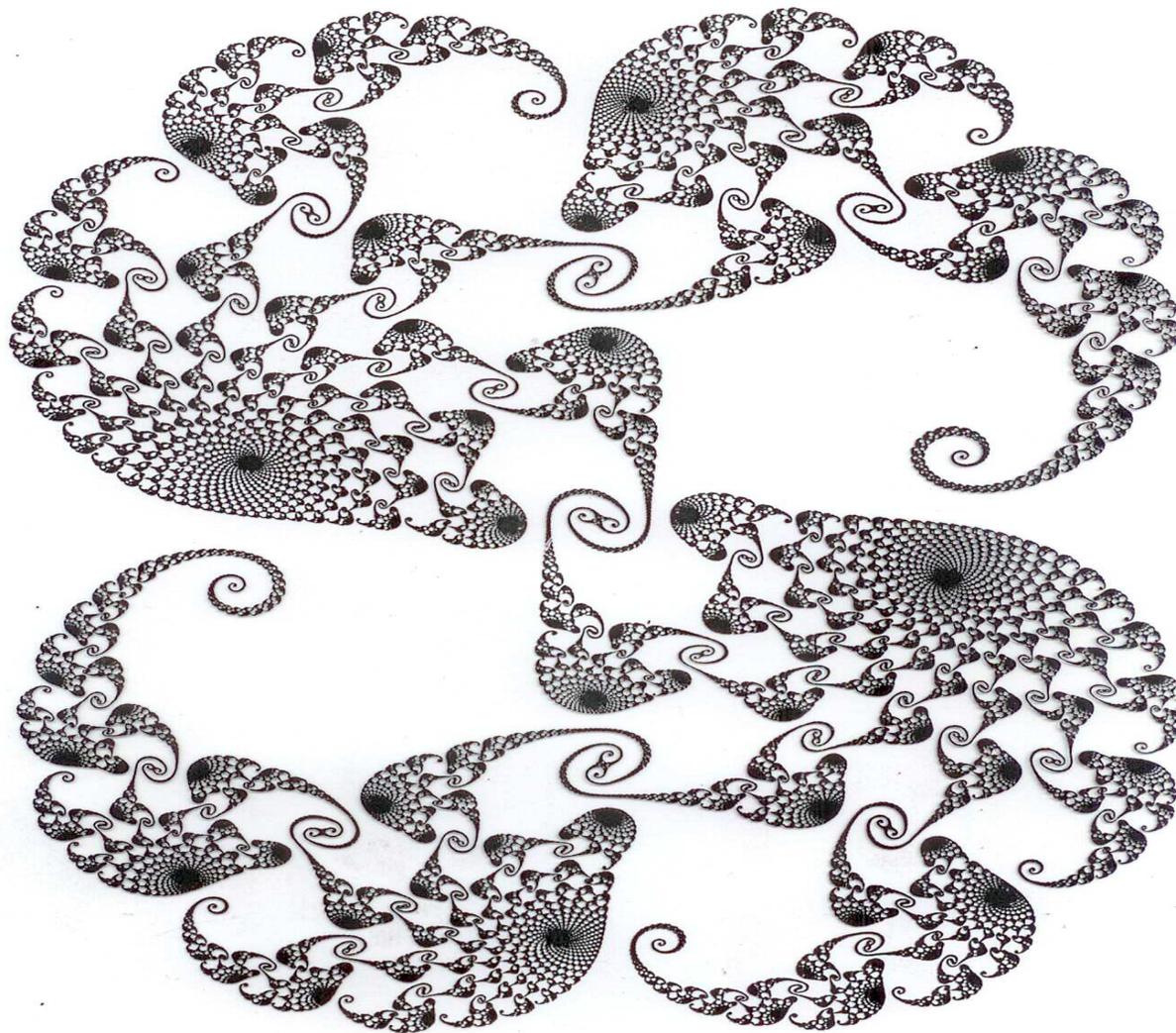
– Sistema de Lorenz. Atractores extraños

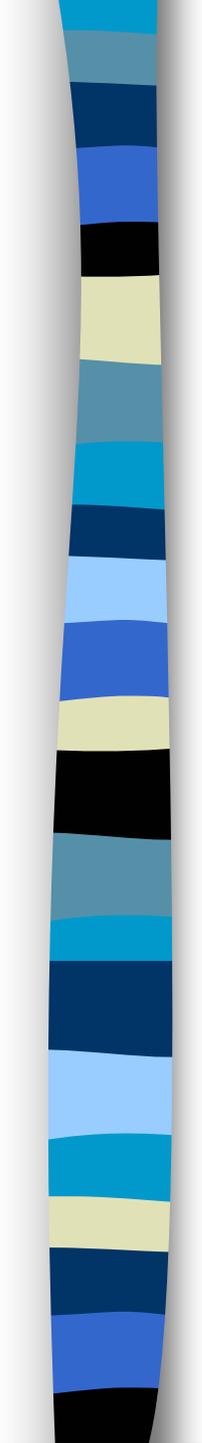


# Caos y fractales

- *Sistemas dinámicos discretos. Preliminares*
- *El concepto de caos*
- *Sistemas dinámicos discretos*
  - *Ecuación Logística*
  - *Método de Newton*
  - *Conjuntos de Juliá y de Fatou*
  - *Conjunto de Mandelbrot*
- *Sistemas dinámicos continuos:*
  - *Atractor de Lorentz*

CAOS y FRACTALES.  
Una introducción.

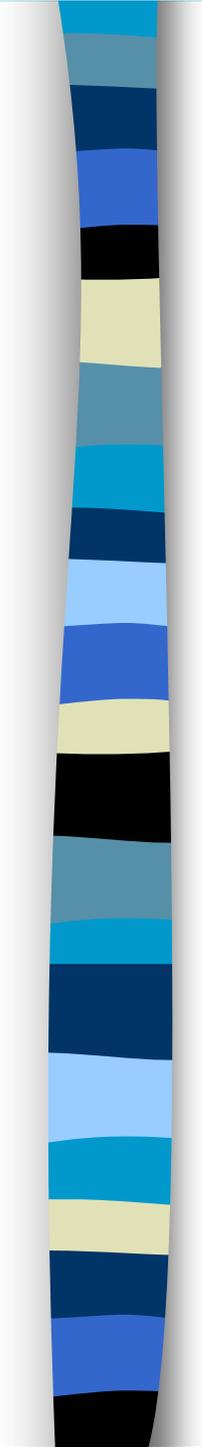




# Sistemas dinámicos discretos.

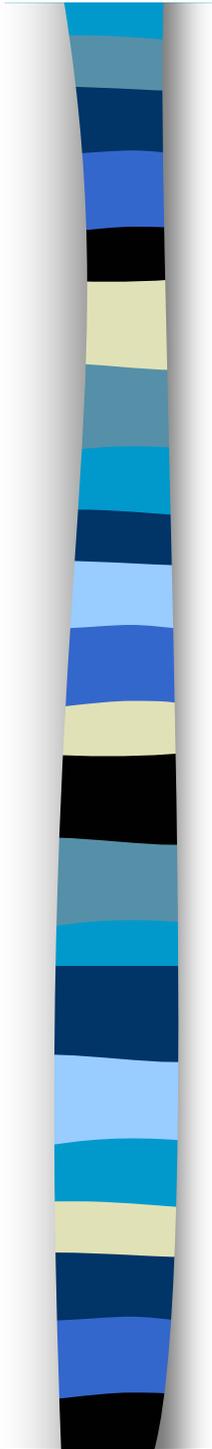
## Primeros conceptos

- Sistema dinámico
- Órbita de un punto
- Punto fijo
- Punto periódico de período  $m$  o  $m$ -ciclo
- Punto eventualmente fijo
- Punto eventualmente periódico
- Diagrama de fases
- Atractor
- Repulsor
- Bifurcación

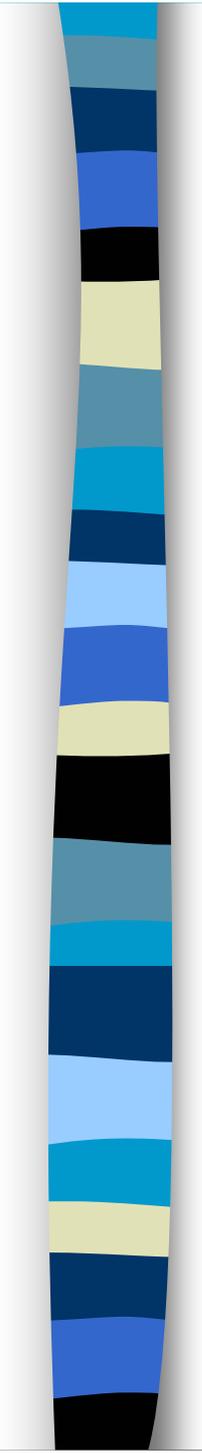


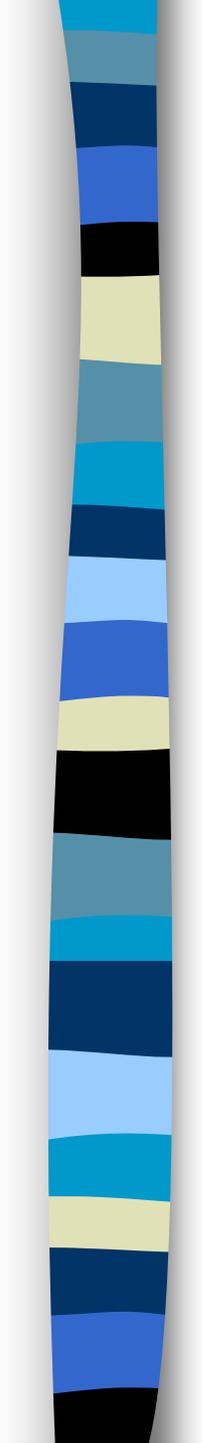
# Sistema dinámico

- Un **sistema dinámico** es un sistema que varía con el tiempo. Cambian los estados del sistema.
- Viene descrito por un espacio de estados junto con la regla que determina la dinámica del sistema.
- El sistema más estudiado ha sido el cosmos.
- Los sistemas físicos y matemáticos se clasifican en lineales y en no lineales.
- Un sistema dinámico puede venir formulado por una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, una ecuación en diferencias finitas, una ecuación integral o un sistema combinación de los anteriores.



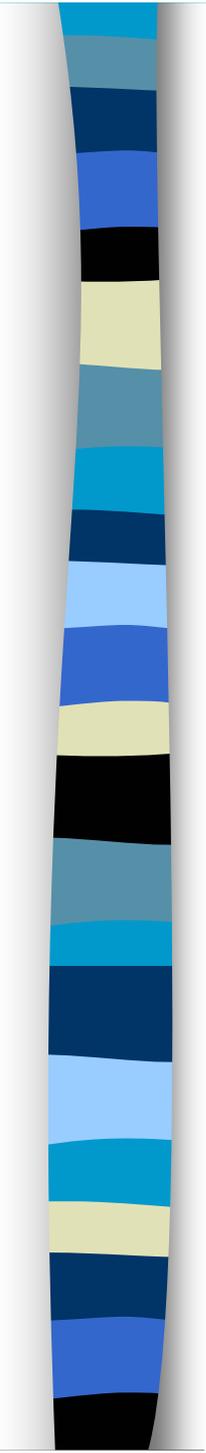
- Un geómetra se plantea una ecuación diferencial como un flujo.
- El **estado** del sistema se describe por un punto de un espacio de fases y, cuando el tiempo fluye en el reloj, así lo hace el punto en el espacio.
- El camino trazado por el punto en el espacio de fases representa, pues, la evolución del estado del sistema a partir de una condición inicial particular.
- Así, el conjunto de todos esos caminos, o **diagrama de fases**, nos da una idea cualitativa de lo que le sucede a cualquier condición inicial posible.

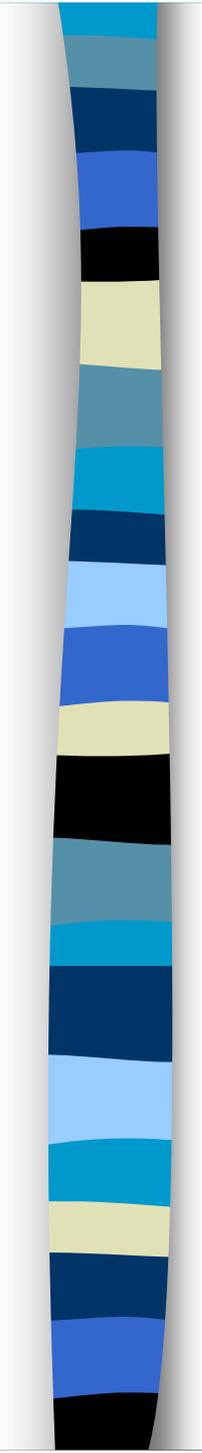
- 
- **Espacio de estados** es el conjunto  $E$  donde nos movemos, que puede tener estructura de espacio topológico, o métrico o ser una variedad diferencial. Puede ser  $\mathcal{R}$ ,  $S^1$  (esfera),  $\mathcal{R}^n$ ,  $T$  (toro) o  $T^n$ ,  $C$ ...
  - Se puede definir un **campo vectorial**  $V$  sobre una variedad  $M$ . Una **trayectoria** de  $V$  es una curva, o correspondencia de un segmento de  $\mathcal{R}$  sobre  $M$ , que sea continua y diferenciable a trozos.



# Definición de sistema dinámico:

- Llamamos **sistema dinámico** a una terna  $(E, G, f)$  donde  $E$  es un **espacio de fases** o **espacio de estados**, donde  $G$  es un semigrupo de escalares o conjunto de tiempos, y donde  $f$  es el flujo del sistema, que es una aplicación de  $G \times E$  en  $E$ , con las siguientes propiedades:
  1.  $f$  es una aplicación continua
  2.  $f(0, x) = x$  para todo  $x \in E$
  3.  $f(t, f(s, x)) = f(t+s, x)$  para todo  $t, s \in G$  y todo  $x \in E$ .
- Si  $G$  es un subconjunto de los números enteros tenemos un sistema dinámico **discreto**, y si  $G$  es  $\mathbb{R}^+$  o  $\mathbb{R}$  decimos que el sistema dinámico es **continuo**.

- 
- En un sistema dinámico discreto el tiempo fluye en pasos:  $1, 2, \dots, n$ . Es la diferencia entre un reloj digital y uno analógico.

- 
- **Órbita** de un punto:  $f(x) = 1/x$ ,  $O_f(3): \{3, 1/3, 3, 1/3\dots\}$
  - 3 es un **punto periódico** de periodo 2.
  - **Punto** fijo: raíces de la ecuación:  $f(x) = x$ .
  - Ejemplo: Si  $f(x) = 1/x = x$ , 1 y  $-1$  son puntos fijos.
  - Punto **eventualmente fijo**, si al cabo de un cierto tiempo, se convierte en un punto fijo.
  - Por ejemplo:  $f(x) = x^2$ , 1 es un punto fijo,  $O_f(1): \{1, 1, 1\dots\}$  y  $-1$  es un punto eventualmente fijo  $O_f(-1): \{-1, 1, 1\dots\}$ .

## Sistemas dinámicos discretos

- Sistema dinámico  $(X, f)$
- órbita de  $x$  bajo  $f$ :  $O_f(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$
- punto fijo  $x_0$ :  $f(x_0) = x_0$
- punto periódico de periodo  $m$  o  $m$ -ciclo
- punto eventualmente fijo; punto eventualmente periódico
- diagrama de fases
- atractor; repulsor
- conjunto invariante minimal
- punto alfa-límite; punto omega-límite
- punto fijo estable
- punto fijo asintóticamente estable
- punto fijo inestable
- punto fijo estable hiperbólico; punto periódico estable hiperbólico

- Sea  $x$  un punto de  $M$ . Sea  $c$  una trayectoria completa (el dominio de  $c$  sea todo  $\mathfrak{R}$ ) de un campo  $V$  que pasa por  $c=c(0)$ .

- Se llama **w-límite** de  $x$  al conjunto: 
$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{c([n, \infty))}$$

- y  **$\alpha$ -límite** de  $x$  a: 
$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{c((-\infty, -n] )}$$

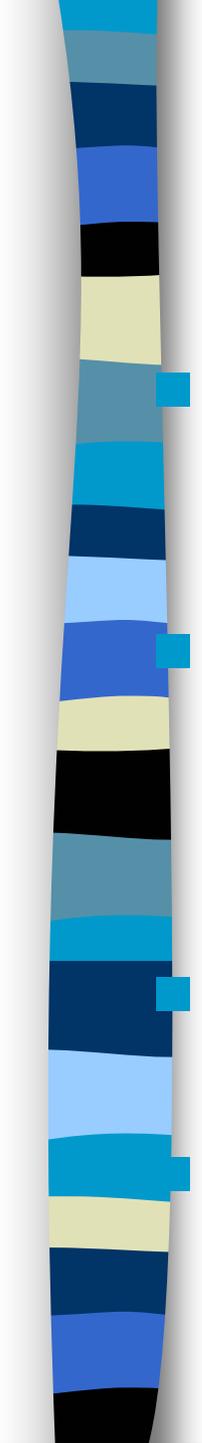
- Sea  $L$  un subconjunto de  $M$ :

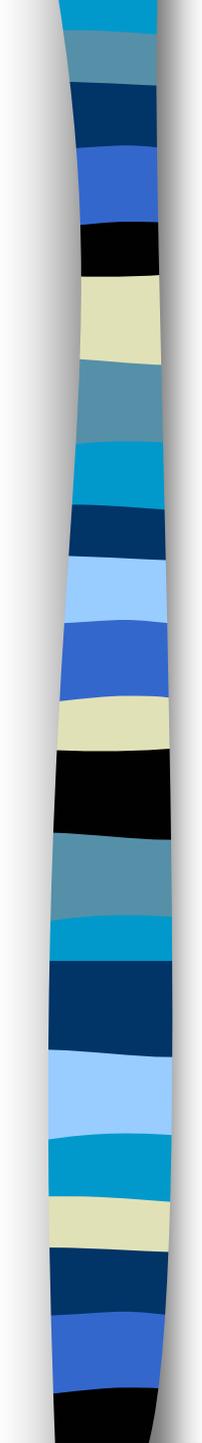
$$\text{In}(L) = \{x \in M : \omega(x) \subset L\}$$

$$\text{Out}(L) = \{x \in M : \alpha(x) \subset L\}$$

- $L$  es un **conjunto atractivo** si  $L$  tiene algún entorno abierto  $U$  tal que  $L \subset U \subset \text{In}(L) \subset M$ . A  $\text{In}(L)$  se le denomina entonces **cuenca de atracción** del conjunto atractivo  $L$ .
- Un **atractor** es un conjunto atractivo  $A \subset M$  que no posee ningún subconjunto propio atractivo.
- La **separatriz** es el complementario de todas las cuencas de atracción:

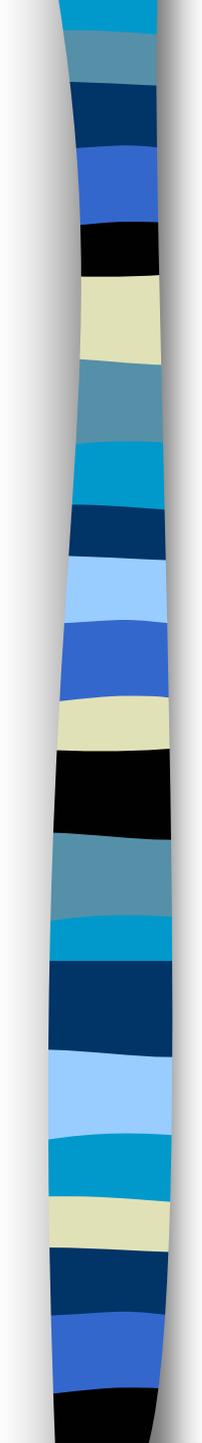
$$\text{Sep}(V) = \{x \in M : \omega(x) \text{ no está contenido en ningún atractor}\}$$

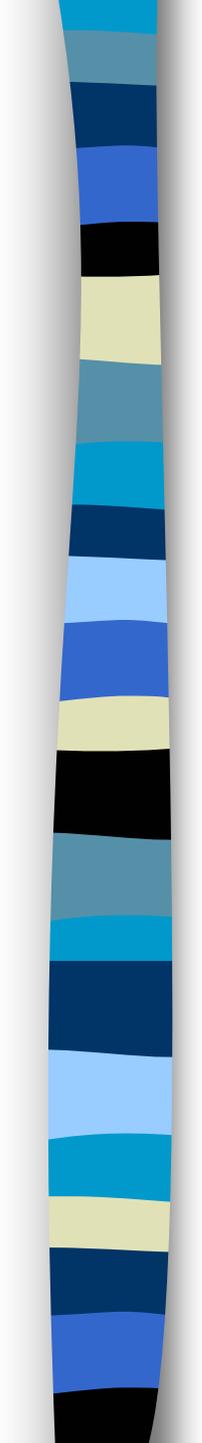
- 
- Estudiamos en primer lugar sistemas en los que el **espacio de estados** sea  $\mathfrak{R}$  o un subconjunto de  $\mathfrak{R}$ :  $(\mathfrak{R}, f)$ .
  - Buscamos los **puntos fijos**  $x_0$ , tales que  $f(x_0) = x_0$ , estudiamos el comportamiento cuando  $x$  tiende a infinito, o a menos infinito, los **puntos periódicos** y el **diagrama de fases**.
  - Definimos la **órbita de  $x$  bajo  $f$**  como:  $O_f(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ .
  - Estudiamos los conjuntos que son **invariantes**.



# Un dinámica sencilla

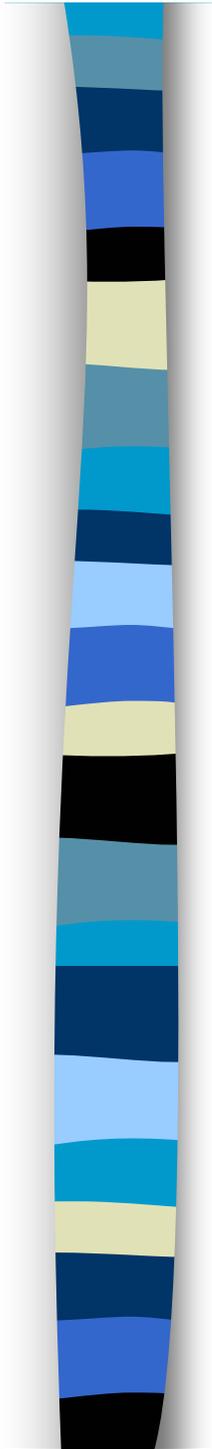
- Ejemplo:  $f(x) = ax$ .
- Si  $0 < a < 1$ , entonces 0 es un atractor, punto fijo estable.
- Si  $a > 1$ , entonces 0 es un repulsor, punto fijo inestable.
- Cuando el parámetro  $a$  varía de  $a < 1$  a  $a > 1$  hemos visto que el origen pasa de ser un atractor a ser un repulsor. Decimos entonces que  $a=1$  es una **bifurcación**. Al pasar por una bifurcación hay un cambio de estado del sistema
- Si  $a = 0$ , no es un endomorfismo, al siguiente paso todos los puntos son 0.
- Si  $a = 1$ , todos los puntos son fijos.
- Si  $a = -1$ , entonces  $Of(x) = \{x, -x\}$  todos los puntos son ciclos de periodo 2.

- 
- Decimos que un punto  $x^*$  es un **punto periódico** de periodo  $m$ , o que es un  $m$ -ciclo si  $m$  es el menor valor para el cual  $f^m(x^*) = x^*$  siendo su órbita:  $O_f(x^*) = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{m-1}(x^*)\}$ . Otra forma de verlo es como un punto fijo de la aplicación:  $f^m$ .
  - Un punto es **eventualmente fijo** si aparece al cabo de un número finito de iteraciones, como por ejemplo en  $f(x) = x^2$  al comenzar con  $x = -1$ .
  - Estudiamos otros ejemplos  $f(x) = 1/x$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \text{sen}x$ ,  $f(x) = \text{cos}x$ .

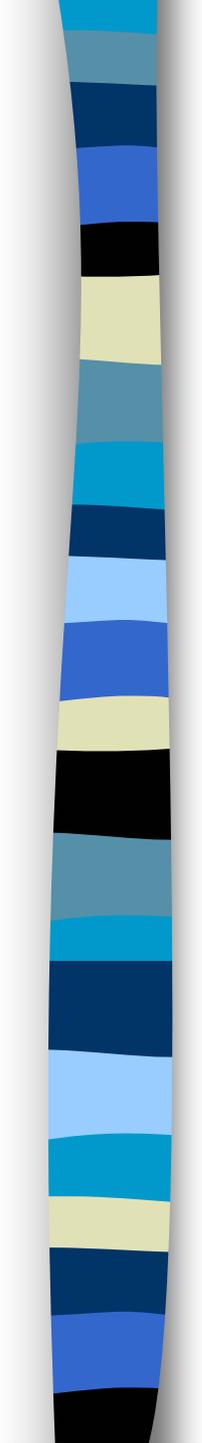


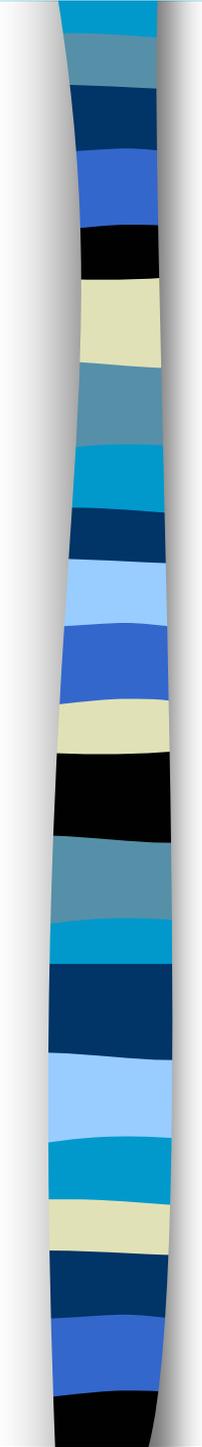
# Otros ejemplos

- Sistema dinámico:  $(\mathbb{R}, f)$
- $\mathbb{R}$  espacio de estados.
- Ejemplo 1:  $f(x) = e^x$ . Al crecer  $x$ ,  $f(x)$  tiende a infinito. Es el  $w$ -límite. Si  $x$  tiende a menos infinito, tiende a cero. Es el alfa-límite.
- Ejemplo 2:  $f(x) = \text{sen } x$ . Tiende a 0.
- Ejemplo 3:  $f(x) = \text{cos } x$ . Tiende a 0,73908 radianes
- Ejemplo 4:  $f(x) = 1/x$ : 3, 1/3, 3, 1/3...
- Ejemplo 5: Ecuación logística



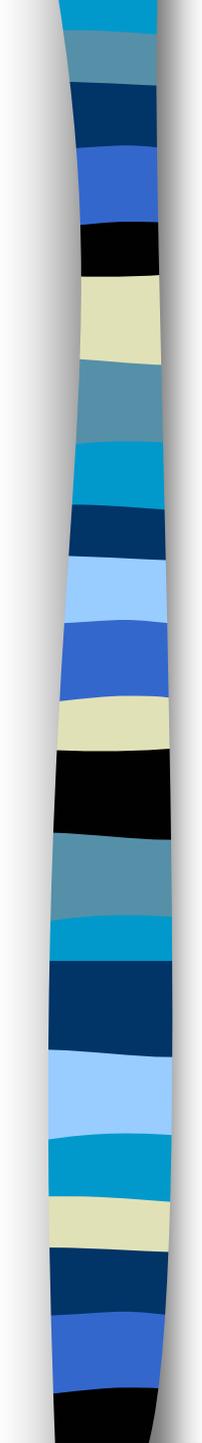
- $f(x)=ax(1-x)$ , otras ecuaciones logísticas, ejemplos de poblaciones biológicas que se extinguen, crecen o fluctúan de forma periódica o aleatoria.
- En este sencillo sistema, encontramos ya **puntos de bifurcación**, o valores del parámetro para los que cambia la dinámica del sistema.

- 
- El **espacio de estados** es un conjunto **invariante**.
  - La **órbita** de un punto es un conjunto invariante, los puntos fijos son conjuntos invariantes, la órbita de un  $m$ -ciclo es un conjunto invariante.
  - Si estudiamos los puntos **w-límite** y los  $\alpha$ -**límite** de cada punto  $x$ , se puede demostrar que estos conjuntos son también invariantes.
  - Se dice que una clasificación de los conjuntos invariantes es **minimal** si algún subconjunto suyo nunca es un conjunto invariante.
  - Minimal es un punto fijo o un ciclo, no lo es el espacio de estados.

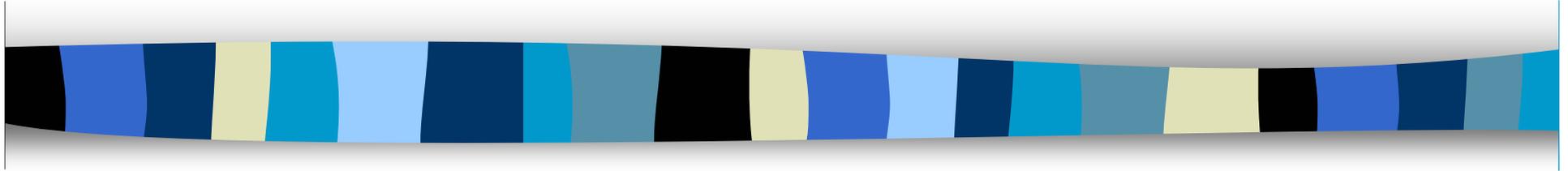
- 
- Se dice que  $x^*$  es un **punto fijo estable** de  $f: X \rightarrow X$ , si en todo entorno  $U$  de  $x^*$  existe un entorno  $V$  de  $x^*$  contenido en  $U$  tal que si  $x$  pertenece a  $V$ , entonces  $f(x)$  pertenece a  $U$ . Si además

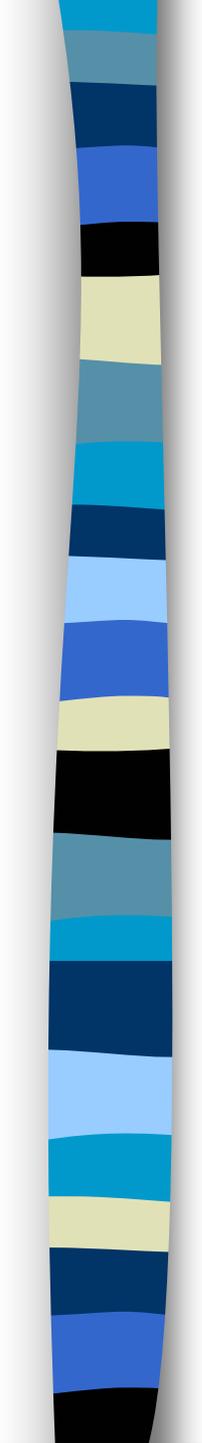
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$$

- decimos que el punto fijo  $x^*$  es **asintóticamente estable**. Si un punto no es estable, se dice que es **inestable**. Una forma de reconocer un punto fijo atractor es estudiando la derivada: Si  $|f'(x^*)| < 1$  entonces el punto fijo es un atractor. Definimos **punto hiperbólico** si  $|f'(x^*)|$  es distinto de uno.

- 
- Decimos que dos sistemas dinámicos discretos  $(X, f)$  y  $(Y, g)$  son **conjugados topológicamente** si existe una aplicación  $h$  de  $X$  a  $Y$  biyectiva y bicontinua (un homeomorfismo) tal que  $hof=goh$ . Un recurso para estudiar sistemas dinámicos difíciles es estudiar otro conjugado topológicamente.

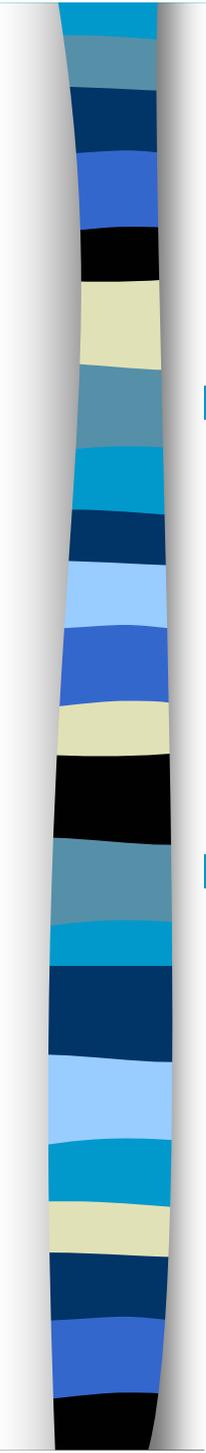
# El concepto de caos

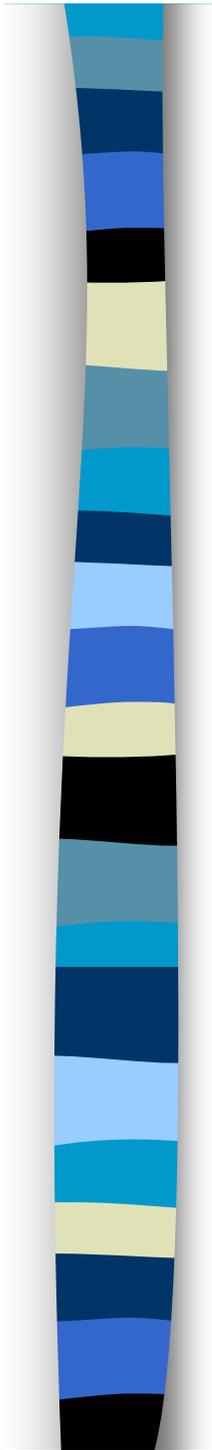




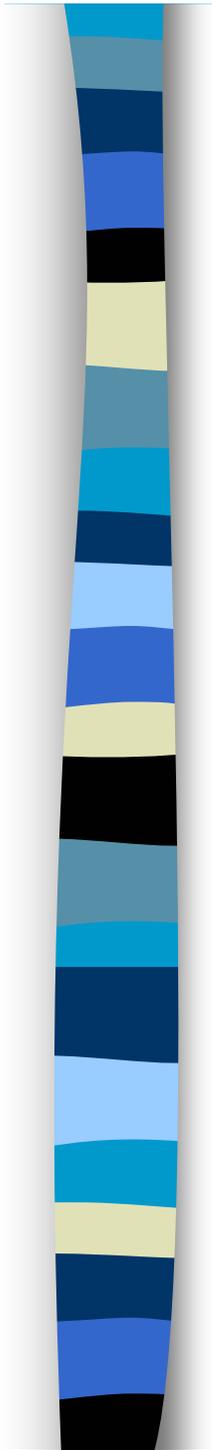
# El concepto de caos

- La primera vez que se usó el término caos en Matemáticas fue en 1975 en la revista *American Mathematical Monthly*, en el artículo de *L. Li* y *J. Yorke* “**Period three implies chaos**”.
- En dicho artículo se demostraba que si una función continua real de variable real tiene un punto periódico de periodo tres, entonces tiene puntos periódicos de todos los periodos.
- Para sistemas dinámicos discretos definidos por funciones continuas de intervalos reales sobre si mismos, la presencia de una órbita periódica de periodo tres implica la existencia de una cantidad no numerable de órbitas inestables y aperiódicas.

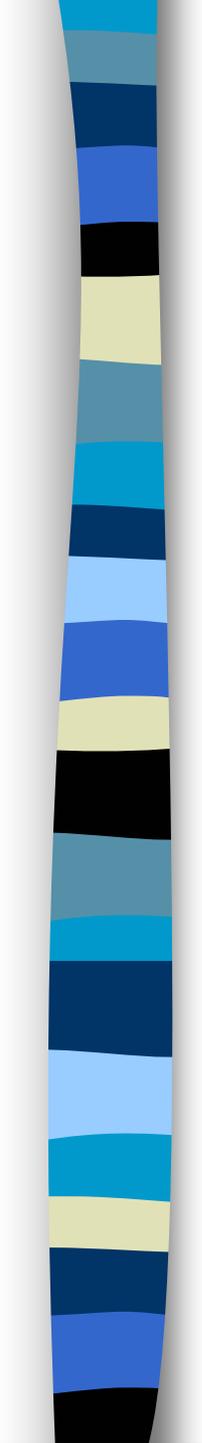
- 
- *Poincaré* en 1892 descubrió que sistemas de la Mecánica gobernados por las ecuaciones de *Hamilton* no tienen el comportamiento regular esperado sino que su comportamiento futuro resulta impredecible.
  - Precisamente el término caótico va a indicar que **puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.**

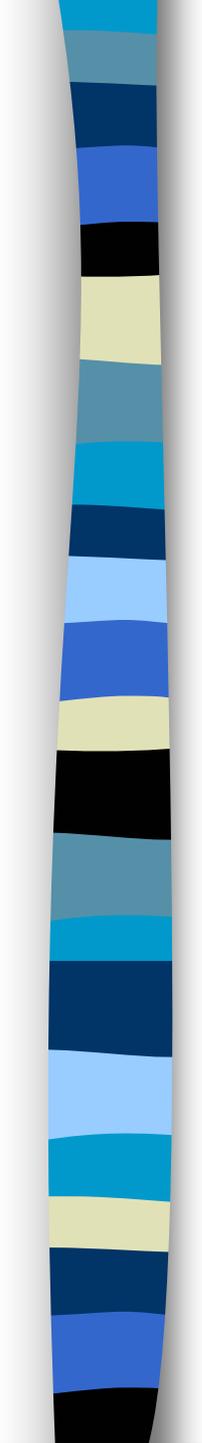


- A *Henry Poincaré* (1854-1912) se le consideró hacia 1900 como el matemático más grande del mundo. Hizo contribuciones importantes a distintas ramas de la Matemática. Fue el padre de la topología moderna, y de la dinámica topológica. En su trabajo sobre la mecánica celeste expone la teoría sobre desarrollos asintóticos que es actualmente una de las más poderosas herramientas del matemático aplicado.



- El matemático *Henry Poincaré* en 1908 hace uso de algunas observaciones que ya había realizado sobre el problemas de los **tres cuerpos**, es decir, sobre un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales que modeliza al movimiento de tres cuerpos sometidos a las fuerzas gravitatorias ejercidas entre ellos.
- *Poincaré* discutió entonces el problema de la impredecibilidad relacionando **determinismo y azar**. Estudió la impredecibilidad del movimiento de las partículas de un gas y de los fenómenos meteorológicos.

- 
- El biólogo *R. M. May* escribe “**Simple Mathematical models with very complicated dynamics**” donde ilustra la complejidad que pueden alcanzar sistemas dinámicos unidimensionales regidos por leyes cuadráticas.
  - Observamos pues, como estos sistemas dinámicos caóticos entran en otras ciencias. Junto a publicaciones meramente matemáticas aparecen otras menos formales o con resultados experimentales.
  - Una bibliografía bastante completa sobre el tema aparecen en *Zhang* y consta de 269 libros y 7.157 artículos.

- 
- En 1989 el matemático americano *R. Devaney* formuló la siguiente definición: La función de  $f: X \rightarrow X$  es **caótica** en un espacio métrico  $X$ , no finito, si se verifican las siguientes condiciones:
  - El conjunto de los **puntos periódicos** de la función  $f$  es **denso** en  $X$ .
  - El sistema es **topológicamente transitivo** en  $K$ .
  - El sistema tiene **dependencia sensible de las condiciones iniciales**.

# On Devaney's Definition of Chaos

J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey

Chaotic dynamical systems have received a great deal of attention in recent years (see for instance [2],[3]). Although there has been no universally accepted mathematical definition of chaos, the popular text by Devaney [1] isolates three components as being the essential features of chaos. They are formulated for a continuous map  $f: X \rightarrow X$  on some metric space  $X$  (to avoid degenerate cases we will assume in this note that  $X$  is not a finite set). The first of Devaney's three conditions is that  $f$  is *transitive*; that is, for all non-empty open subsets  $U$  and  $V$  of  $X$  there exists a natural number  $k$  such that  $f^k(U) \cap V$  is nonempty. In a certain sense, transitivity is an irreducibility condition. The second of Devaney's conditions is that the periodic points of  $f$  form a dense subset of  $X$ . Devaney refers to this condition as an "element of regularity" ([1], p. 50). The final condition is called *sensitive dependence on initial conditions*;  $f$  verifies this property if there is a positive real number  $\delta$  (a *sensitivity constant*) such that for every point  $x$  in  $X$  and every neighborhood  $N$  of  $x$  there exists a point  $y$  in  $N$  and a nonnegative integer  $n$  such that the  $n^{\text{th}}$  iterates  $f^n(x)$  and  $f^n(y)$  of  $x$  and  $y$  respectively, are more than distance  $\delta$  apart. This sensitivity condition captures the idea that in chaotic systems minute errors in experimental readings eventually lead to large scale divergence. Sensitive dependence on initial conditions is thus widely understood as being the central idea in chaos.



**Devaney's Definition of Chaos.** Let  $X$  be a metric space. A continuous map  $f: X \rightarrow X$  is said to be chaotic on  $X$  if

1.  $f$  is transitive,
2. the periodic points of  $f$  are dense in  $X$ ,
3.  $f$  has sensitive dependence on initial conditions.

The aim of this note is to prove the following elementary but somewhat surprising result.

**Theorem.** *If  $f: X \rightarrow X$  is transitive and has dense periodic points then  $f$  has sensitive dependence on initial conditions.*

Before proving this Theorem, let us discuss some of the ideas that motivated it. First of all, any definition of chaos must face the obvious question: Is it preserved under topological conjugation? That is to say, if  $f$  is chaotic and if we have a

**Devaney's Definition of Chaos.** Let  $X$  be a metric space. A continuous map  $f: X \rightarrow X$  is said to be chaotic on  $X$  if

1.  $f$  is transitive,
2. the periodic points of  $f$  are dense in  $X$ ,
3.  $f$  has sensitive dependence on initial conditions.

## Definición de caos

En 1989 el matemático americano *R. Devaney* formuló la siguiente

definición:

La función de  $f: X \rightarrow X$  es **caótica** en un espacio métrico  $X$ , no finito, si se verifican las siguientes condiciones:

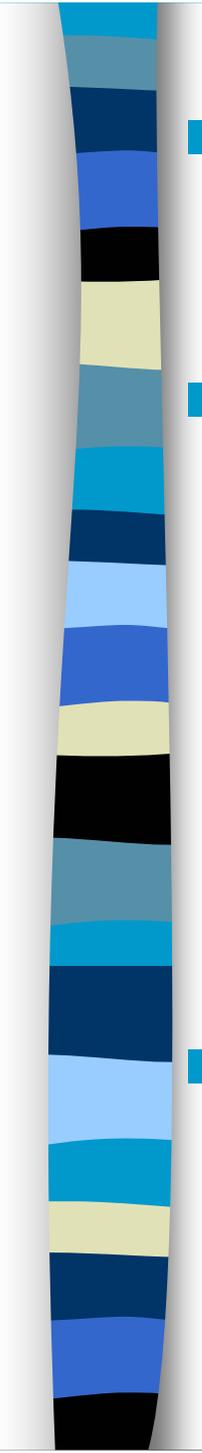
1. El conjunto de los **puntos periódicos** de la función  $f$  es **denso** en  $X$ .
2. El sistema es **topológicamente transitivo** en  $K$ .
3. El sistema tiene **dependencia sensible de las condiciones iniciales**.

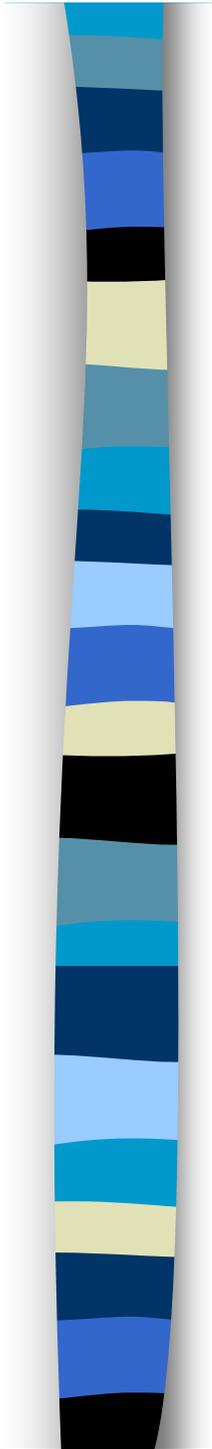
## Dependencia sensible a las condiciones iniciales

La función  $f$  depende sensiblemente de las condiciones iniciales si existe un  $\varepsilon > 0$  (constante de sensibilidad de  $f$ ) tal que para cualquier abierto no vacío  $U$  de  $X$ , existe un  $n$  número natural, tal que el diámetro de  $f^n(U)$  sea mayor o igual que  $\varepsilon$ .

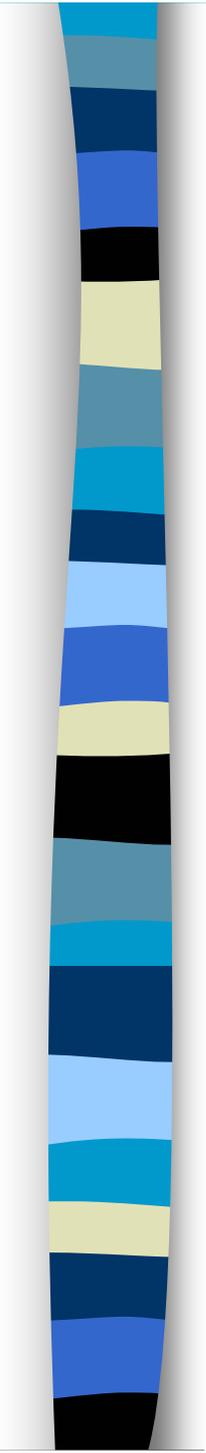
Sea una función de  $f: X \rightarrow X$ . La función  $f$  es **transitiva** si y sólo si para algún  $x$  de  $X$  la órbita de  $x$ , es decir, el conjunto  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$  es denso en  $X$ .

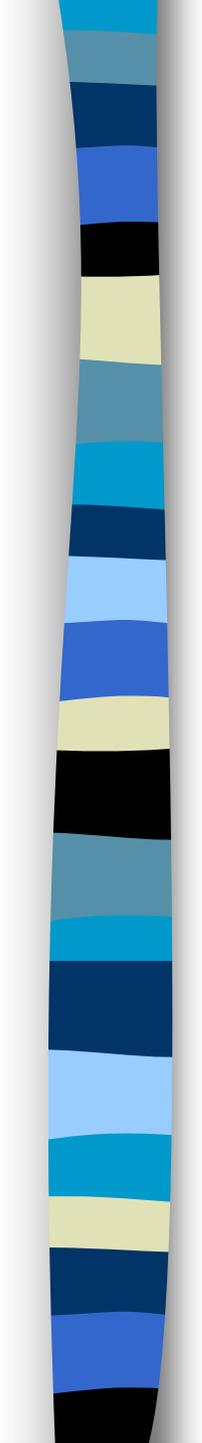
Sea una función de  $f: X \rightarrow X$ . La función  $f$  es **topológicamente transitiva** si para todo par de intervalos abiertos no vacíos de  $X$ ,  $U$  y  $V$ , existe un número natural  $n$ , tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

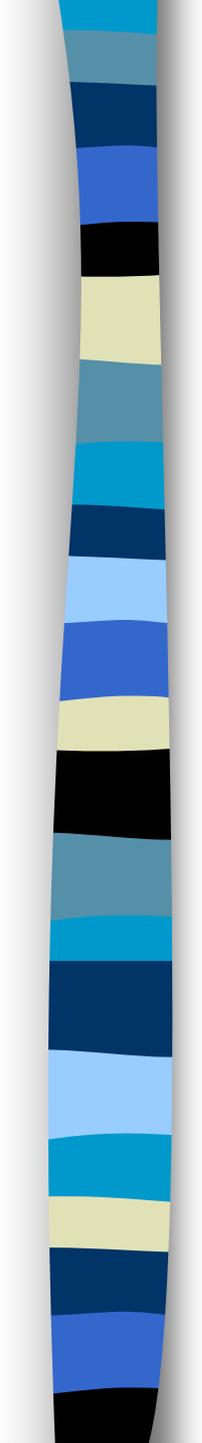
- 
- La frase **dependencia continua de las condiciones iniciales** fue acuñada por *J. Guckenheimer*.
  - Sea  $I$  un intervalo de  $\mathfrak{R}$ . Sea  $f$  una función definida de  $f: I \rightarrow I$ . Sea  $x$  un punto de  $I$ . El sistema presenta **dependencia sensible de las condiciones iniciales en  $x$** , si existe un  $\varepsilon > 0$  (constante de sensibilidad) tal que para todo  $\delta > 0$  existe un  $y$  en el intervalo  $I$ , y existe un  $n$  número natural, tal que si  $|x - y| < \delta$  entonces se verifica que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon$ .
  - Se dice que  $f$  tiene dependencia sensitiva de las condiciones iniciales si esto sucede en todo punto de  $I$ .

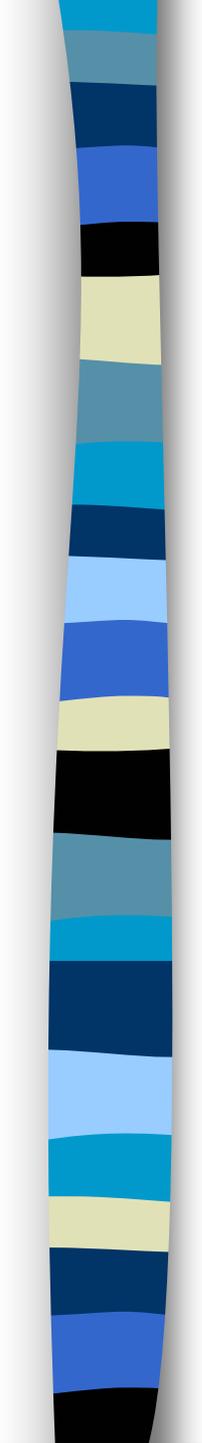


- Una función  $f$  tiene un **comportamiento fuertemente caótico** sobre un intervalo  $I$  si:
  1. tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales
  2. es transitiva
  3. tiene un subconjunto denso de puntos periódicos

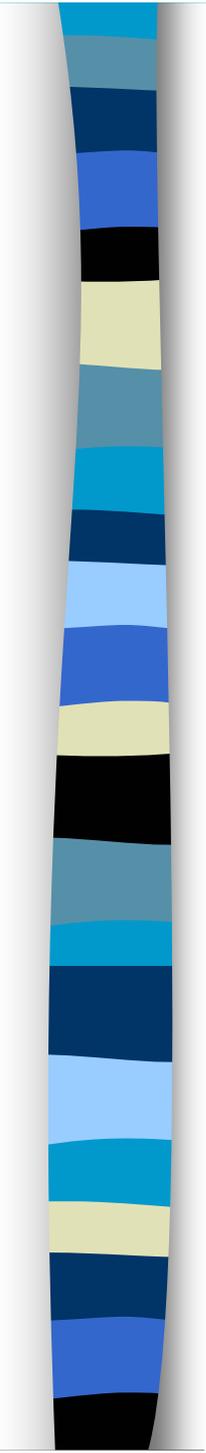
- 
- Sea una función de  $f: X \rightarrow X$ . La función  $f$  **depende sensiblemente de las condiciones iniciales** si existe un  $\varepsilon > 0$  (constante de sensibilidad de  $f$ ) tal que para cualquier abierto no vacío  $U$  de  $X$ , existe un  $n$  número natural, tal que el diámetro de  $f^n(U)$  sea mayor o igual que  $\varepsilon$ . Es una condición métrica.

- 
- El comportamiento es diferente según los valores del parámetro  $r$ .
  - El estudio de cómo cambia la respuesta del sistema dinámico según se modifica el parámetro se denomina **teoría de la bifurcación**.
  - Tenemos la ecuación:
$$f(r, x) = rx(1-x).$$
  - A pesar de su aspecto inocente esta parábola puede mostrarnos los fenómenos más interesantes que puede presentar un sistema dinámico.

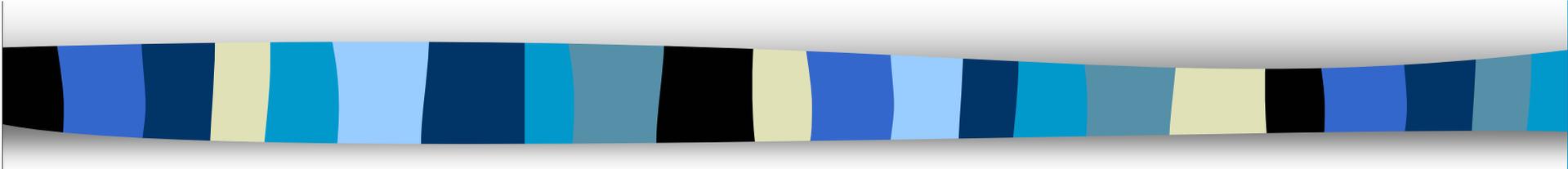
- 
- Han aparecido en la actualidad otras definiciones de sistemas caóticos aunque esta definición de *Devaney* es considerada como la formalización matemática de las ideas sobre el caos.
  - Observamos que la segunda condición es topológica, mientras que la tercera es métrica, luego esta definición es válida en un espacio métrico no finito.
  - Una serie de teoremas relacionan estas propiedades: *Banks* y otros prueban que en un espacio métrico la primera y la segunda propiedad implican la tercera.

- 
- Si  $f: X \rightarrow X$  es una aplicación continua de un espacio métrico completo, con base numerable no finito, entonces el que el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  sea denso en  $X$  es equivalente a que la función sea transitiva o sea topológicamente transitiva. Y como estas condiciones implican que la función depende sensiblemente de las condiciones iniciales, se deduce que es caótica.

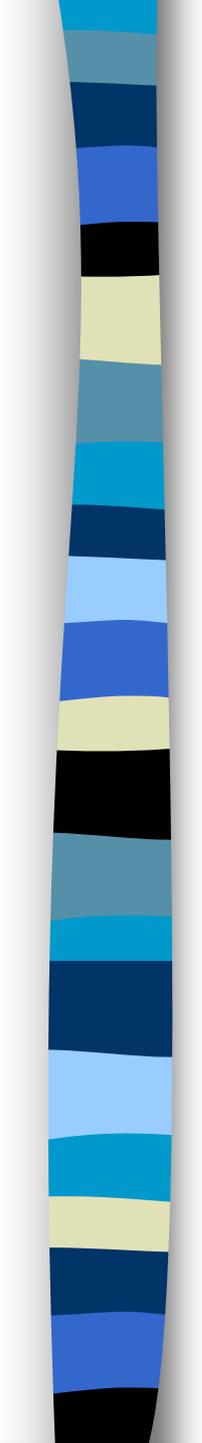
La demostración se encuentra en *On Devaney's Definition of Chaos*, de J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey.

- 
- En una conferencia pronunciada en Washington en 1972 para hacerse entender el meteorólogo americano del Instituto Tecnológico de Massachusetts, *Edward N. Lorenz* utilizó el término de **efecto mariposa** para explicar porqué el tiempo no es predecible, es decir para explicar que existía una dependencia sensible a las condiciones iniciales: “*El aleteo de una mariposa en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?*”
  - Al estudiar el fenómeno de la convección atmosférica simplificando y reduciendo el problema a una ecuación de tres ecuaciones diferenciales, que resuelta con ayuda de un ordenador y el método de *Runge-Kutta* para unos determinados valores de los parámetros aparece que existen tres puntos fijos, y que las órbitas se aproximan o repelen de dichos puntos. Aunque estas ecuaciones no proporcionan una descripción realista de la predicción meteorológica.

# *Ecuación Logística*

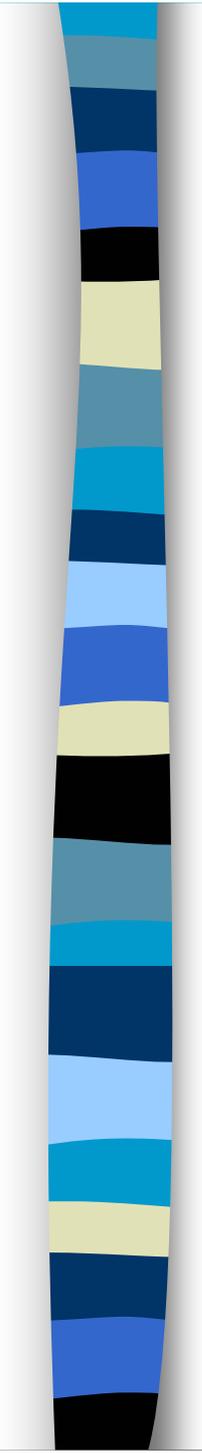


***Sistema dinámico  
discreto en los números  
reales***



# *Ecuación Logística*

- P. F. Verhulst en 1845 para el estudio de la dinámica de una población:
  - $X_{n+1} = r(x_n(1 - x_n))$
- Explica el crecimiento de una especie que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa
- $X$  es el tanto por uno de la población
- El término  $rx_n$  crecimiento de la población
- El término  $rx_n^2$  es no lineal
- Se consideran valores entre 0 y 1 de la población



# *Ecuación Logística*

\*  $X_{n+1} = f(X_n) = \lambda(X_n(1 - X_n))$

$$X_{n+1} = f_r(X_n) = \underbrace{r \cdot X_n}_{\text{Crecimiento de la población}} - \underbrace{r \cdot X_n^2}_{\text{Límite al crecimiento de la población.}}$$

$$0 \leq X_n \leq 1$$

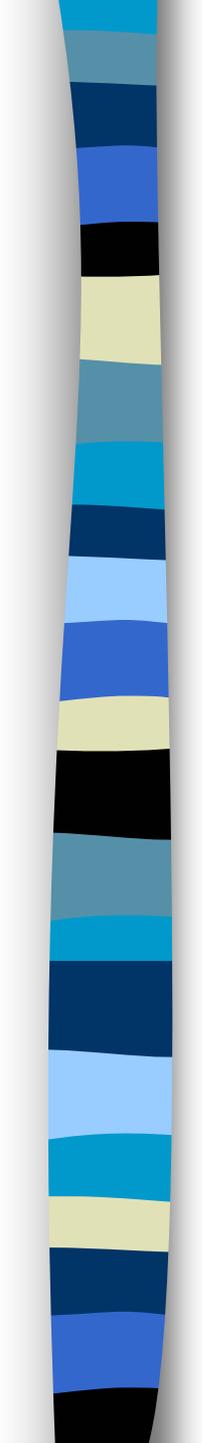
$$0 \leq r \leq 4$$

Crecimiento  
de la población

Límite al  
crecimiento de  
la población.

**NO LINEAL**

\* Dinámica de poblaciones. *Teoría de la bifurcación*



# *Ecuación Logística. Puntos fijos*

- Puntos fijos:  $x = f(x)$
- $X = r(X(1 - X))$
- $X = 0$ . El 0 es un punto fijo.
- $X = 1 - 1/r$
- Para  $x = 1$ , en la primera iteración se transforma en 0.
- Para valores de  $r$ ,  $1 < r < 3$  comprobamos, gráficamente y haciendo la prueba, que tenemos otro punto fijo:  $x_\lambda = 1 - 1/r$  en  $(0, 1)$

# *Ecuación Logística*

\* Puntos fijos

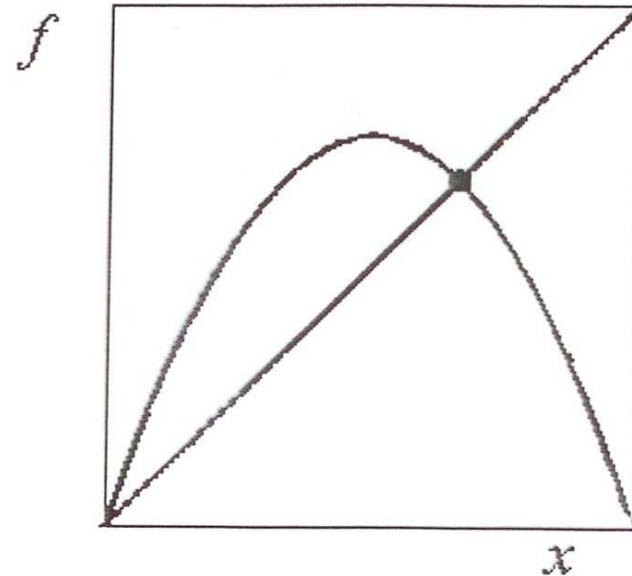
$$X_{PF} = f(X_{PF})$$

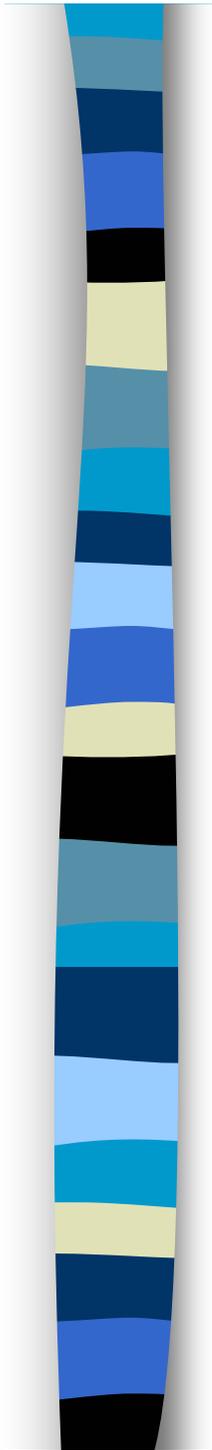
Estable

ATRACTOR

Ejemplo:

$$X_{PF} = rX_{PF}(1 - X_{PF}) \Rightarrow \begin{cases} X_{PF} = 0 \\ X_{PF} = 1 - \frac{1}{r} \end{cases}$$





- Si el módulo de la derivada en un punto fijo es menor que 1, entonces el punto es asintóticamente estable. Si mayor, es inestable.
- $f'(x) = r - 2rx$
- $f'(0) = r$ . Si  $r < 1$ , entonces 0 es un atractor.
- $f'(1-1/r) = 2 - r$ . Para  $1 < r < 3$ , es un punto fijo estable.

# *Ecuación Logística*

***Si  $r < 1$ .  
Extinción.  
El 0 es un punto  
fijo estable.***

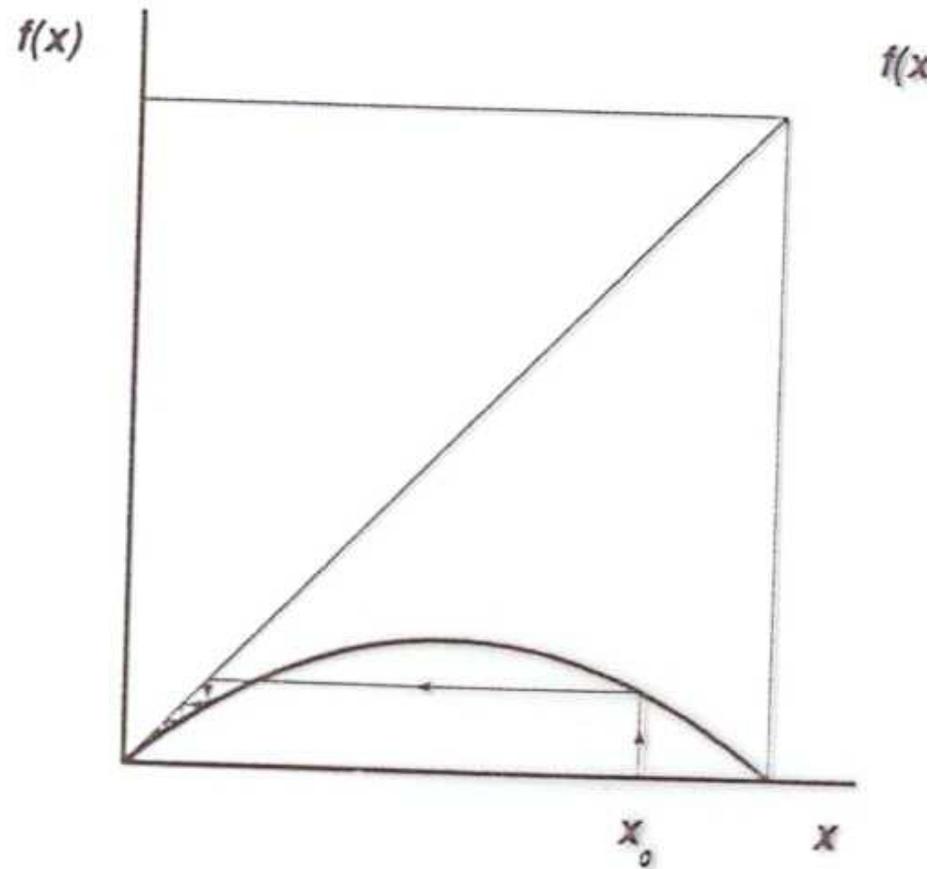


Fig. 7 ( $r=0.9$ )

# *Ecuación Logística*

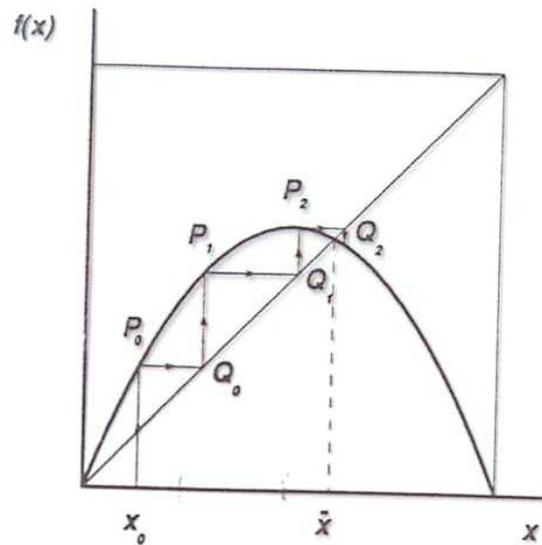


Fig. 1 ( $r=2.5$ ).

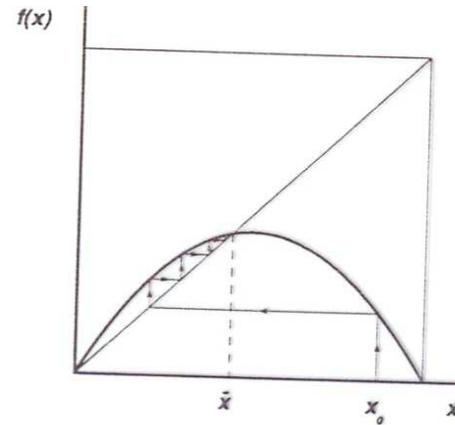


Fig. 9 ( $r=1.8$ )

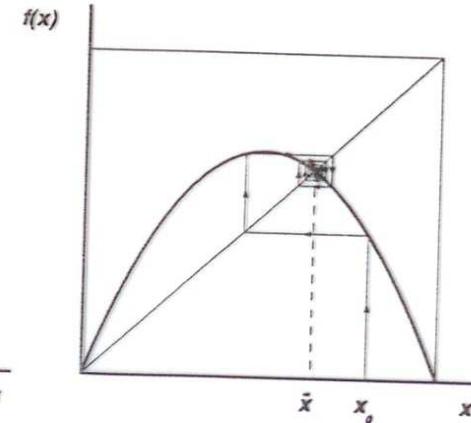


Fig. 10 ( $r=2.0$ )

**Si  $1 < r < 3$ , el punto fijo  $1-1/r$  es estable.**

# *Ecuación Logística*

Para  $1 < \lambda \leq 2$  la sucesión que tiende al punto fijo es monótona, para  $2 < \lambda < 3$ , la sucesión no es monótona.

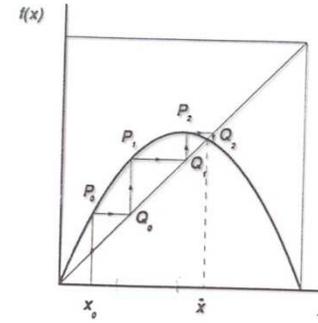


Fig. 1 ( $r=2.5$ ).

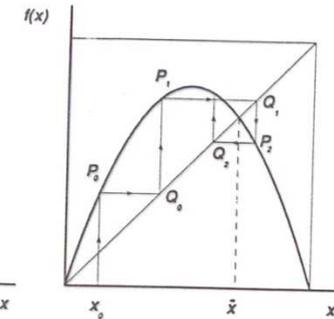


Fig. 2 ( $r=3.25$ ).

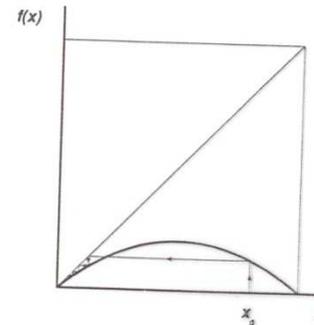


Fig. 7 ( $r=0.9$ )

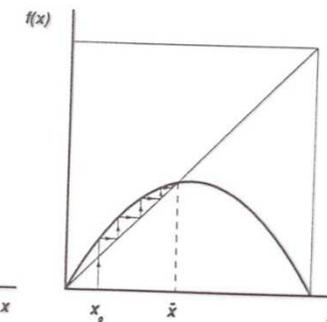


Fig. 8 ( $r=1.8$ )

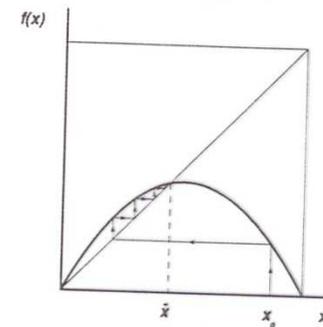


Fig. 9 ( $r=1.8$ )

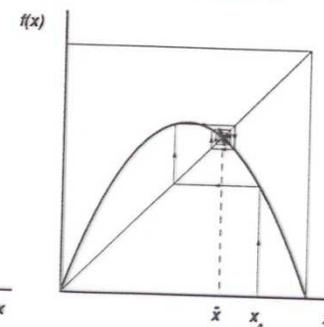
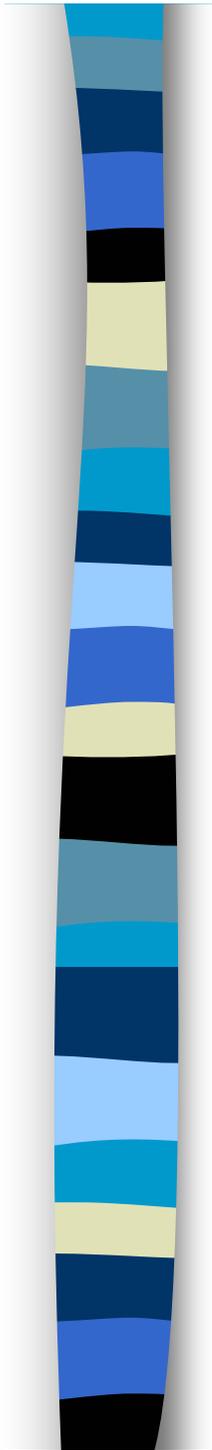


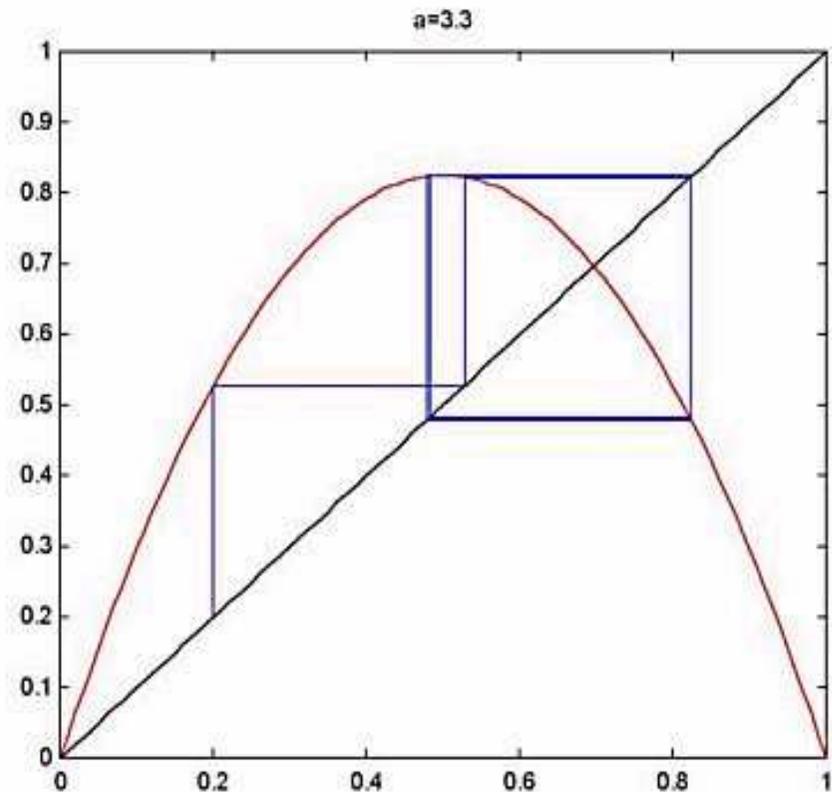
Fig. 10 ( $r=2.0$ )

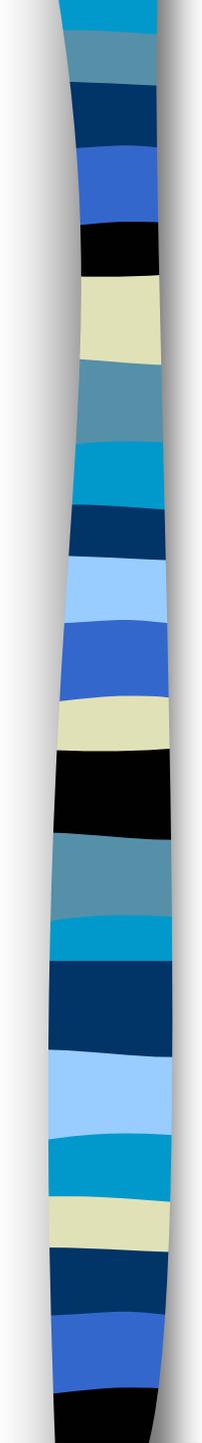


- Para  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6} \approx 3.4494$  tenemos órbitas de periodo dos.
- Para  $\lambda = 3$  el punto es no hiperbólico.
- Para  $\lambda > 3$  tanto  $0$  como  $1 - 1/r$  es un punto fijo inestable.

# *Ecuación Logística*

**Si  $3 < r < 3,449$ ,  
el punto fijo  $1-1/r$   
y el  $0$  son  
inestables.  
Oscila entre dos  
valores.**





## *Ecuación Logística. Resumen del comportamiento dinámico*

- Para  $r < 1$ . El 0 es un punto fijo estable, luego tenemos la extinción.
- $1 < r < 3$ . El 0 es inestable. Y  $1-1/r$  es estable. La población se estabiliza
- $3 < r < 3,449$ . Ambos son inestables, y la población oscila entre dos valores.
- $3,449 < r < 3,56994546$ . Oscila entre 4, 8, 16... valores. Cascada de bifurcaciones por duplicación del periodo
- $r > 3,56994546$ . Caos

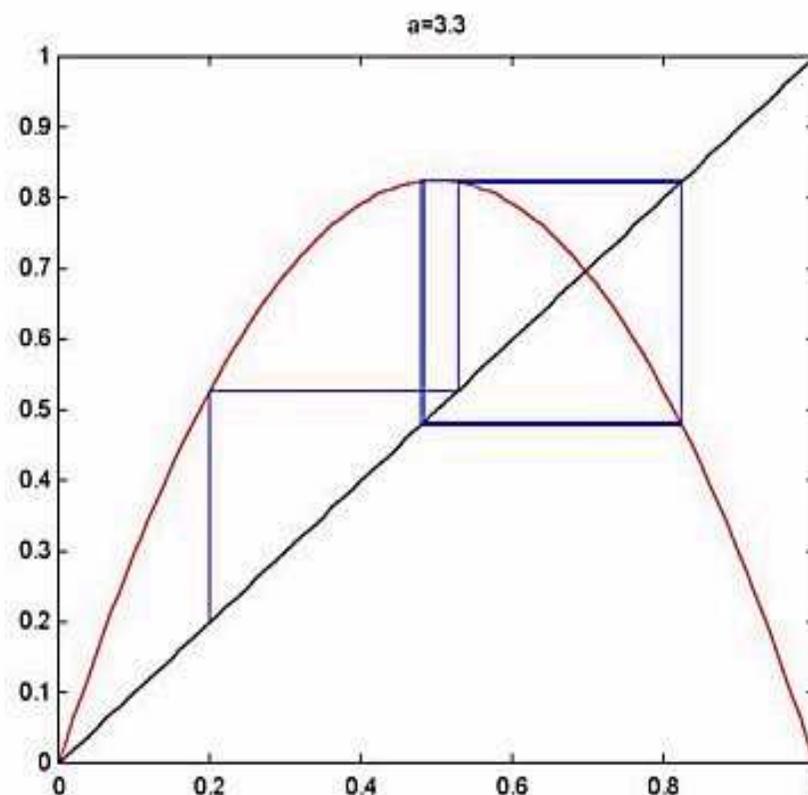
# *Ecuación Logística*

**Órbitas  
periódicas de  
periodo dos:**

$$x = f(f(x)).$$

**Estudiamos  $f^2(\lambda, x)$   
y vemos que tiene  
dos puntos fijos  $p\lambda$   
y  $q\lambda$**

**asintóticamente  
estables, y que  
nuestra ecuación  
tiene una única  
órbita de periodo  
dos asintóticamente  
estable, pues  $f(p\lambda) =$   
 $q\lambda$  y  $f(q\lambda) = p\lambda$ .**



## \* Órbitas periódicas

Periodo P:  $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0$

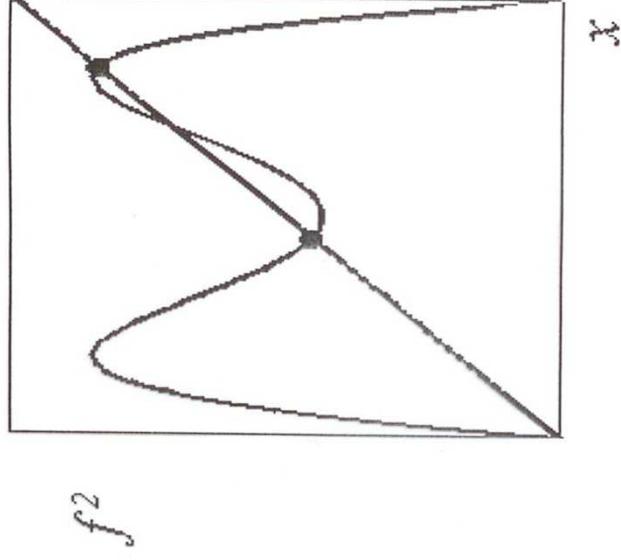
$$x_{0P} = f^P(x_{0P})$$

## ATRACTOR

Ejemplo:

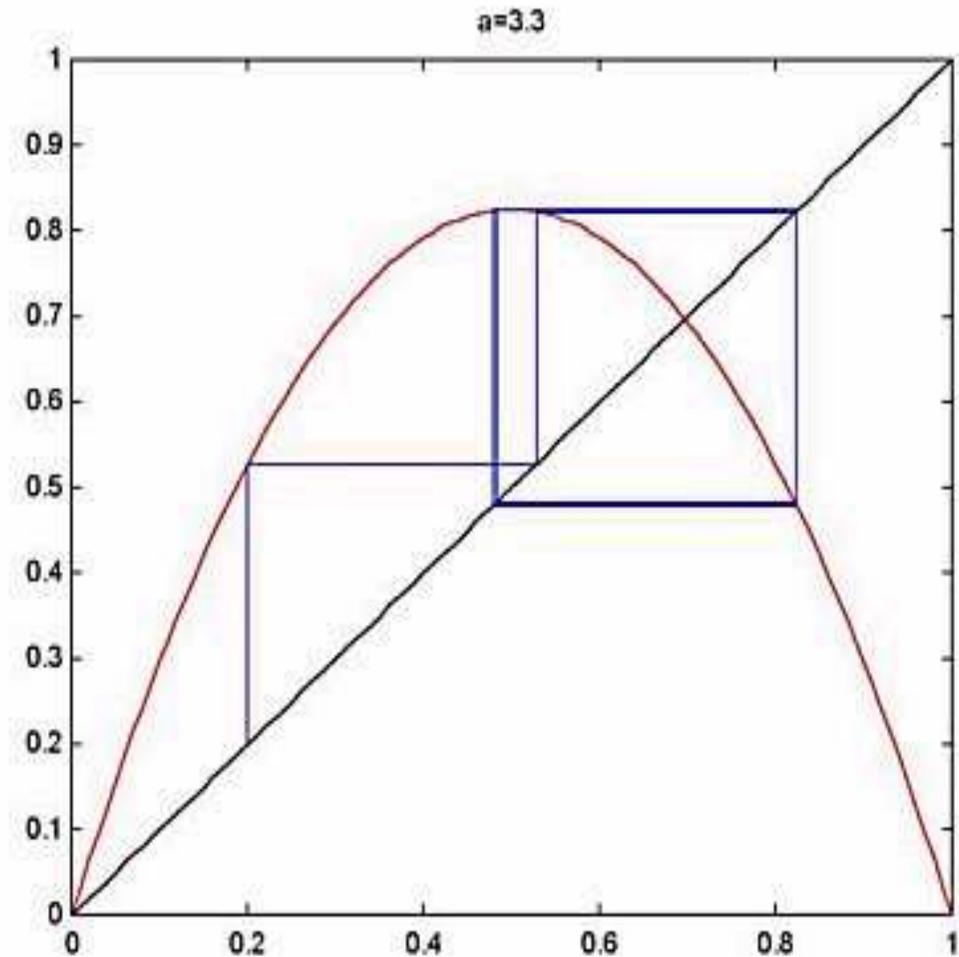
OP de periodo 2  $\rightarrow$  Raíces polinomio  $f^2(x) = f(f(x))$

$$x = r^2 x(1-x)[1-rx(1-x)]$$



# *Ecuación Logística*

- Punto de periodo dos





# Ecuación *Logística*

- Aparecen órbitas de periodo cuatro, ocho,...

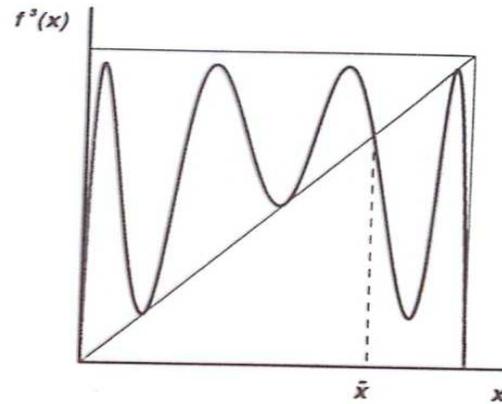


Fig. 16 ( $r=3.824$ )

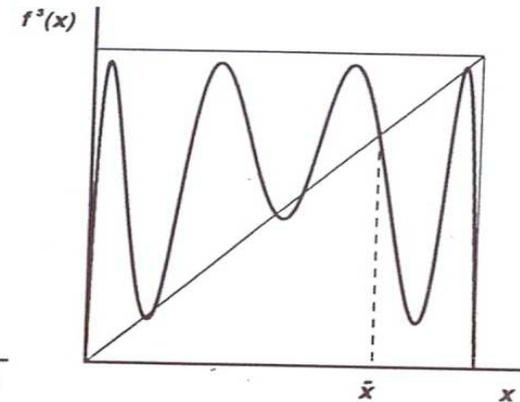
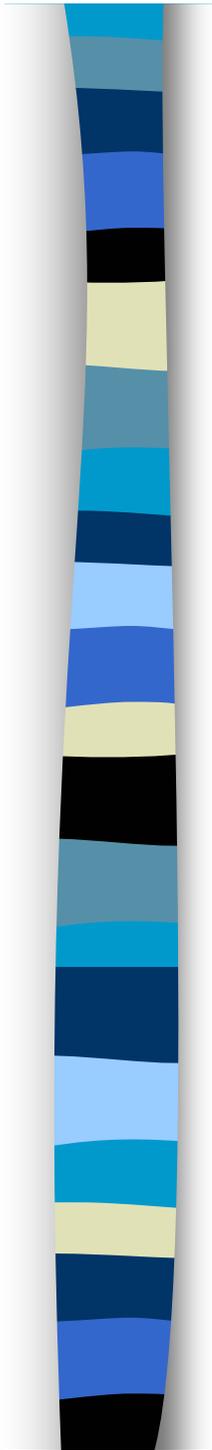


Fig. 17 ( $r=3.848$ )

$n^{\circ}$ iteraciones	$3.9x(1-x)$	$3.9x - 3.9x^2$
0	0.1853	0.1853
10	0.190692879	0.190692879
25	0.761525288	0.761524933
40	0.915228703	0.916312623
45	0.160820806	0.188990008
50	0.905670612	0.840178636
51	0.333182281	0.523686132
52	0.866470210	0.972811972
53	0.451228382	0.103150473
54	0.965723184	0.360790766
55	0.129097472	0.899421078

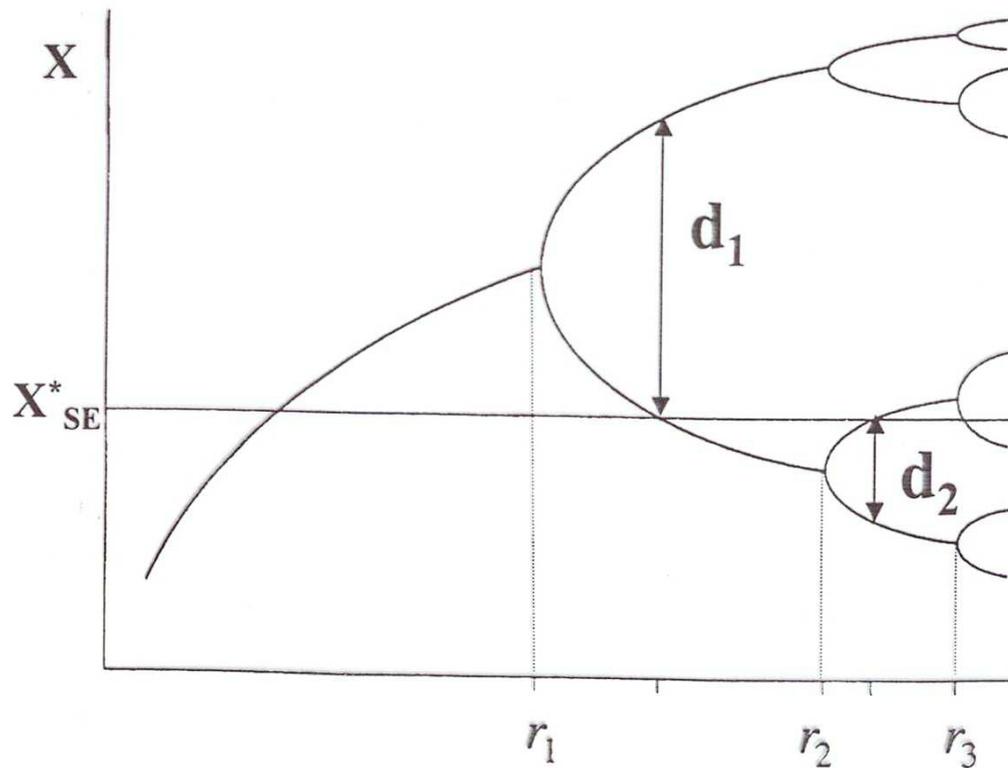
T-9



- Tenemos una sucesión infinita de valores de  $r$ , monótona y acotada por 4, tales que en cada uno de ellos se duplica el periodo.
- Comentamos los números de *Feigenbaum*, encontrados en 1978, y probados por *Collet* (1980) y *Landford* (1982).
- Tenemos el teorema de *Li-Yorke* y el orden de *Sharkovskii* que nos dicen que si hay órbitas de periodo tres hay órbitas de cualquier periodo.
- Para  $r$  mayor o igual a cuatro tenemos sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, el conjunto de los puntos periódicos es denso, tenemos caos.

# *Ecuación Logística*

\* Números de Feigenbaum (1978)



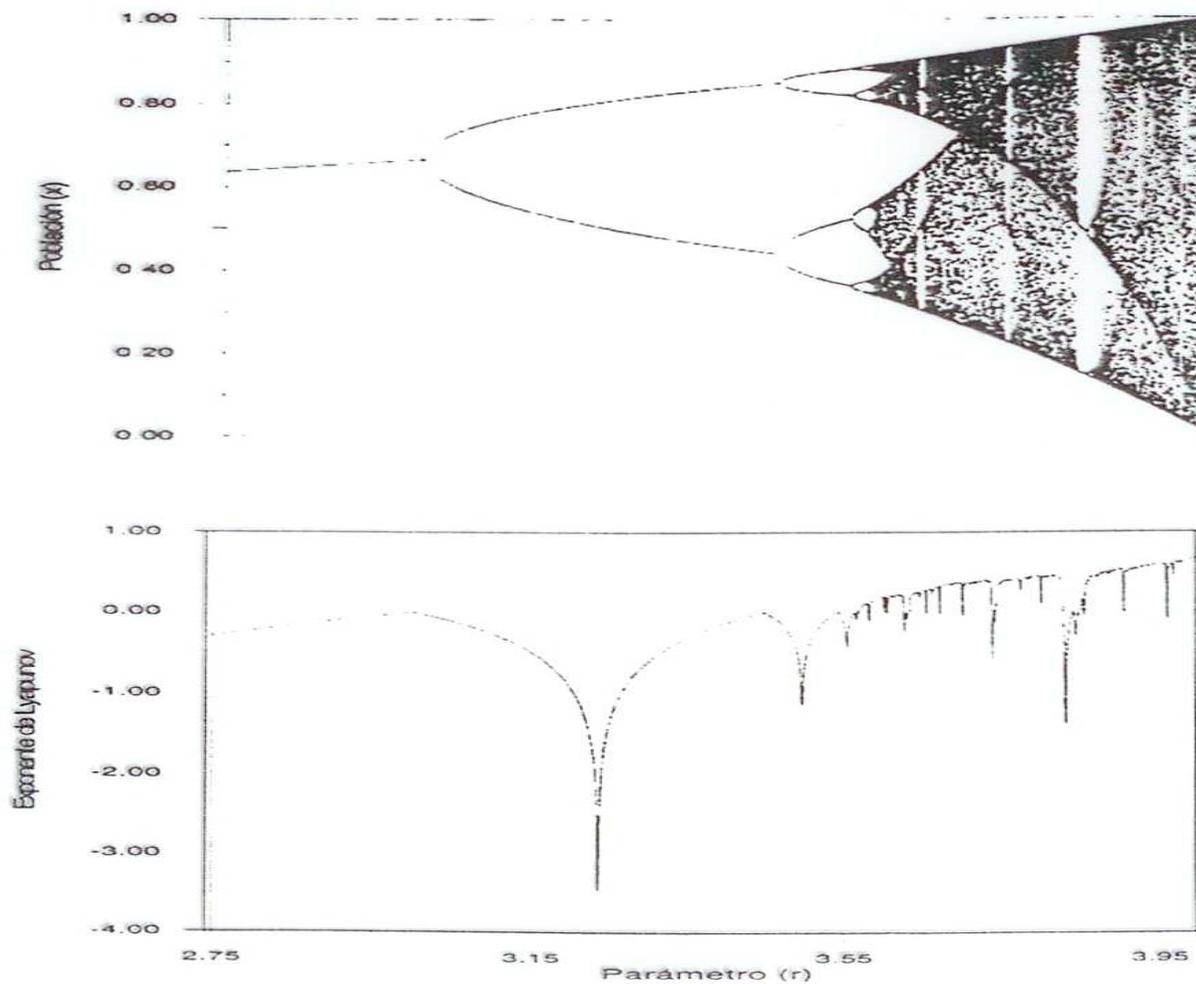
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

$$\delta = 4.669201609\dots$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}$$

$$\alpha = 2.50298\dots$$

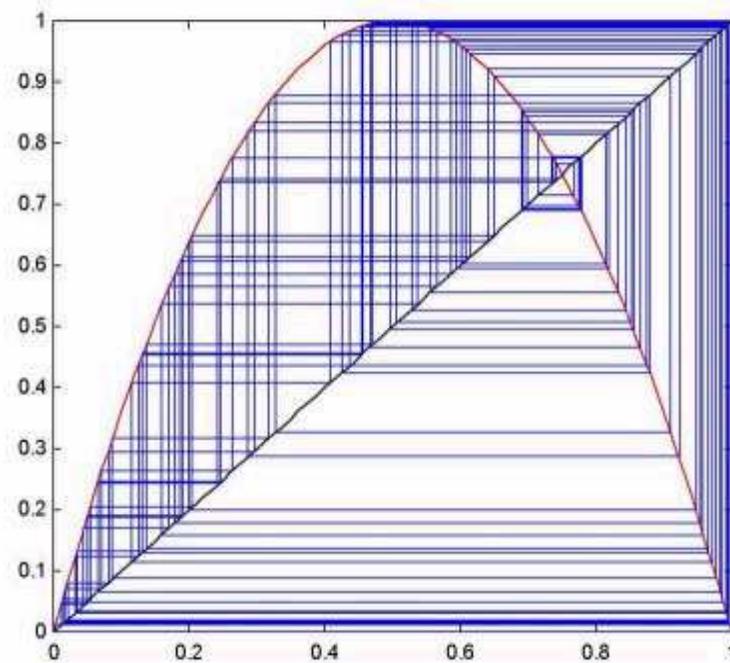
# *Ecuación Logística*

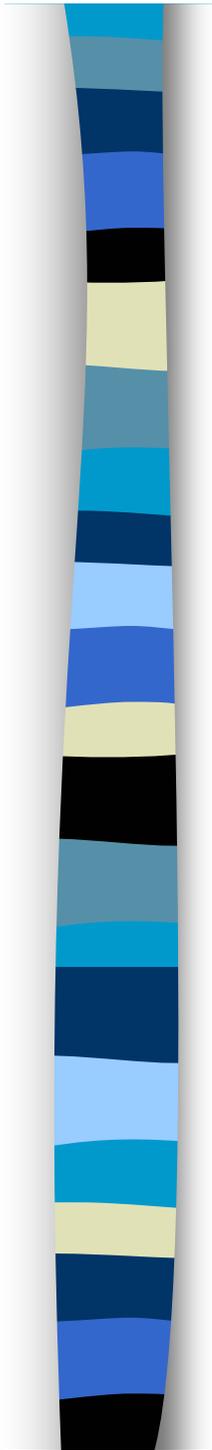




# *Ecuación Logística*

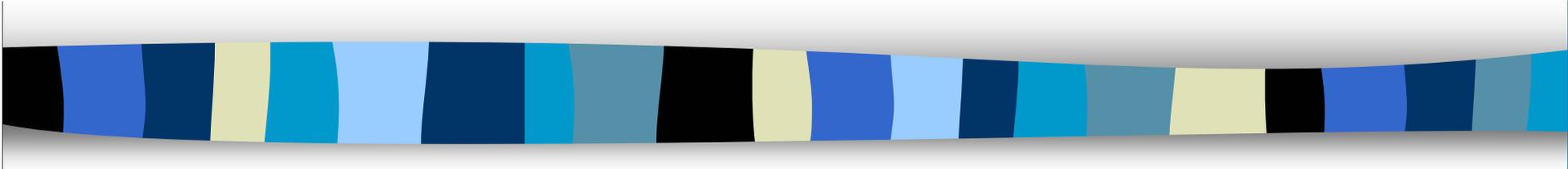
***Si  $r > 3,56994546$   
CAOS.***





- Para  $r=1$  el intervalo  $[0, 1]$  es un atractor.
- Para valores mayores que  $2+\sqrt{5}$  se obtiene un conjunto de *Cantor*.
- *Devaney* define conjunto de *Cantor* como un conjunto cerrado, totalmente inconexo (si no contiene ningún intervalo), y un subconjunto perfecto de  $I$  (si todos sus puntos son de acumulación de otros puntos del conjunto).
- Podemos estudiar ahora la ecuación logística por conjugación topológica mediante la aplicación tienda (estirar y doblar) y la función sierra (estirar y cortar) para comprobar que se dan las condiciones del caos.
- Probamos que  $T^k(x)=T(S^{k-1}(x))$ , y que  $S(x)=Frac(2x)$ .

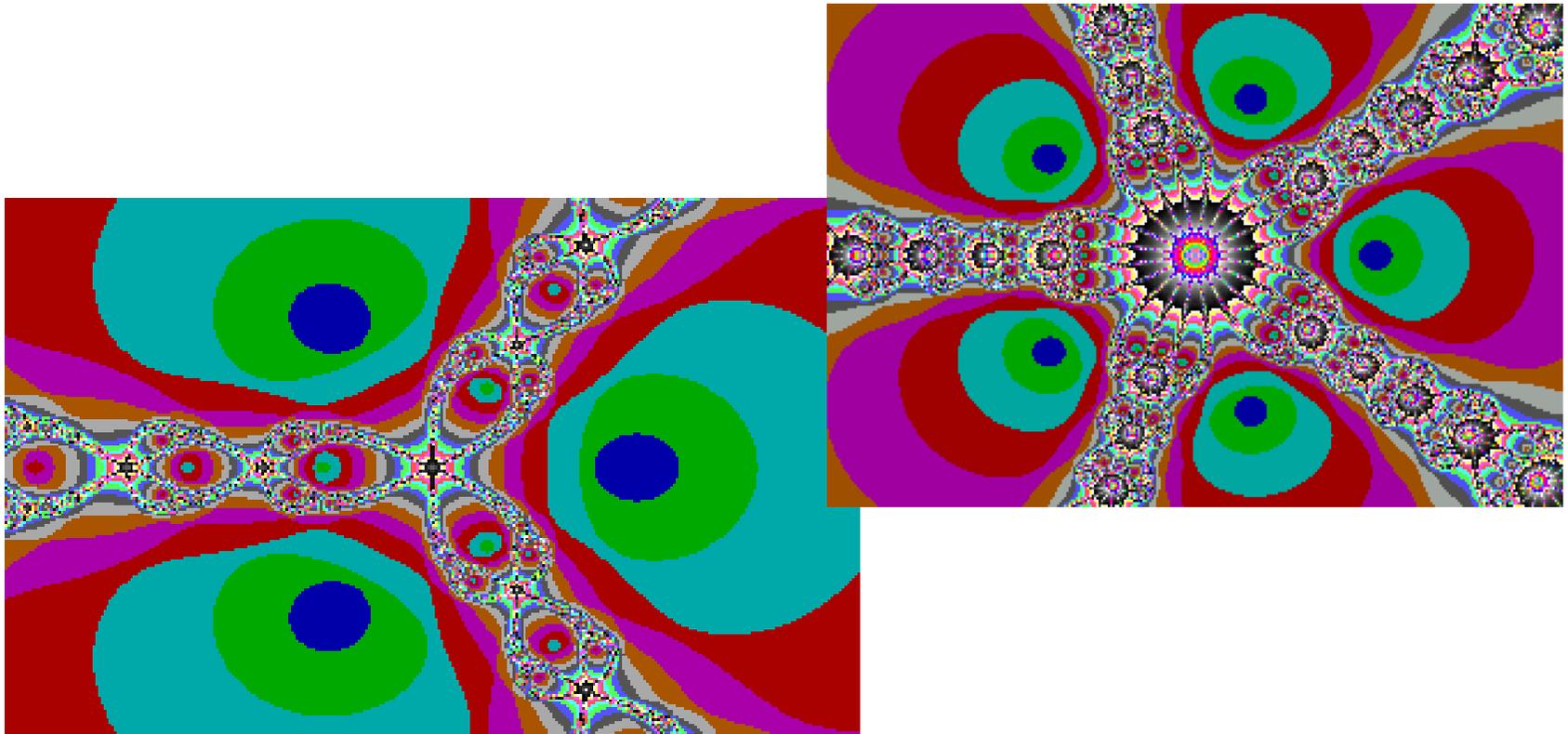
# *Método de Newton*

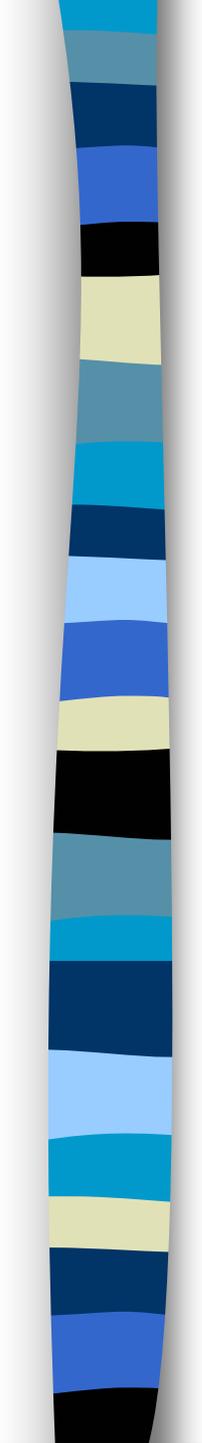


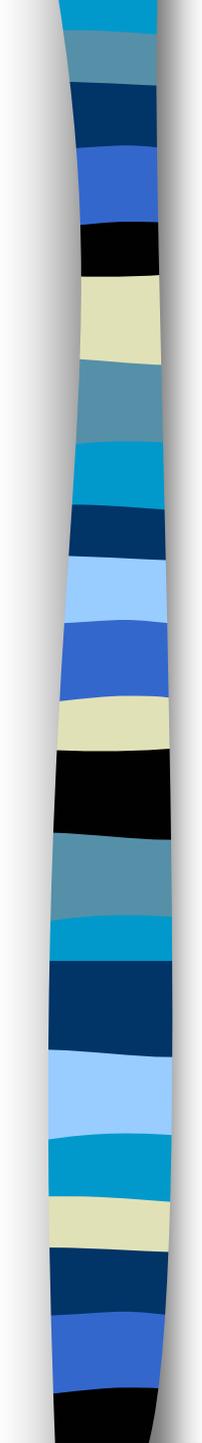
***Sistema dinámico  
discreto en el campo  
complejo***

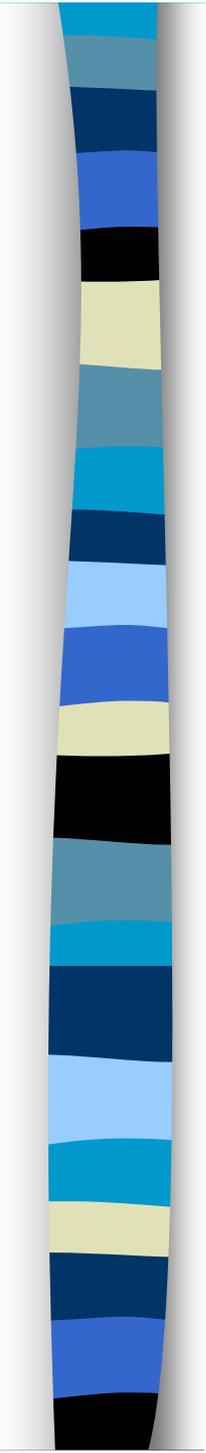
# *Método de Newton*

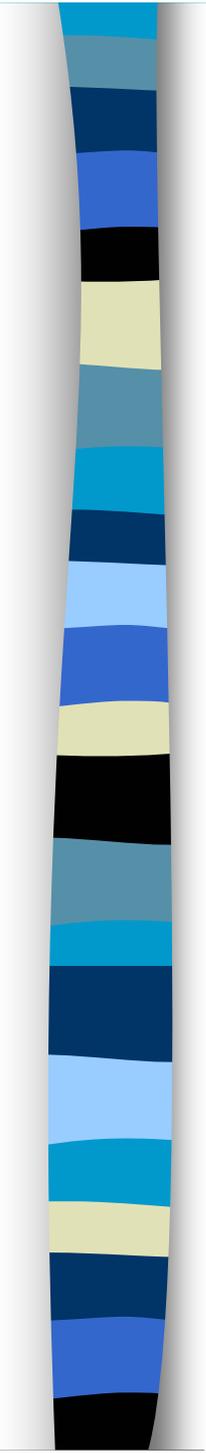
$$f(z) = z^p - 1; N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

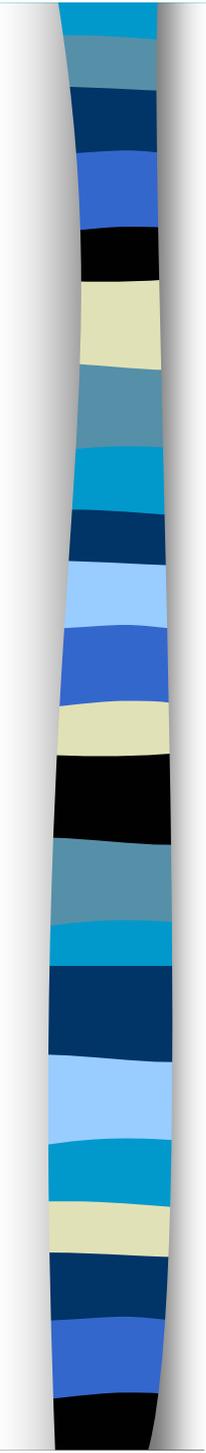


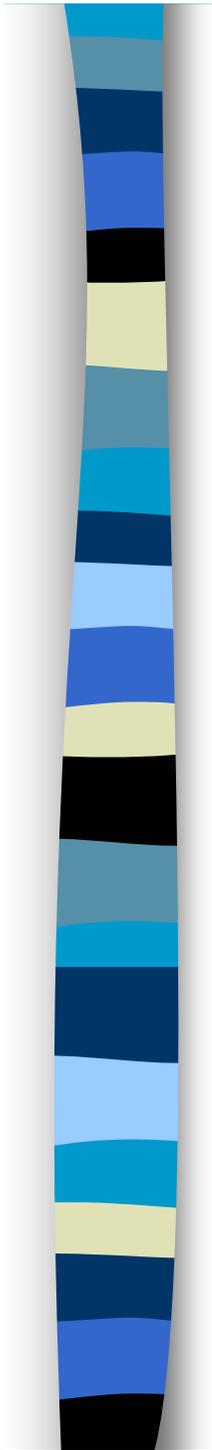
- 
- Se denomina **órbita** al conjunto de puntos, o a la sucesión formada por ellos,  $z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots$
  - Un **punto fijo** verifica:  $z=f(z)$ .
  - Un **punto periódico**:  $z=f^n(z)$ .
  - Un punto fijo es un **atractor** si  $|f'(z)|<1$ , y es **repulsor o fuente** si  $|f'(z)|>1$ .
  - Un punto periódico es un **punto periódico atractor** si  $|(f^n)'(z)|<1$ , y **punto periódico repulsor** si  $|(f^n)'(z)|>1$ .

- 
- En general si  $(X, f)$  es un sistema dinámico,  $f$  es diferenciable y  $p$  es un punto fijo,
  - si  $|f'(p)| < 1$  entonces la cuenca de atracción de  $p$  contiene a algún entorno del punto, luego  $p$  es un atractor,
  - y si  $|f'(p)| > 1$  entonces  $p$  es un repulsor o fuente.
  - De forma parecida se define un punto periódico atractor o un punto periódico repulsor.
  - Si  $|f'(p)| = 1$  el punto es **no hiperbólico**.

- 
- El caso más sencillo de sistema dinámico es el caso lineal. Sea el sistema dinámico  $(X, f)$  con  $X$  un subconjunto del plano complejo. Sea  $f(z)=a \cdot z$ , donde  $a$  es también complejo.
  - El origen es un punto fijo.
  - Si  $|a|<1$  entonces la cuenca de atracción del origen es todo el plano complejo.
  - Si  $|a|>1$  la cuenca de atracción del punto del infinito es todo el plano complejo excepto el origen.
  - Si  $|a|=1$ , y es distinto de uno, entonces existe un  $\theta \in (0, 2\pi)$  tal que  $a=e^{i\theta}$ .

- 
- Seguimos estudiando el caso  $f(z)=az$ , y si  $|a|=1$  el punto es no hiperbólico.
  - Si  $\theta=\pi q$ , con  $q$  un número racional entonces todos los puntos son periódicos, pero si  $\theta\neq\pi q$  entonces la órbita de todo punto es densa sobre la circunferencia de centro el origen.

- 
- Estudiemos el sistema dinámico formado por un punto que se mueve sobre una circunferencia. Para simplificar podemos considerar una circunferencia de longitud uno, y un punto que se mueva según la ley  $f(x)=10x$ , donde  $x$  es el ángulo. Este sistema dinámico es muy sencillo y determinista. Para calcular donde va el punto basta multiplicar por 10 y eliminar el primer dígito. Observamos que dos condiciones iniciales próximas acaban siguiendo itinerarios diferentes. Supongamos el número  $\pi$ , y otro número  $\pi'$  que coincida con  $\pi$  en sus primeros mil millones de decimales, y luego valgan cero.  $\pi$  y  $\pi'$  son muy próximos, pero al cabo de  $n$  igual a mil millones de iteraciones sus transformadas se separan. Además todos los números racionales son periódicos, que es un conjunto denso. De esta forma podemos entender como mediante una ley determinista podemos tener un sistema caótico.



- Estudiamos a continuación la dinámica de  $f(z)=z^2$ . El origen es un punto fijo.
- Su cuenca de atracción la forman todos los puntos que distan menos de uno del origen.
- El punto del infinito es otro punto fijo, y su cuenca de atracción la forman todos los puntos que disten más de uno del origen.
- El punto  $z=1$  es otro punto fijo.
- Si consideramos el conjunto  $J$  de los puntos de centro el origen y radio uno, observamos que es la separatriz de ambas cuencas. Es invariante. Pero si el punto se mueve sobre  $J$  su comportamiento es altamente inestable pues  $f(e^{i\theta})=e^{i2\theta}$ . Volvemos a encontrarnos con un caso similar al  $f(x)=10x$  que siendo determinista es caótico.

Dynamics of  $z \rightarrow z^2$

$z$	length	angle	length	angle	length	angle
$z^2$	0.8	$10^\circ$	1.0	$10^\circ$	1.5	$50^\circ$
$z^4$	0.64	$20^\circ$	1.0	$20^\circ$	2.25	$100^\circ$
$z^8$	0.4096	$40^\circ$	1.0	$40^\circ$	5.06	$200^\circ$
$z^{16}$	0.1678	$80^\circ$	1.0	$80^\circ$	25.63	$40^\circ$
$z^{32}$	0.0281	$160^\circ$	1.0	$160^\circ$	656.90	$80^\circ$
	0.0008	$320^\circ$	1.0	$320^\circ$	431439.89	$160^\circ$

Table 13.10 : The iteration of three initial points using the simple squaring operation  $z \rightarrow z^2$ .

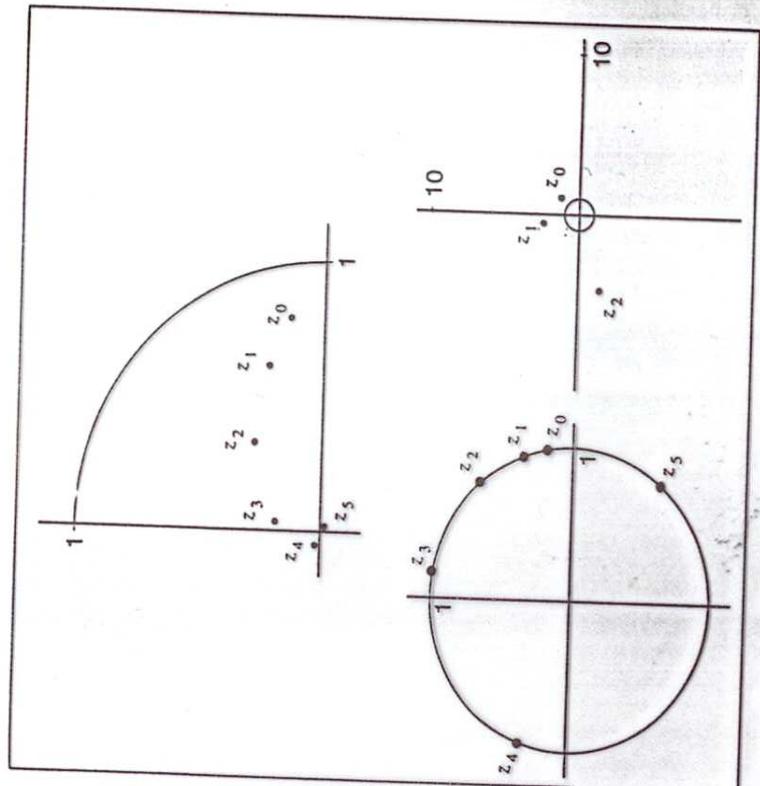
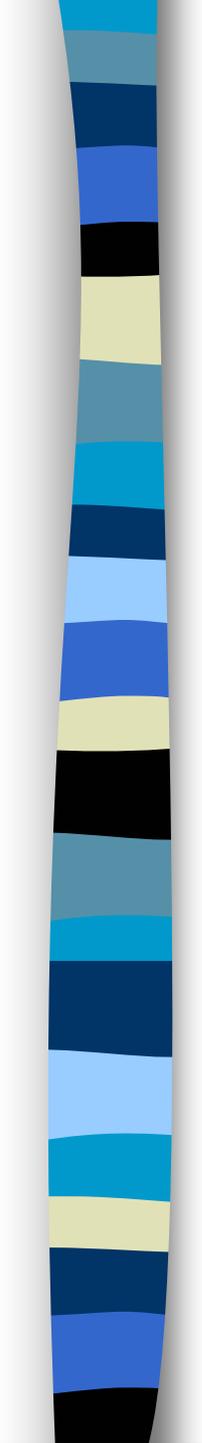


Figure 13.11 : The three initial points from table 13.10 are iterated.

- 
- Si estudiamos la dinámica de la función  $f(z)=z^2-1$ , y queremos calcular sus raíces por el método de Newton:

$$z - f(z)/f'(z) = Np(z) = (z^2 + 1)/2z.$$

- Las raíces  $\{1, -1\}$  son puntos fijos.
- Todos los puntos  $\text{Re}(z) > 0$  están en la cuenca de atracción de 1, y todos los puntos  $\text{Re}(z) < 0$  están en la cuenca de  $-1$ .
- La recta  $\text{Re}(z) = 0$  es la separatriz.
- La aplicación sobre este eje también es caótica. Si el polinomio es de grado tres, o de grado cuatro se pueden colorear las cuencas de atracción. Vemos que ahora la separatriz no es una recta nítida. Es un conjunto con estructura geométrica complicada. Es una estructura fractal.

# OTROS EJEMPLOS

## Mapa de Newton

\* Cálculo de ceros de una ecuación

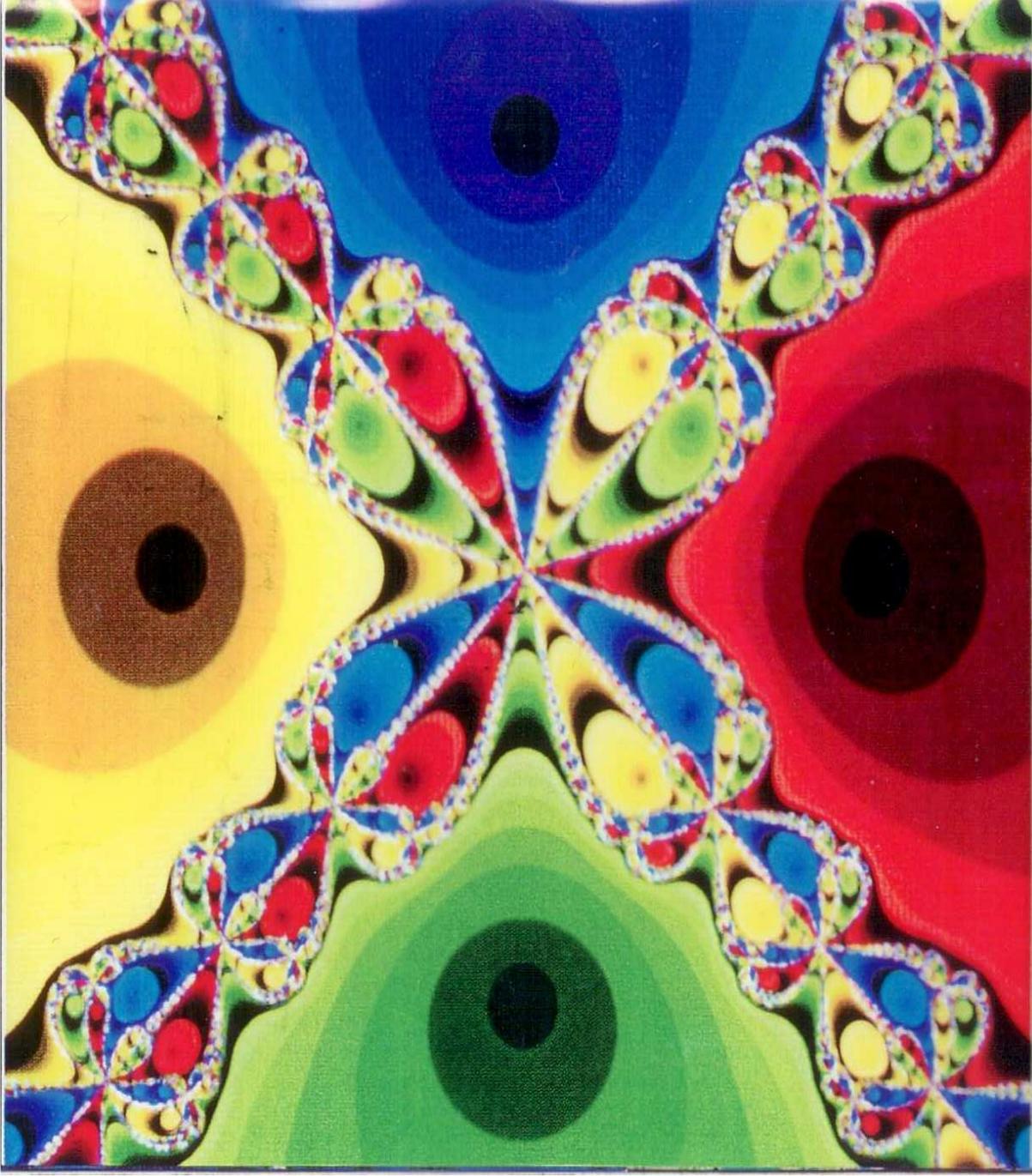
\* Ejemplos:

**Polinomio de grado 2:**

$$Z^2 - 1 = 0 \quad Z = \pm 1$$

**Polinomio de grado 4:**

$$Z^4 - 1 = 0 \quad Z = \pm 1, \pm i$$



LOS LÍMITES COMPLICADOS DEL MÉTODO DE NEWTON. La fuerza de atracción de cuatro puntos —en los cuatro agujeros negros— crea «cuencas de atracción», cada una de color distinto, con un complejo límite fractal. La imagen representa el modo como el método de Newton, para resolver ecuaciones, lleva de puntos iniciales diferentes a una de cuatro soluciones posibles (en este caso la ecuación es  $x^4 - 1 = 0$ ).

## Desiderata and Suggestions.

BY PROFESSOR CAYLEY, Cambridge, England.

### No. 3.—THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

THE Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for the solution of a numerical equation by successive approximations, relates to an equation  $f(x) = 0$ , with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof  $\alpha$  by means of an assumed approximate real value  $\xi$  satisfying prescribed conditions: we then, from  $\xi$ , derive a nearer approximate value  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ; and thence, in like manner,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  approximating more and more nearly to the required root  $\alpha$ .

In connexion herewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.

Take  $f(x)$ , a given rational and integral function of  $x$ , with real or imaginary coefficients;  $\xi$ , a given real or imaginary value, and from this derive  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ , and thence  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  each from the preceding one by the like formula.

A given imaginary quantity  $x + iy$  may be represented by a point the coordinates of which are  $(x, y)$ : the roots of the equation are thus represented by given points  $A, B, C, \dots$ , and the values  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  by points  $P, P_1, P_2, \dots$  the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that  $P$  being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point  $A$ ; anywhere within another region at the point  $B$ ; and so for the several points representing the roots of the equation.

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

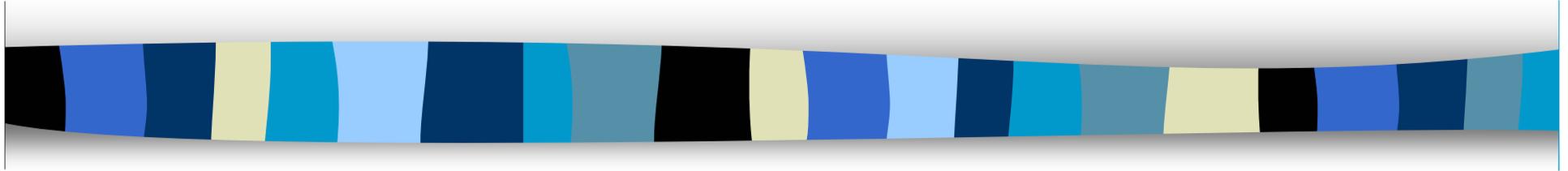
CAMBRIDGE, March 3d, 1879.

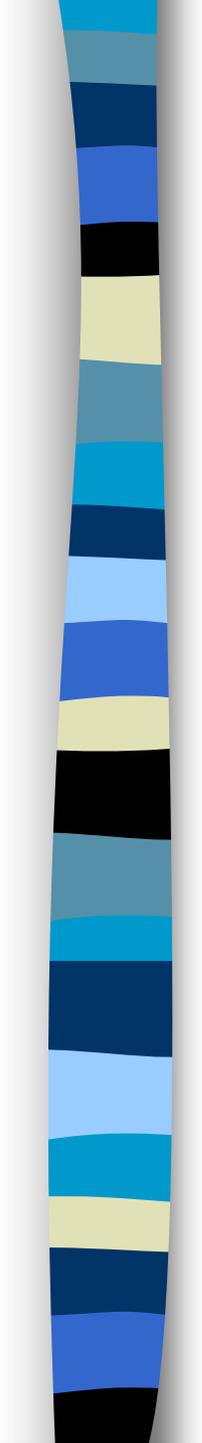
28

27

Figure 13.3: The original paper entitled *The Newton-Fourier Imaginary Problem* of Sir Arthur Cayley, 1879.

# *Conjuntos de Juliá y de Fatou*





# *Conjuntos de Juliá y de Fatou*

- Se define el **conjunto de Julia** de  $f$ :  $J(f)$  como la clausura del conjunto de los puntos periódicos repulsores de  $f$ .
- Pueden ser de notable belleza y complejidad, pueden tener estructura fractal. Se caracterizan por ser la clausura de los puntos a los que se llega por infinitas iteraciones, por lo que podemos usar los ordenadores para representarlos. Pero por otra parte con estos conjuntos llegamos a contradicciones. Su estudio es una parte de la dinámica caótica.
- El **conjunto de Fatou** está formado por aquellos puntos donde se puede predecir la dinámica. El conjunto de **Julia** está formado por los puntos de dinámica caótica.

# MAPA DE MANDELBROT

- Julia y Fatou

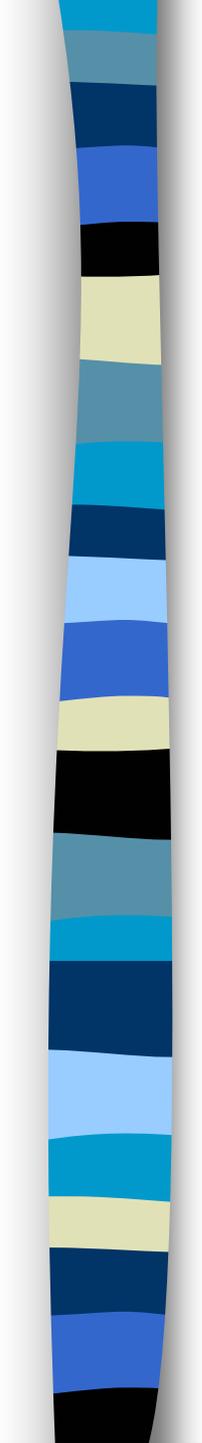
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad Z_n, C \in \mathbb{C}$$

- ¿Qué órbitas escapan al infinito?

Para  $C=0$

$$Z_0 = 2, \quad Z_1 = 4, \quad Z_2 = 16, \dots \rightarrow \infty$$

$$Z_0 = 0.1, \quad Z_1 = 0.01, \quad Z_2 = 0.0001, \dots \rightarrow 0$$



# *Conjuntos de Juliá y de Fatou*

- Estudiamos  $f(z)=z^2+C$ .
- Para cada valor de  $C$  tenemos un conjunto de *Julia* asociado.
- Unas veces estos conjuntos son conexos. Otras veces son totalmente inconexos.
- Se llama **conjunto de Mandelbrot** al conjunto de valores de  $C$  para los que el conjunto de *Julia* es conexo.

# Conjuntos de Juliá y de Fatou

- Para cada valor de  $C$  tenemos un conjunto de *Julia* asociado

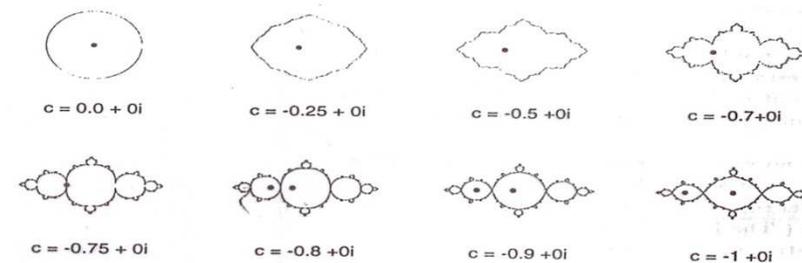


Figure 14.17 : Starting from the Julia set for  $c = 0$  (the circle) we decrease the parameter to  $c = -1$ . The Julia set develops a pinching point for  $c = -0.75$  and is the boundary of a period-2 attractor for the remaining plots.

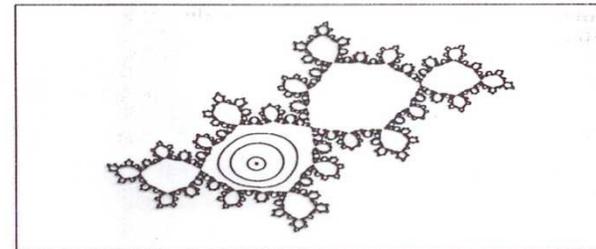


Figure 14.18 : The Julia sets that belongs to  $c \approx -0.3905407802 - 0.5867879073i$  is a Siegel disk. With  $\alpha$  being the golden mean, use  $\phi = 2\pi\alpha \approx 3.883222077$  in eqn. (14.4) on page 430 to obtain the real and imaginary components of  $c$ . The dynamics near the fixed point is characterized by invariant curves on which the iteration acts like a rotation by the angle  $\alpha$ .

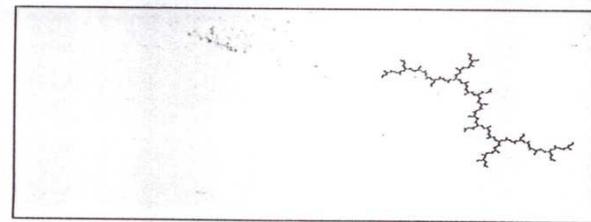


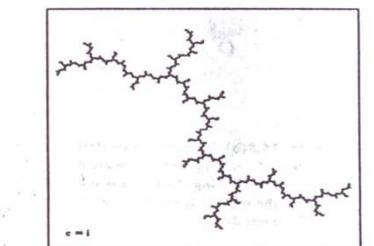
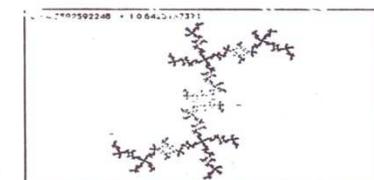
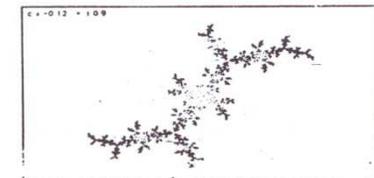
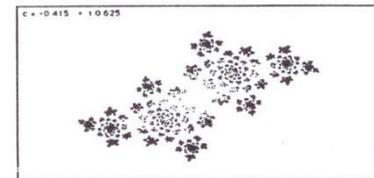
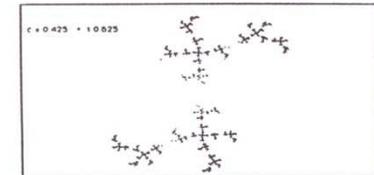
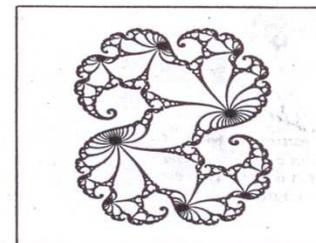
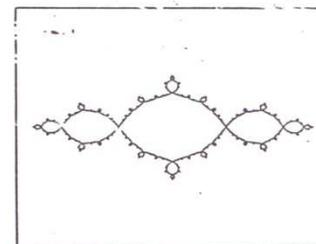
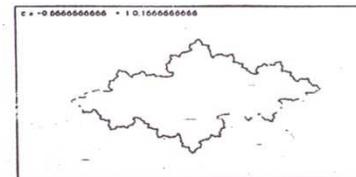
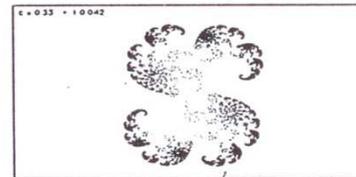
Figure 14.19 : Julia sets for  $c = -2$  (left), a line segment, and

# Conjuntos de Juliá y de Fatou

- Unas veces estos conjuntos son conexos.
- Otras veces son totalmente inconexos.

Encadré 2 — ENSEMBLES DE JULIA  
 $z \rightarrow z^2 + c$

(Maryvonne Teissier, Véronique Gautheron, J.H. Hubbard, A. Fathi, H.O. Peitgen).





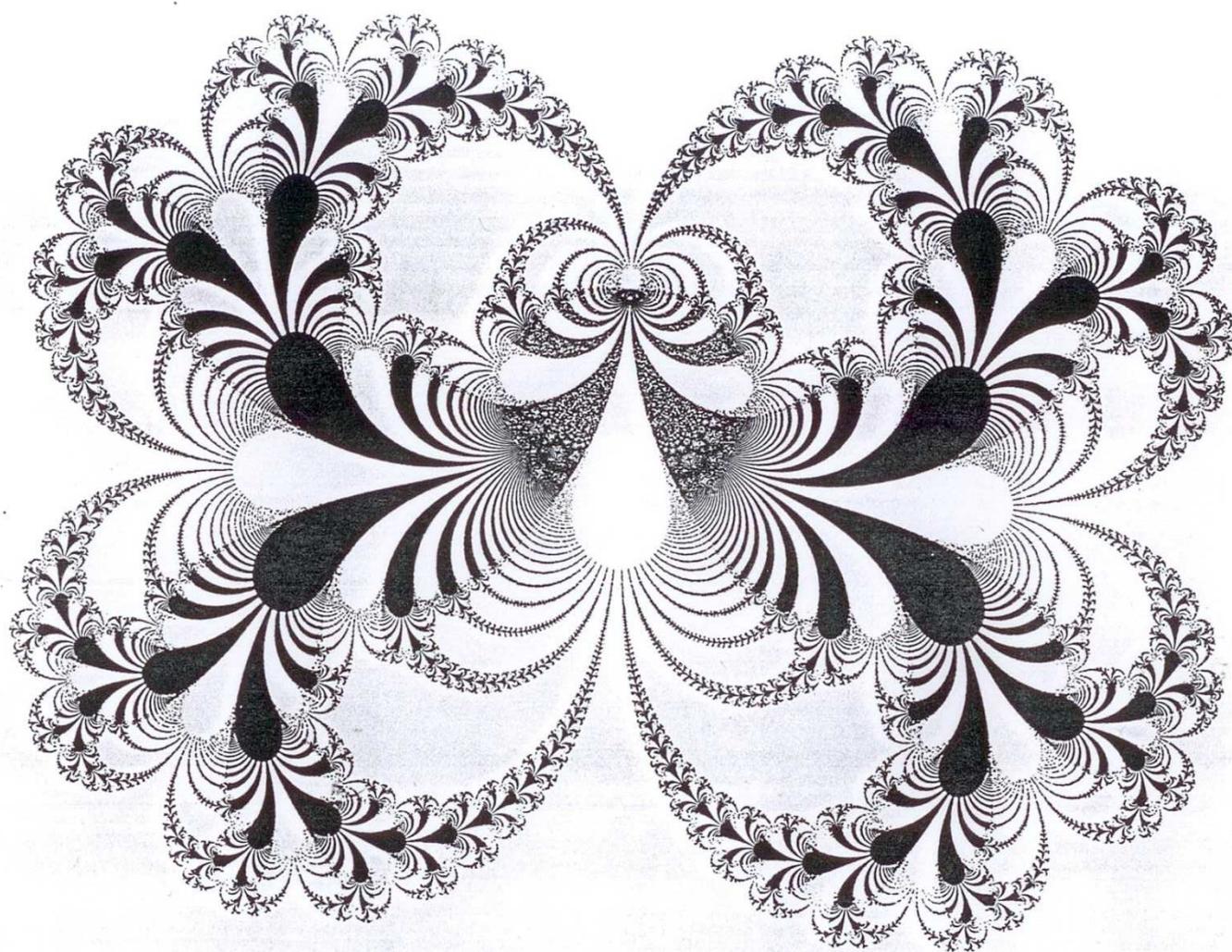


Fig. 0.2: The Julia set of Newton's method applied to  $e^z = 1$ .

**- Conjunto de Julia**

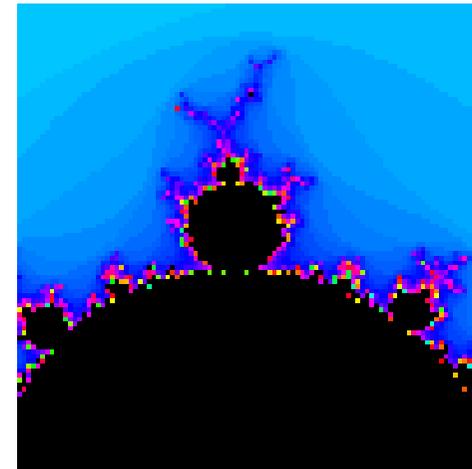
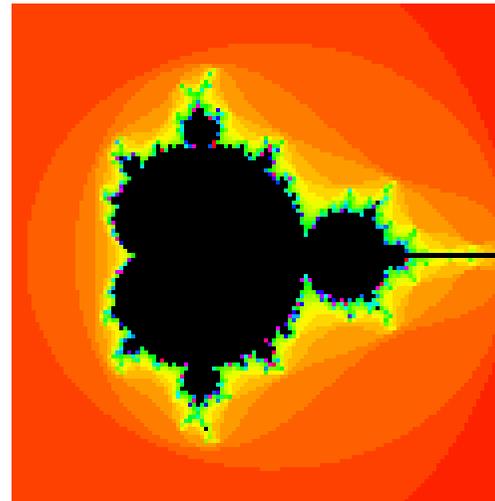
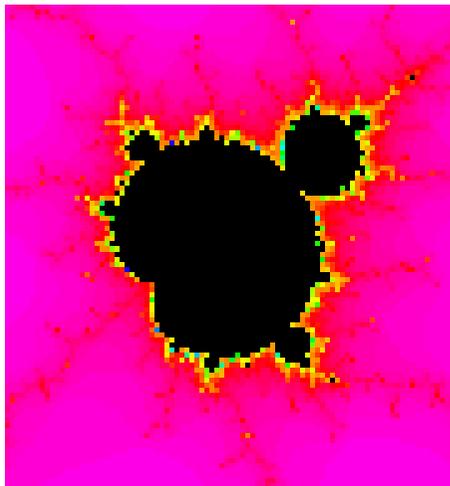
**- ¿Qué conjuntos de Julia son conexos?**

**Mapa de Mandelbrot**

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad \text{con } Z_0 = 0$$

# *Conjunto de Mandelbrot*

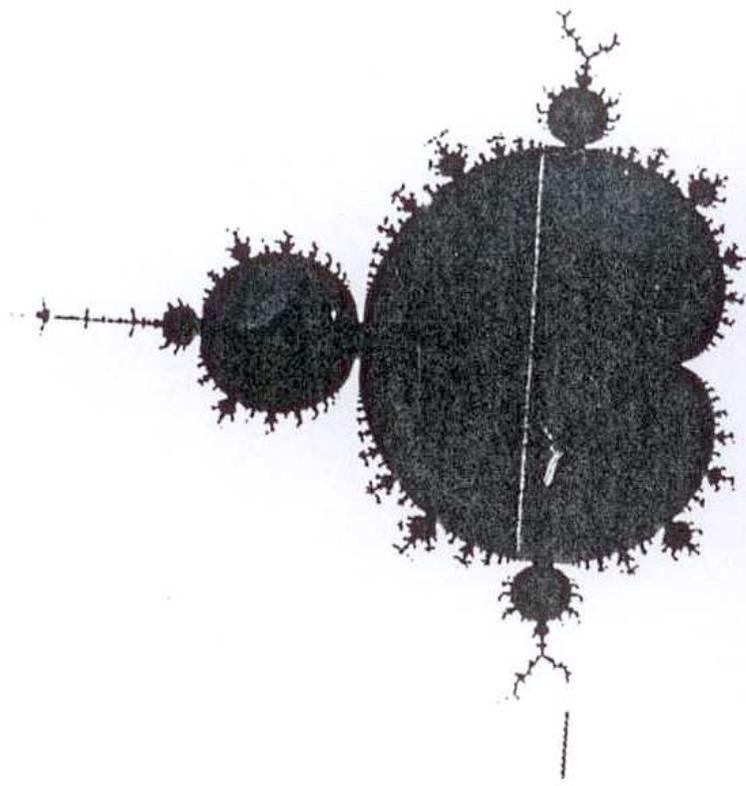
Se llama **conjunto de *Mandelbrot*** al conjunto de valores de  $C$  para los que el conjunto de *Julia* es conexo.



Es un conjunto fractal de dimensión topológica 1 y dimensión de *Hausdorff* 2.

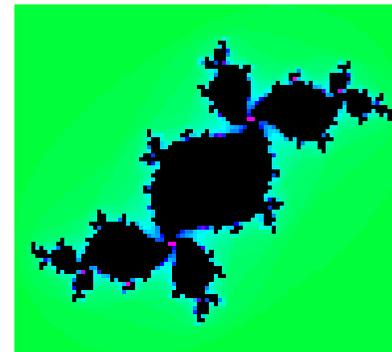
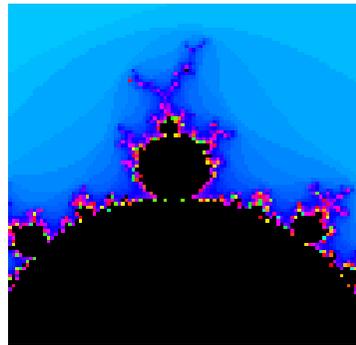
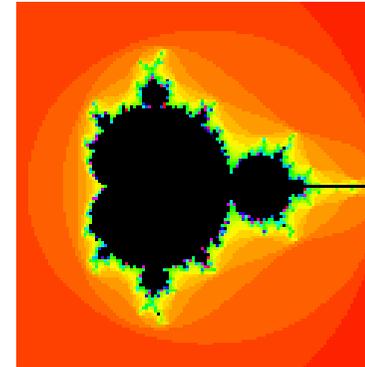
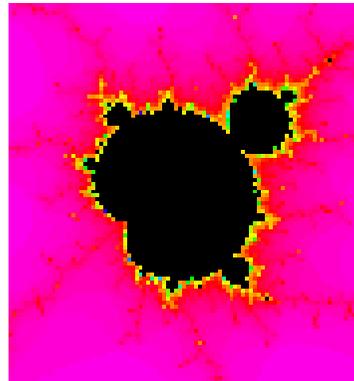
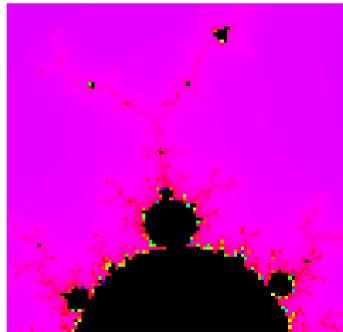
La frontera de este conjunto ¿es conexa? o ¿es inconexa? Se ha probado que esta proposición es indecidible.

# *Conjunto de Mandelbrot*



Mandelbrot set

# Las Matematicas del Fractal de Mandelbrot



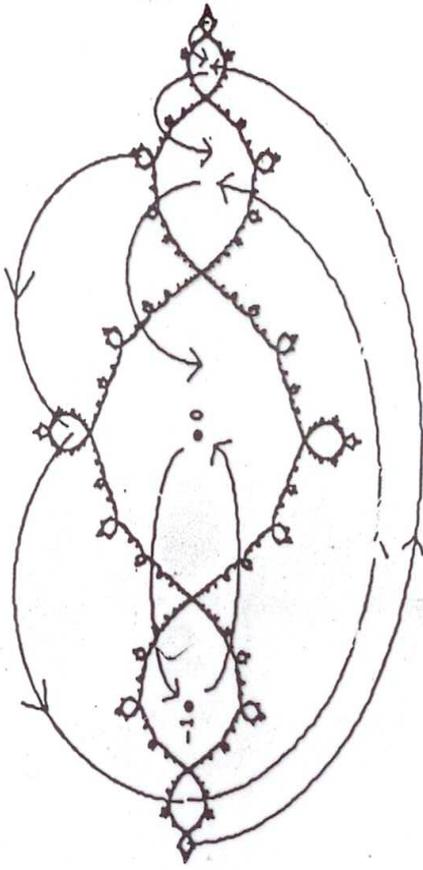


Figure 16.8(a) The boundary of  $A$  is the Julia set above (cf. Example 16.20), with attractive 2-cycle  $\{-1, 0\}$ . It bounds an infinite number of connected regions. Each region is mapped completely into another by  $f(z)$  (see arrows), since the continuous image of a connected set is connected (Theorem 12.36).

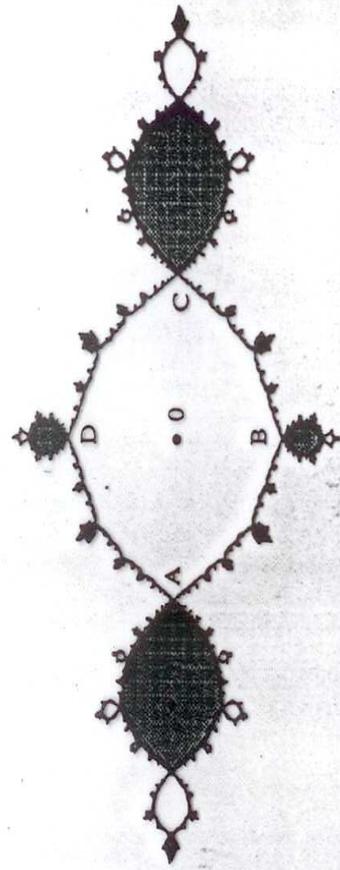


Figure 16.8(b) Here we show darkened the regions which are part of the basin of attraction of  $z = -1$  under  $f^2$ , namely those which follow an even number of arrows to enter the region containing  $-1$ . Every region is in the basin of attraction of  $-1$  or of  $0$ . Thus the union of the regions is the basin of attraction of the fixed 2-cycle  $\gamma = \{-1, 0\}$ , and the Julia set  $J(f)$  equals  $\partial A(\gamma)$ .

# Conjunto de Mandelbrot

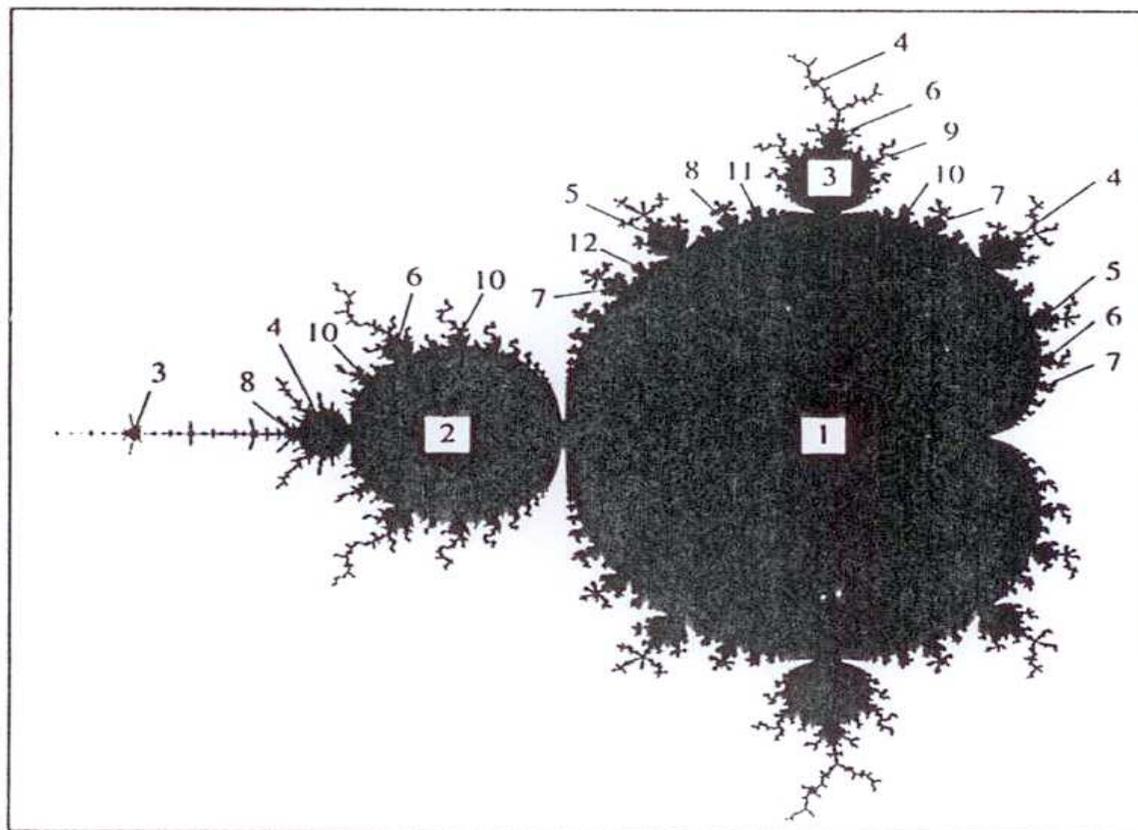


Figure 14.15 : The buds of the Mandelbrot set correspond to Julia sets that bound basins of attraction of periodic orbits. The numbers in the figure indicate the periods of these orbits.

# Conjunto de Mandelbrot

The Mandelbrot Set —  
Dichotomy of Julia Sets

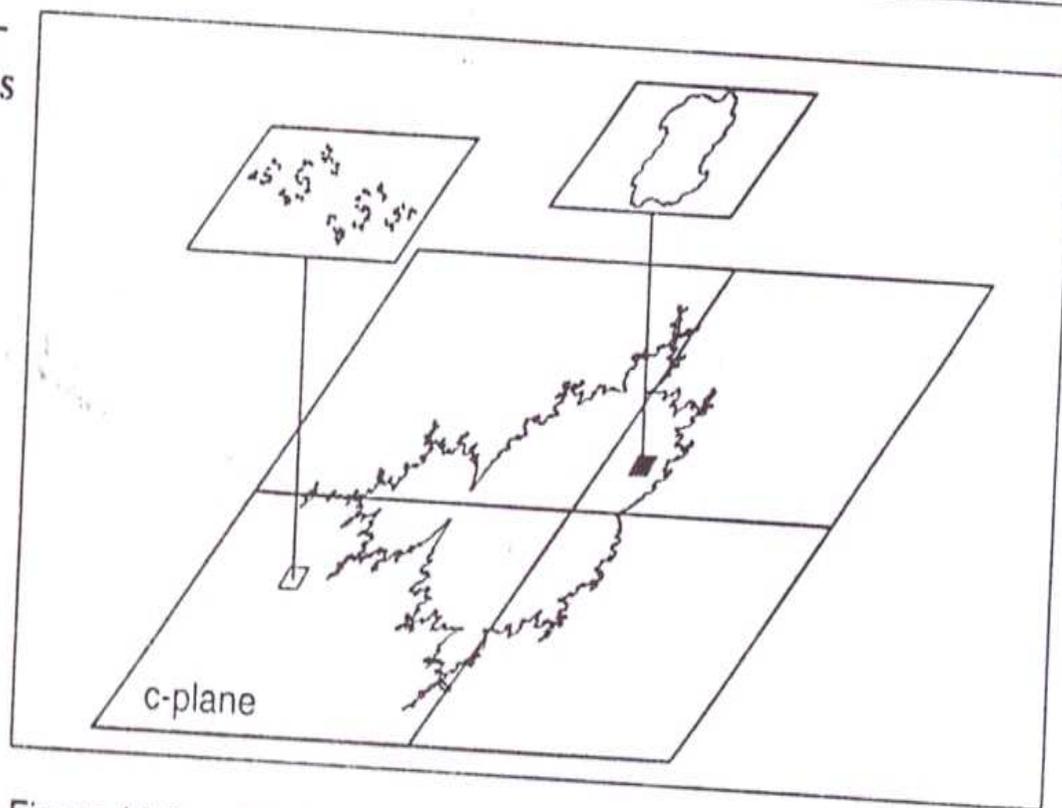
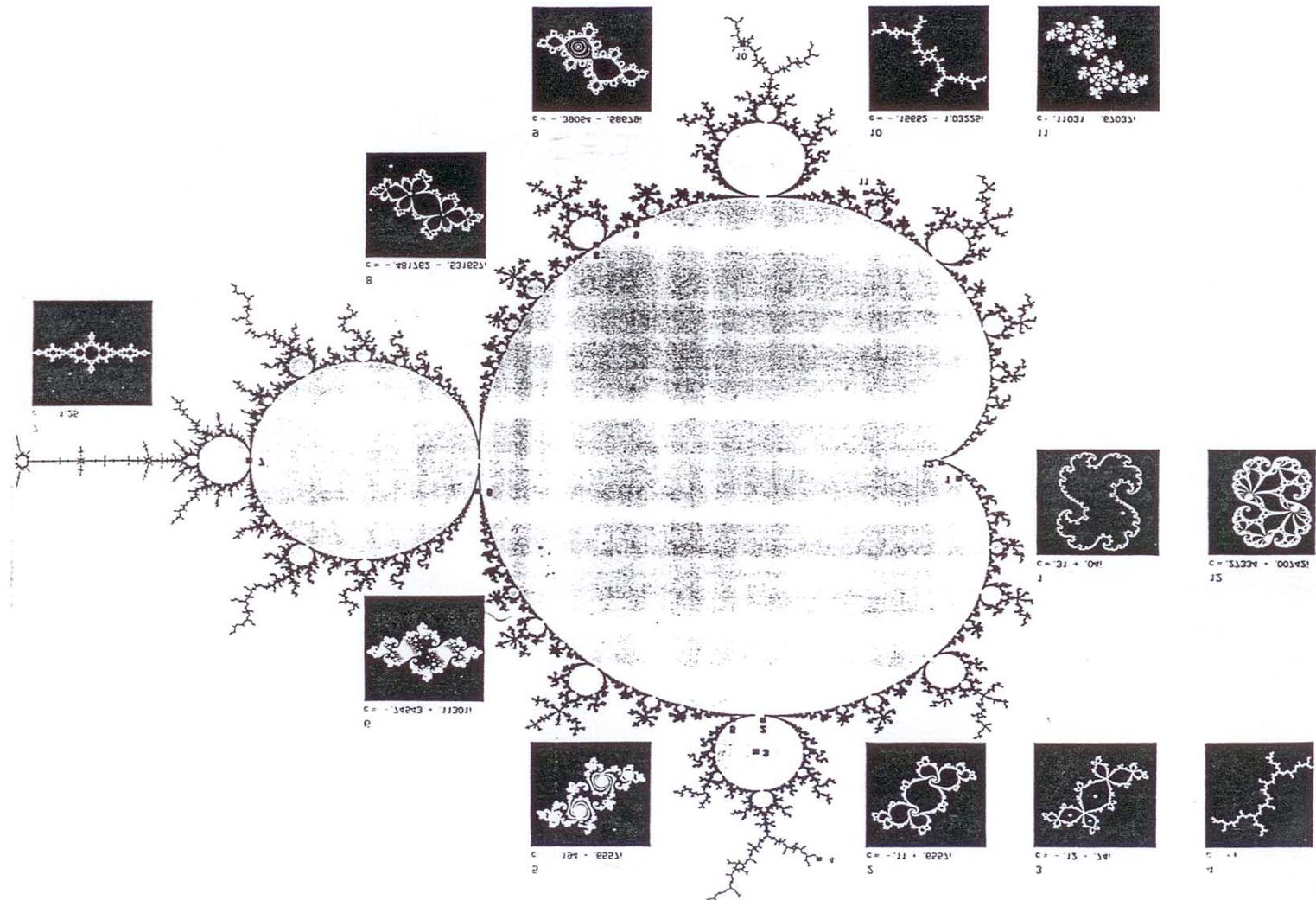
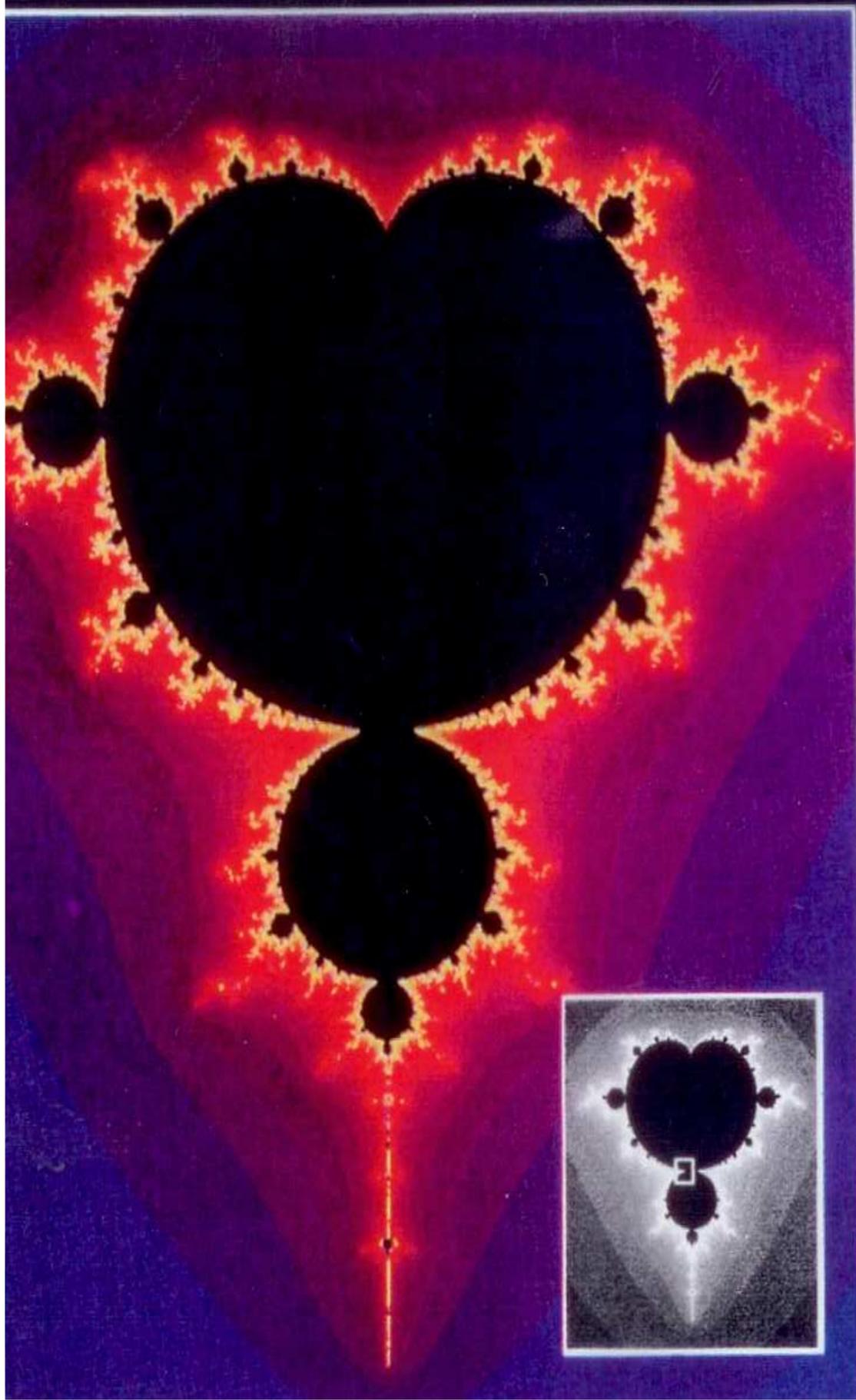


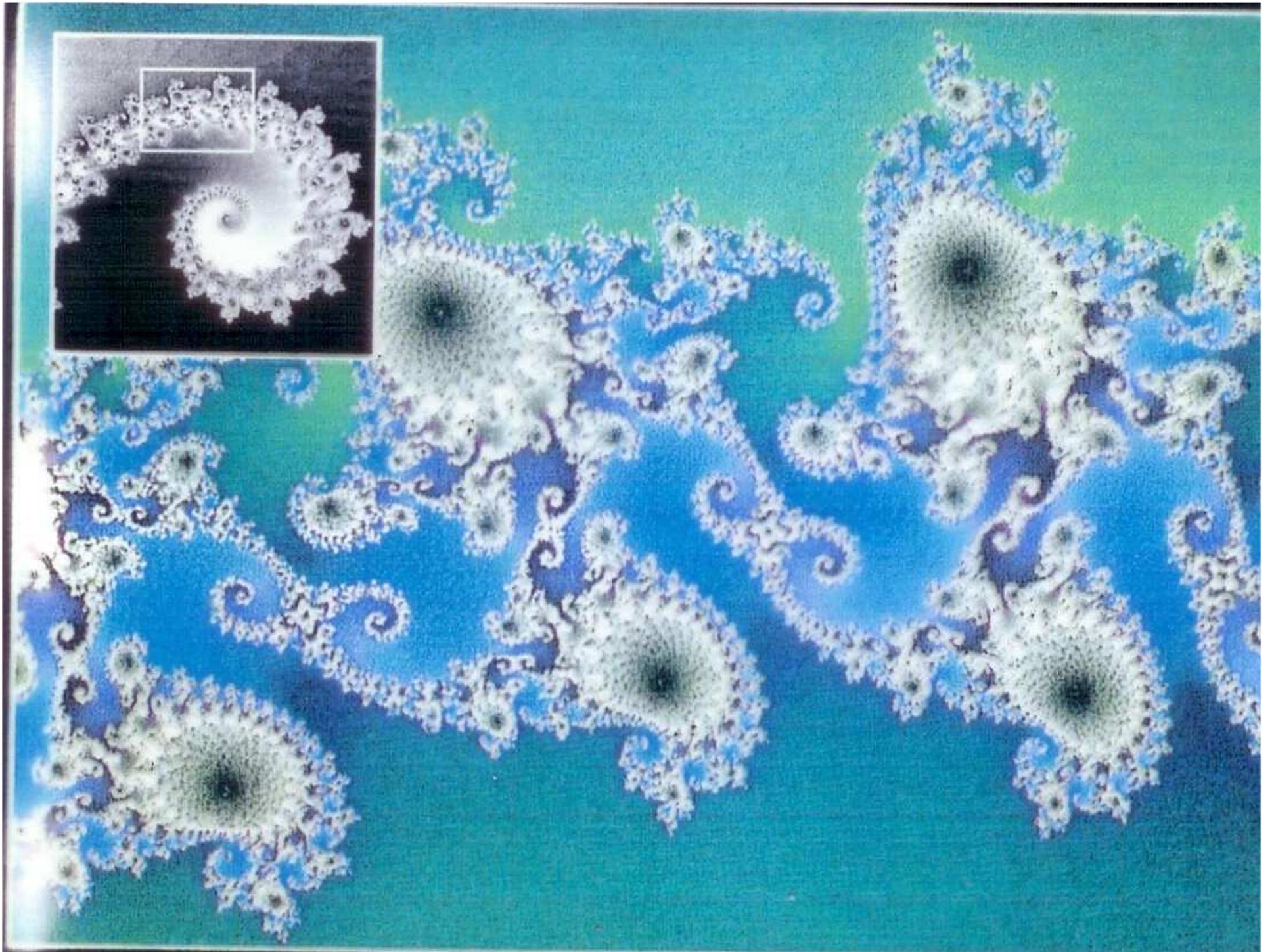
Figure 14.2 : Any point in the  $c$ -plane, interpreted as a parameter  $c$  for the iteration of  $z \rightarrow z^2 + c$ , corresponds to a Julia set. The point is colored black, if the corresponding Julia set is connected, and white if the set is disconnected. This is the essence of Mandelbrot's experiment from 1970.

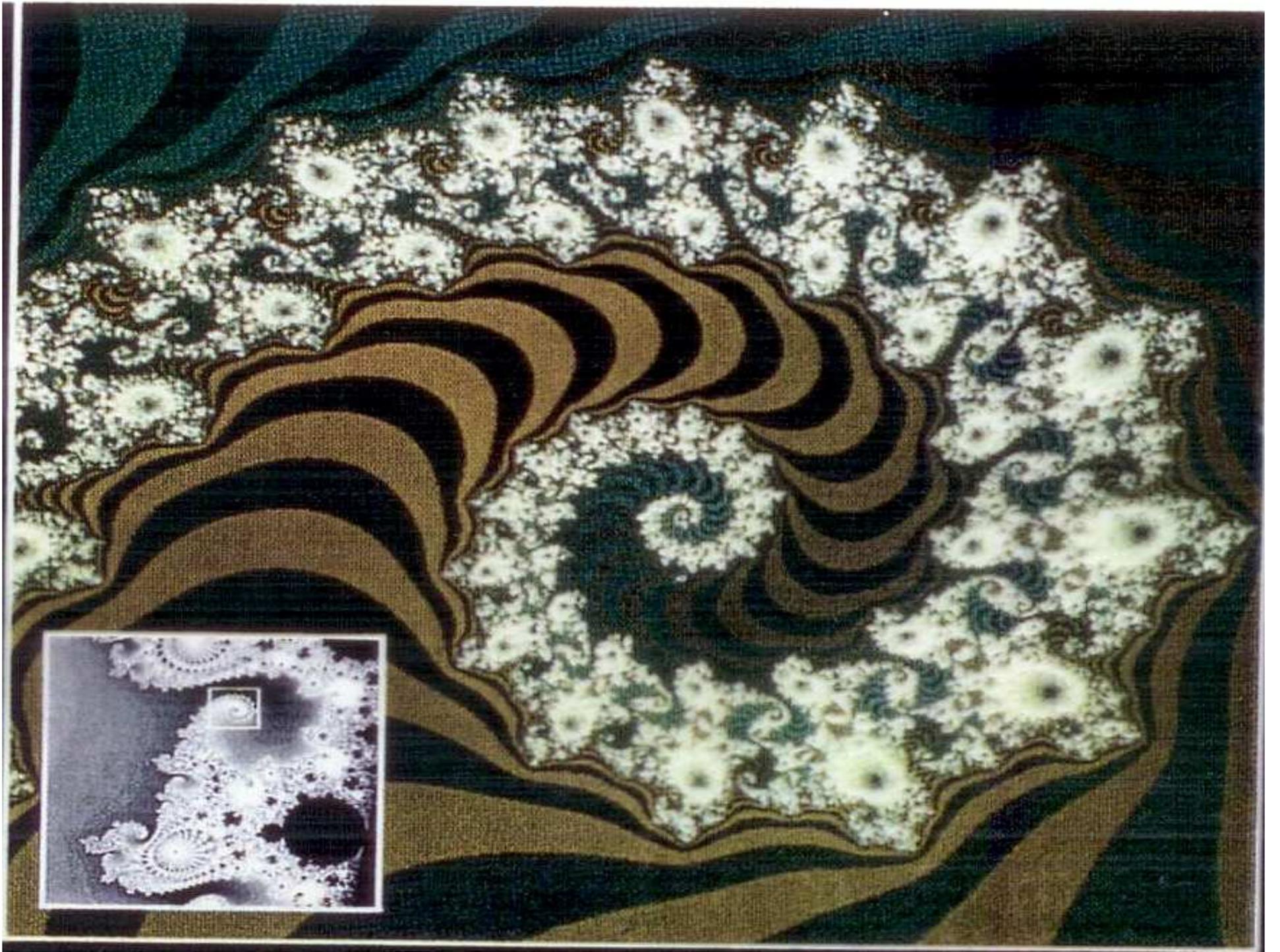
# Conjunto de Mandelbrot

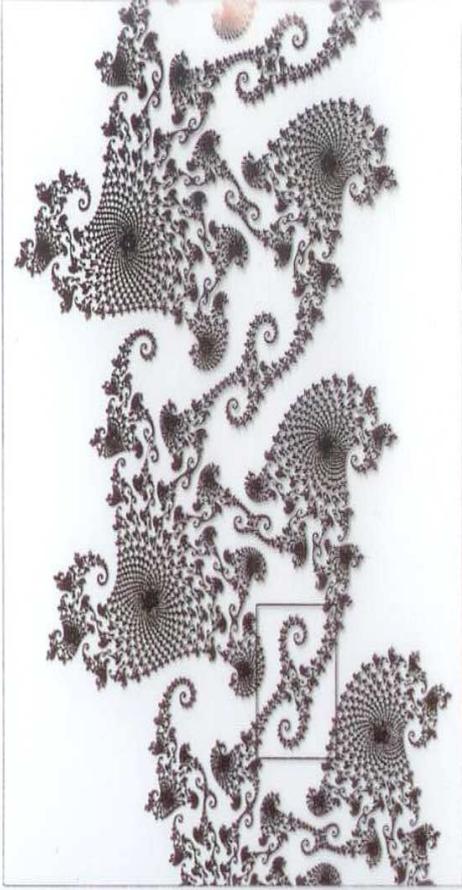




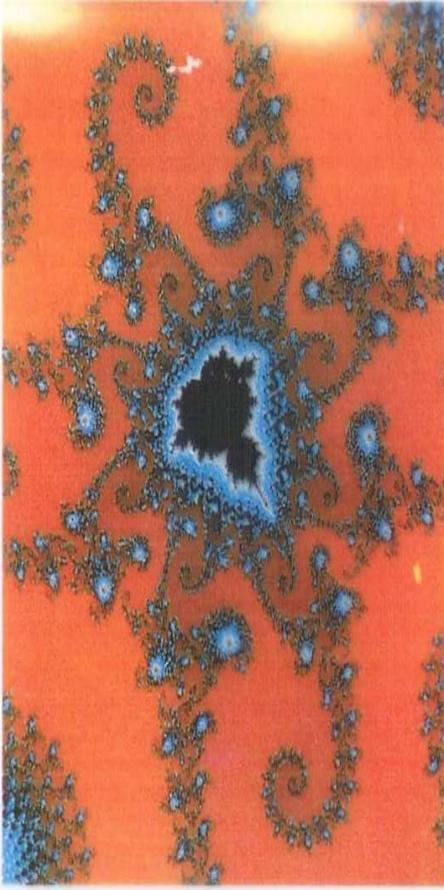
EL CONJUNTO DE MANDELBROT. Un viaje a través de escalas cada vez más pequeñas muestra la creciente complejidad del conjunto, con colas de caballo de mar y moléculas como islas, semejantes a la imagen total. En el último recuadro, el índice de ampliación es de un millón en cada dirección.



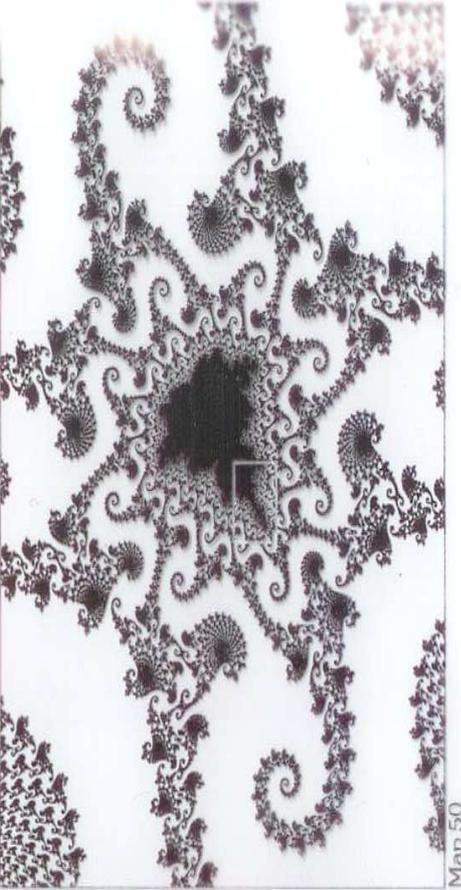




Map 46



Map 48



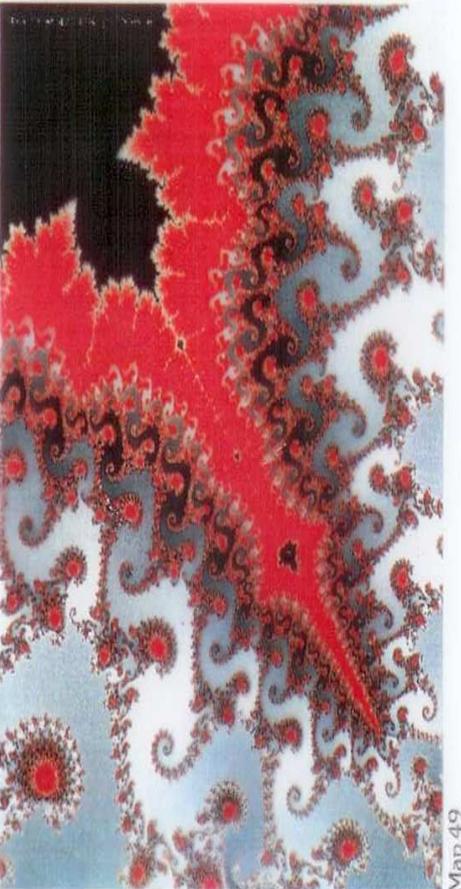
Map 50



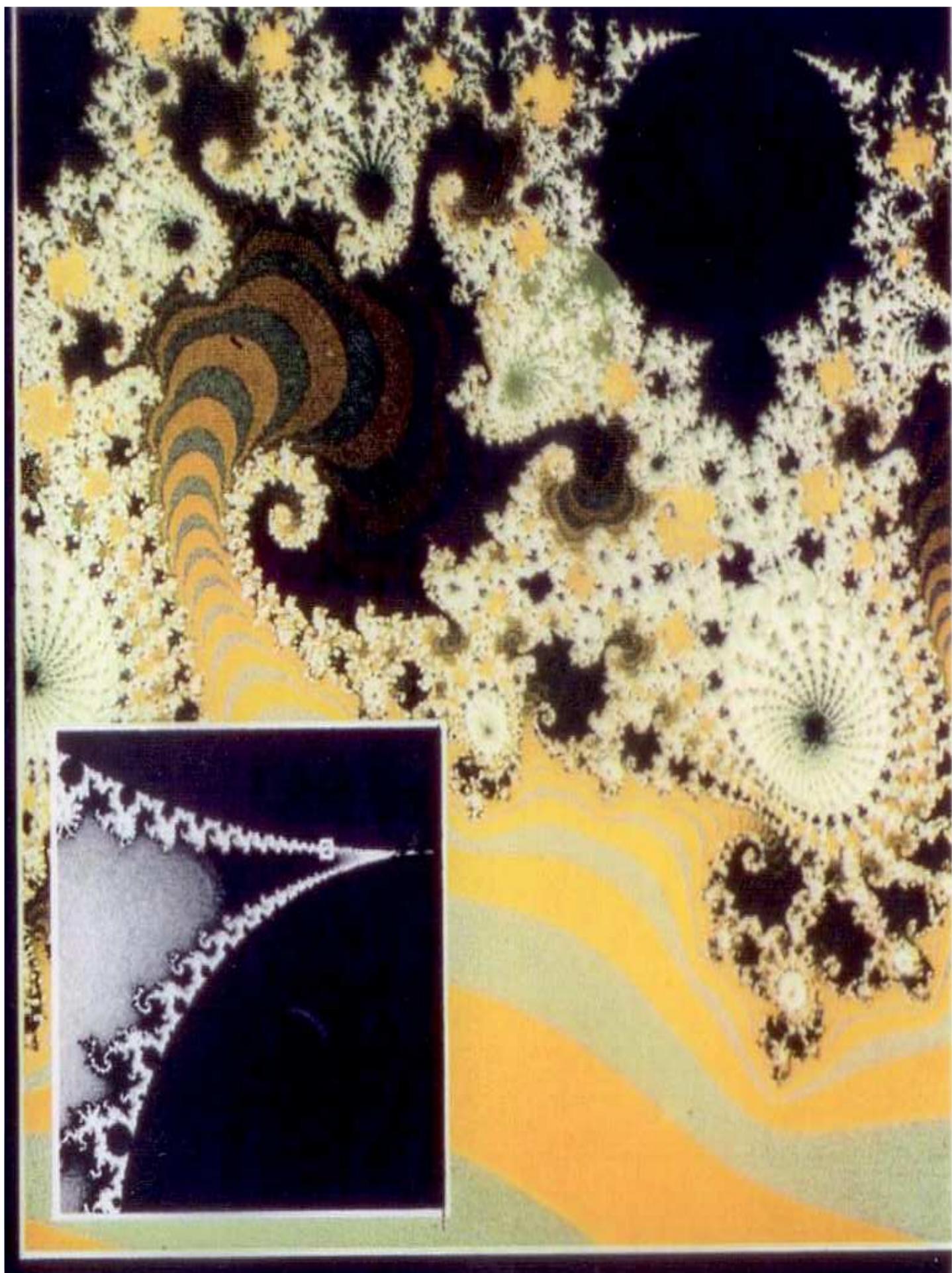
Map 45

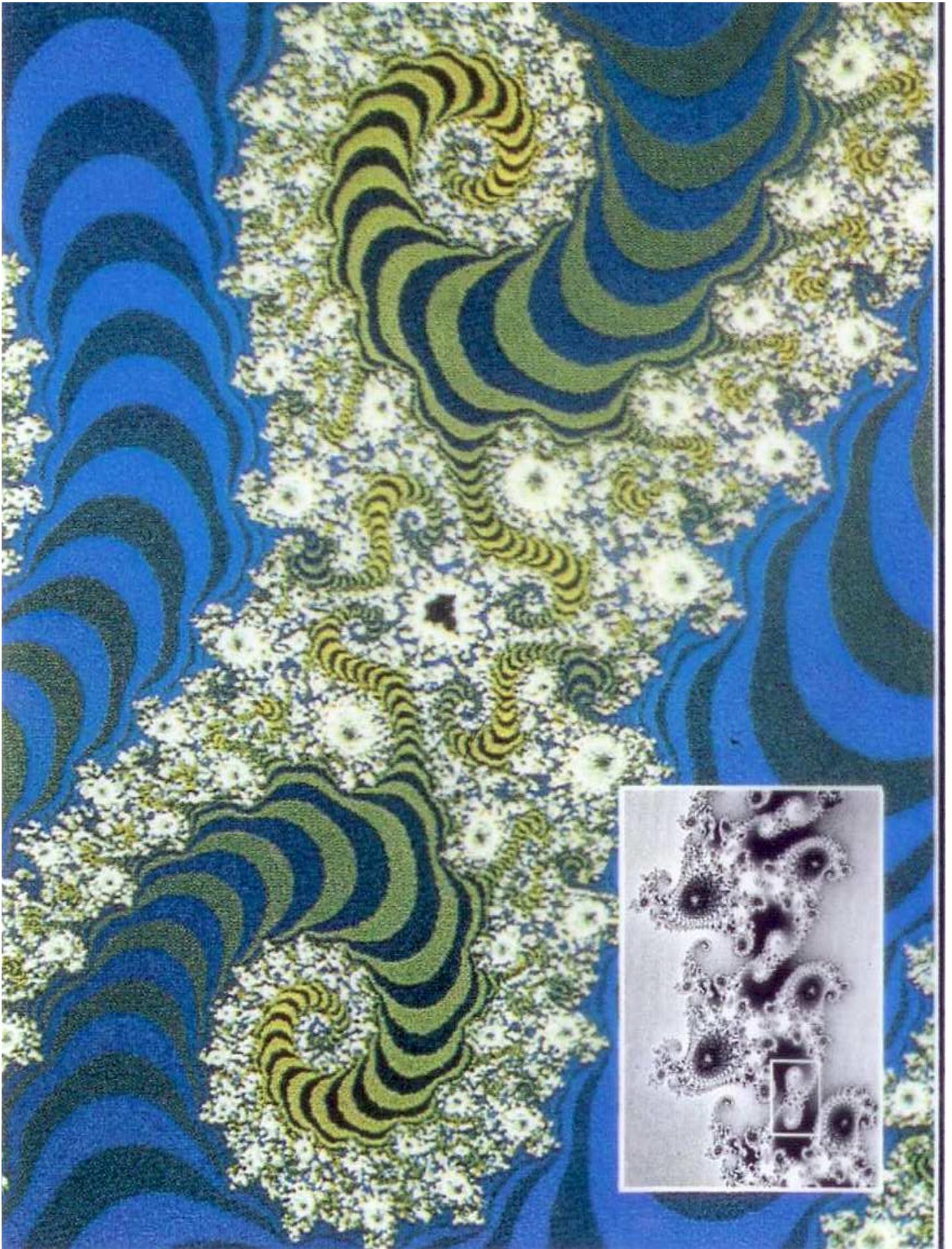


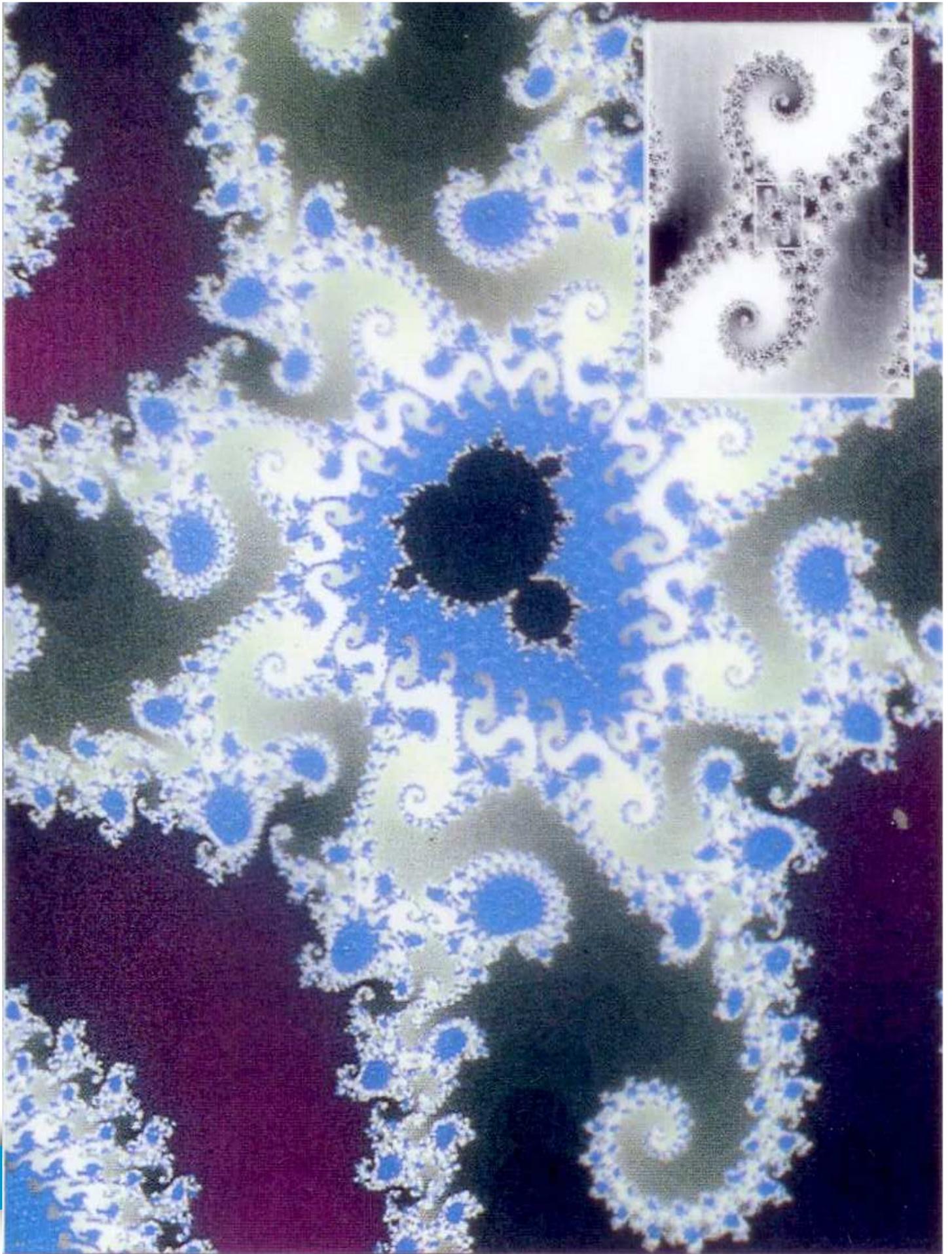
Map 47

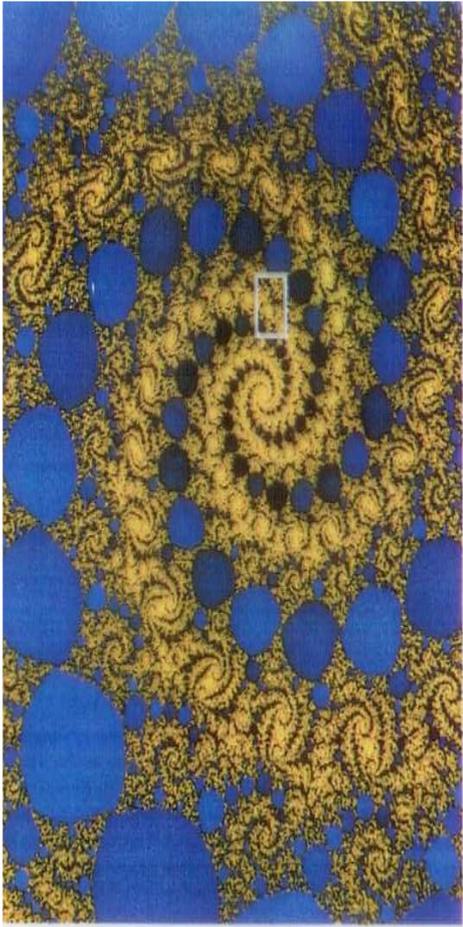


Map 49

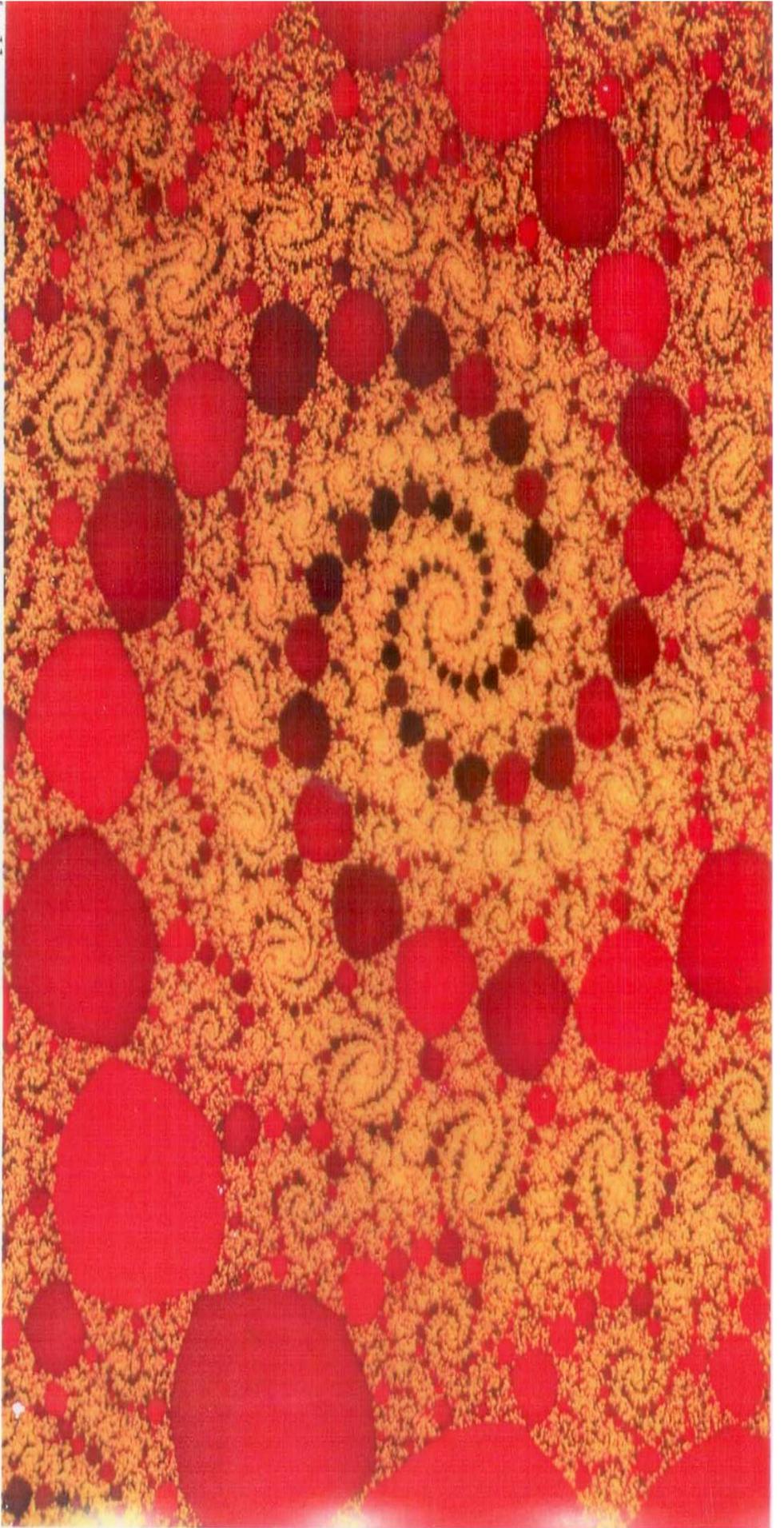
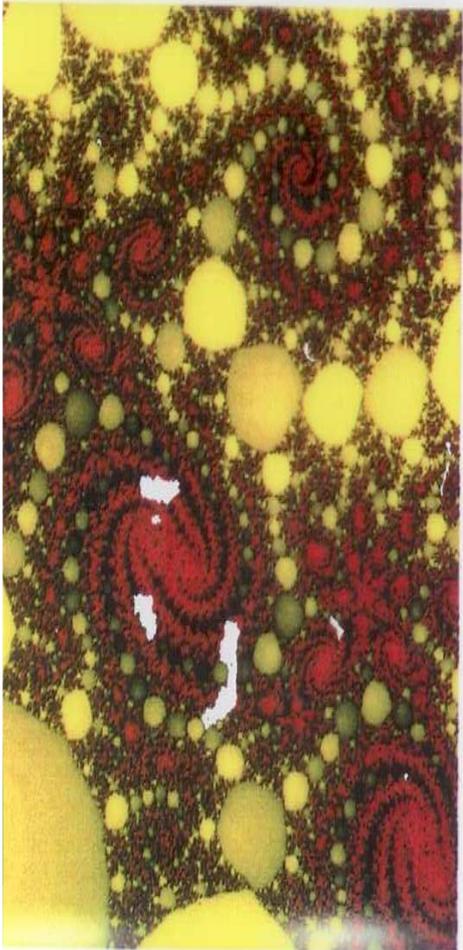


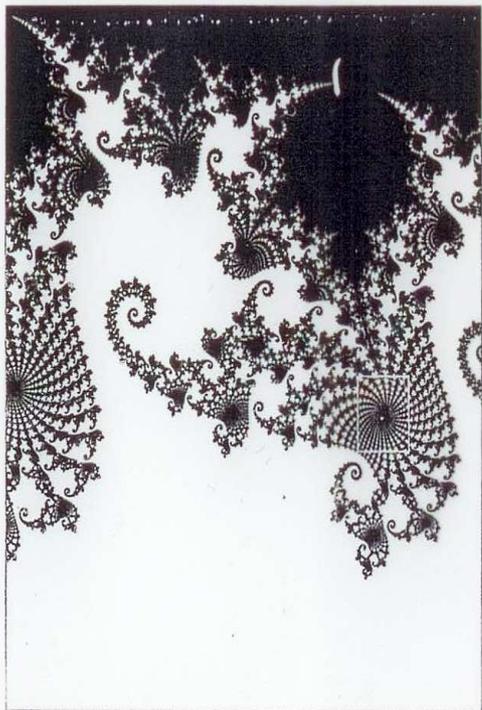




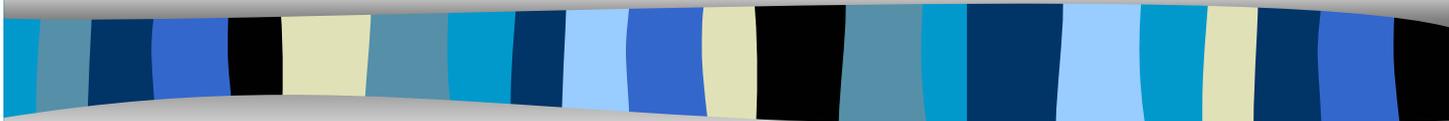


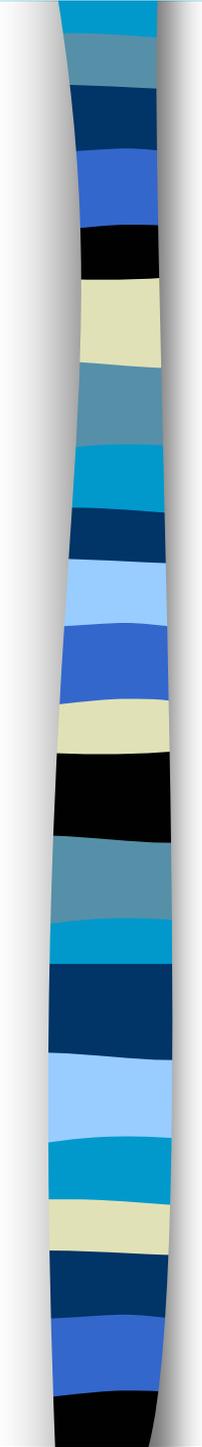
11 de



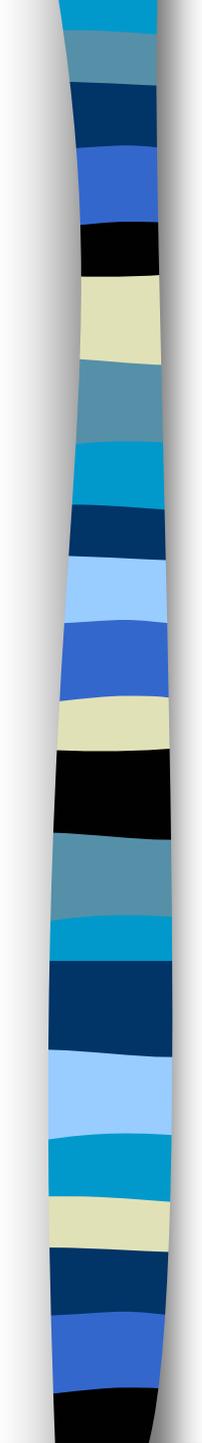


Map 37





# DIMENSIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES. DIMENSIÓN DE SERIES TEMPORALES



Un proceso continuo  $\{y(t)\}$  se llama un **proceso aleatorio** o un **proceso browniano** en tiempo continuo, si para cualquier paso de tiempo  $\Delta t$ , los incrementos  $\Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t)$  son:

i) Normales.

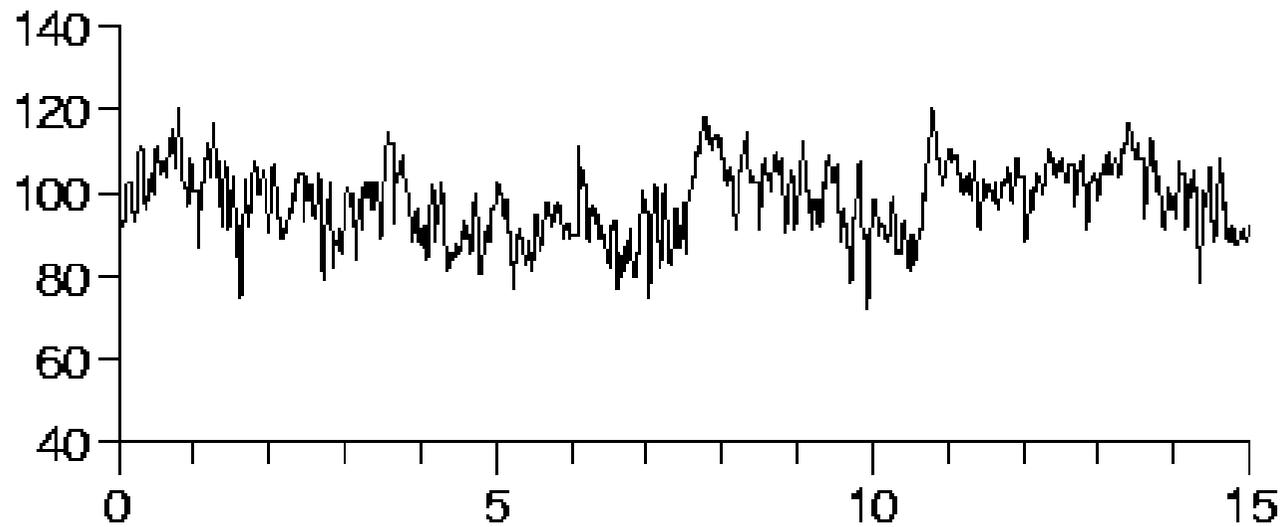
ii) De media cero.

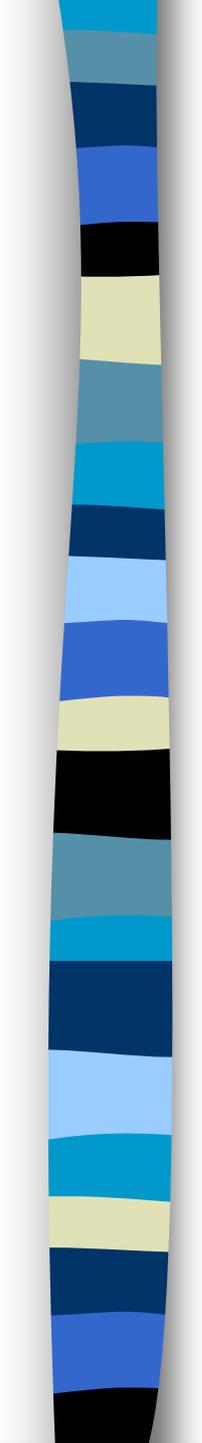
iii) De varianza proporcional a  $\Delta t$ .

O lo que es equivalente a iii (por ii):

Los incrementos sucesivos  $\Delta y(t)$  y  $\Delta y(t+\Delta t)$  no están correlacionados.

# Movimiento browniano

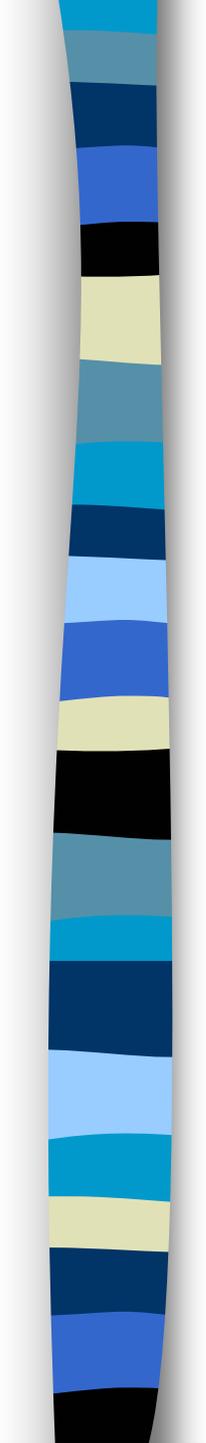




El axioma iii) que caracteriza a los procesos aleatorios puede ser generalizado con la característica de un **proceso fractal** (Mandelbrot 1977, 1982) introduciendo un parámetro adicional, el **exponente de Hurst H** ( $0 < H < 1$ ) y reemplazando iii) por:

**iii') Varianza proporcional a  $\Delta t^{2H}$ .**

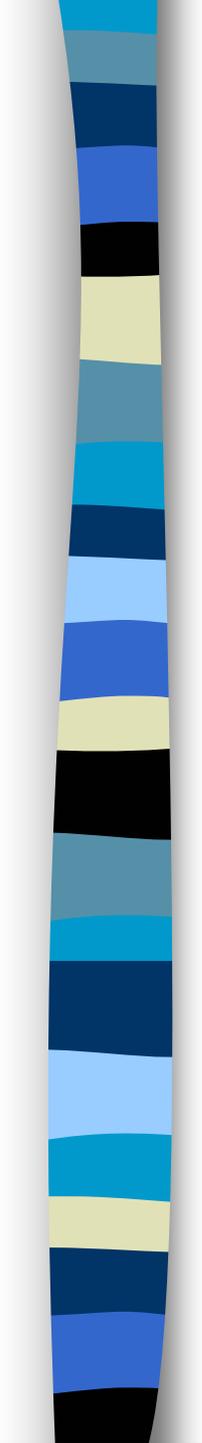
(El proceso **aleatorio** tiene pues  $H = 1/2$ ).



iv) En un proceso fractal los sucesivos incrementos tienen correlación  $\rho$ , independiente del paso de tiempo  $h$ , definido por:

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \quad \left(-\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$$

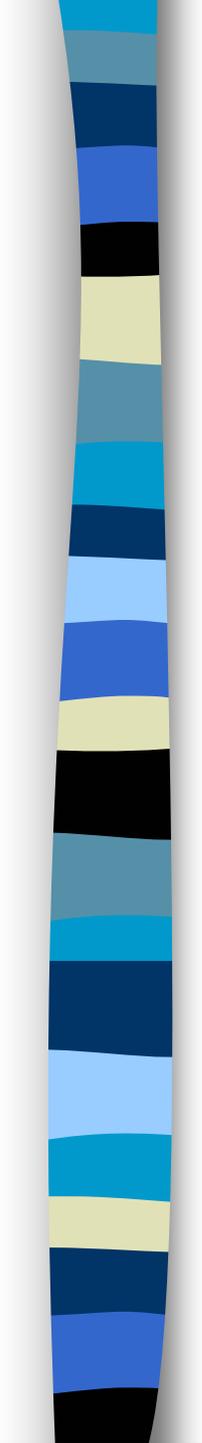
Si  $\rho = 0$ , entonces  $H = 1/2$ , y es un proceso aleatorio.



# TÉCNICAS DEL MOMENTO DE ORDEN DOS (*Hasting, 1993*)

$$E( \Delta y^2 ) = c \Delta t^{2H}$$

$$H = (1/\ln 4) \{ \ln E[y(t+2\Delta t) - y(t)]^2 - \ln E[y(t+\Delta t) - y(t)]^2 \}$$

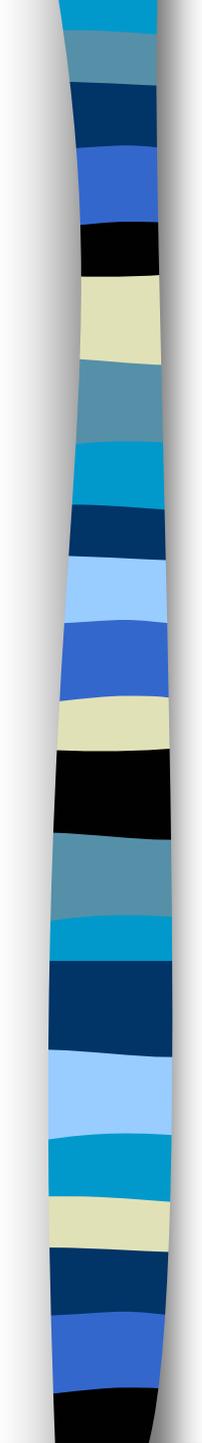


# TÉCNICAS DEL MOMENTO DE ORDEN DOS LOCAL

$$\rho = \frac{E([y(t + 2\Delta t) - y(t + \Delta t)][y(t + \Delta t) - y(t)])}{\sqrt{E([y(t + 2\Delta t) - y(t + \Delta t)]^2)E([y(t + \Delta t) - y(t)]^2)}}$$

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \quad \left(-\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$$

$$H = \ln(2 + 2\rho)/\ln 4$$



# CRECIMIENTO DEL RANGO

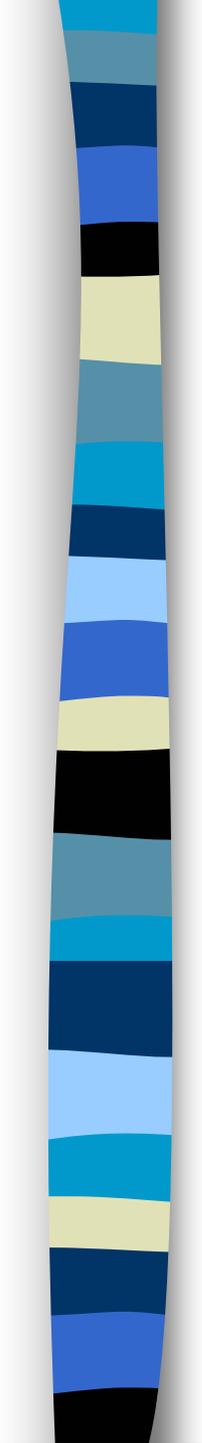
**Renormalización** (Barnsley 1986,1988).

El **rango** es la diferencia entre el mayor y el menor valor de  $y(t)$

$$y_c = \left( \frac{1}{c^H} \right) y(ct)$$

$$R(\Delta t) = c \Delta t^H$$

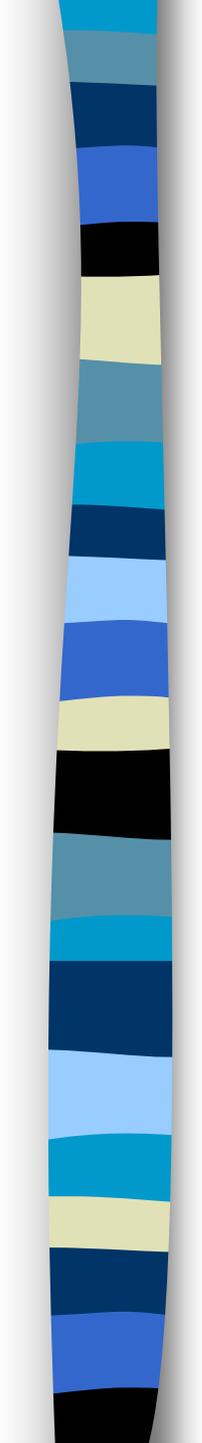
Para series temporales cortas, en el movimiento browniano, en tiempos discretos nos da  $H = 0.63$  en vez del esperado  $H = 0.5$ .



## DIMENSIÓN POR CAJAS

Si  $N(L > \rho)$  denota el número de intervalos de longitud mayor que  $\rho$  entonces  $N(L > \rho) = c \rho^{-B}$  y  $B = D_0$

Como  $D = 2 - H \Rightarrow B = 1 - H$

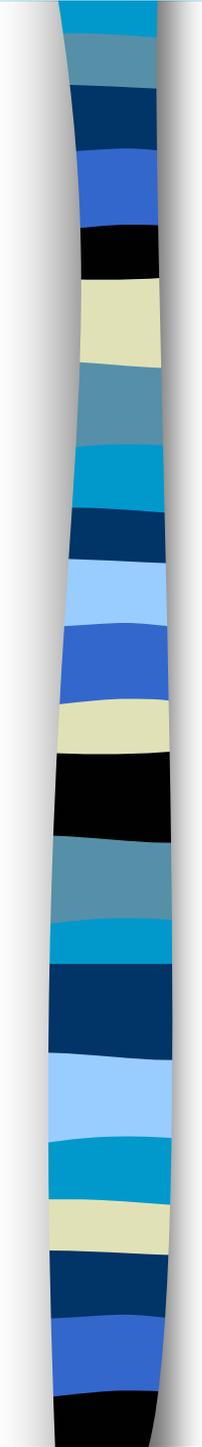


# TÉCNICAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La **transformada de Fourier** representa la una función continua mediante los coeficientes de estas funciones.

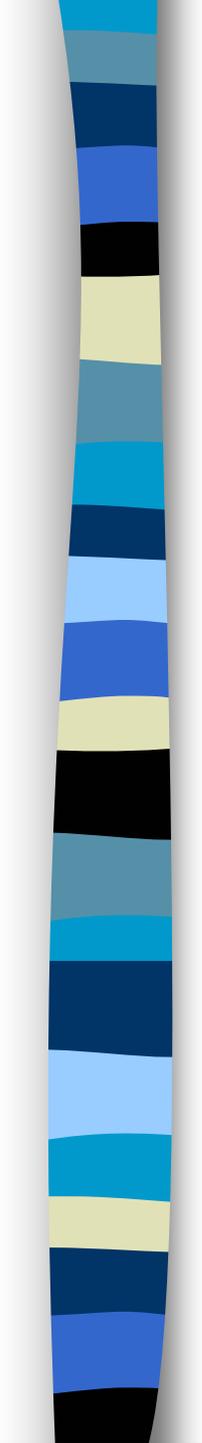
Utilizando otras bases de funciones, "**wavelets**", también es posible "comprimir" la información usando únicamente los coeficientes.

Si la superficie es fractal, entonces las amplitudes verificarán una ley potencial que dependerá del exponente fractal de la superficie.



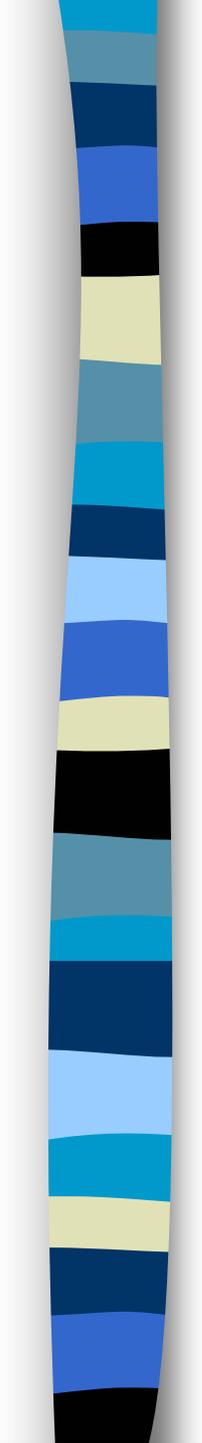
## **PROGRAMA**

Se han elaborado los programas para calcular exponentes fractales de series temporales utilizando el exponente de Hurst por las técnicas del **crecimiento del rango**, del **crecimiento del momento de orden dos** y del **momento de orden dos local**.



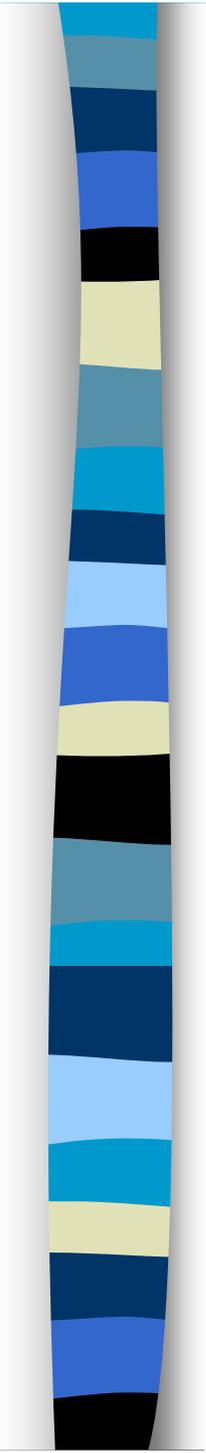
El programa comienza a ejecutarse. Nos da la bienvenida y a continuación presenta un menú:

- 1.- VER LA DEMOSTRACIÓN
- 2.- SELECCIONAR UN FICHERO DE DATOS
- 3.- INTRODUCIR LOS DATOS POR TECLADO
- 4.- SALIR

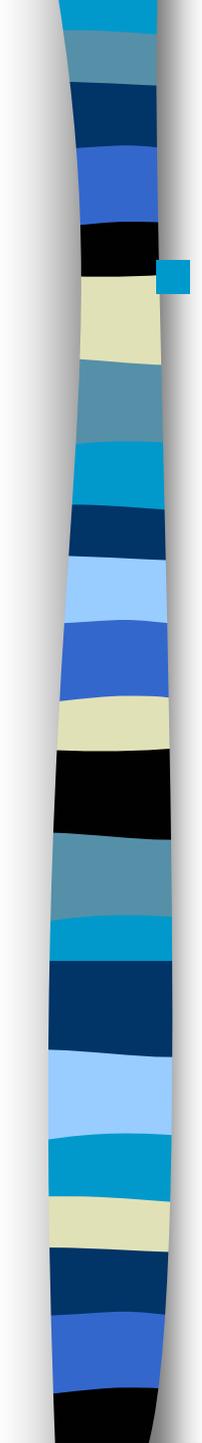


En las opciones 2 y 3 se entra en un nuevo menú:

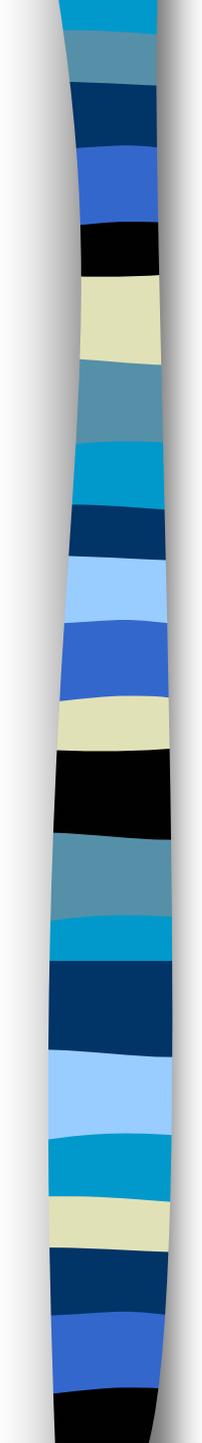
- 1.- GRÁFICA DE DATOS
- 2.- GRÁFICA DE MOMENTOS DE ORDEN DOS
- 3.- GRÁFICA DE RANGOS
- 4.- EXPONENTES DE HURST
- 5.- DATOS Y GRÁFICA PARA IMPRESORA
- 6.- RESUMEN DE DATOS

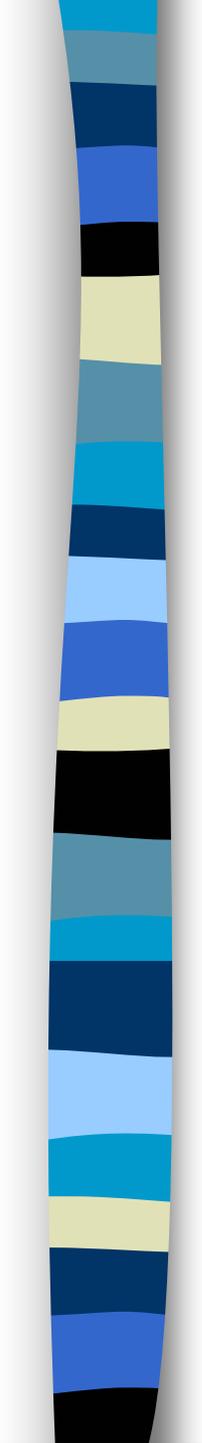


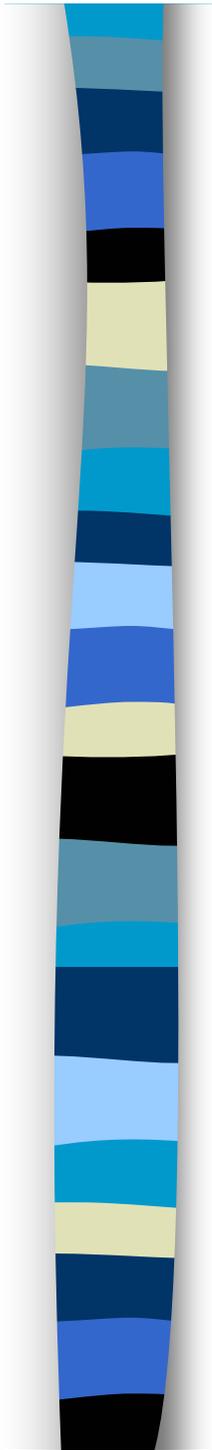
***DIMENSION FRACTAL Y  
COEFICIENTE DE HURST  
EN LOS PASERIFORMES  
DE EUROPA DEL NORTE .***



■ El coeficiente de Hurst medido con el método del crecimiento del rango nos mide el crecimiento de las fluctuaciones de la población al aumentar el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Esto significa que cuanto mayor es el exponente de Hurst de una población más rápido aumenta el rango de las fluctuaciones. Si no tenemos en cuenta el valor de la constante  $c$  de la fórmula (5.1), para un mismo tamaño poblacional, los valores mayores del coeficiente de Hurst se podrían asociar a un mayor peligro de extinción (Sugihara & May 1990).

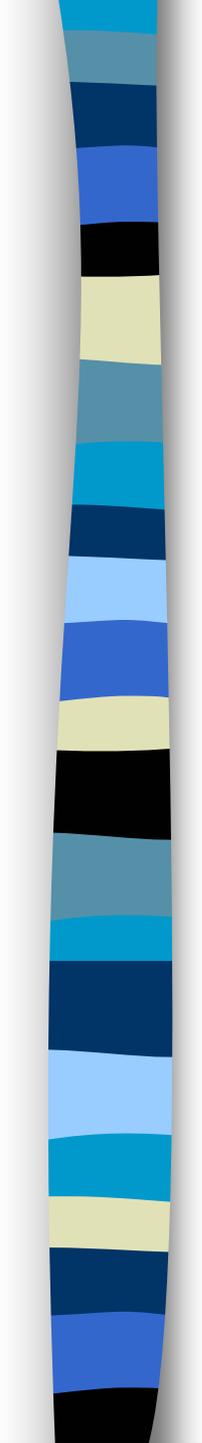
- 
- En una serie temporal con estructura fractal sería de esperar que los coeficientes de Hurst medidos por el método del crecimiento del **momento de orden dos**, del crecimiento del **rango** y del **momento de orden dos local**, fuesen parecidos.
  - Hastings y Sugihara (1993) nos avisan de que para series temporales cortas el coeficiente de Hurst calculado por el método del crecimiento del rango nos da valores mayores a los reales.

- 
- El exponente fractal (coeficiente de Hurst) o lo que es lo mismo, el crecimiento del rango de las variaciones poblacionales puede ser debido a características intrínsecas de la especie o a características puramente ambientales. Si la tasa de crecimiento del rango de las variaciones de una población depende más de las características ambientales (locales) los coeficientes de Hurst de distintas poblaciones no estarán relacionados. En el caso de que estuviesen relacionados estaríamos ante una característica intrínseca de la especie (por lo menos en las zonas de estudio).



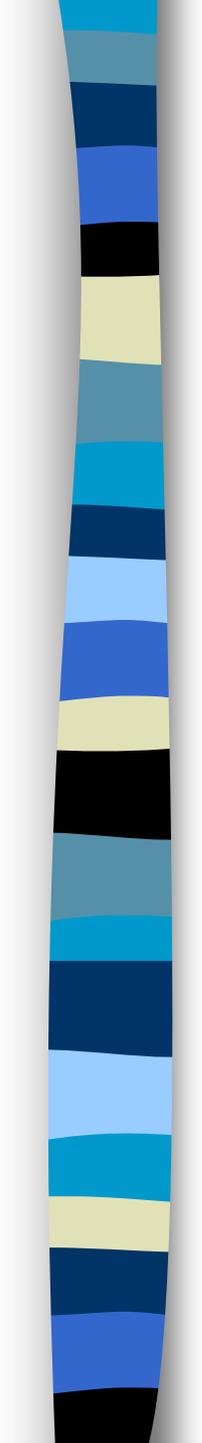
Las hipótesis a testear son tres:

- 1) Comprobar si las series temporales de poblaciones de paseriformes tiene estructura fractal. Para hacer esta comprobación nos basamos en las tres medidas del exponente fractal por los tres métodos anteriormente citados y su comparación.
- 2) Comprobar si el coeficiente de Hurst se mantiene para una misma especie en distintos lugares.
- 3) Comprobar si el crecimiento del rango de las fluctuaciones de una población puede estar relacionado con el peligro de extinción o algún otro parámetro poblacional.



# Material y métodos

- Para medir los coeficientes de Hurst de las distintas especies de paseriformes de este estudio se han utilizado los datos del Bird Census News (1992) de tres países del Norte de Europa (Finlandia (f), Suecia (sw) y Dinamarca (d)) que forman un gradiente latitudinal. En Suecia se han utilizado las series temporales de los dos métodos de censos utilizados: conteos en estaciones de escucha (swp) y parcelas censadas por el método "mapping method" (swm).



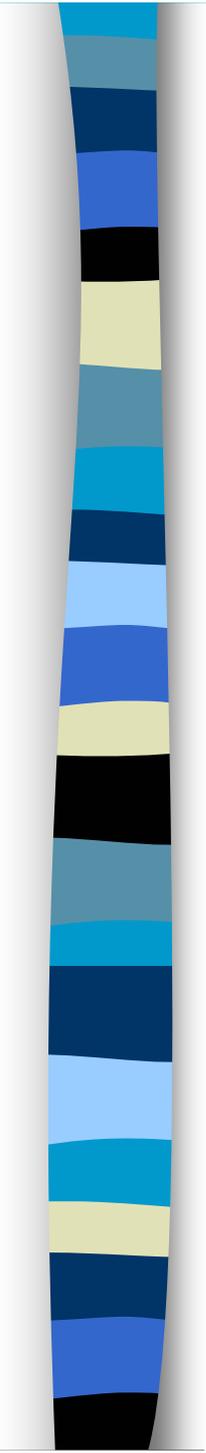
# Material y métodos

- Hemos utilizado el análisis no paramétrico de Wilcoxon y regresiones lineales entre el coeficiente de Hurst obtenido por el método del crecimiento del momento de orden dos y por el método del crecimiento del rango.
- Las comparaciones entre los coeficientes de Hurst obtenidos a partir de los cuatro conjuntos de datos se han hecho con un análisis de correlación de Spearman y el análisis no paramétrico de Wilcoxon.

# Resultados

	Finland		Sweden "mapping method"		Sweden "point counts"		Denmark	
	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment	2nd Moment growth	Range increment
<i>Anthus trivialis</i>	0.40	0.83	0.24	0.62	0.22	0.71	0.72	0.90
<i>Motacilla alba alba</i>	0.41	0.71	0.63	0.81	0.39	0.64	0.81	0.93
<i>Prunella modularis</i>	0.28	0.68	0.36	0.75	0.59	0.80	0.50	0.73
<i>Erithacus rubecula</i>	0.11	0.58	0.46	0.71	0.31	0.60	0.34	0.66
<i>Phoenicurus phoenicurus</i>	0.17	0.38	0.22	0.66	0.13	0.53	0.30	0.70
<i>Turdus philomelos</i>	0.33	0.66	0.46	0.75	0.03	0.63	0.22	0.73
<i>Turdus iliacus</i>	0.36	0.74	0.31	0.60	0.43	0.76		
<i>Sylvia curruca</i>	0.13	0.47			-0.07	0.49	0.14	0.57
<i>Sylvia borin</i>	0.11	0.54	0.11	0.57	0.18	0.54	0.38	0.58
<i>Phylloscopus sibilatrix</i>	0.08	0.47	0.24	0.61	0.42	0.66	0.40	0.71
<i>Phylloscopus collibita</i>	0.49	0.79					0.24	0.59
<i>Phylloscopus trochilus</i>	0.23	0.73	0.30	0.66	0.45	0.68	0.21	0.68
<i>Regulus regulus</i>	0.44	0.72	-0.07	0.42	0.39	0.67	0.41	0.63
<i>Muscicapa striata</i>	-0.14	0.39	0.13	0.68	0.05	0.57		
<i>Ficedula hypoleuca</i>	0.20	0.59	0.34	0.68	0.56	0.79	0.13	0.51
<i>Parus montanus</i>	0.34	0.63	0.15	0.50	0.19	0.54		
<i>Parus major</i>	0.02	0.45	0.15	0.50	0.12	0.54	0.37	0.62
<i>Garrulus glandarius</i>	0.30	0.63	0.36	0.60	-0.01	0.46	0.38	0.72
<i>Fringilla coelebs</i>	0.45	0.75	0.36	0.60	0.29	0.47	0.85	0.90
<i>Carduelis spinus</i>	0.01	0.48			0.21	0.62		
<i>Emberiza citrinella</i>	0.13	0.61	0.62	0.71	0.28	0.72	0.28	0.56

**Table 1:** Hurst coefficients calculated from the passerine populations time series.



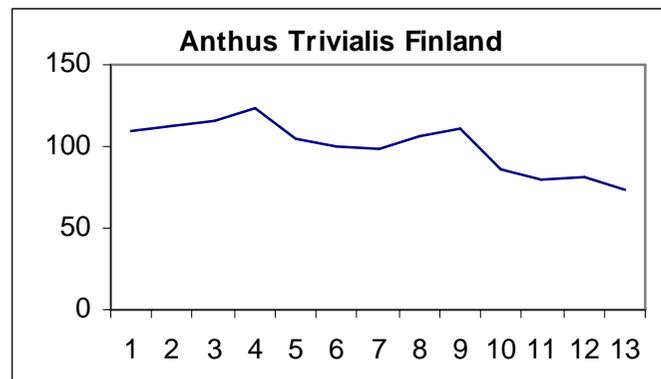
## *Resultados*

- Tres categorías:  $H < 1/2$ ,  $H = 1/2$  y  $H > 1/2$ .
- 1) Si  $H = 1/2$  es el movimiento Browniano, en el que los incrementos son independientes en el sentido de la teoría de probabilidad, y su correlación es cero (Peitgen *et al.*, 1992).

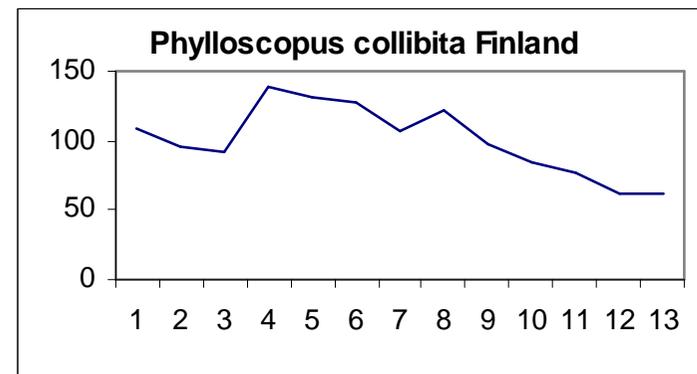
# Resultados

- 2) Para  $H > 1/2$  existe una correlación positiva entre dichos incrementos, es decir, si la gráfica  $y(t)$  crece para un tiempo  $t$ , entonces tiende a continuar creciendo para  $t' > t$ .

$$H_{2ndM} = 0,40; H_{Range} = 0,83.$$



$$H_{2ndM} = 0,49; H_{Range} = 0,79.$$

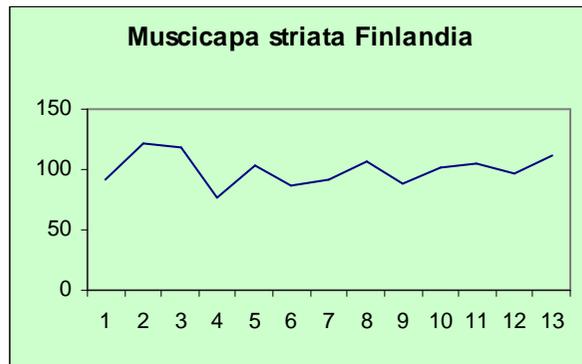


Population time series of different passerine species with Hurst coefficient  $H > 1/2$ .

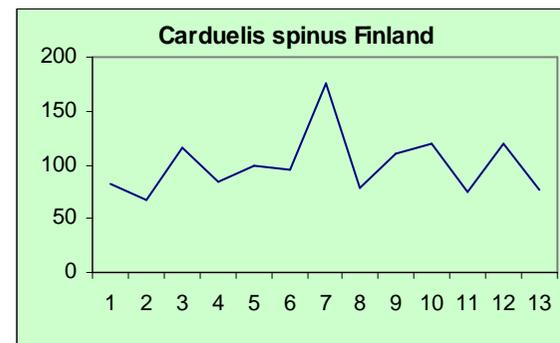
# Resultados

- Para  $H < 1/2$  existe una correlación negativa entre los incrementos.

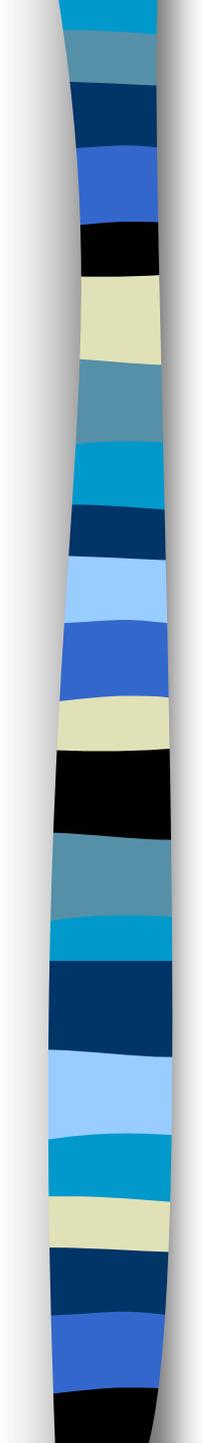
$$H_{2ndM} = -0,14; H_{Range} = 0,39.$$



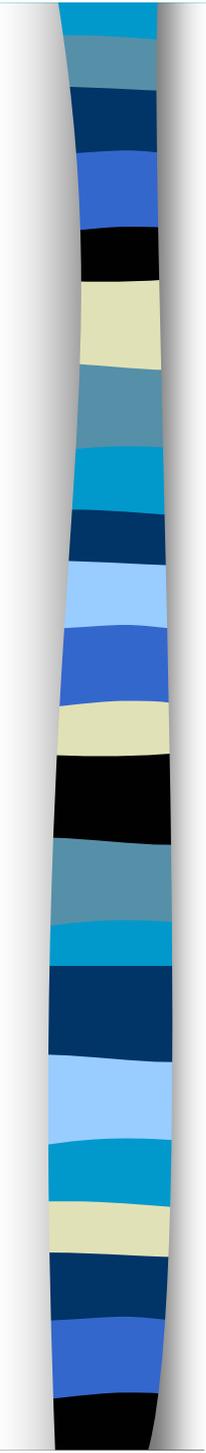
$$H_{2ndM} = 0,01; H_{Range} = 0,48$$

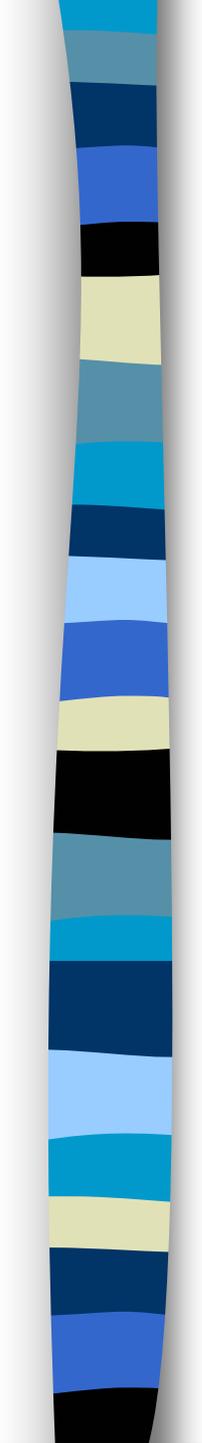


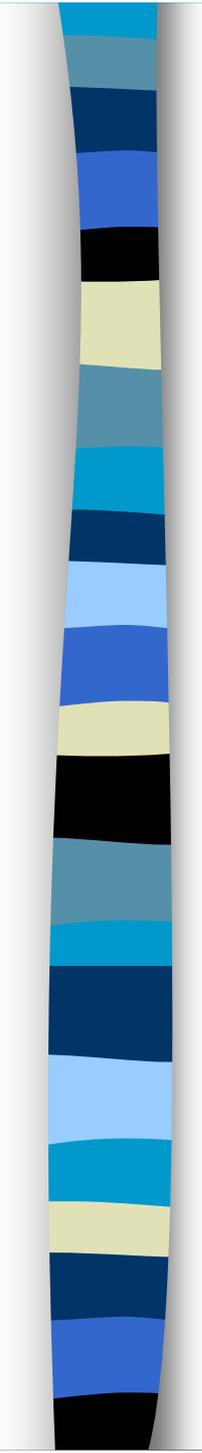
Population temporal series of different passerine species with Hurst coefficient  $H < 1/2$ .



***Importancia de la  
intensidad y frecuencia  
de las perturbaciones en  
la estrategia  
reproductiva:  
heterocarpia vs.  
homocarpia.***

- 
- Se ha realizado un modelo iterativo mediante el cual se evalúan las estrategias reproductivas de las plantas en ambientes con distintas frecuencias y diferente intensidad de sequías (u otras perturbaciones). Se comparan dos estrategias reproductivas extremas: La estrategia “homocárpica”, en la que todas las semillas germinan en la primavera siguiente, sin dormición, y la estrategia “heterocárpica”, en la que germinan la mitad de las semillas existentes cada año.

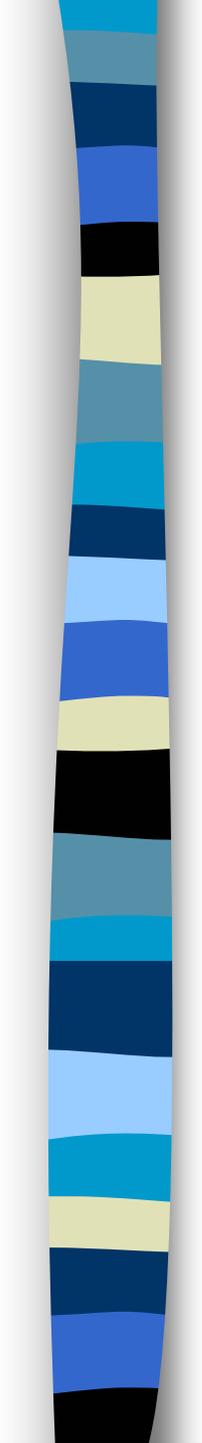
- 
- Se comprueba que este tipo de heterocarpia es ventajosa en ambientes con perturbaciones fuertes, como sequías de gran intensidad, en las que llegan a morir un porcentaje alto de la población. Sin embargo, la frecuencia con la que se producen tales perturbaciones no produce cambios en la ventaja de una estrategia sobre otra.



# *El modelo*

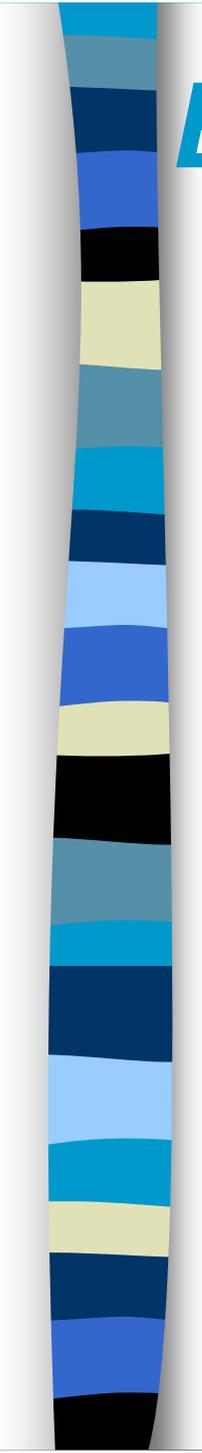
## ■ El territorio

- El territorio se ha modelizado mediante una cuadrícula de  $n \times n$ , doblemente cilíndrica para que no tenga fronteras. Es decir, las celdas próximas a una celda del borde derecho,  $(1, j)$ , son además de  $(1, j-1)$ ,  $(1, j+1)$ ,  $(2, j-1)$ ,  $(2, j)$ ,  $(2, j+1)$ , las celdas de coordenadas:  $(n, j-1)$ ,  $(n, j)$  y  $(n, j+1)$ . Con igual criterio se gestionan los bordes superior e inferior y el borde derecho. El modelo se ha implementado en un programa en C++.



# *El modelo*

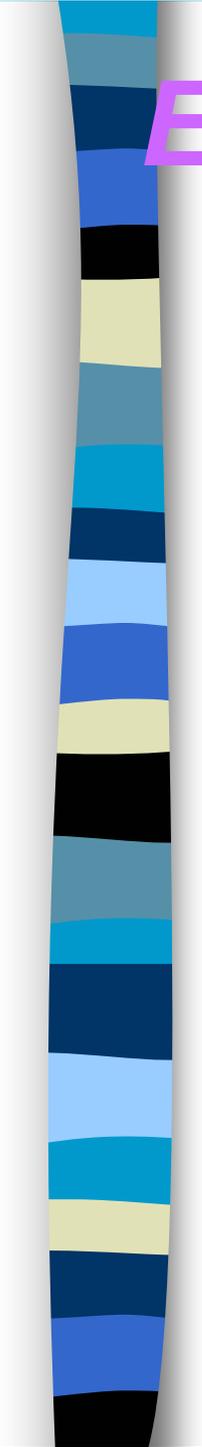
- **Variables independientes**
- Tiempo en años,  $t$ ,
- Número de semillas esparcidas por planta:  $s_p$ ,
- Número máximo de plantas por celda:  $m_p$ ,
- Número de semillas iniciales, por celda,  $s_0$ ,
- Probabilidad de que ocurra una perturbación,  $OP$ ,
- Intensidad de la perturbación,  $PI$ .



# El modelo

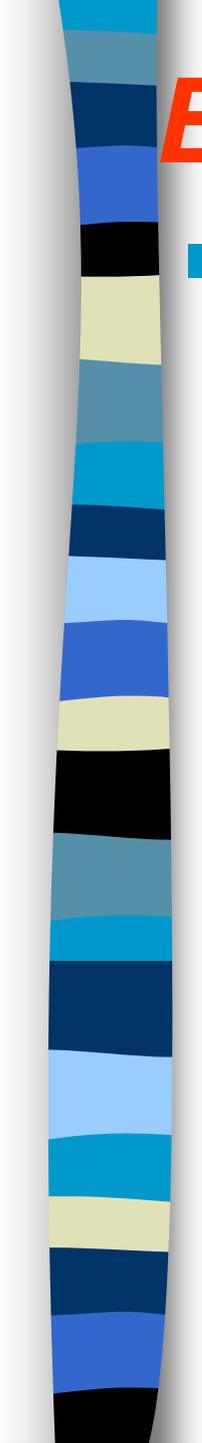
## ■ Variables dependientes

- $s(i, j, t)$ , número de semillas que han caído en el año  $t$  en la celda  $(i, j)$ ,
- $S_{HO}(t)$ , número de semillas de la población homocárpica, en cada celda, en el año  $t$ ,
- $S_{HE}(t)$ , número de semillas de la población heterocárpica, en cada celda, en el año  $t$ ,
- $PA_{HO}(t)$ , número de plantas adultas homocárpicas, en cada celda, en el año  $t$ ,
- $PA_{HE}(t)$ , número de plantas adultas heterocárpicas, en cada celda, en el año  $t$ ,
- $H(t)$ , número de huecos libres para plantas adultas, en cada celda en el año  $t$ ,
- $\alpha(t)$ , probabilidad de que una semilla homocárpica se convierta en planta, en un hueco libre, en cada celda en el año  $t$ .



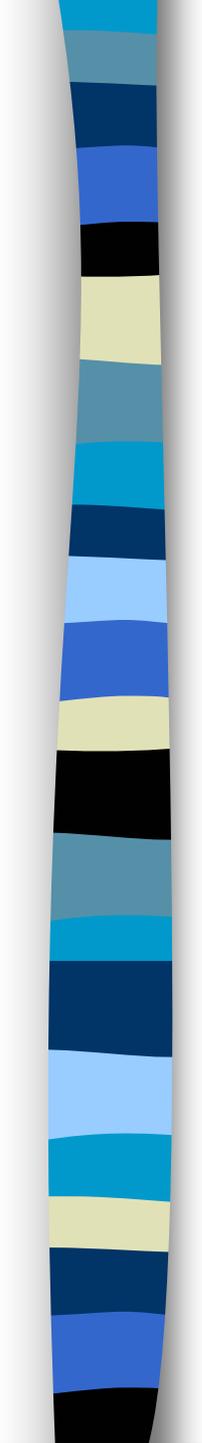
# El modelo

- **Dispersión de las semillas:**
- Cada planta adulta, cada año, esparce un número fijo de semillas,  $sp$ , que en los estudios realizados, se ha supuesto pequeño, 3, 5 o 8, pues se están considerando ya aquellas semillas que mueren por una u otra causa.
- La forma de implementar como se esparcen esas semillas ha sido considerar la propia celda, de coordenadas  $i, j$ , y las ocho celdas próximas:  $(i-1, j-1)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i-1, j+1)$ ,  $(i, j-1)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j-1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j+1)$ , y distribuir aleatoriamente las  $sp$  semillas entre las nueve celdas.



## El modelo

- La variable  $s(i, j, t)$  se obtiene sumando todas las semillas que hayan caído en la celda  $(i, j)$  en el año  $t$ . Esta variable depende, naturalmente, del número de plantas de esa especie que haya en el año  $t$ :  $PA_{HO}(t)$ ,  $PA_{HE}(t)$ , tanto en la celda  $(i, j)$  como en las celdas contiguas. Y depende también del número de semillas esparcidas por cada planta:  $sp$ . Luego  $s(i, j, t) = f(sp, PA_{HO}(i, j, t), PA_{HE}(i, j, t), PA_{HO}(i-1, j-1), PA_{HO}(i-1, j), PA_{HO}(i-1, j+1), PA_{HO}(i, j-1), PA_{HO}(i, j+1), PA_{HO}(i+1, j-1), PA_{HO}(i+1, j), PA_{HO}(i+1, j+1), PA_{HE}(i-1, j-1), PA_{HE}(i-1, j), PA_{HE}(i-1, j+1), PA_{HE}(i, j-1), PA_{HE}(i, j+1), PA_{HE}(i+1, j-1), PA_{HE}(i+1, j), PA_{HE}(i+1, j+1))$ .



# Sistema dinámico

- El modelo utilizado para la celda (i, j) es:
- **Inicio:**
- $S_{HO}(0) + S_{HE}(0) = s_0$ ,
- $PA_{HO}(0) = 0$ ,
- $PA_{HE}(0) = 0$ ,
- **Algoritmo:**
- $S_{HO}(t+1) = s(i, j, t)$ ,
- $S_{HE}(t+1) = s(i, j, t) + \frac{1}{2} * S_{HE}(t)$ ,
- $PA_{HO}(t+1) = (1-OP*(1-PI))*(PA_{HO}(t) + \alpha(t) * H(t))$
- $PA_{HE}(t+1) = (1-OP*(1-PI))*(PA_{HE}(t) + (1 - \alpha(t)) * H(t))$ , siendo  $\alpha(t) = S_{HO}(t) / (S_{HO}(t) + S_{HE}(t)/2)$ , y
- $H(t) = mp - PA_{HO}(t) - PA_{HE}(t)$ .

**Semillas, plántulas y plantas de dos especies distintas (esp 2 germinan la mitad) . Sec Hel variable, Algoritmo p**

Archivo Operaciones Salir

Año Siguiente Siembra

Planta Semillas Inicia

100 años

Muestra Variables

Historial

Semillas dispers: 411 483

Semillas: 411 600

Plántulas: 54 166

Plantas: 89 97

Año Pasado

0 2 2 3 2 3 0 2 3 0

0 6 1 4 3 2 0 1 0 0

Plantas

60 47

68 85

78 93

18 27

137 161

89 97

Año 100

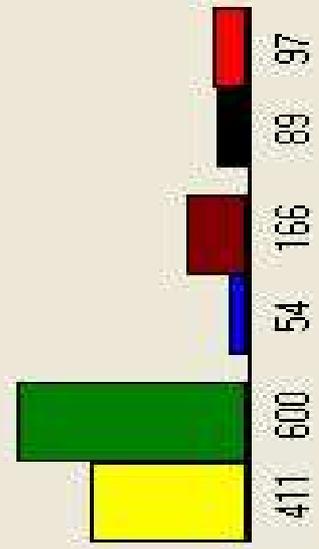
4 0 0 3 2 2	4 0 1 7 1 0	4 0 1 3 1 2	3 0 1 8
4 0 0 8 2 1	4 0 0 7 2 0	1 0 0 2 1 2	3 1 0 6
3 0 0 8 2 2	3 0 2 5 2 0	4 1 0 6 0 1	3 0 1 4
2 0 1 9 2 1	0 1 0 2 1 1	4 0 1 6 1 1	2 1 1 6
2 0 0 5 2 0	4 1 2 4 1 1	2 0 1 7 1 1	2 0 0 6
5 0 1 8 1 0	6 1 2 4 1 0	4 0 0 5 1 2	1 0 1 8
2 0 0 4 1 1	3 0 1 4 2 2	4 0 1 7 2 0	3 0 1 0 1
4 1 1 5 1 1	2 1 1 3 2 0	3 1 0 4 1 2	1 1 3 5
3 0 2 8 3 2	5 3 1 4 1 0	9 2 1 2 0 1	1 0 2 0 0

Semillas, Plántulas y Plantas

Semillas: 411 600

Plántulas: 54 166

Plantas: 89 97

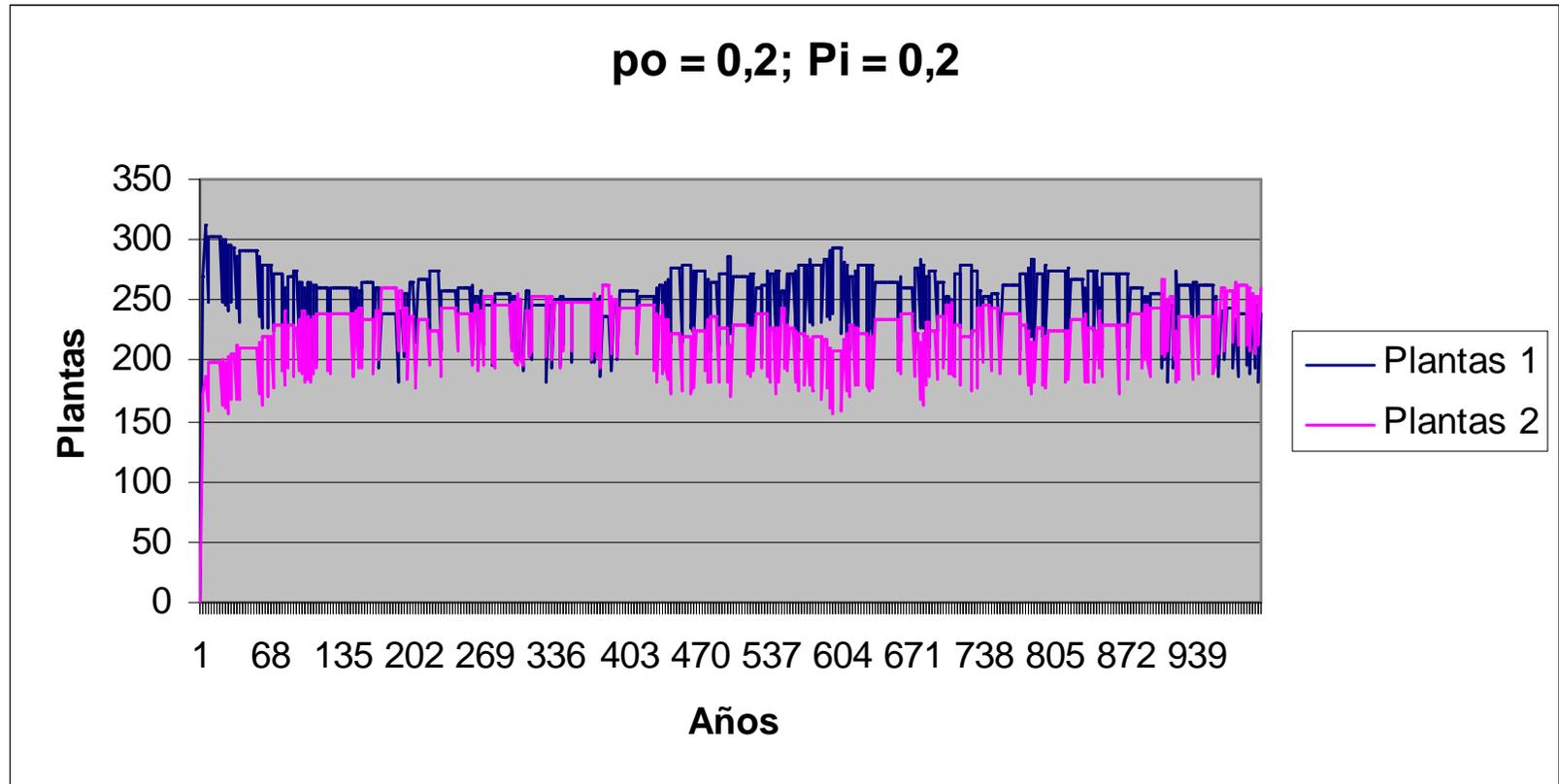
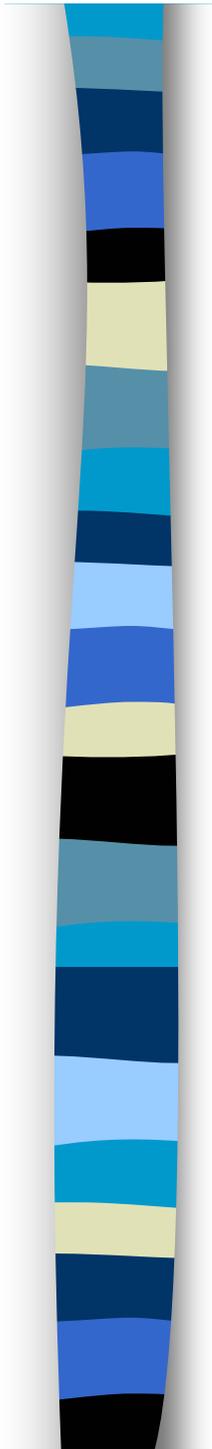


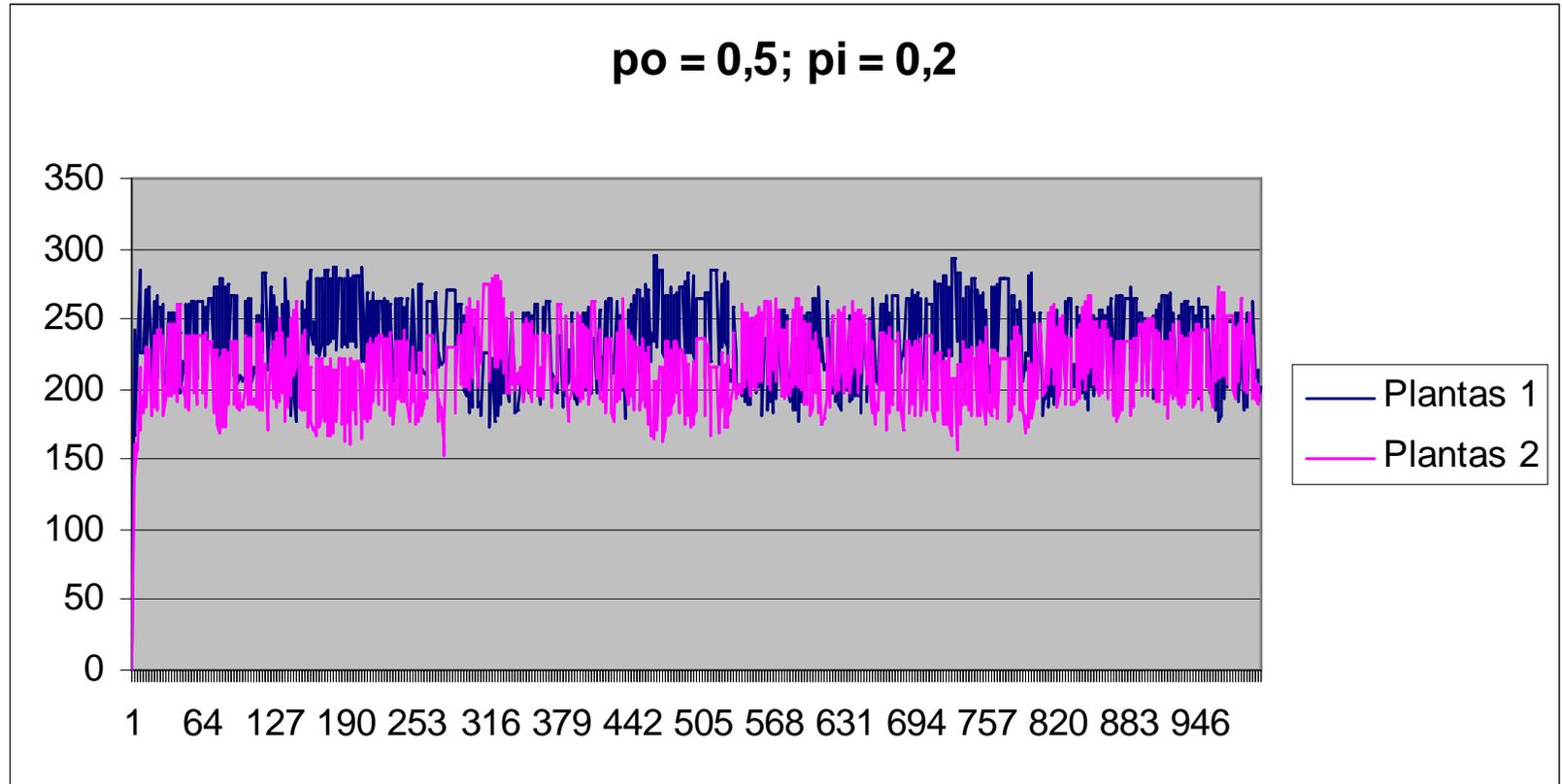
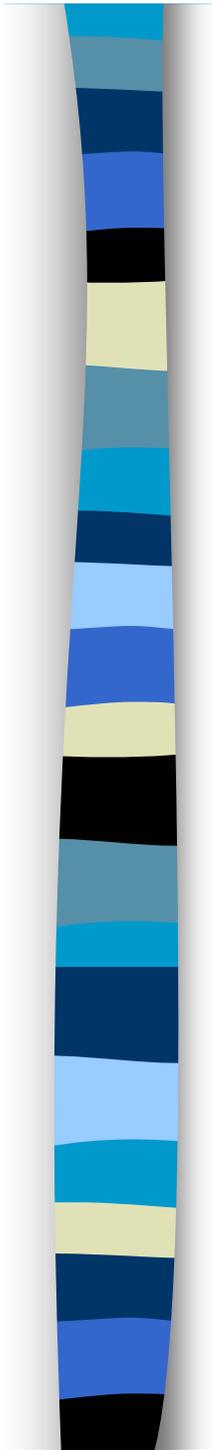
Estaciones del Año

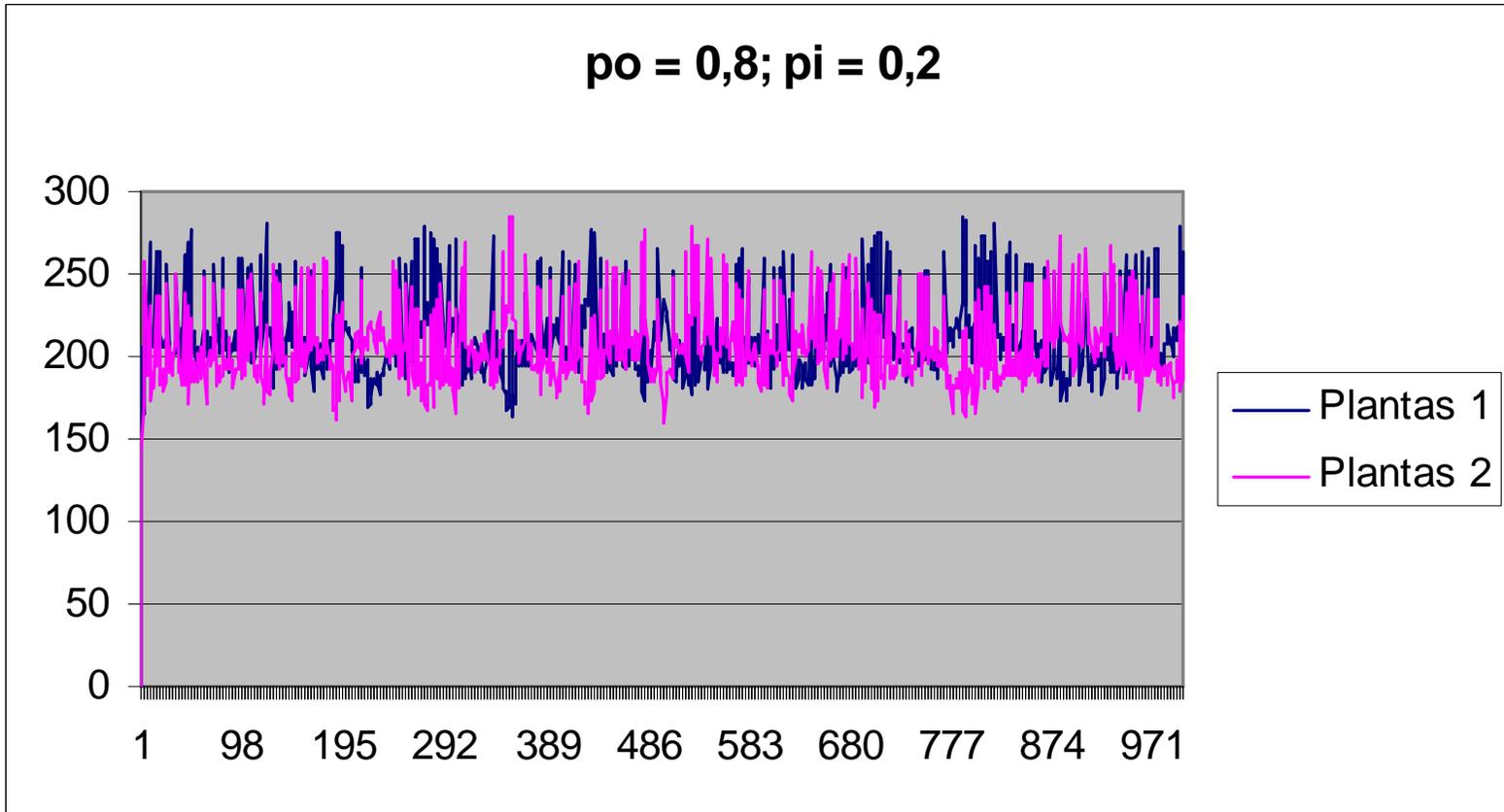
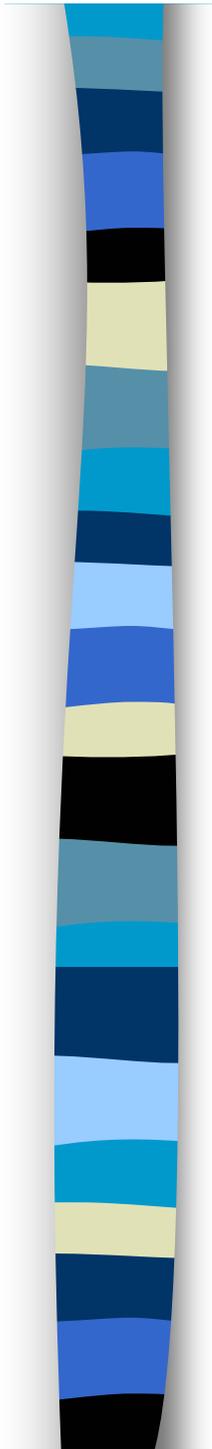
411 600

54 166

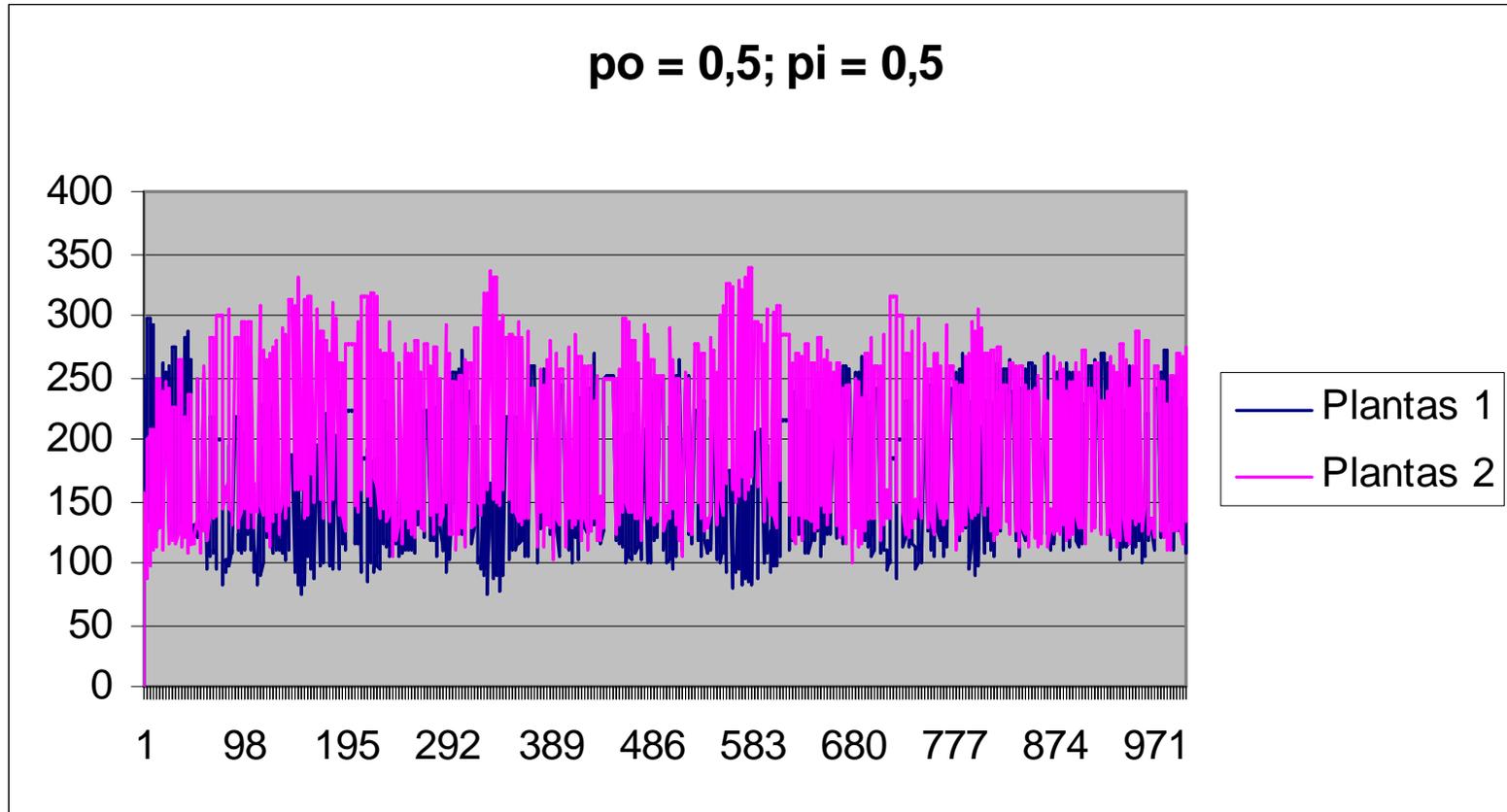
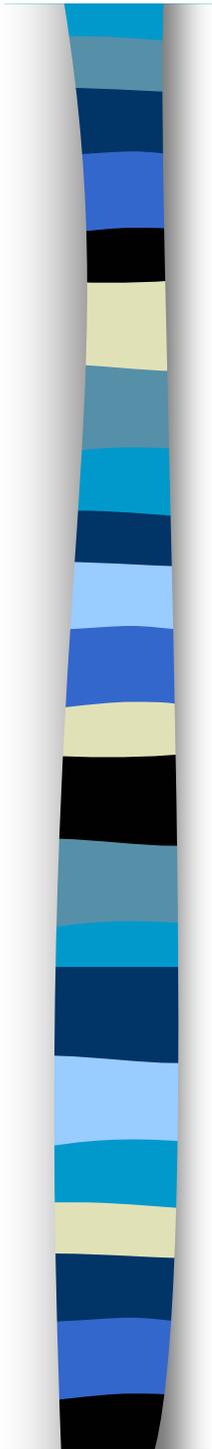
89 97

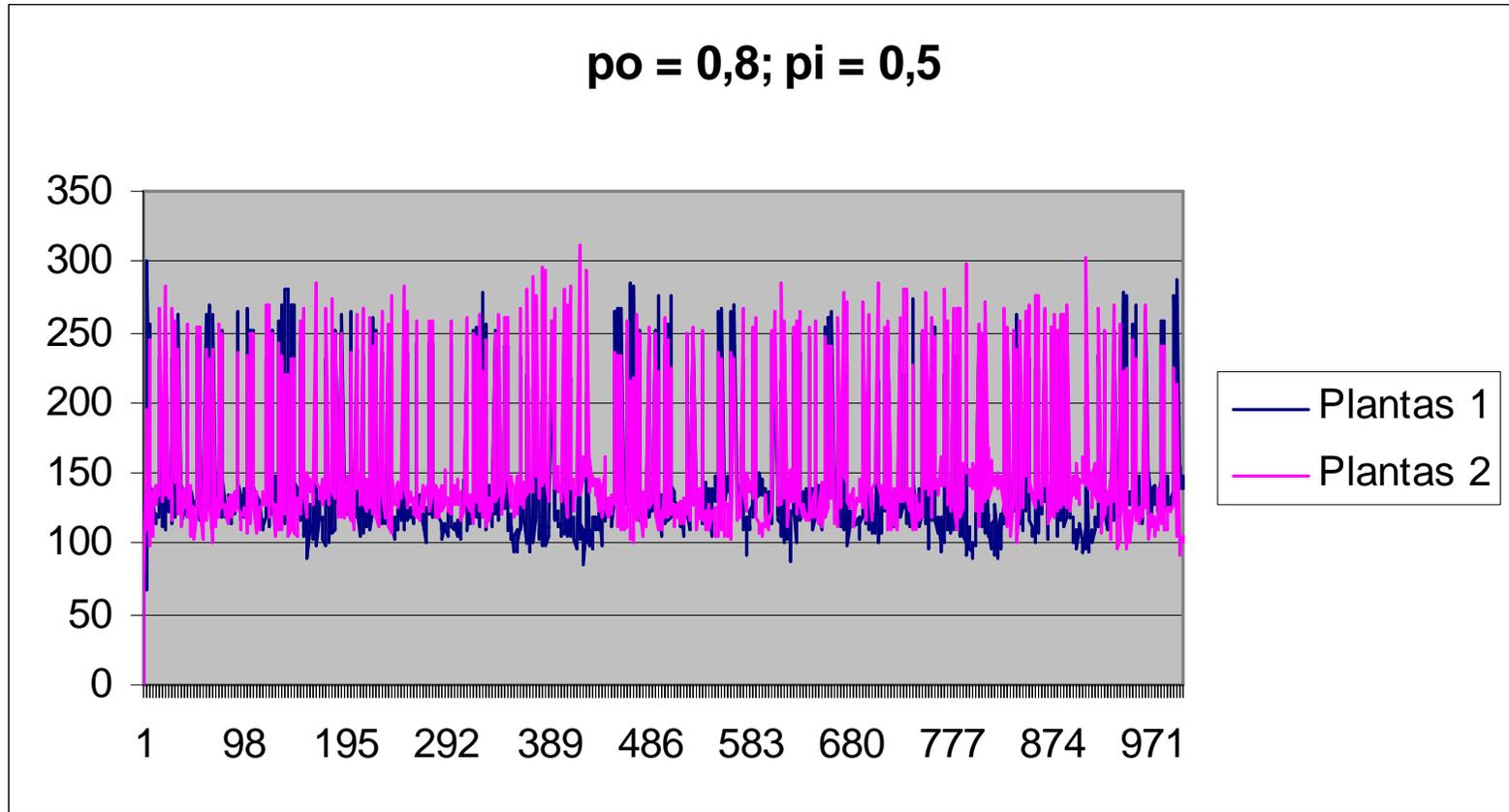
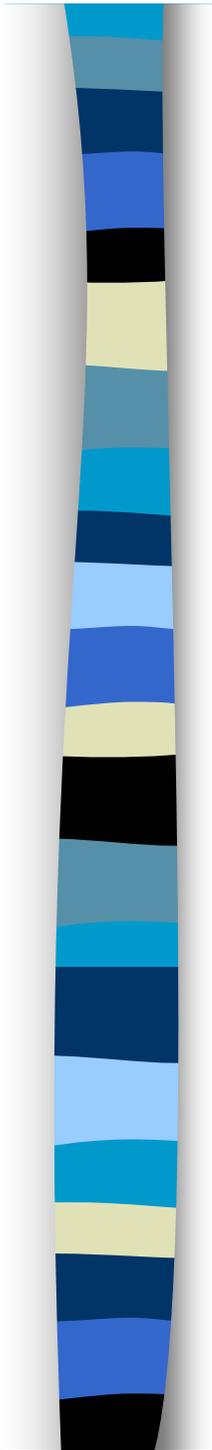


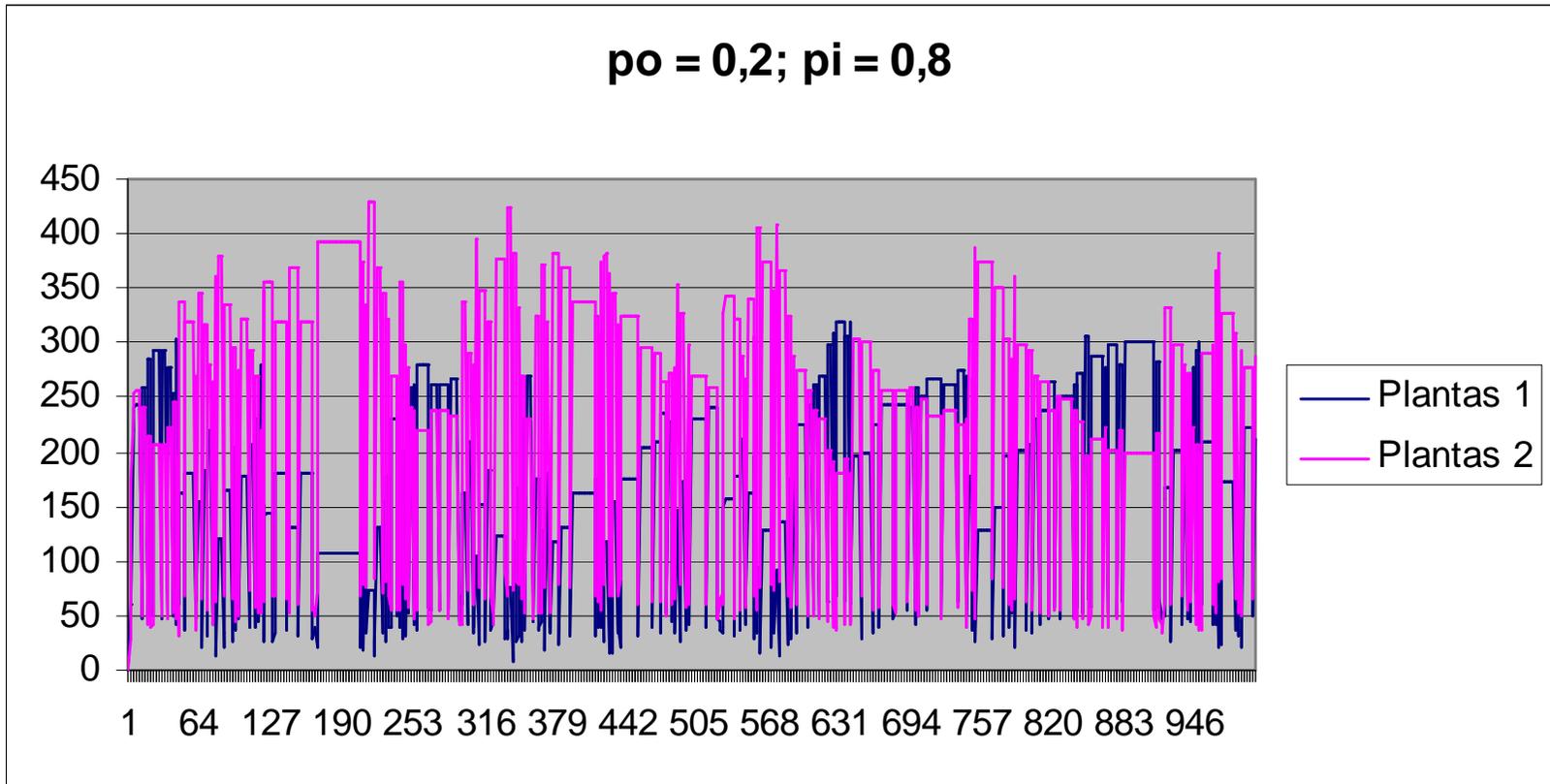
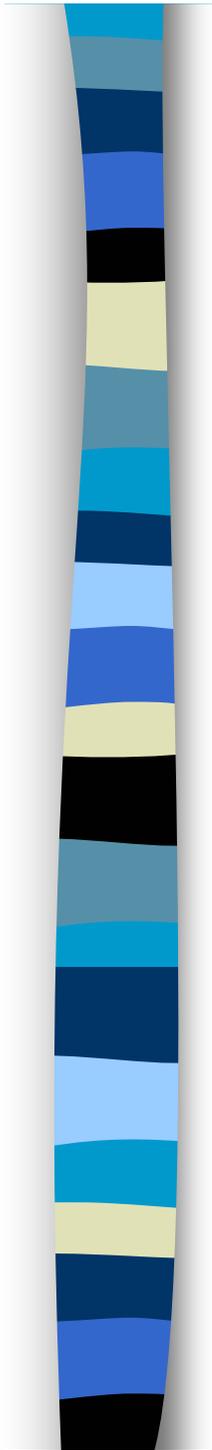


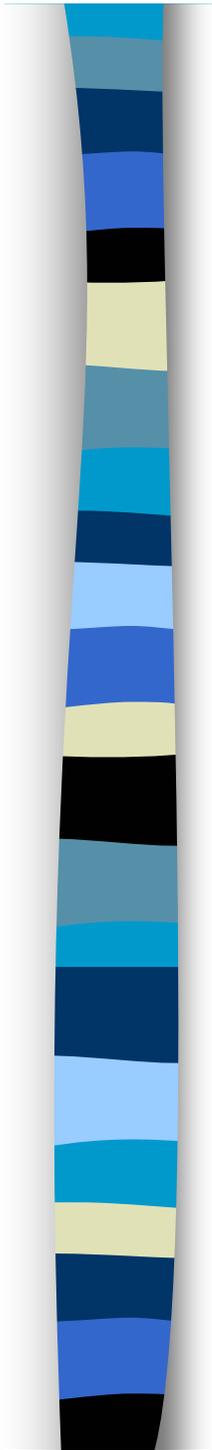




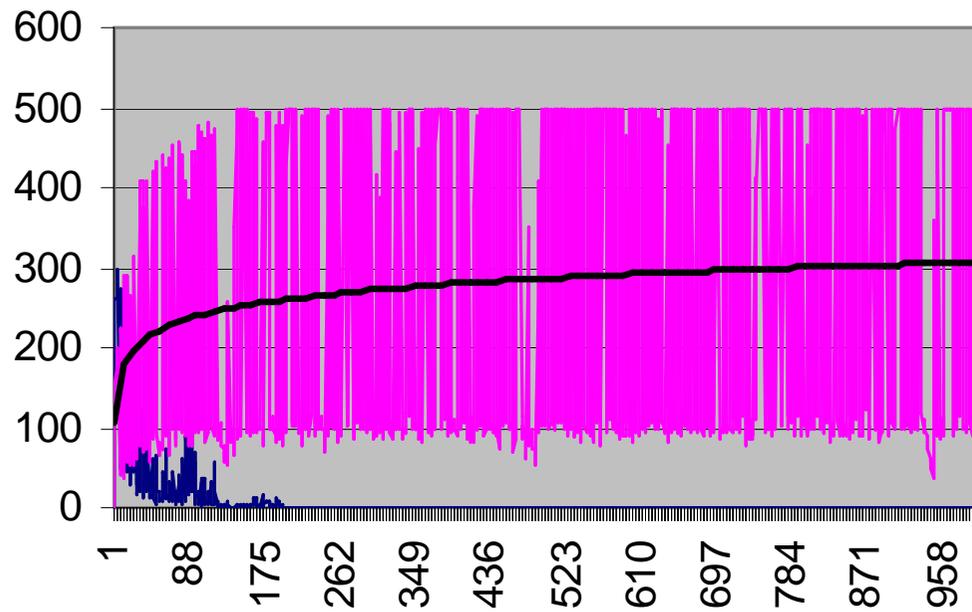






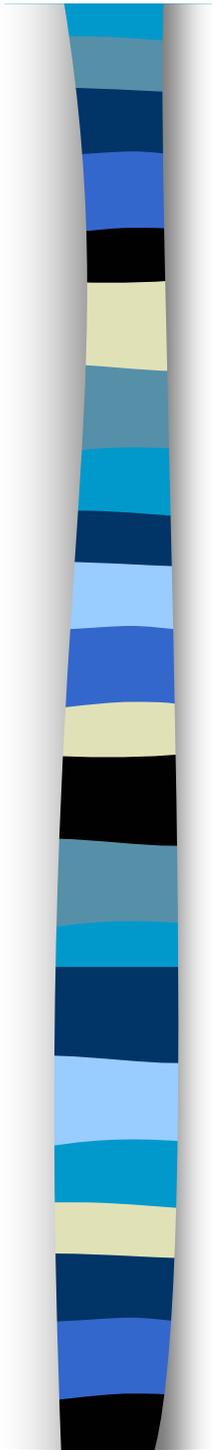


$p_o = 0,5; p_i = 0,8$

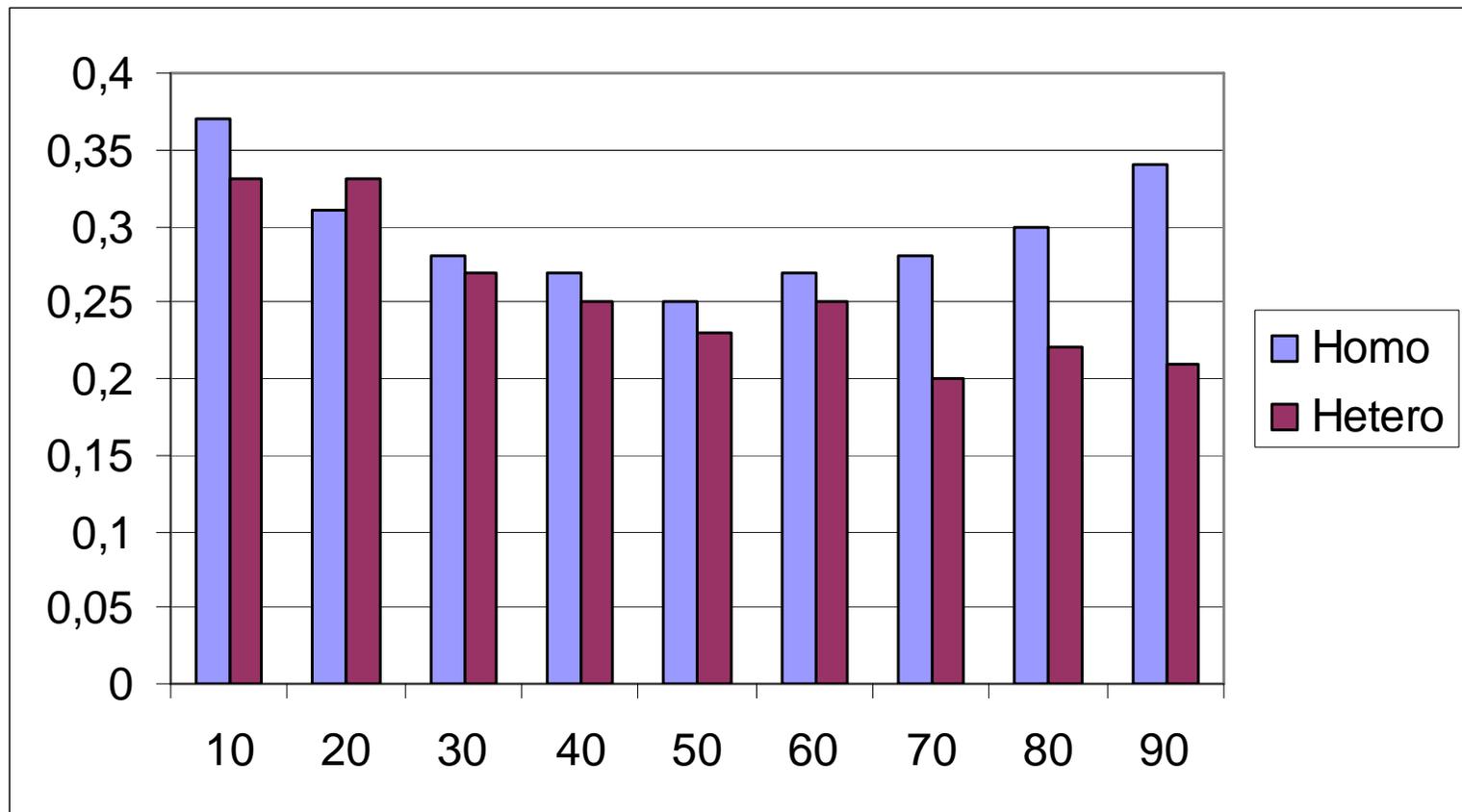


- Plantas 1
- Plantas 2
- Logarítmica (Plantas 2)

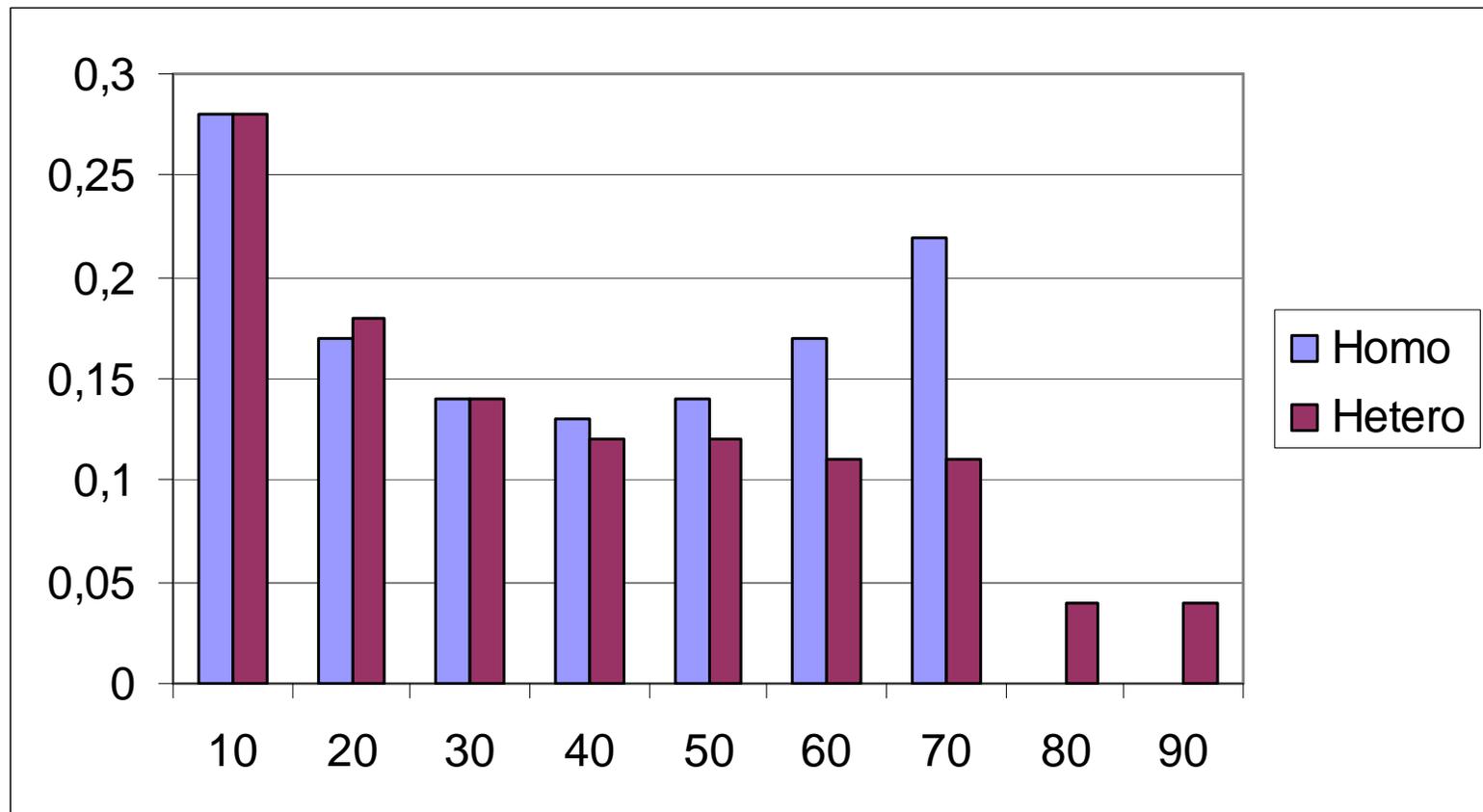
$$y = 28,962\ln(x) + 106,81$$

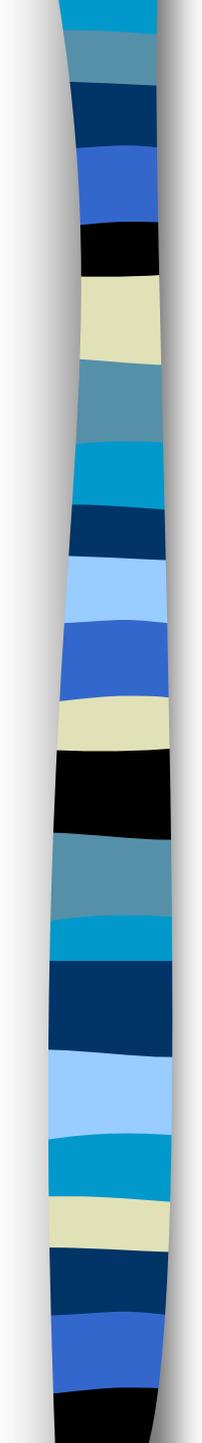


Variación del coeficientes de Hurst con respecto a la intensidad de las perturbaciones, para la especie homocárpica y heterocárpica con una probabilidad de perturbación (PO) de 0,5 y obtenidos a partir de una serie temporal con los 80 valores posteriores a los 20 primeros (cuando las especies empiezan a estabilizarse, pero antes de que se produzca la extinción de una de ellas)



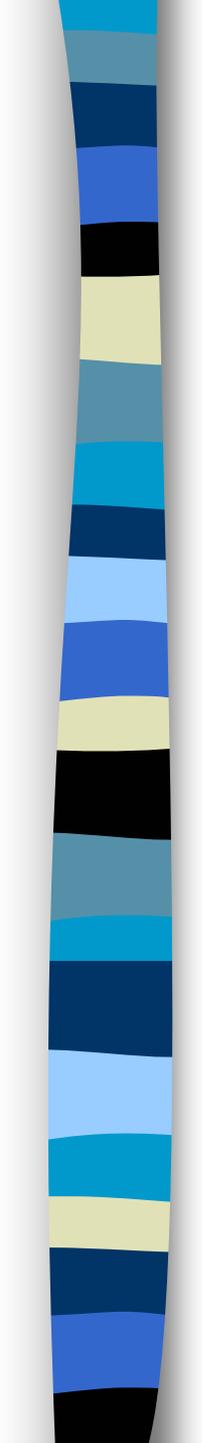
Variación del coeficientes de Hurst con respecto a la intensidad de las perturbaciones, para la especie homocárpica y heterocárpica con una probabilidad de perturbación (PO) de 0,5 y obtenidos a partir de una serie temporal con los 800 valores posteriores a los 200 primeros (cuando las dinámicas ya son claramente estables). En los valores de la especie homocárpica de IP 0,80 y 0,90, la especie está extinguida, por lo que no se puede calcular el coeficiente de Hurst





## Referencias

- Barnsley, M: **Fractals everywhere**. Academic Press, 1988.
- Barrallo, J.: **Geometría fractal, algorítmica y representación**. Anaya.
- Beardon, A. F.: *Symmetries of Julia sets*. Bull. London Math. Soc. 22; 576-582. 1990.
- Blackledge, J. M.: *On the Synthesis and Processing of Fractal Signals and Images*. UK. Sc. Eng. Res. C. 1992.
- Devaney, R. L.: **Chaos, fractals and dynamics**. AddisonWesley. 1990.
- Edgar G. A.: **Classics on fractals**. Addison-Wesley. 1993.
- Falconer, K. J.: **The geometry of fractals sets**. Cambridge University Press, 1985.
- Guzmán, M.; Martín, M.; Morán, M.; Reyes, M.: **Estructuras fractales y sus aplicaciones**. Labor. 1991.
- Hutchinson, J. E.: *Fractals and Self Similarity*. Indiana Univ. Math. Jour. Vol. 30. nº 5. 713-747. 1981.
- Mandelbrot, B.: **Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión**. Tusquets.
- Mattila, P.: **Lectures notes on Geometric Measure Theory**. Asociación matemática española, 1986.
- Peitgen; Jurgens; Saupe: **Fractals for the classroom**. Springer-Verlag. Vol. I, 1991; Vol II, 1992.
- Peitgen, H. O.; Jurgens; Saupe: **Chaos and fractals**. Springer-Verlag, 1992.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The beauty of fractals**. Springer-Verlag, 1986.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The science of fractals**. Springer-Verlag, 1988.
- Stewart, I: **¿Juega Dios a los dados?** Edic. Crítica. Drakontos, 1991.



# Referencias

- HASTINGS, H. M. & SUGIHARA, G. (1993) "*Fractals, a user's guide for the natural sciences.*" Oxford University Press, Oxford.
- HUSTINGS, F. (1992) "*Bird census news*" Vol. 5 n° 2 produced by Sovon on behalf of: International Bird Census Committee & European Ornithological Atlas Committee, Netherlands.
- SUGIHARA, G. & MAY, R. M. (1990) "*Applications of Fractal in Ecology*" Trends Ecol. Evol., vol 5, n° 3, 79-86.