

# Geometría de lo irregular

*Adela Salvador*

*Universidad Politécnica de Madrid*

# Esquema del curso

---

- **Fractales**
- **Sistemas dinámicos discretos**
  - En  $\mathbb{R}$
  - En  $\mathbb{C}$ :
    - Conjuntos de Juliá y conjunto de Mandelbrot
- **Sistemas dinámicos continuos**
  - Sistema de Lorenz. Atractores extraños

# Esquema

---

- **Introducción. Cambio de paradigma**
- **¿Dónde hay fractales?**
- **Fractales autosemejantes**
- **Precisiones sobre la noción de fractal**
- **Caos y fractales**
- **Dimensión fractal de series temporales.  
Coeficiente de Hurst**
- **Referencias**
- **Fractales en la web**

# Introducción

- Cambio de paradigma
- Líneas de costa

Introducción

## Cambio de paradigma

---

*"El lenguaje de la naturaleza es matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas"*

*Galileo, Essays*

## Introducción

# Cambio de paradigma

*“Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el futuro como el pasado estarían presentes antes sus ojos”.*

*Laplace, Philosophical essays on probabilities*

Adela Salvador

## Introducción

# Cambio de paradigma

*“Incluso cuando las leyes naturales parecen no tener ningún secreto para nosotros, sólo podemos conocer la situación inicial aproximadamente... Puede ocurrir que... un pequeño error en la entrada nos produzca un enorme error en la salida. La predicción resulta imposible”.*

*Poincaré, Chance*

## Introducción

# Cambio de paradigma

---

*“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas de costa no son circunferencias, la corteza no es lisa, y la luz no viaja en línea recta”.*

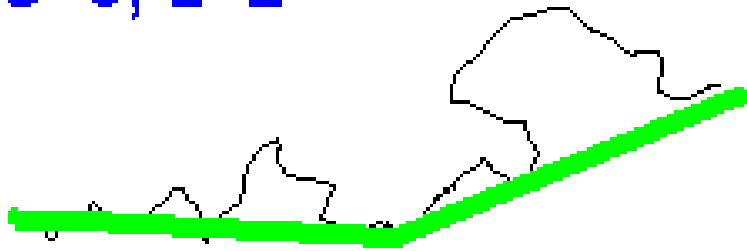
*Mandelbrot,*  
The fractal geometry of nature



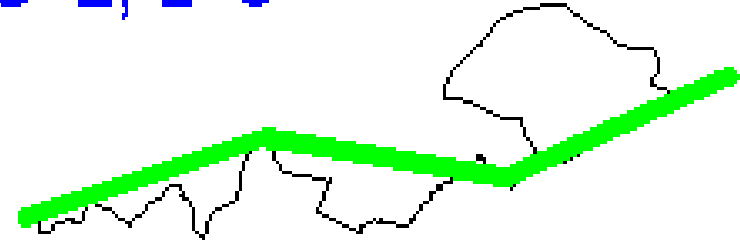
# Introducción

## Líneas de costa

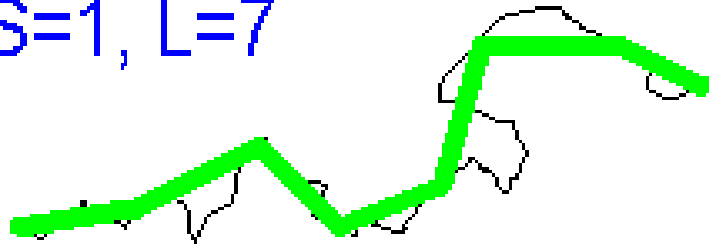
$S=3, L<2$



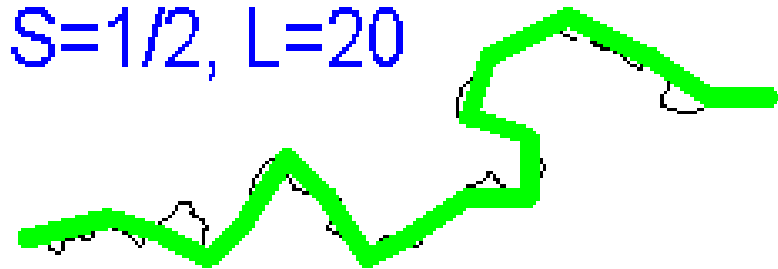
$S=2, L=3$



$S=1, L=7$



$S=1/2, L=20$



# Introducción

- Cuando la Matemática estudia la realidad, la simplifica, bien considerando que los procesos son lineales, bien suponiendo que las formas son suaves y regulares.
- Pero el uso del ordenador, que permite la rápida repetición de procesos, ha permitido ampliar el campo y estudiar, por ejemplo, los sistemas dinámicos no lineales, que ocasionan fenómenos complejos como el caos, y investigar las formas irregulares que dan lugar a la "geometría fractal".

# Introducción

---

- La dinámica no lineal supone hoy un cambio de rumbo en la Ciencia, un nuevo paradigma, pues incluso ha sido calificada como una tercera revolución.
- Si los sistemas dinámicos presentan sensibilidad a las condiciones iniciales se dice que hay caos.
- Caos y fractales están muy relacionados, aunque se pueden encontrar fractales sin caos, y caos sin fractales.



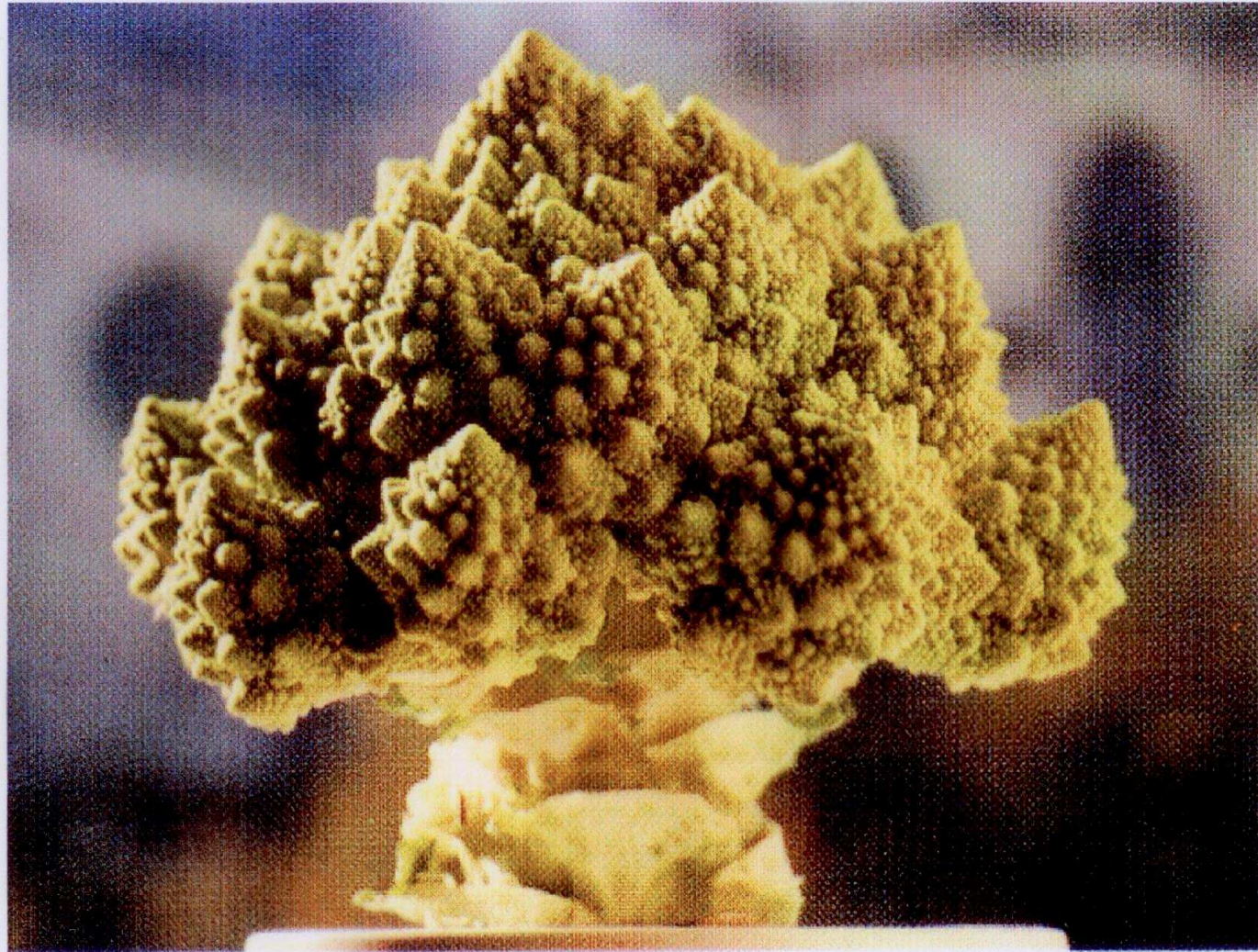
¿Dónde hay fractales?

## ¿Dónde hay fractales?

- ¿Qué son los fractales? ¿Dónde hay?
- La geometría, que antes explicaba el mundo que nos rodea mediante figuras sencillas, rectas, circunferencias... utiliza ahora objetos más complicados.
- Los fractales no sólo nos ayudan a ampliar el mundo de la geometría sino que nos surten de bellos ejemplos de sucesiones, funciones o probabilidad dentro de la matemática elemental, y aparecen al estudiar iteraciones, el teorema del punto fijo, sistemas dinámicos e interesantes problemas topológicos y de teoría de la medida dentro de la matemática superior.

# *La geometría propia de la naturaleza es la geometría fractal*

- Fronteras: costas, montañas, la orilla de un río, los bordes de una nube...
- Sistemas ramificados: árboles, el sistema arterial o pulmonar...
- Simular imágenes con gran ahorro de memoria en el ordenador
- Predicción en **bolsa**
- Predicción de la extinción de especies en Biología

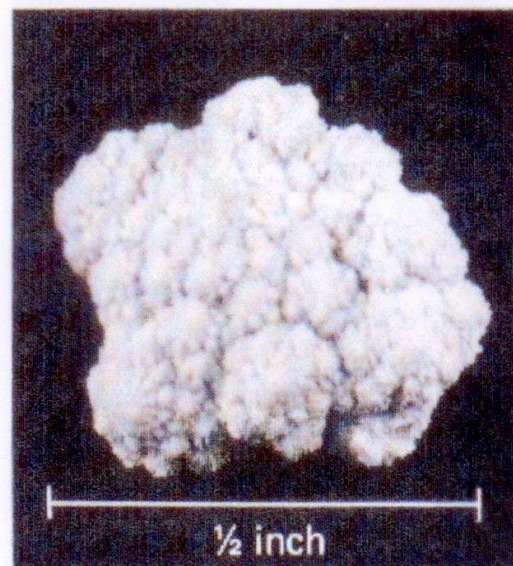
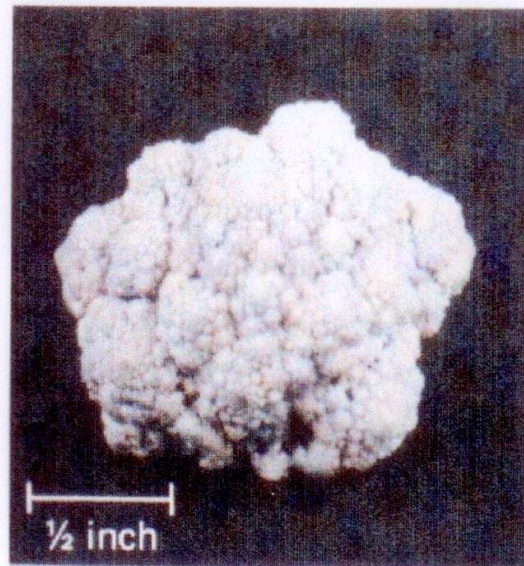
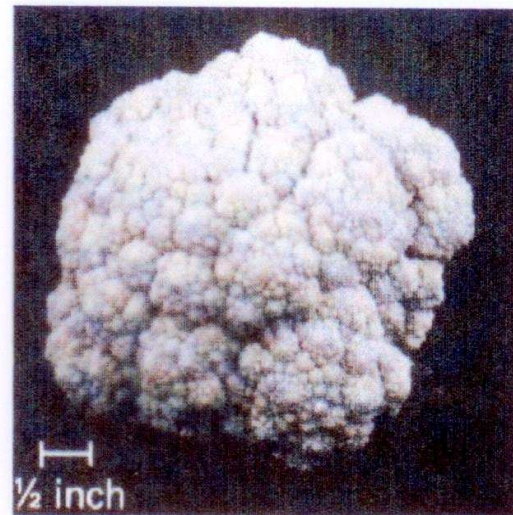
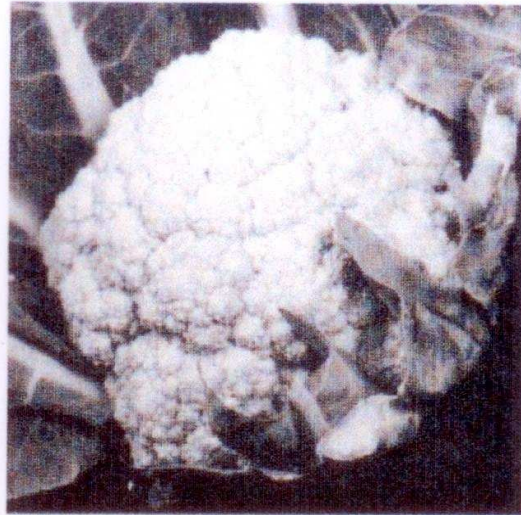


Broccoli Romanesco.

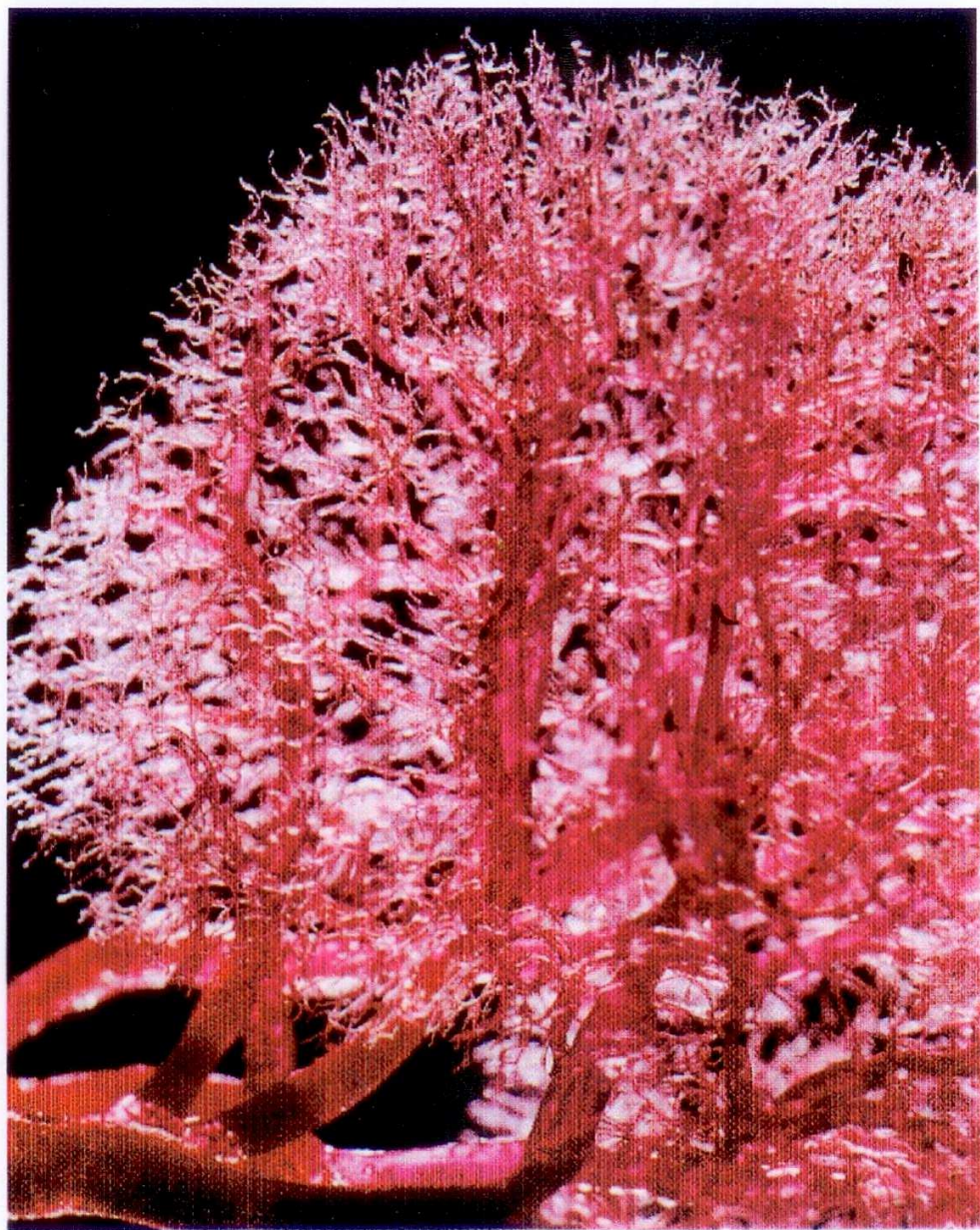


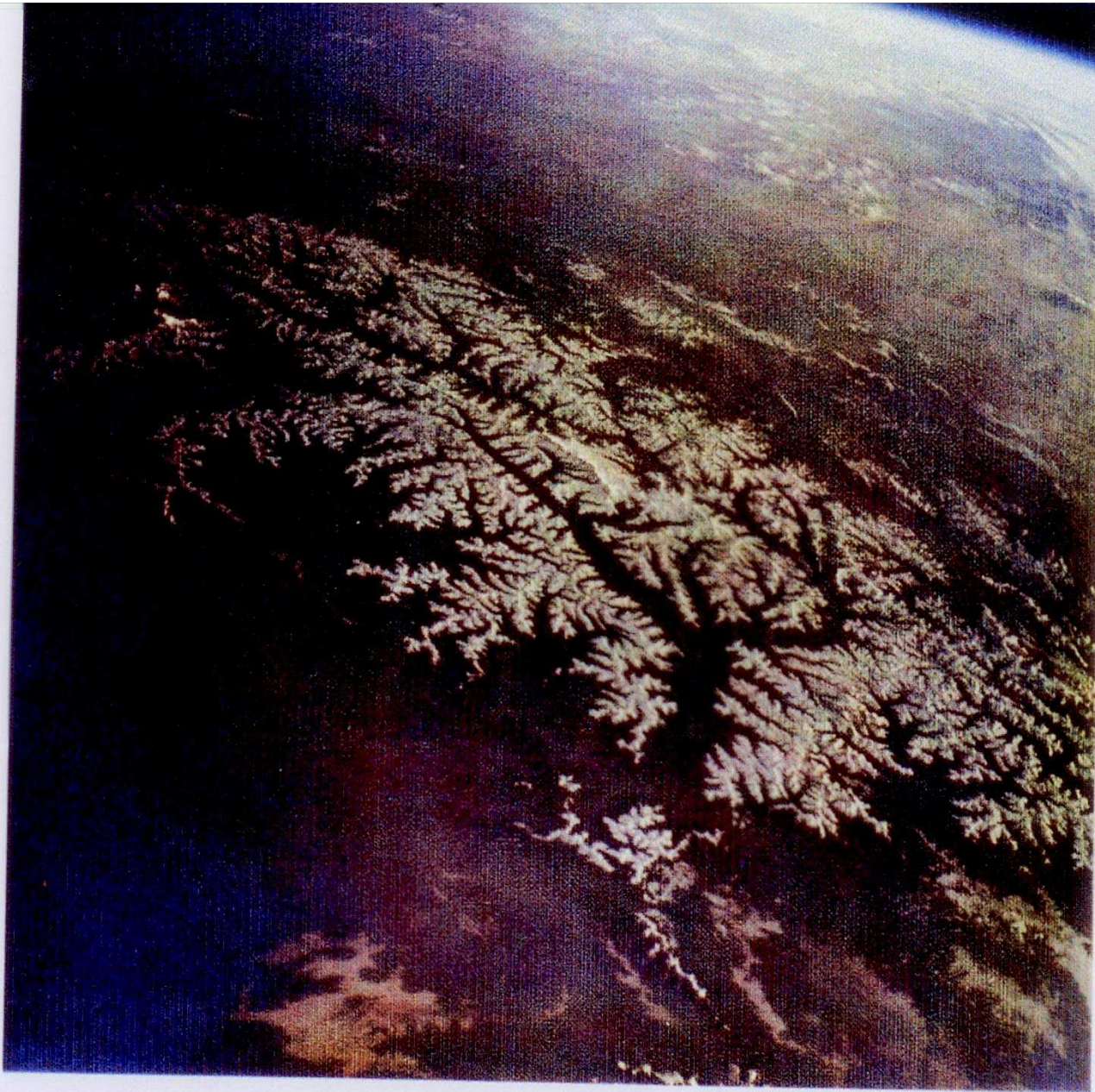
Broccoli Romanesco, detail.





The self-similarity of an ordinary cauliflower is demonstrated by dissection and two successive enlargements (bottom). The small pieces look similar to the whole cauliflower head.

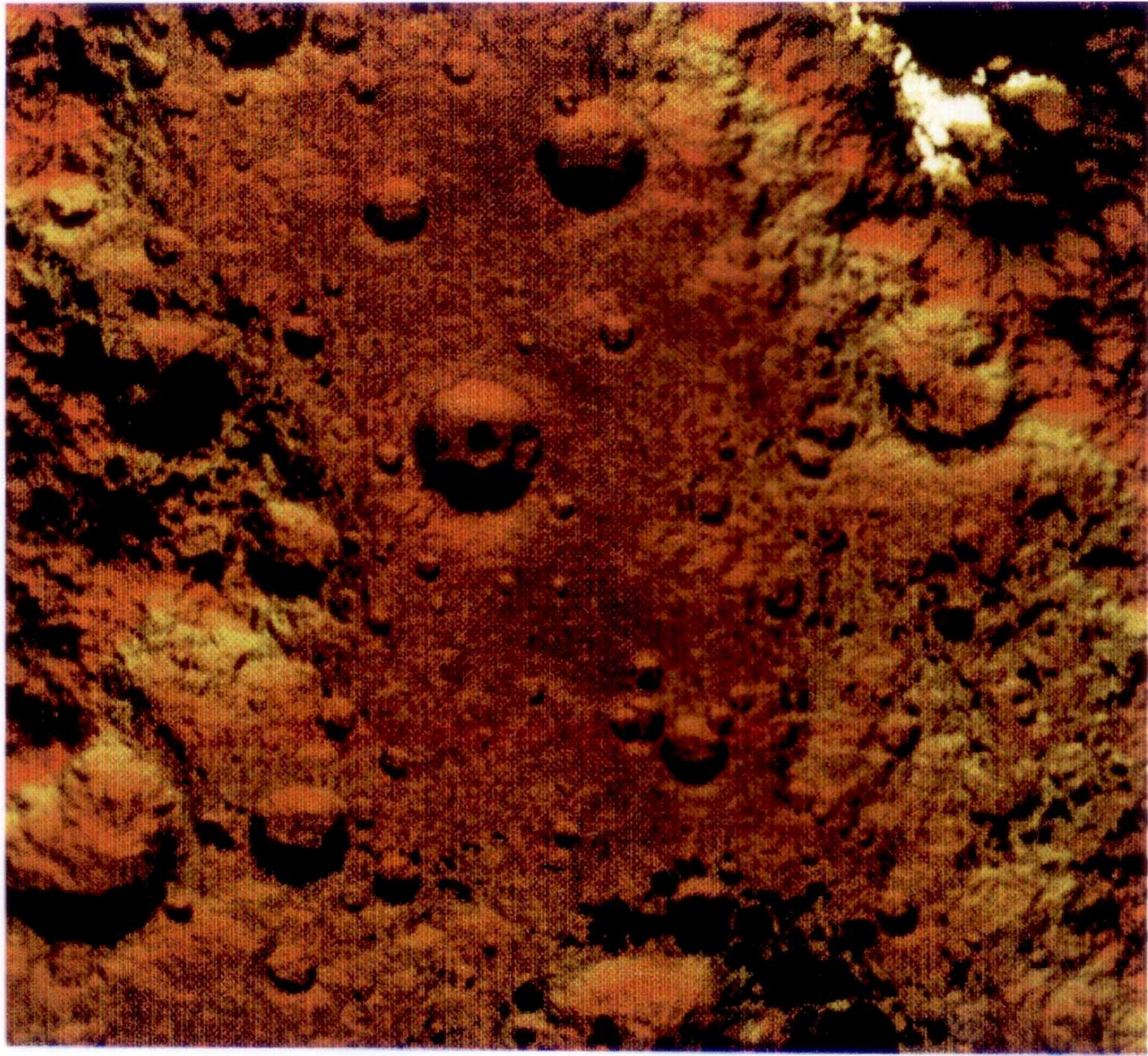




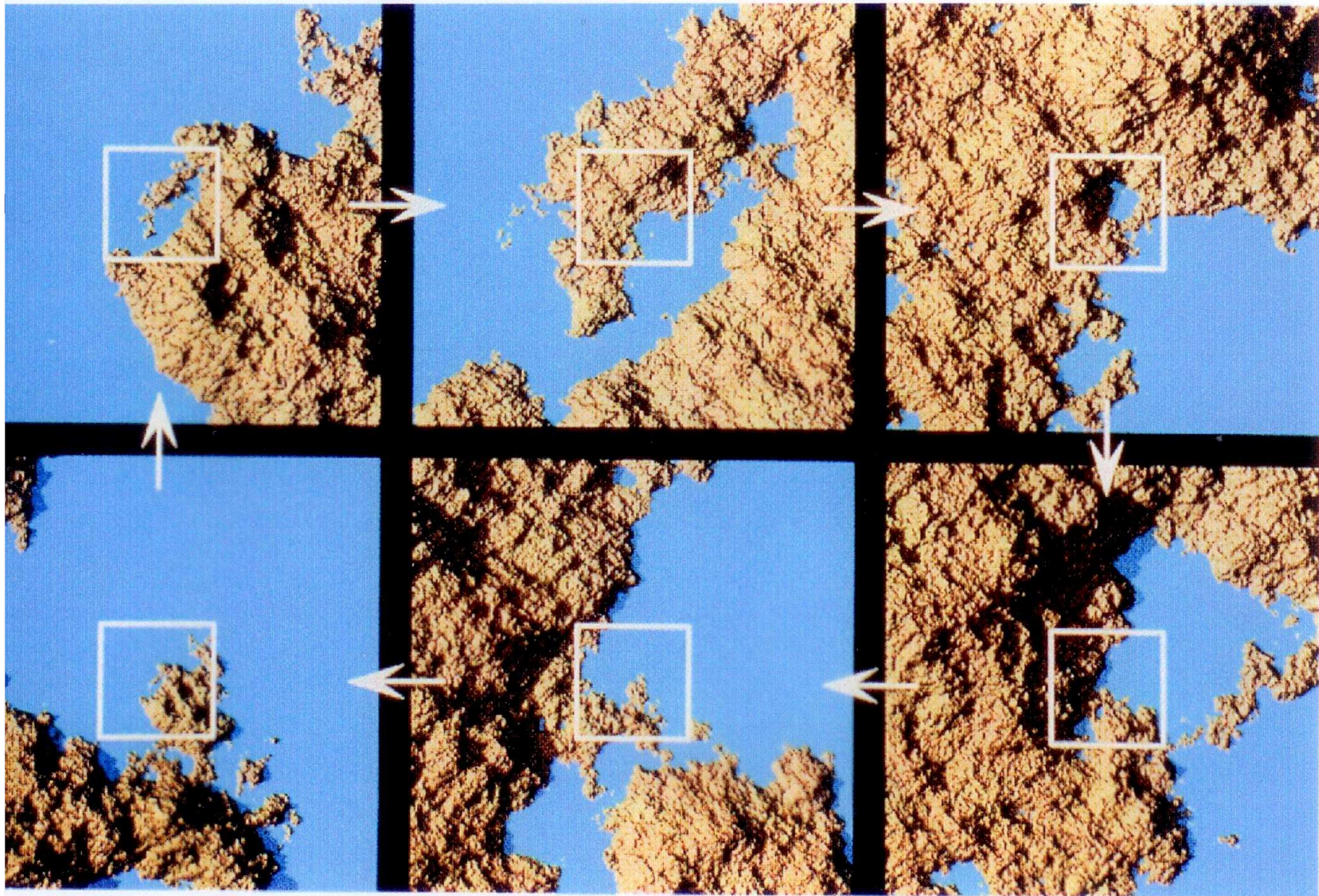
Dawn over the Himalayas, Gemini IV image, © Dr. Vehrenberg KG.



Wadi Hadramaut, Gemini IV image, © Dr. Vehrenberg KG.

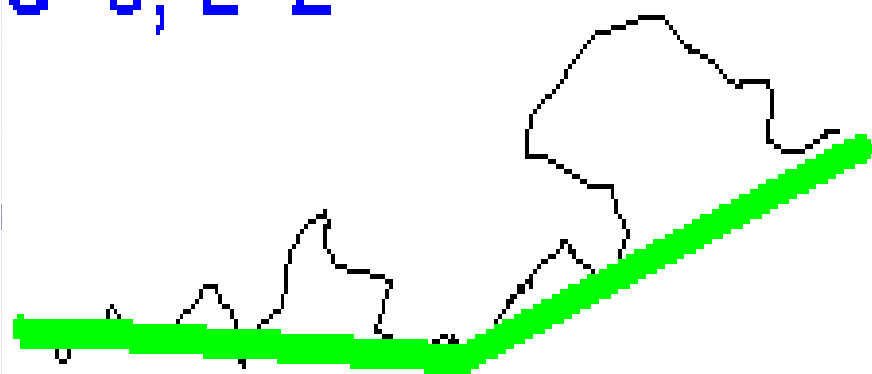


Fractal Moon Craters, © R.F. Voss.



Fractal coast, repeating after 6 magnifications, © R.F. Voss.

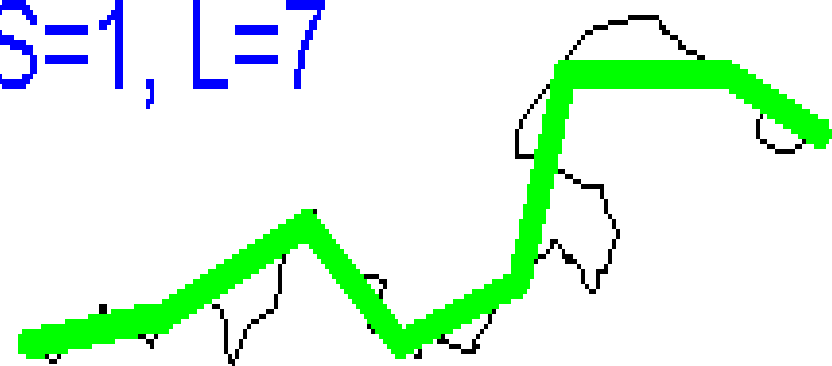
$S=3, L=2$



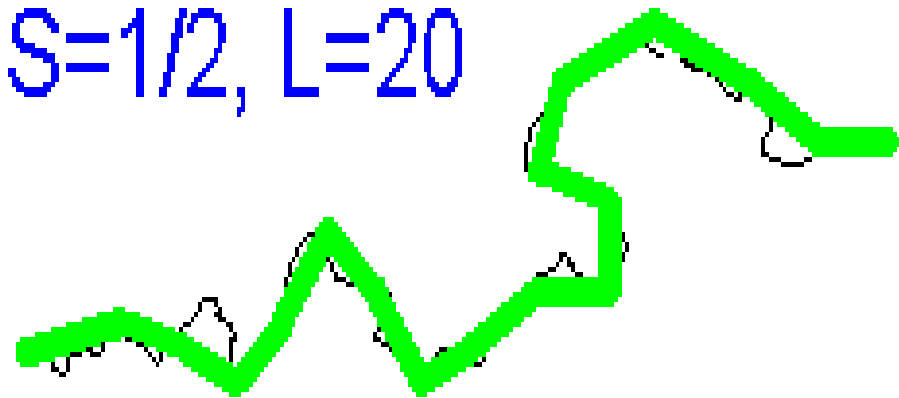
$S=2, L=3$



$S=1, L=7$



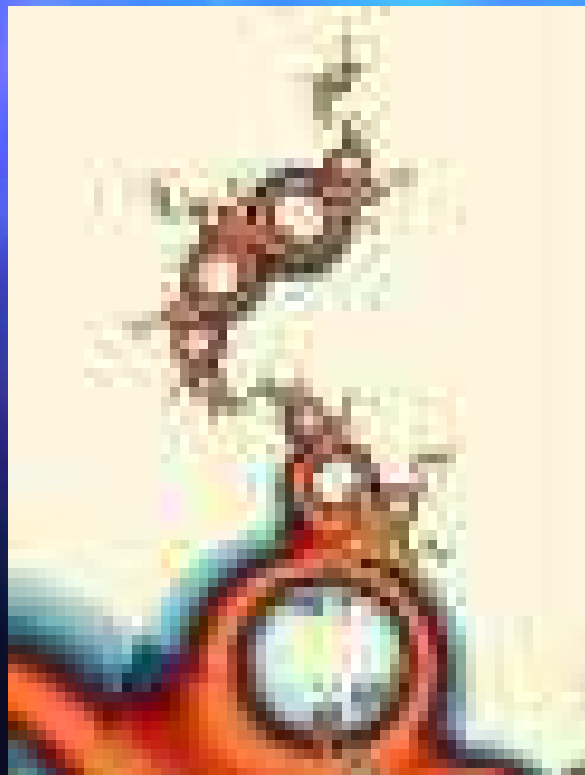
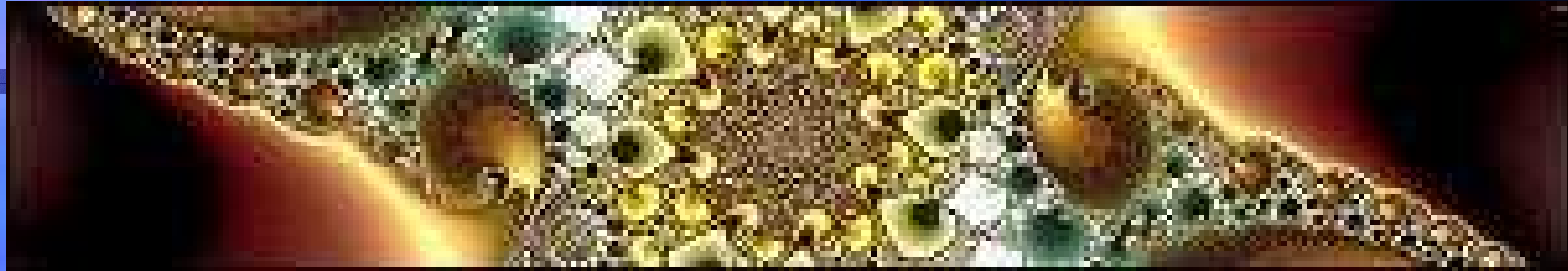
$S=1/2, L=20$





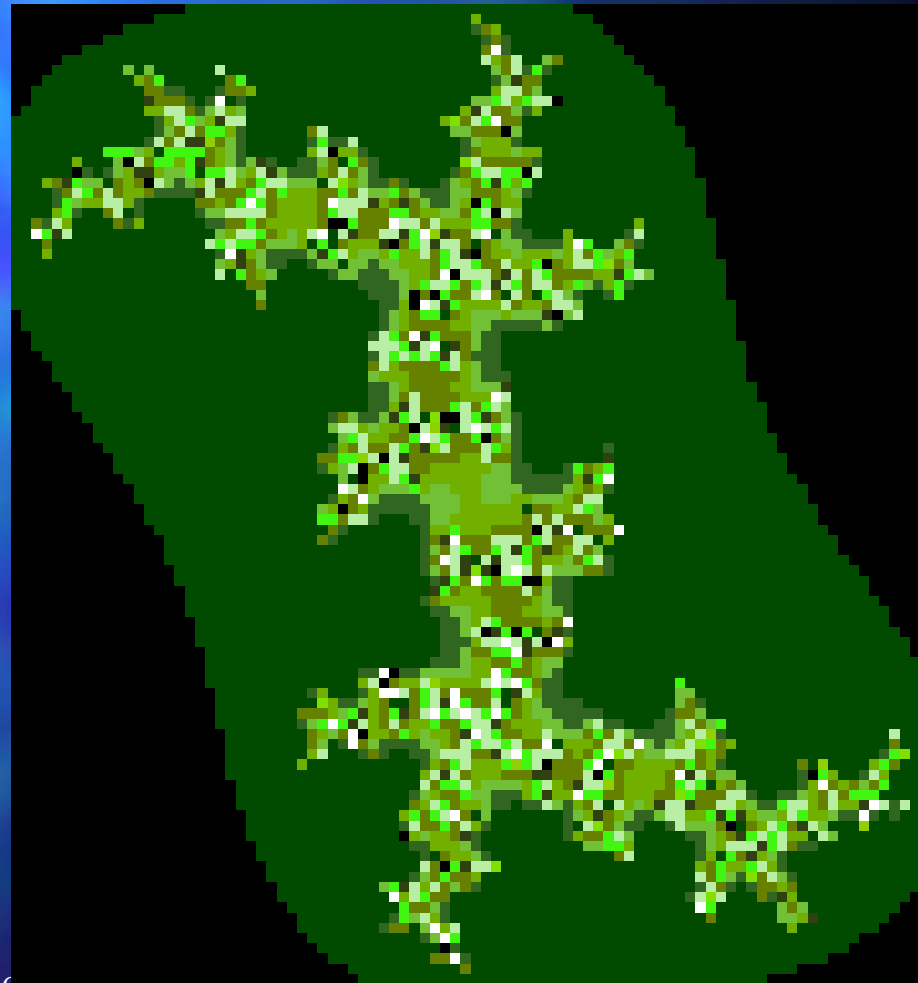


# Fractales confeccionados con el ordenador



Adela Salvador

# Fractales confeccionados con el ordenador



Agencia Salvadoreña

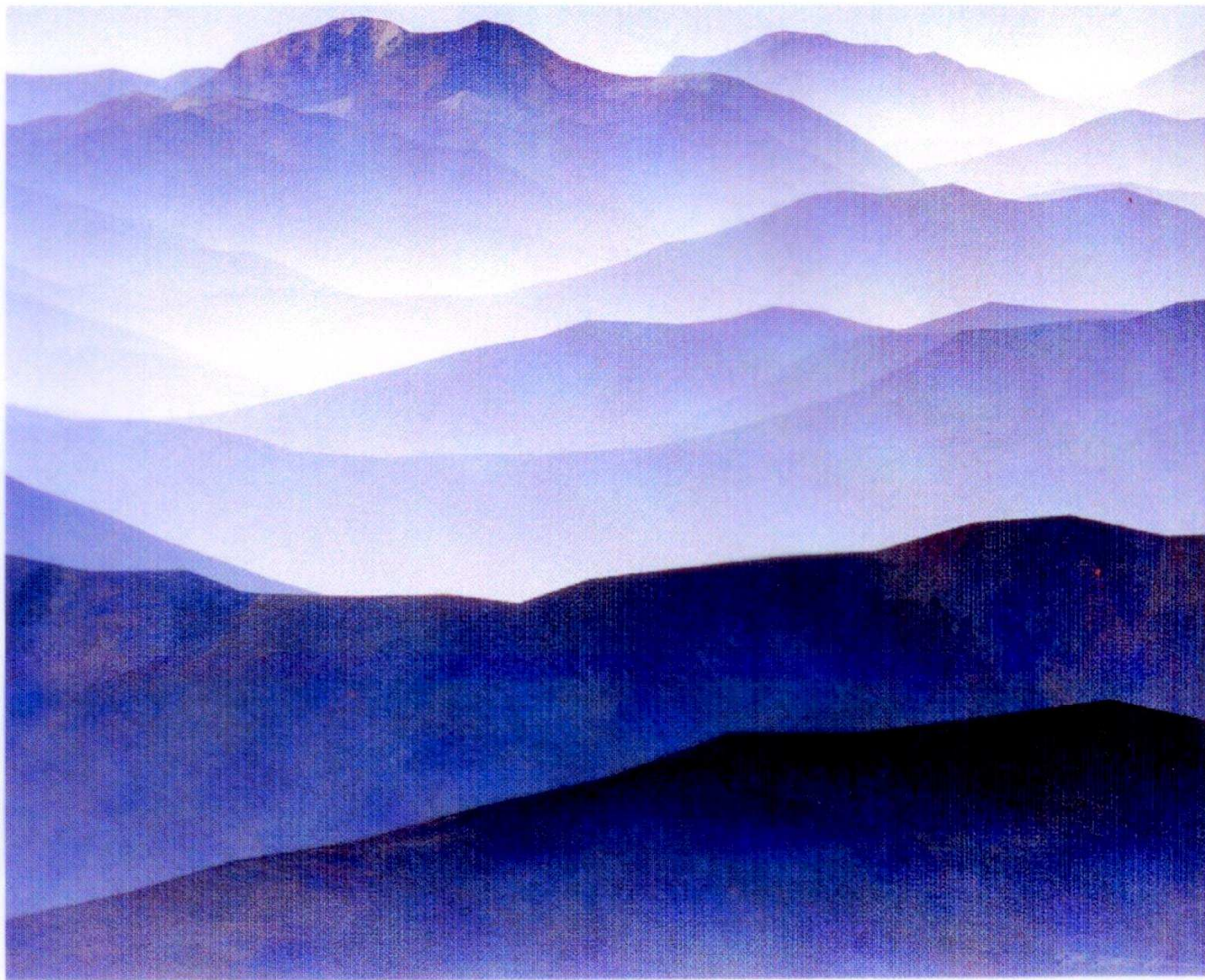
# Una exposición

- No hay duda que las espectaculares gráficas confeccionadas con el ordenador han contribuido a popularizar estos términos.
- El término fractal evoca algo de insólita belleza, irregular, intrincado en que las partes más pequeñas son similares al todo, y que se genera por la repetición de procesos muy simples.
- La geometría fractal es una herramienta que permite describir objetos considerados como extremadamente complejos y desordenados

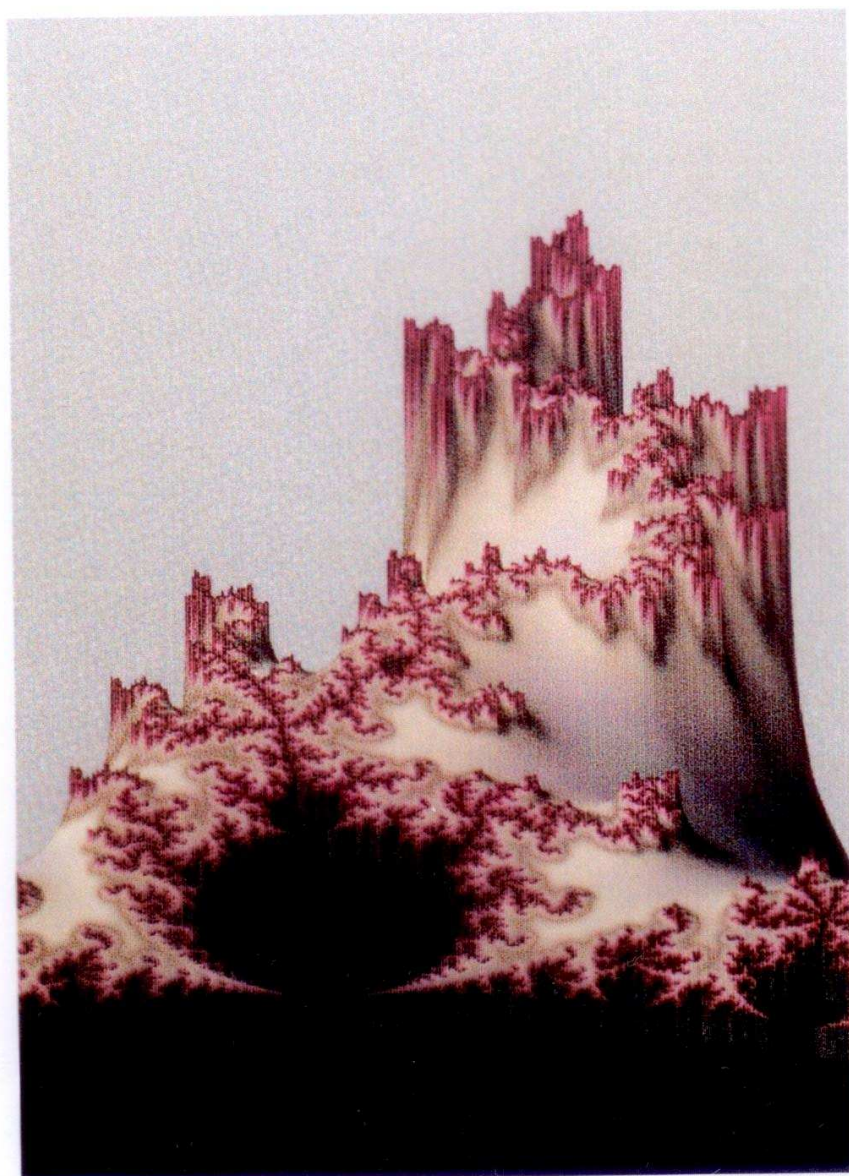




"Zabriski Point", fractal forgery of a mirage, © K. Musgrave, C. Kolb, B.B. Mandelbrot.



"Carolina", fractal forgery, © K. Musgrave.



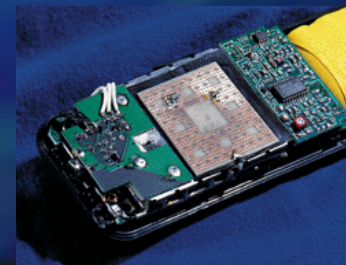
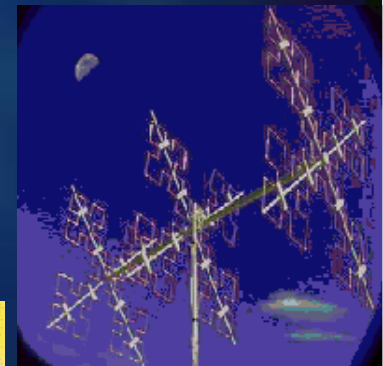
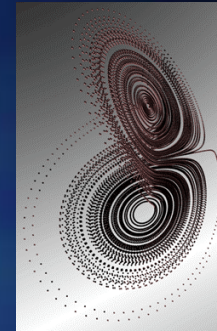
- El estudio de los fractales no hubiera sido tan importante como lo es en la actualidad si no existieran tantos modelos en la naturaleza a los que se les puede aplicar este tipo de geometría.
- Encontrar objetos naturales que se pueden modelizar mediante un fractal es francamente fácil, como por ejemplo, la medida de costas con muchos fiordos, los bordes de comunidades vegetales en paisajes no humanizados, los sistemas ramificados como el sistema nervioso, la ramificación de los bronquios en los alvéolos pulmonares, la naturaleza de las fracturas o los sistemas de fallas, la porosidad de las rocas, la estructura de las galaxias. Muchas fronteras entre dos medios, o las estructuras en forma de árbol son modelos fractales.



- Si se busca en internet el término fractal se obtienen una enorme cantidad de entradas que nos permiten valorar algunas de sus aplicaciones:
- En el mercado de valores o en la extinción de especies naturales se analizan con técnicas fractales las series temporales cuya dimensión fractal proporciona el grado de predictibilidad del fenómeno.
- Muchos fractales son atractores de sistemas dinámicos.
- Otra aplicación es la generación de imágenes o la compresión de imágenes usando técnicas fractales.
- Se encuentra gran cantidad de bibliografía en "antenas fractales", que permiten minimizar el tamaño de las antenas, y que incluso nos permite esperar que próximamente tengamos una en nuestros móviles.

# Aplicaciones de los fractales

- ✓ **Atractores de sistemas dinámico**
- ✓ **Superficies que separan dos medios**
- ✓ **Sistemas ramificados**
- ✓ **Porosidad**
- ✓ **Difusión de animales, plantas, redes de drenaje, incendio**
- ✓ **Terremotos y volcanes**
  - ✓ **Estudio de las fallas**
- ✓ **Series temporales**
  - ✓ **Bolsa**
  - ✓ **Extinción de especies**
- ✓ **Codificación de imágenes**
- ✓ **Antenas fractales**



# Fractales autosemejantes

# Fractales autosemejantes

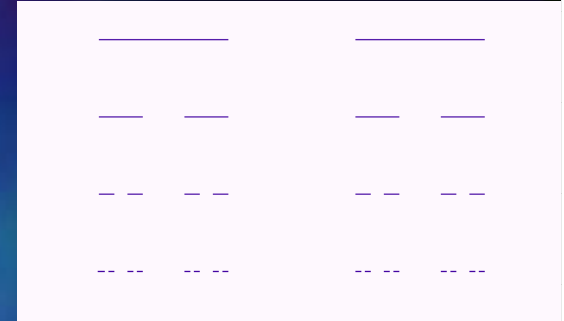
- Los fractales autosemejantes van a estar generados aplicando reiteradamente a un objeto un conjunto de aplicaciones contractivas (una homotecia de razón menor que la unidad es un ejemplo de aplicación contractiva).
- El fractal viene a ser el producto final de una iteración infinita de un proceso geométrico muy simple.

# *Algunos objetos fractales*

- El conjunto de *Cantor*
- Los dragones de *Heighway*.
- La curva del copo de nieve o **curva de *Koch***.
- El triángulo de *Sierpinski*.
- El tetraedro de *Sierpinski*.
- El conjunto de *Cantor* en el plano.
- El conjunto de *Besicovich*.
- La esponja de *Menger*.

## Fractales autosemejantes

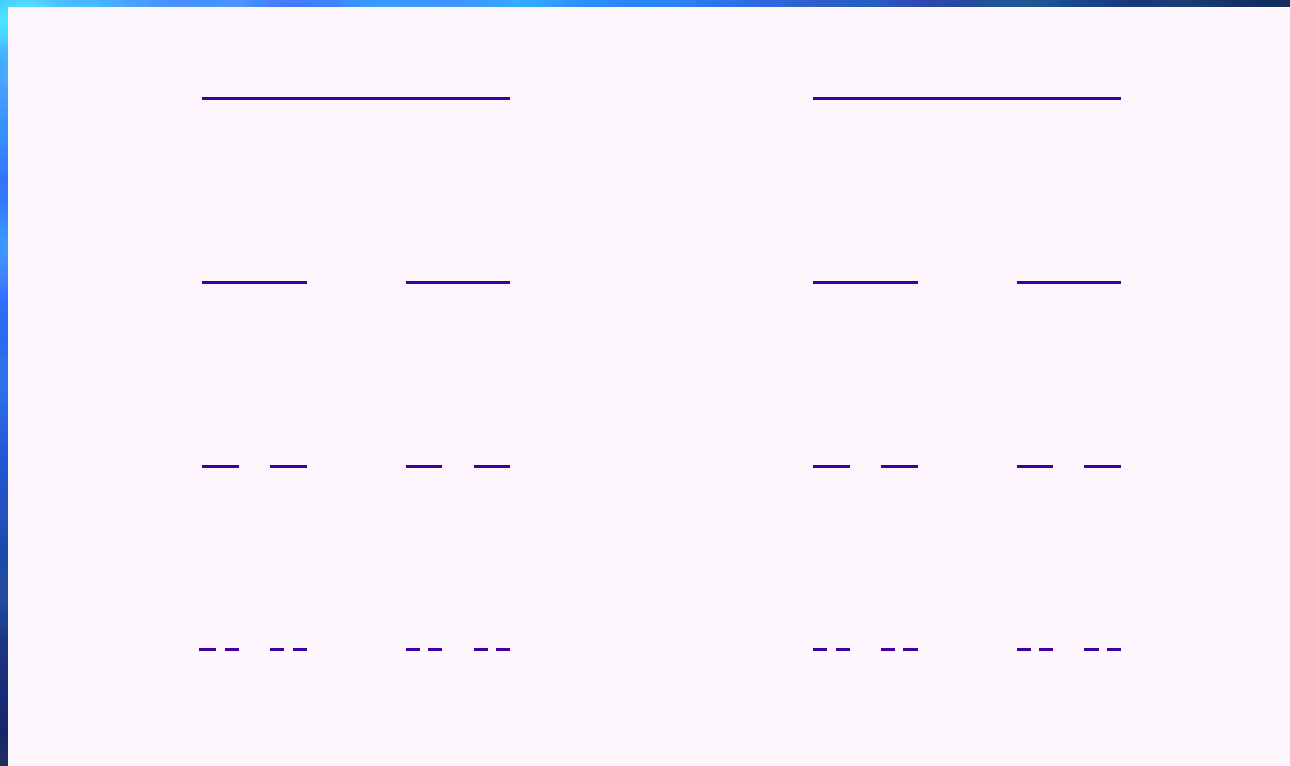
# Conjunto de Cantor



- El segmento unidad  $[0, 1]$  se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central, es decir, el intervalo  $(1/3, 2/3)$ . Queda  $F_1$ , la unión de dos intervalos cerrados.
- En los dos segmentos restantes se repite el proceso, borrando la parte central de cada intervalo.
- Y así sucesivamente.
- En el límite se obtiene el objeto que se denomina "**Conjunto de Cantor**".

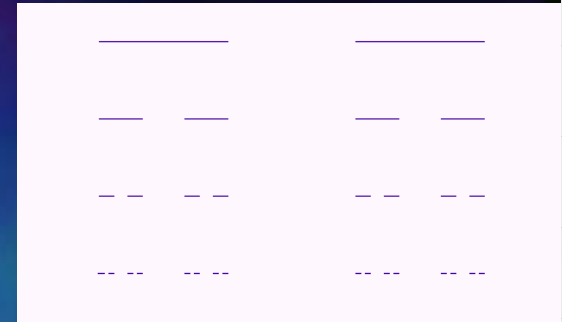
Fractales autosemejantes

# Conjunto de Cantor



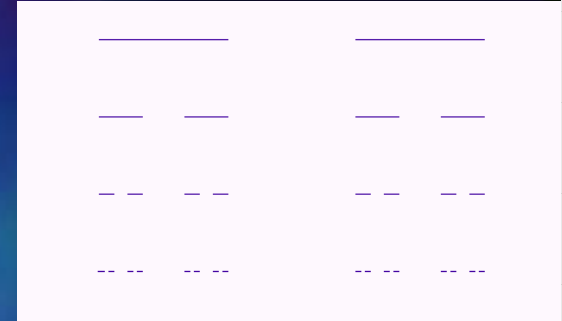
## Fractales autosemejantes

# Conjunto de Cantor

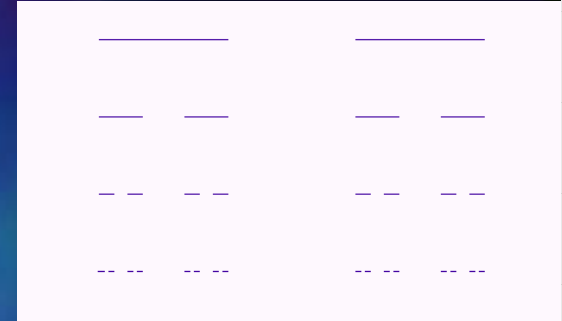


- Hemos aplicado al segmento dos homotecias de centros los extremos del segmento y razón  $1/3$ , volviendo aplicar a la figura obtenida iterativamente dichas homotecias, obteniéndose, en el límite el conjunto de Cantor.
- Se dice que el conjunto de Cantor es, pues, el atractor de dos homotecias de razón  $1/3$ , y centros en el origen y en el extremo unidad.
- Se observa que si partimos inicialmente de, únicamente, los dos puntos:  $1/3$  y  $2/3$  y aplicamos iteradamente las dos homotecias volvemos obtener, en el límite, el conjunto de Cantor.





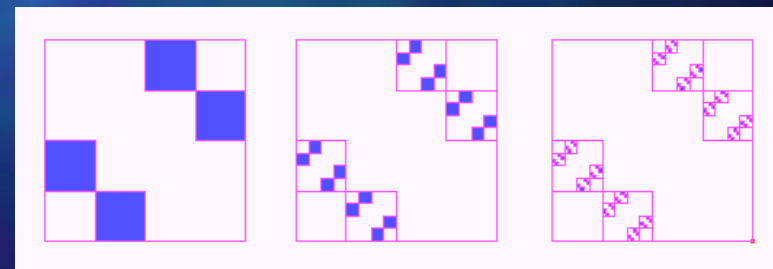
- El conjunto de Cantor es no vacío pues los extremos del intervalo que lo generan nunca se eliminan en ese proceso infinito.
- Está formado por unión infinita de conjuntos cerrados, y está acotado, luego es un compacto.
- Su longitud es nula, pues la longitud de su complementario tiene de longitud uno. Es:  $1/3 + 2/3^2 + 4/3^3 + \dots = (1/3)/(1-2/3) = 1$ .
- Tiene el cardinal del continuo.



- La expresión decimal de los puntos del conjunto de Cantor es una sucesión infinita de 0 y 2.
- Luego el cardinal del conjunto de Cantor es no numerable, tiene la potencia del continuo como el cardinal de  $\mathbb{R}$ .
- Tenemos pues un conjunto de longitud nula y cuyo cardinal es igual al de  $\mathbb{R}$ .

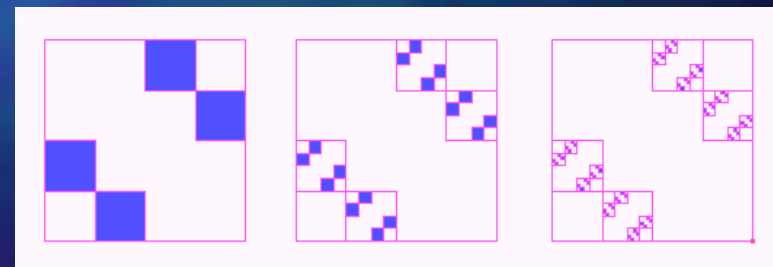
# *Un conjunto de Cantor en el plano*

- Se parte de un cuadrado de lado uno.
- Se divide en 16 cuadrados iguales y en el primer paso se toman cuatro cuadrados, uno en cada vértice, y de lado  $\frac{1}{4}$ .
- Con cada uno de estos cuadrados se repite el proceso, con lo que en el paso segundo se tienen 16 cuadrados de lado  $\frac{1}{16}$  y, así sucesivamente.



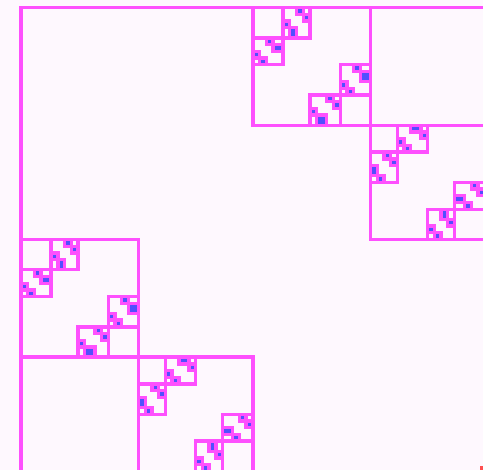
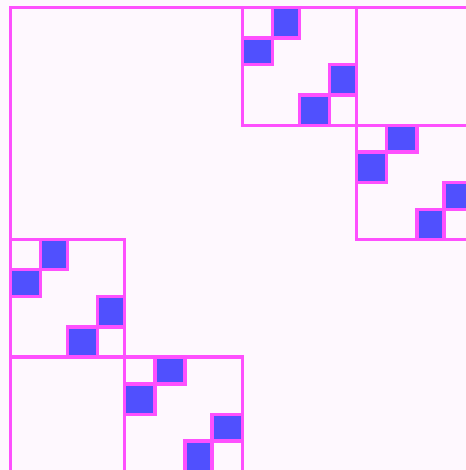
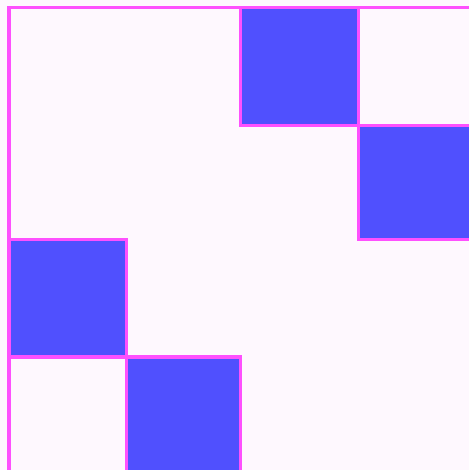
# *Un conjunto de Cantor en el plano*

- Modificando la razón de homotecia o el número de cuadrados seleccionados se obtienen otros conjuntos de Cantor generalizados, o modificando la disposición se obtiene el conjunto de Besicovitch:



Fractales autosemejantes

# *Conjunto de Besicovitch*



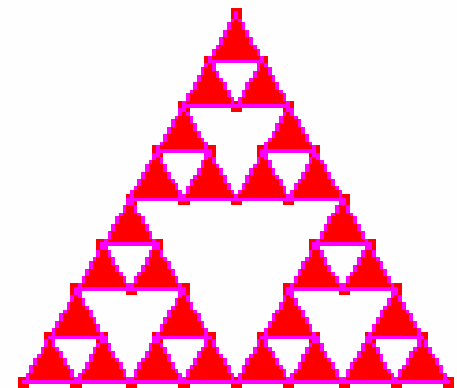
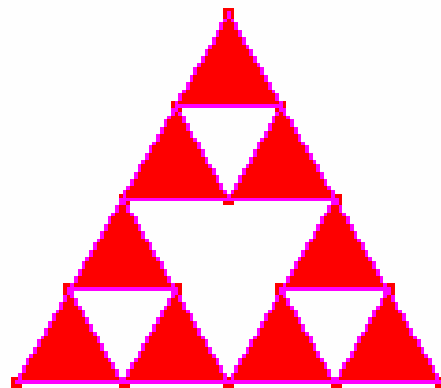
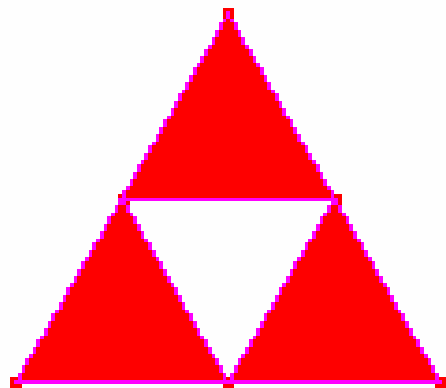


## Triángulo de Sierpinsky

- Se parte de un triángulo equilátero en el que se trazan los puntos medios de los lados.
- Se forman cuatro triángulos.
- Se elimina el triángulo central.
- En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso.
- Y así sucesivamente.
- A la figura formada por la iteración infinita se la denomina triángulo de Sierpinski.

Fractales autosemejantes

# Triángulo de Sierpinsky





## Triángulo de Sierpinsky

- Se parte de un triángulo equilátero en el que se trazan los puntos medios de los lados.
- Se forman cuatro triángulos.
- Se elimina el triángulo central.
- En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso.
- Y así sucesivamente.
- A la figura formada por la iteración infinita se la denomina triángulo de Sierpinski.





## Triángulo de Sierpinsky

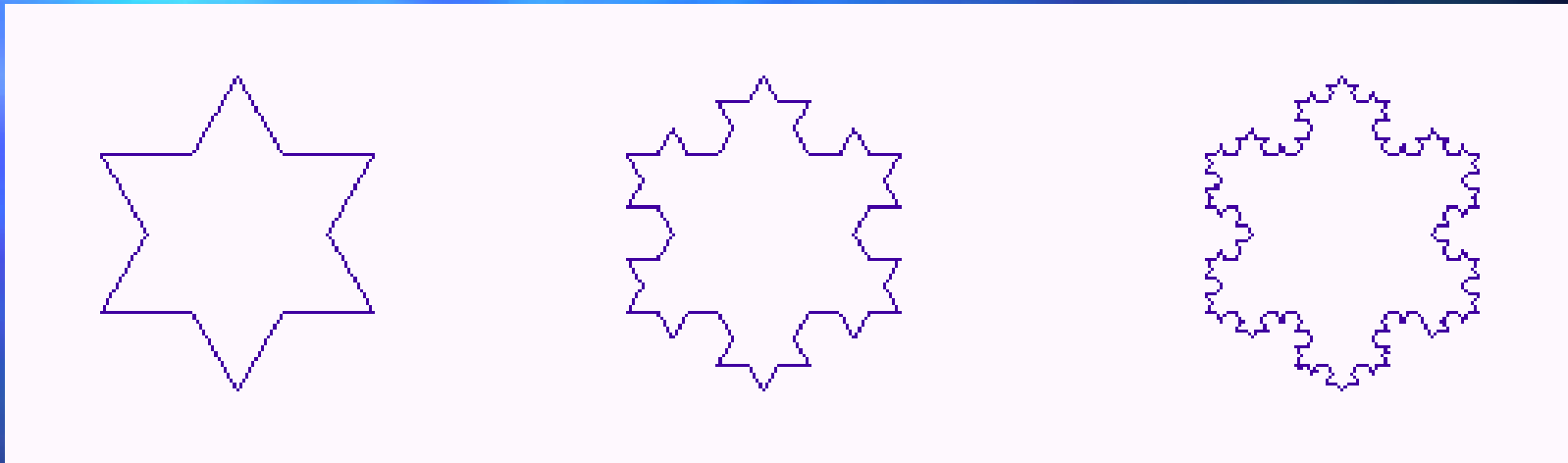
- El proceso que hemos seguido ha sido aplicar tres homotecias de razón  $1/2$  y centros los tres vértices del triángulo al triángulo inicial y de forma iterativa a la figura obtenida, de donde el triángulo de Sierpinski es el punto fijo o atractor del conjunto de aplicaciones contractivas formado por las tres homotecias.

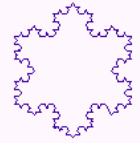
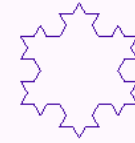
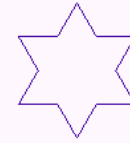


## Triángulo de Sierpinski

- En la construcción del triángulo de Sierpinski partimos de un objeto plano, de dimensión 2, un triángulo de área  $A$ .
- **Cálculo del área:** Al aplicar la primera iteración en área es  $(3/4)A$ , en la segunda  $(3/4)^2A$ , luego en el límite el área de la figura es cero ¿Es entonces el triángulo de Sierpinski un objeto de dimensión dos?
- **Cálculo de su longitud:** También observamos que su longitud tiende a  $\infty$ .
- Esto nos hace suponer que la dimensión del triángulo de Sierpinski no es ni uno ni dos, sino un número  $d$  tal que  $1 < D < 2$ .

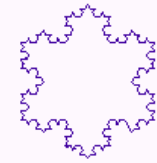
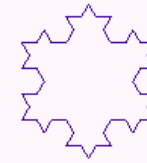
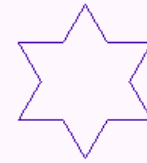
# *La curva del copo de nieve de Koch.*





## *La curva del copo de nieve de Koch.*

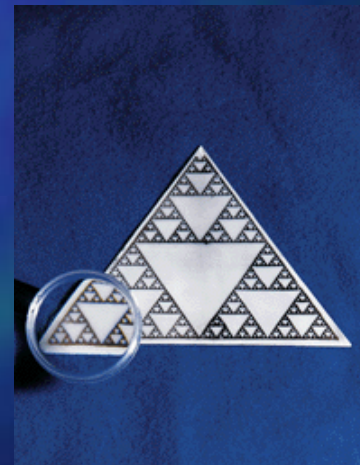
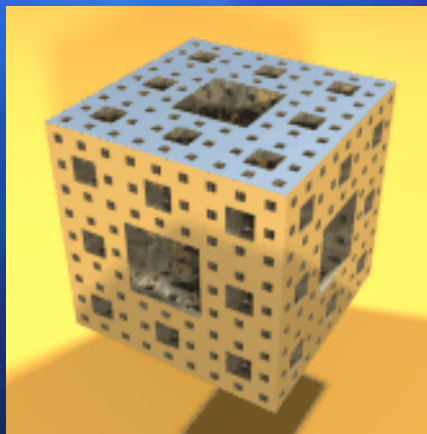
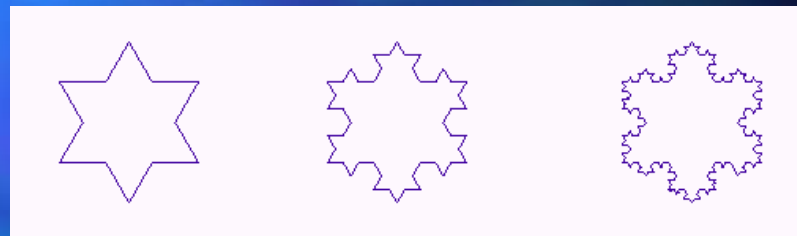
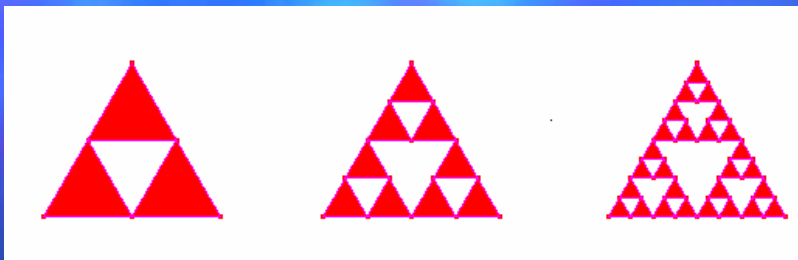
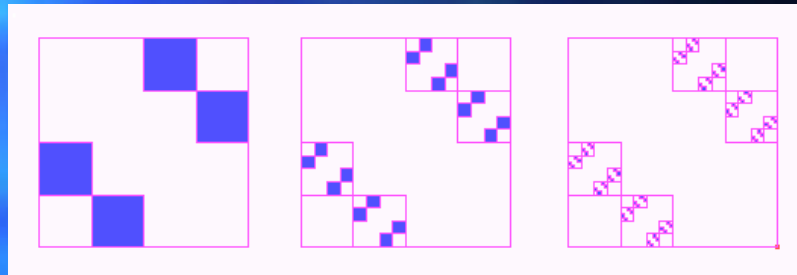
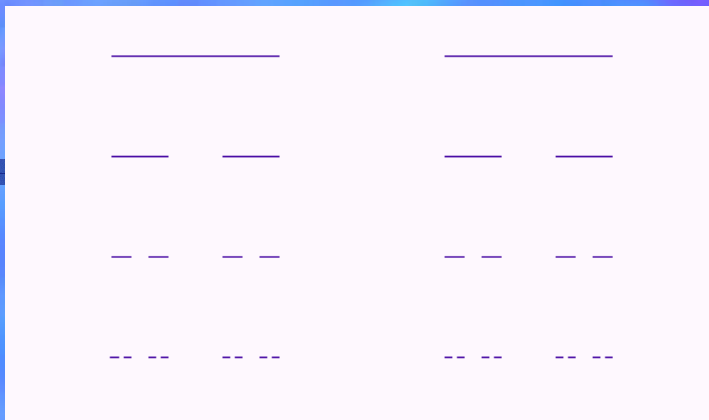
- La construcción comienza con un triángulo equilátero. Cada lado de este triángulo lo dividimos en tres partes. En la parte central, y de lado esta longitud, se dibuja otro triángulo equilátero borrando el lado que se superpone con el triángulo anterior. Se vuelve a repetir este proceso con cada uno de los segmentos de la nueva figura y así sucesivamente. La curva que se obtiene cuando repetimos este proceso indefinidamente se denomina *curva del copo de nieve* o *curva de Koch* y es un fractal.



## *La curva del copo de nieve de Koch.*

- **Cálculo del perímetro:** Se observa que si el triángulo inicial tiene un perímetro de longitud 3, el primer polígono obtenido tiene un perímetro de longitud  $3(4/3)$ , el perímetro del segundo se obtiene multiplicando otra vez por  $4/3$ , por lo que la longitud del perímetro en la etapa  $F_k$  es  $3(4/3)^k$ , cantidad que tiene a infinito cuando  $k$  tiene a infinito.
- **Cálculo del área:** El área es finita pues está contenida en el círculo circunscrito al triángulo de partida.

# Otros fractales autosemejantes





# *Noción de fractal*

Adela Salvador

# *Precisiones sobre la noción de fractal*

El nombre de “fractal” se debe a *B. Mandelbrot* en los años setenta.

Admite definiciones distintas:

- Dimensión fraccionaria
- Punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas
- Su **dimensión topológica** es distinta que su **dimensión de Hausdorff**



# Dimensión

- Se sabe que un segmento tiene dimensión 1, un trozo de plano, por ejemplo un cuadrado, dimensión 2, un cubo, dimensión 3.
- Si se divide el intervalo unidad en  $n$  subintervalos, la longitud de cada uno de ellos es  $1/n$ , luego el factor de reducción es  $r = n$ .
- Si se divide el cuadrado unidad, por ejemplo en 16 cuadrados,  $n = 16 = 4^2$ , y el factor de reducción es  $r = 4$ .
- Si se divide un cubo en 8 cubos, por ejemplo,  $n = 8 = 2^3$ , y el factor de reducción es  $r = 2$ .

# *Dimensión de semejanza*

- Se observa que las dimensiones coinciden con los exponentes: 1, 2 y 3, respectivamente.
- En general, si llamamos  $D$  a la dimensión, se tiene:
  - $r^D = n$ .
- Resolviendo esta ecuación, aplicando logaritmos (en cualquier base):

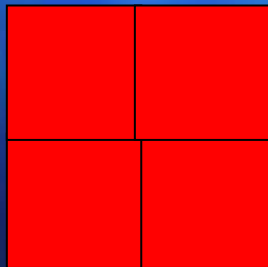
$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

Precisiones sobre la noción de fractal

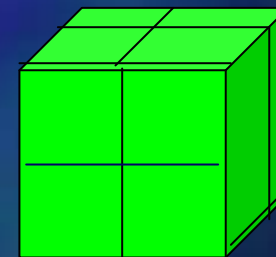
# *Dimensión de semejanza*

$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

$$n = 2; r = 2; D = 1$$

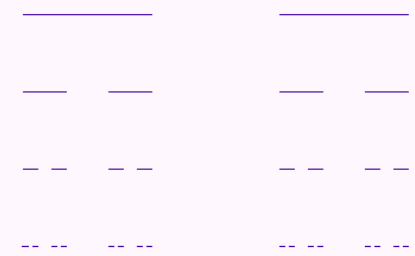


$$n = 4; r = 2; D = 2$$



$$n = 8; r = 2; D = 3$$

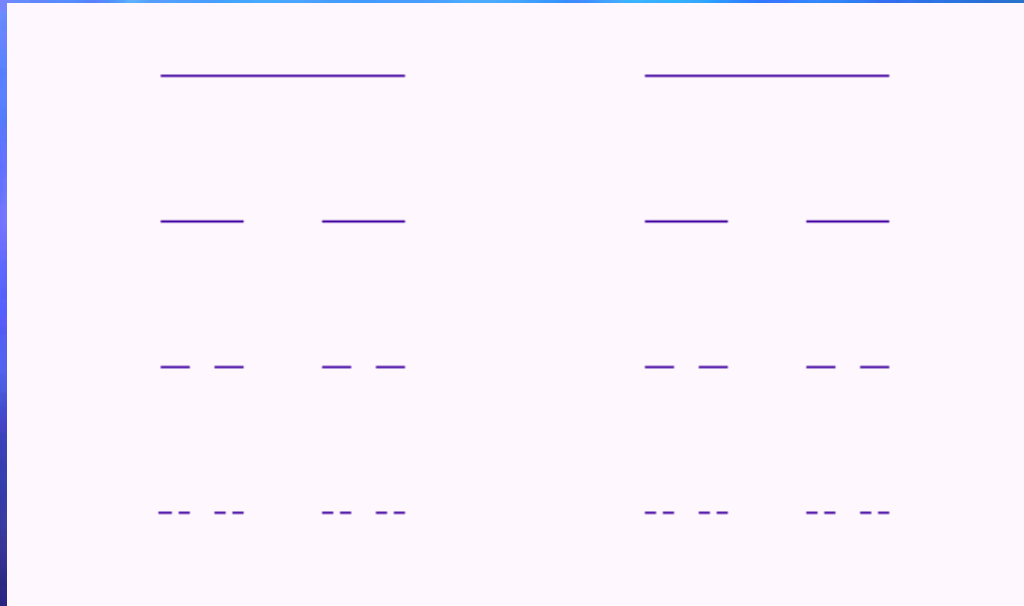
# Conjunto de Cantor



- El intervalo  $[0, 1]$  tiene dimensión uno, y lo mismo con cada una de las etapas de la construcción:  $F_k$ .
- Sin embargo la longitud final, con el paso al límite, es cero. ¿Será entonces su dimensión igual a 0?
- Parece que la dimensión topológica no es adecuada para caracterizar a este conjunto. Su dimensión debería ser un valor entre 0 y 1.
- Al pasar de  $F_k$  a  $F_{k+1}$  se reemplaza cada segmento por dos segmentos cuya longitud se reduce por el factor 3. Podemos caracterizar el Conjunto de Cantor por esos dos números:  $n =$  número de copias en que se convierte una copia = 2;  $r =$  factor de reducción = 3.

## Noción de fractal

# Conjunto de Cantor



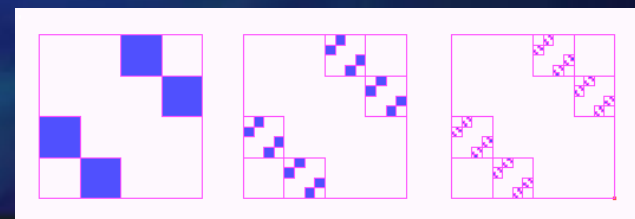
$$r = 3$$

$$n = 2$$

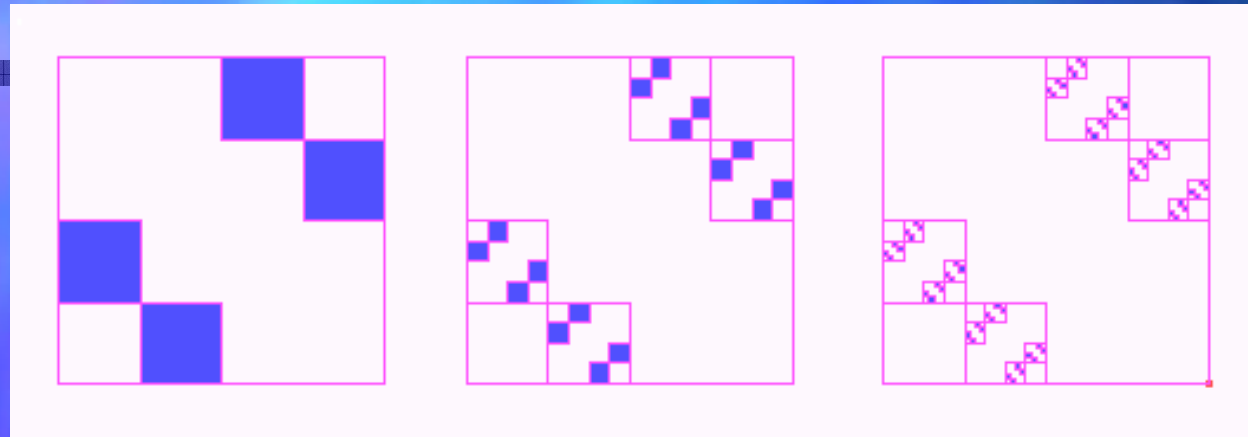
$$D = \ln 2 / \ln 3 < 1$$

# *Un conjunto de Cantor en el plano*

- Este conjunto es no vacío, compacto, no numerable y de área cero, pero su perímetro vale siempre 4.
- Es el atractor de un conjunto de cuatro homotecias de razón  $\frac{1}{4}$ .
- Se caracteriza por  $n = 4$  y  $r = 4$ . Al tener longitud parece que su dimensión, a pesar de partir de figuras de dimensión 2, debería ser 1.
- **¿Qué dimensión de semejanza tiene? Observa que NO es fraccionaria.**



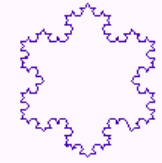
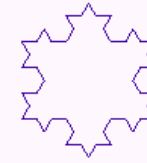
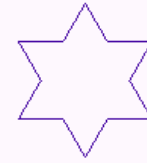
# Noción de fractal



$$r = 4$$

$$n = 4$$

$$D = \ln 4 / \ln 4 = 1$$



## *La curva del copo de nieve de Koch.*

- Se caracteriza por  $n = 4$  y  $r = 3$ , pues de cada segmento se obtienen 4 y el factor de reducción es 3.
- Según la construcción, cada  $F_k$  es de dimensión 1, pero al ser la longitud infinita puede esperarse que su dimensión sea mayor que 1.
- **¿Qué dimensión de semejanza tiene?**
- Incluso se puede comprobar que la longitud es infinita entre dos cualesquiera de sus puntos.
- Es un ejemplo de curva continua que no tiene tangente (derivada) en ninguno de sus puntos.



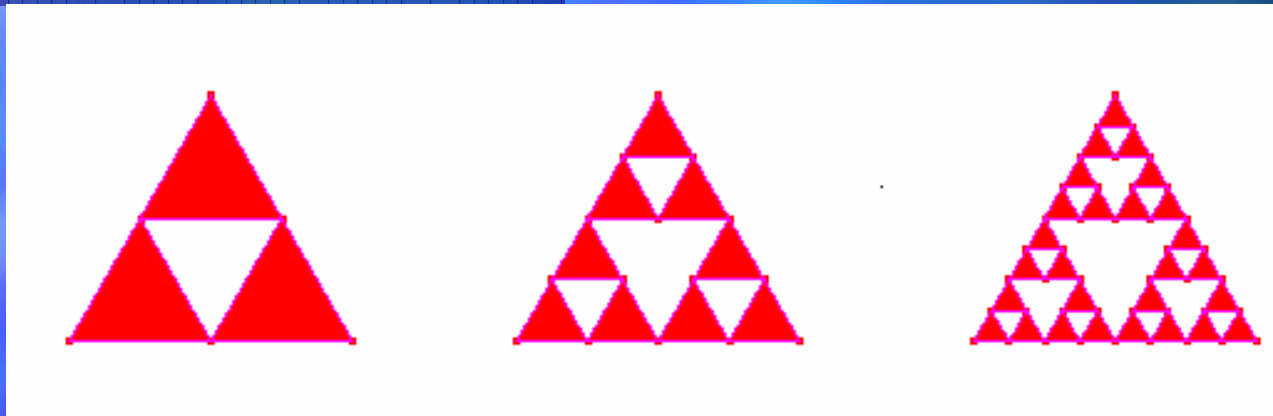


## Triángulo de Sierpinsky

- Por su construcción el triángulo de Sierpinski es un conjunto compacto de perímetro infinito y área nula.
- Queda caracterizado por  $n = 3$ , pues cada triángulo se transforma en 3 triángulos, y  $r = 2$  que es el factor de reducción *lineal*, es decir, la longitud de cada lado se reduce a la mitad.
- **¿Qué dimensión de semejanza tiene?**

# Noción de fractal

## Triángulo de Sierpinski



$$r = 2$$

$$n = 3$$

$$D = \ln 3 / \ln 2 > 1$$



# *Tetraedro de Sierpinski*

- Se parte de un tetraedro regular el el que se marcan los puntos medios de las aristas y al unirlos se forman 4 tetraedros de lado mitad. Se elimina la figura central. En cada uno de los cuatro tetraedros restantes se vuelve a repetir el proceso sucesivamente.
- Se caracteriza por  $n = 4$  y  $r = 2$ .
- ¿Qué dimensión de semejanza tiene? Observa que NO es fraccionaria.

# *Tetraedro de Sierpinski*

- La forma central eliminada, que es un octaedro regular, es difícil de percibir. En el laboratorio de matemáticas sugerimos construir cuatro tetraedros iguales y analizar lo que falta para obtener el tetraedro de lado doble de partida.
- El tetraedro de Sierpinski es el punto fijo del conjunto de cuatro homotecias de razón  $1/2$  y centros en los cuatro vértices de un tetraedro.
- Es un ejemplo de objeto fractal de dimensión 2, no fraccionaria.

Precisiones sobre la noción de fractal

*Punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas*

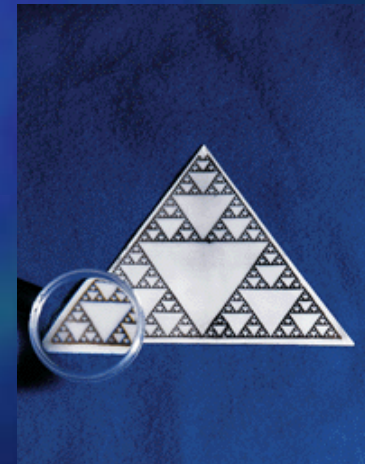
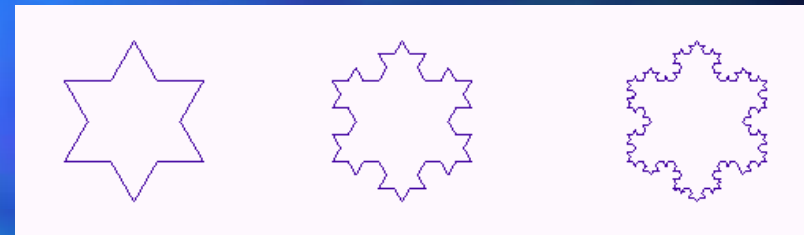
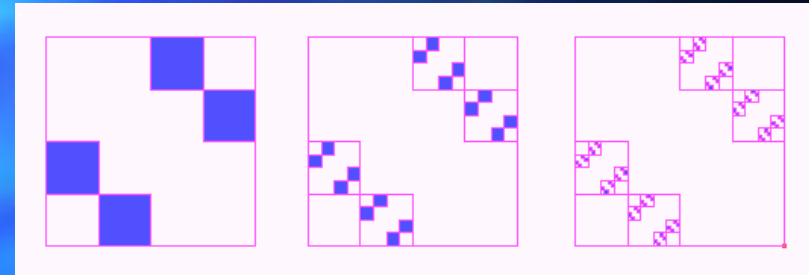
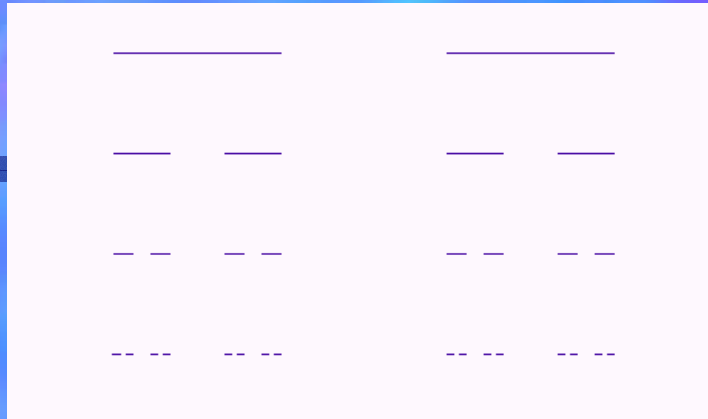
$$\bigcup_{i=1}^n f_i(K) = K$$

*J. E. Hutchinson (1981)*

*M. F. Barnsley (1985)*

- 
- Análisis de las aplicaciones contractivas en los fractales autosemejantes

# Precisiones sobre la noción de fractal

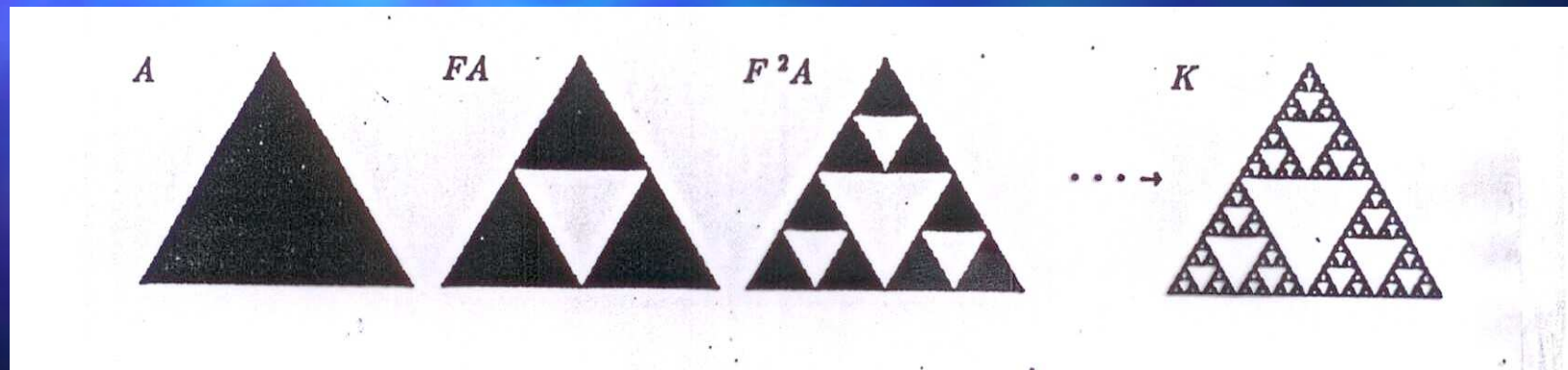


# Distancia de Hausdorff

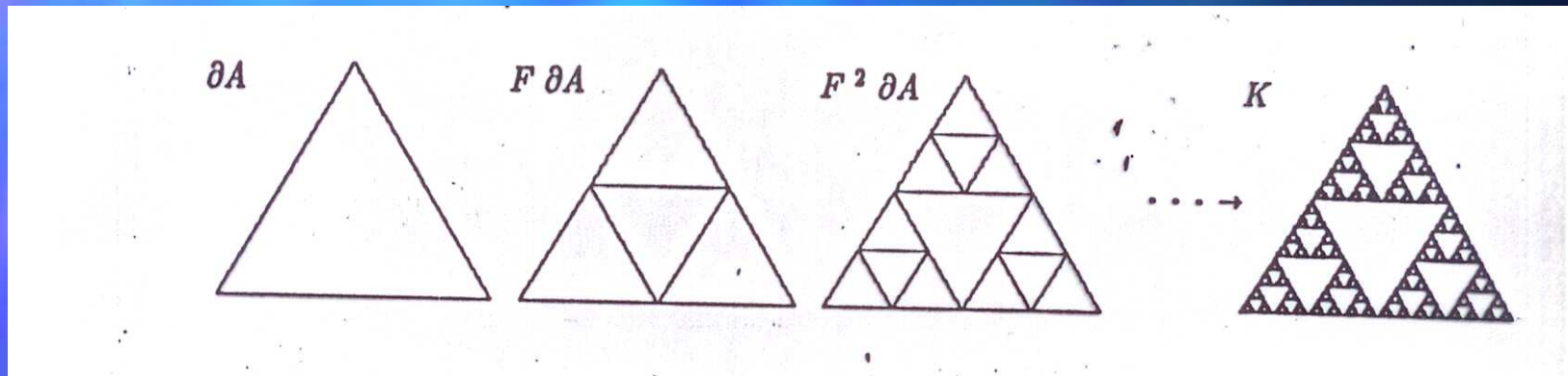
- $D(A, B) = \inf\{r: A \subset N_r(B) \text{ y } B \subset N_r(A)\}$
- $S$  espacio métrico completo.  $K(S)$  conjunto de los compactos de  $S$ .  $\{K(S), D\}$  es un espacio métrico completo.
- Fractales autosemejantes
- *M. F. Barnsley* en 1985
- **Sistema de funciones iteradas**
- **Teorema del punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas**



En el triángulo de Sierpinsky partimos de un triángulo plano y le aplicamos las 3 homotecias



Partimos de un triángulo plano y le aplicamos las 3 homotecias



En ambos casos, al ser el triángulo de Sierpinsky el punto fijo del conjunto de aplicaciones contractivas formado por las 3 homotecias, se llega al mismo resultado

Y lo mismo se  
obtiene si se parte  
de cualquier otra  
figura

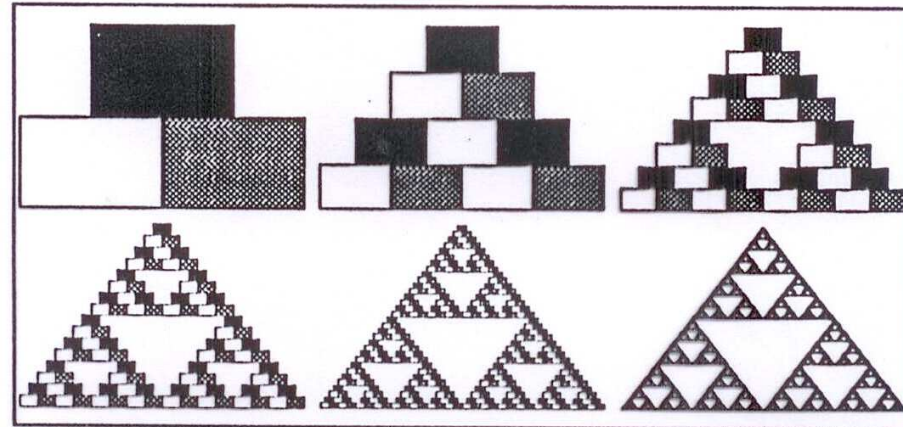


Figure 1.13 : Starting with a rectangle the iteration leads to the Sierpinski gasket. Shown are the first five steps and the result after some more iterations (lower right).

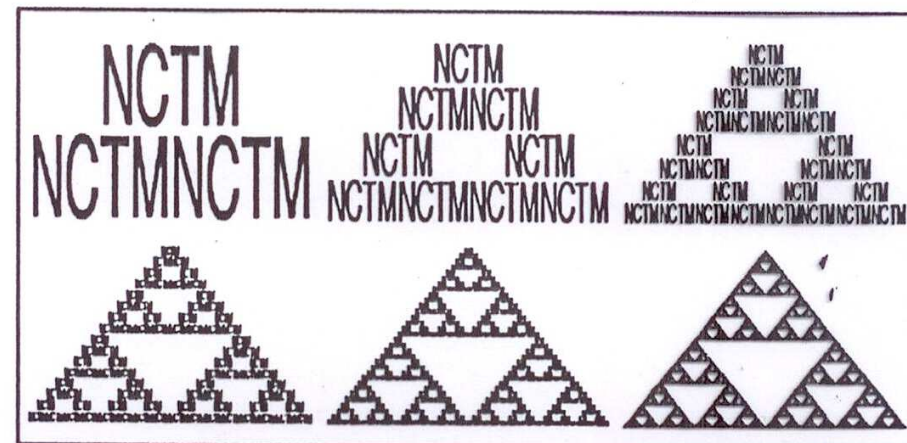
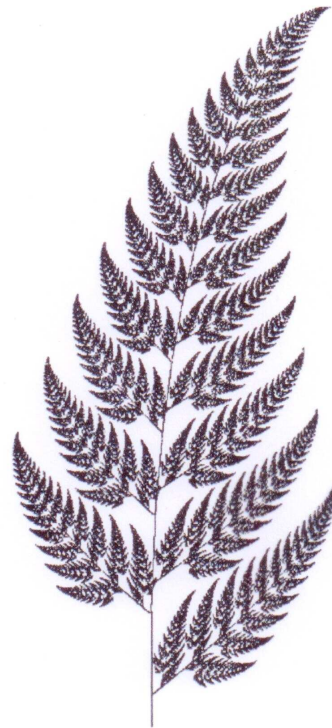


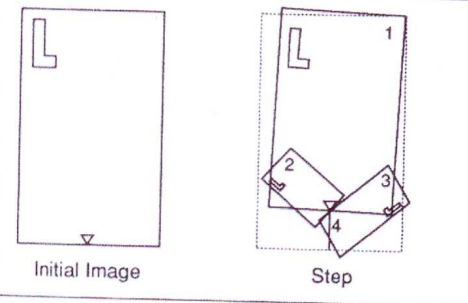
Figure 1.14 : We can start with an arbitrary image — this iterator will always lead to the Sierpinski gasket.

# Helecho de Barnsley



Barnsley's fern

El helecho de Barnsley se obtiene como punto fijo de las 4 aplicaciones contractivas de la figura



Blueprint of Barnsley's Fern

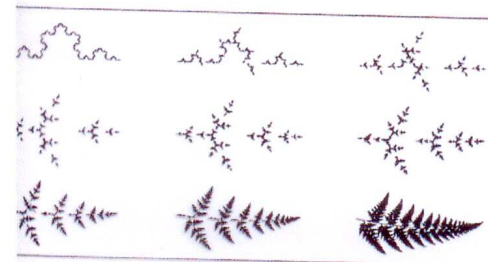
Figure 5.22 : Blueprint of Barnsley's fern.

	Translations		Rotations		Scalings	
	$e$	$f$	$\theta$	$\psi$	$r$	$s$
1	0.0	1.6	-2.5	-2.5	0.85	0.85
2	0.0	1.6	49	49	0.3	0.34
3	0.0	0.44	120	-50	0.3	0.37
4	0.0	0.0	0	0	0.0	0.16

Barnsley Fern Transformations

Transformations for the Barnsley fern.

discoveries which have given current research significant momentum. One is the first *strange attractor* discovered by E. Lorenz at MIT in 1962, and the second is what we would like to call *Barns-*



Koch Curve Transformed into the Fern

Figure 5.24 : By changing the parameters for the Koch curve iteratively along a path to those of the fern, a transformation from the Koch curve to the fern is obtained.

*Objeto cuya dimensión de Hausdorff (semejanza) es distinta de su dimensión topológica*

*E. Borel y H. Lebesgue*

*H. Weyl*

*Hausdorff (1919) y Besicovitch (1920)*

Adela Salvador

# Dimensión topológica

- **Dimensión inductiva pequeña:** Se designa  $\text{ind}(S)$ 
  - *Hermann Weyl:* Se que el espacio tiene dimensión tres porque las paredes de una prisión son de dimensión dos.
  - Definición: Se dice que  $\text{ind}(S) \leq k$  si y sólo si existe una base de abiertos de  $S$  cuya frontera tiene su dimensión menos o igual a  $k-1$ .
- **Dimensión inductiva grande:** Se denota  $\text{Ind}(S)$ 
  - Se dice que  $L \subset S$  **separa**  $A$  y  $B$  si y sólo si existen abiertos  $U$  y  $V$  contenidos en  $S$ , cuya intersección es vacía,  $U \supset A$ ,  $V \supset B$  y  $L = S \setminus (U \cup V)$ .
  - Definición: Se dice que  $\text{Ind}(S) \leq k$  si y sólo si cualquier par de conjuntos cerrados disjuntos de  $S$  pueden ser separados por un conjunto  $L$  con  $\text{Ind}(L) \leq k-1$ .
- **Dimensión de recubrimiento:** Se denota  $\text{Cov}(S)$ 
  - El **orden** de una familia  $\mathcal{A}$  de abiertos es menor o igual a  $n$  si y sólo si cualquier  $n+2$  de esos conjuntos tiene una intersección vacía
  - Definición:  $S$  tiene **dimensión de recubrimiento** menor o igual a  $n$  si y sólo si todo recubrimiento abierto finito de  $S$  tiene un refinamiento abierto de orden menor o igual a  $n$

# ***Teoría de la medida y de la dimensión***

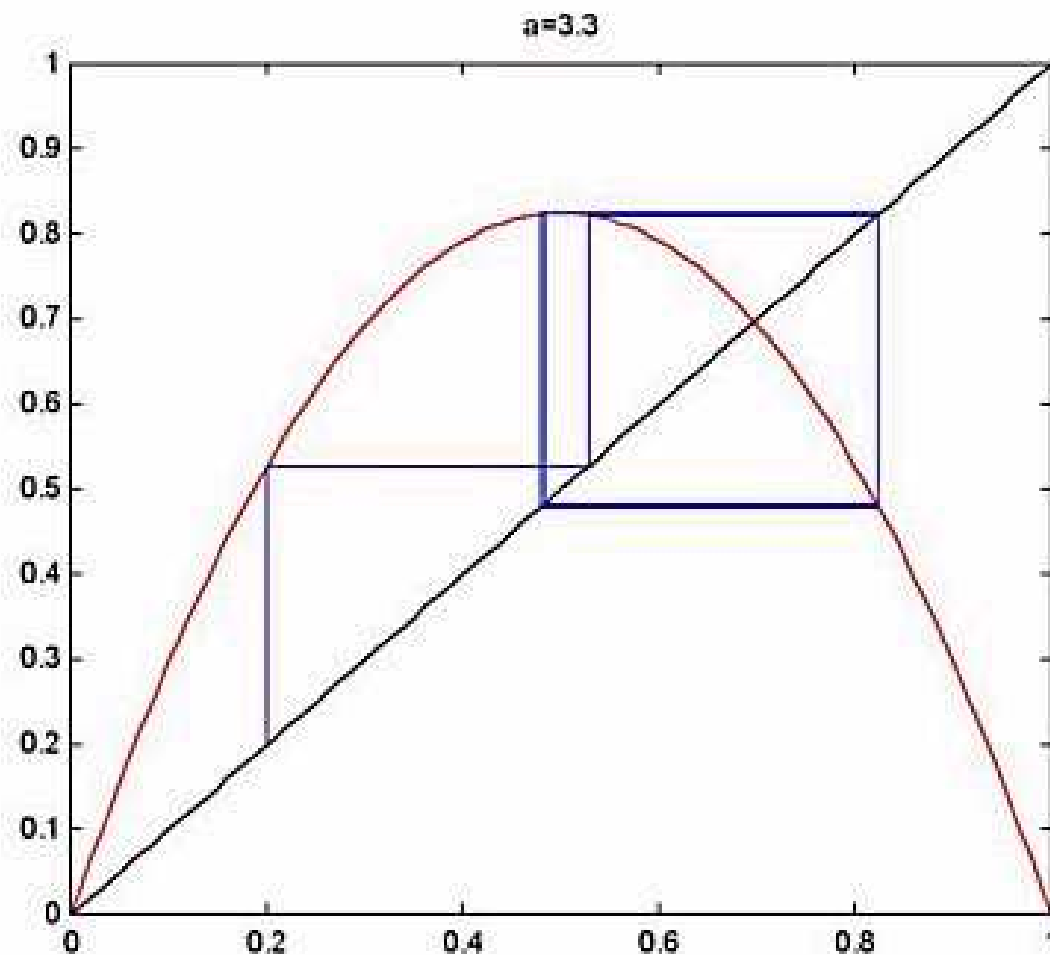
- **Medida exterior de *Lebesgue* y medida interior de *Lebesgue***
- ***Dimensión de Hausdorff***
  - Familia de medidas para cada conjunto:  
 $H_s(F)$
  - Dado un conjunto de *Borel*  $F$ , y dados  $0 < s < t$ , se tiene que:
    - Si  $H_s(F) < \infty$  entonces  $H_t(F) = 0$
    - Si  $H_t(F) > 0$  entonces  $H_s(F) = \infty$



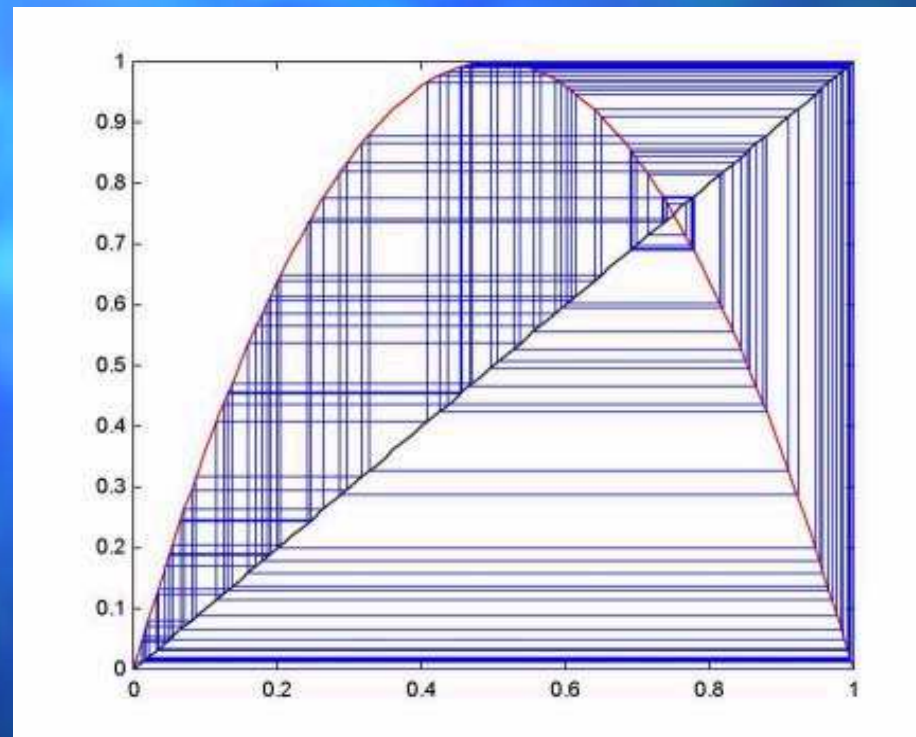
# *Caos y fractales*

- *Sistemas dinámicos continuos:*
  - *Atractor de Lorentz*
- *Sistemas dinámicos discretos*
  - *Ecuación Logística*
  - *Método de Newton*
  - *Conjuntos de Juliá y de Fatou*
  - *Conjunto de Mandelbrot*

# *Ecuación Logística*



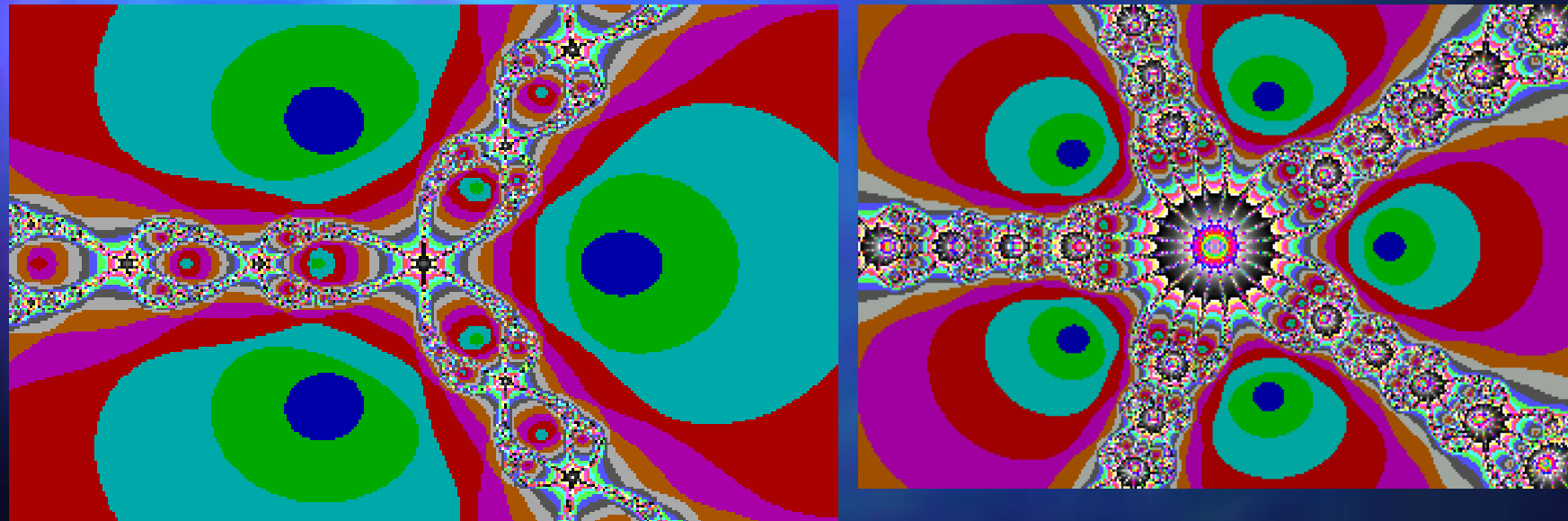
# *Ecuación Logística*



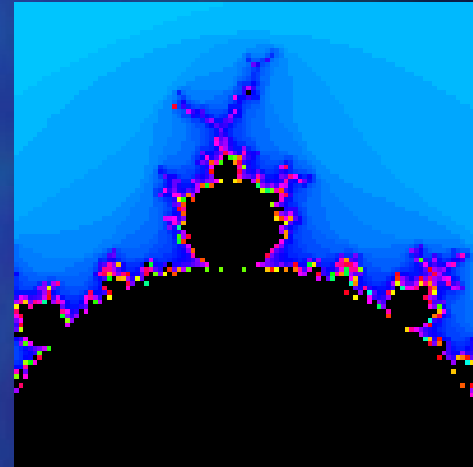
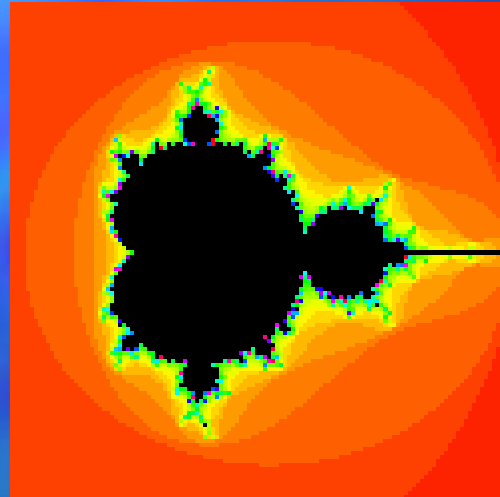
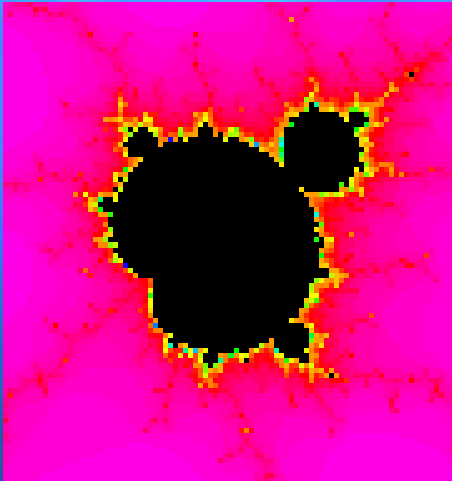
Adela Salvador

# *Método de Newton*

$$f(z) = z^p - 1; N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$



# *Conjunto de Mandelbrot*



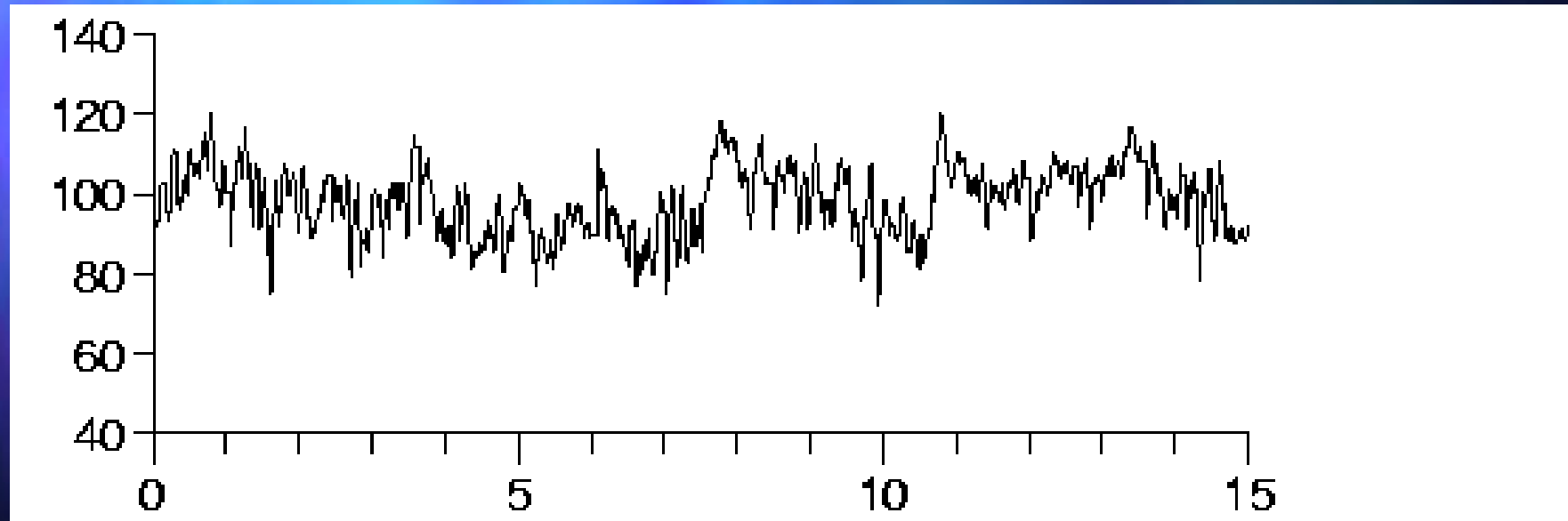
Dimensión de series temporales

---

**DIMENSIÓN DE GRÁFICAS  
DE FUNCIONES. DIMENSIÓN  
DE SERIES TEMPORALES**

Dimensión de series temporales

# Proceso aleatorio o movimiento browniano



Adela Salvador

# Hurst y estrategias reproductivas de plantas

 Semillas, plántulas y plantas de dos especies distintas (esp 2 germinan la mitad) . Sec Hel variable, Algoritmo p

Archivo Operaciones Salir

Historial

Semillas dispers: 411 483  
 Semillas: 411 600  
 Plántulas: 54 166  
 Plantas: 89 97

Año Pasado

0 2 2 | 3 2 3    0 2 3  
 0 6 1 | 4 3 2    0 1 0

< ||| >

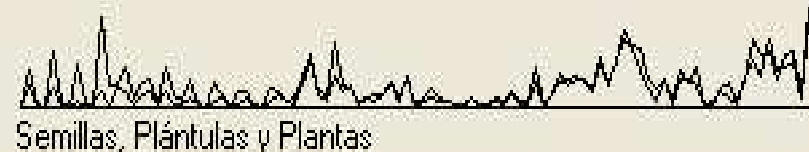
Plantas

60 47  
 68 85  
 78 93  
 18 27  
 137 161  
 89 97

Año 100

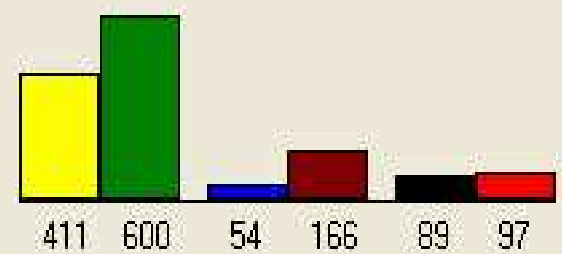
4 0 0   3 2 2	4 0 1   7 1 0	4 0 1   3 1 2	3 0 1   8
4 0 0   8 2 1	4 0 0   7 2 0	1 0 0   2 1 2	3 1 0   6
3 0 0   8 2 2	3 0 2   5 2 0	4 1 0   6 0 1	3 0 1   4
2 0 1   9 2 1	0 1 0   2 1 1	4 0 1   6 1 1	2 1 1   6
2 0 0   5 2 0	4 1 2   4 1 1	2 0 1   7 1 1	2 0 0   6
5 0 1   8 1 0	6 1 2   4 1 0	4 0 0   5 1 2	1 0 1   8
2 0 0   4 1 1	3 0 1   4 2 2	4 0 1   7 2 0	3 0 1   11
4 1 1   5 1 1	2 1 1   3 2 0	3 1 0   4 1 2	1 1 3   5
3 0 2   8 3 2	5 3 1   4 1 0	9 2 1   2 0 1	1 0 2 0

Plantas



Semillas, Plántulas y Plantas

Semillas: 411  
 600  
 Plántulas: 54 166  
 Plantas: 89 97



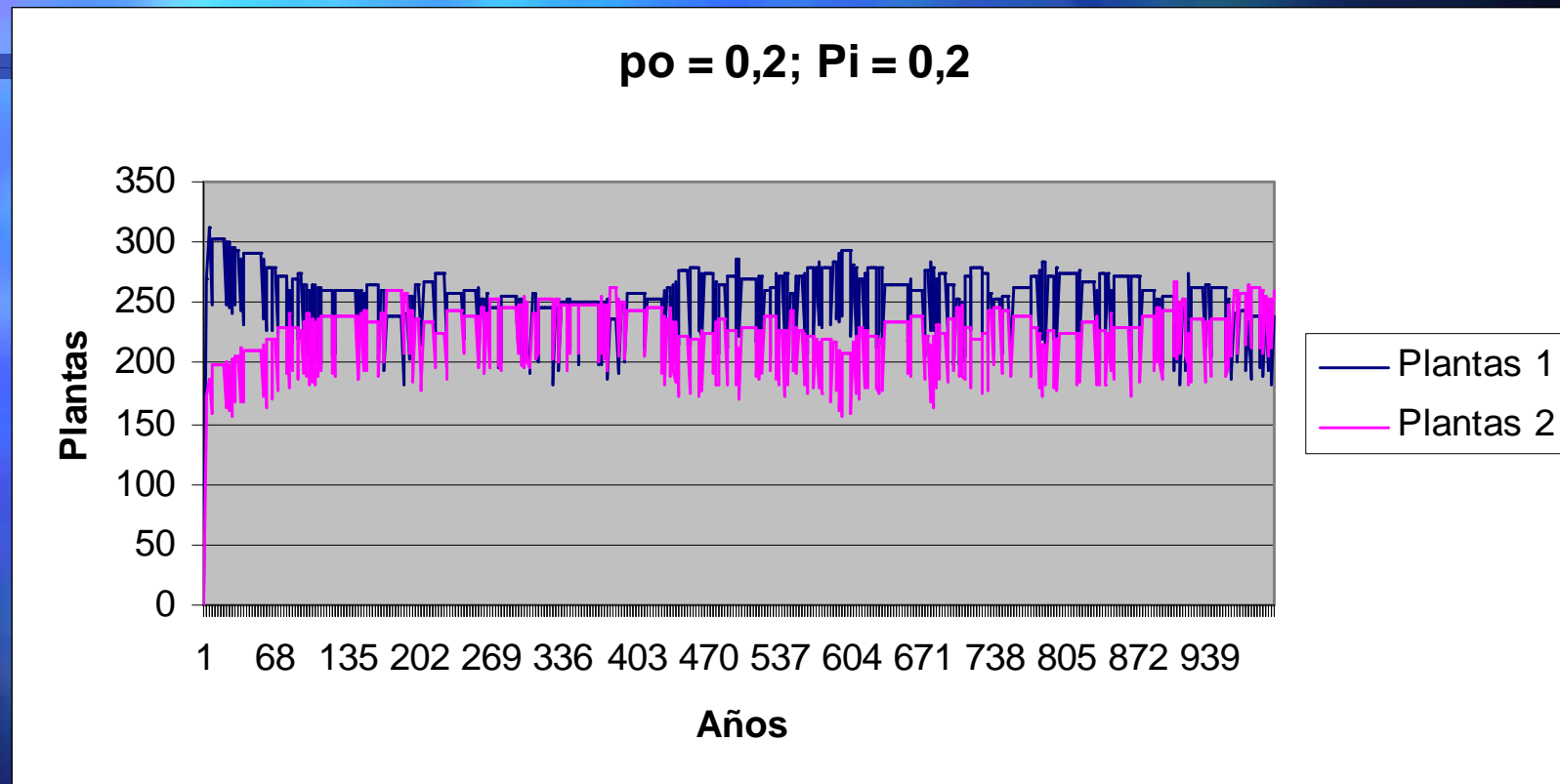
Estaciones del Año

411 600  
 54 166  
 89 97

47%



# Hurst y estrategias reproductivas de plantas



# Referencias

- Barnsley, M: **Fractals everywhere**. Academic Press, 1988.
- Barrallo, J.: **Geometría fractal, algorítmica y representación**. Anaya.
- Beardon, A. F.: *Symmetries of Julia sets*. Bull. London Math. Soc. 22; 576-582. 1990.
- Blackledge, J. M.: *On the Synthesis and Processing of Fractal Signals and Images*. UK. Sc. Eng. Res. C. 1992.
- Devaney, R. L.: **Chaos, fractals and dynamics**. AddisonWesley. 1990.
- Edgar G. A.: **Classics on fractals**. Addison-Wesley. 1993.
- Falconer, K. J.: **The geometry of fractals sets**. Cambridge University Press, 1985.
- Guzmán, M.; Martín, M.; Morán, M.; Reyes, M.: **Estructuras fractales y sus aplicaciones**. Labor. 1991.
- Hutchinson, J. E.: *Fractals and Self Similarity*. Indiana Univ. Math. Jour. Vol. 30. nº 5. 713-747. 1981.
- Mandelbrot, B.: **Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión**. Tusquets.
- Mattila, P.: **Lectures notes on Geometric Measure Theory**. Asociación matemática española, 1986.
- Peitgen; Jurgens; Saupe: **Fractals for the classroom**. Springer-Verlag. Vol. I, 1991; Vol II, 1992.
- Peitgen, H. O.; Jurgens; Saupe: **Chaos and fractals**. Springer-Verlag, 1992.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The beauty of fractals**. Springer-Verlag, 1986.
- Peitgen, H. O.; Richter, P. H.: **The science of fractals**. Springer-Verlag, 1988.
- Stewart, I: **¿Juega Dios a los dados?** Edic. Crítica. Drakontos, 1991.

# Referencias

- SALVADOR A. GARMENDIA L. ¿Dónde hay fractales? Suma.
- HASTINGS, H. M. & SUGIHARA, G. (1993) "*Fractals, a user's guide for the natural sciences.*" Oxford University Press, Oxford.
- HUSTINGS, F. (1992) "*Bird census news*" Vol. 5 n° 2 produced by Sovon on behalf of: International Bird Census Committee & European Ornithological Atlas Committee, Netherlands.
- SUGIHARA, G. & MAY, R. M. (1990) "*Applications of Fractal in Ecology*" Trends Ecol. Evol., vol 5, n° 3, 79-86.

# Fractales en la web

The background features a vertical gradient from light blue on the left to dark blue on the right. A grid pattern is visible on the left side, extending horizontally across the middle of the page. The title 'Fractales en la web' is centered in a white, sans-serif font with a slight shadow effect.

# Fractales en la web. Imágenes

- Imágenes 1
- Imágenes 2
- Imágenes 3
- Imágenes 4

# Fractales en la web

- Concepto fractal
- Los fractales
- Historia
- Fractales y sistemas dinámicos

# Fractales en la web. Actividades de aula

- Actividades con fractales y Logo
- Medida de una costa
- Conjunto de Cantor
  - Solución
- Poligonal de Koch
  - Solución

# Fractales en la web

- Primera idea sobre dimensión
- Dimensión
- Concepto de dimensión
- Dimensión fractal
- Dimensión de la curva de Koch
- Dimensión topológica y fractal. Curva de Peano



# Fractales en la web: Aplicaciones

- Aplicación en la Ciencia de los materiales
- El espacio – tiempo fractal
- Música fractal el sonido del caos
- Porosidad de las rocas
  
- Otras direcciones en la web