

La resolución de problemas como recurso metodológico



Adela Salvador



Esquema

- 1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. INTRODUCCIÓN**
- 2. VENTAJAS**
- 3. COMENTARIOS**
- 4. ¿QUÉ ES UN PROBLEMA?**
- 5. HISTORIA**
- 6. MARCO TEÓRICO**
- 7. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
- 8. FASES**
- 9. ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS**
- 10. ACTITUDES, BLOQUEOS Y CREATIVIDAD**
- 11. POSIBLES OBSTÁCULOS**
- 12. UNA CLASE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
- 13. BIBLIOGRAFÍA**

1. INTRODUCCIÓN

“Desde la más remota antigüedad la actividad primordial del matemático ha sido la resolución de problemas”

“La resolución de problemas debe ser el foco de las matemáticas escolares de los 90” (Primera recomendación del National Council of Teacher of Mathematics. 1981)

“Enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir” (Miguel de Guzmán)

“Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en todo problema hay un descubrimiento” (Polya)

“El paso decisivo para resolver un problema es saber que existe y saber plantearlo” (Einstein)

“El arte de ser aburrido consiste en contarlo todo” (Voltaire)

“La enseñanza de las matemáticas debe incluir en *todos los niveles*, desde los 6 a los 18 años, oportunidades para:

- **Explicaciones a cargo del profesor**
- **Discusiones entre profesor y alumno y entre los alumnos mismos**
- **Trabajo práctico apropiado**
- **Consolidación de práctica de técnicas y rutinas fundamentales**
- **Resolución de problemas, incluida la aplicación de las Matemáticas a situaciones de la vida diaria**
- **Trabajos de investigación”.**

(Informe Cockcroft párrafo 243)

2. VENTAJAS

- **Es lo mejor que se puede proporcionar a una persona.**
- Ayuda a equipar a la persona para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas.
- **El mundo evoluciona rápidamente. Tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.**
- **Alto valor motivador.**
- “El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el **saber – hacer**, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables” (Polya)

3. COMENTARIOS

El aprendizaje de la resolución de problemas es un **proceso a largo plazo**.

Es preciso resolver **muchos** problemas

Hay estudios que confirman **que la enseñanza expresa** de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea

Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre **problemas concretos** y no como pre-requisito teórico

Cuando un alumno se hace preguntas y toma decisiones está en el terreno de una **investigación**



Evaluar: Estimar más lo que un alumno/a sabe dentro de sus posibilidades que lo que ignora dentro de un baremo único para todos.

Tratamiento de la diversidad: distintos niveles de resolución

Propicia el **trabajo en equipo**

Terminar con una presentación pública de resultados que haga posible los debates y la integración de diferentes puntos de vista.

4. ¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Heurística: “**arte de la resolución de problemas**”

“Un problema es un obstáculo que separa la situación actual de la meta deseada” (Bransford y Stein)

¿Problema o ejercicio?

“Un problema matemático es una situación en la que hay un objetivo por conseguir, superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo”

¿Problema o investigación?

La investigación es un proceso más abierto donde el sujeto se plantea los objetivos que quiere conseguir

- 
- Construir figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.

5. HISTORIA

➤ Pappus de Alejandría

Primer gran estudioso de heurística conocido

Colección Matemática

Año 320. Libro VI

- Comenta obras de autores anteriores
- Reflexiones propias sobre procesos de razonamiento
- Método de análisis – síntesis

➤ René Descartes

“Reglas para la dirección de los ingenios”

(1596 – 1650)

Encontrar un método universal para la solución de problemas

Fragmentos dispersos

➤ **Leibniz**

Arte de la invención

(1646 – 1716)

Anotaciones

➤ **Bernardo Bolzano**

(1781 – 1848)

**Dedica atención a la heurística en sus trabajos de
lógica**

➤ **Dewey**

Psicología

1888: Finales del siglo XIX

▪ **Modelo de resolución:**

Fases:

- 1. Identificación de la situación problemática**
 - 2. Definición precisa del problema**
 - 3. Análisis medios – fines. Plan de solución**
 - 4. Ejecución del plan**
 - 5. Asunción de las consecuencias**
 - 6. Evaluación de la solución. Supervisión.**
- Generalización**

Observemos que aparece una fase de “identificación del problema”. En los matemáticos esta fase no aparece.

➤ **Wallas**

The Art of Thought

1929

- **Descripción del proceso de invención**
- **Fases:**
 - 1. Preparación: Recogida de información y primer intento de solución**
 - 2. Incubación: Dejar el problema de lado**
 - 3. Iluminación: Aparición de una idea clave**
 - 4. Verificación: Se comprueba la solución**



➤ George Polya

How to solve it
1945

Cómo plantear y resolver problemas
1965

- **Nacimiento de una nueva doctrina**
- **Idea del resolutor ideal**
- **Fases**
- **Proceso de resolución lineal**
- **Estrategias heurísticas**

▣ **Schoenfeld**

Mathematical problem solving

1985

- Observación a cientos de individuos
- Caminos en zig – zag
- Fases:
Análisis, Exploración, Ejecución, Comprobación
- **Estrategias**
- Categorías de conocimiento y comportamiento matemático:
 - Recursos o conocimientos matemáticos básicos
 - Heurísticos o técnicas de resolución de problemas
 - Control o modo de manejarse
 - Corrientes de opinión

▫ **Kilpatrick**
1967

- **Protocolo:** *“El protocolo es el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema”*

▫ **J. Mason, L. Burton y K. Stacey**
Pensar matemáticamente
1982, 1989

L. Burton: Thinking, things, through

- Analizar posteriormente el proceso
- **Monitor interior**
- Fases
- Rótulos: ¡Atascado!, ¡Ajá! Describen los momentos claves y los estados afectivos

Diferenciar entre el proceso de pensamiento y la propia conciencia del proceso

- 
- **J. D. Bransford, B. S. Stein**
Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear
 - **IDEAL:** I = Identificación
D = Definición
E = Exploración
A = Actuación
L = Logros alcanzados

▣ **Miguel de Guzmán**
Para pensar mejor
1991

- Bloqueos Creatividad
- Organización de una clase de problemas

Cómo hablar, demostrar y resolver
en Matemáticas
2003

- 
- Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

6. MARCO TEÓRICO

Resolución de problemas

Creatividad

- Torbellino de ideas
- Arte de preguntar: Preguntar es una conducta inteligente. Las bases del pensamiento creativo se obtienen preguntando.
- La creatividad en la empresa
- El arte de relacionar: Una forma de creatividad es relacionar unos problemas con otros



La **sinéctica:** Hacer familiar lo extraño
y extraño lo familiar.

Generalización: Ponerte en una
perspectiva más amplia.

**Relaciones entre inteligencia y
creatividad.**

Inteligencia artificial

7. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I.- ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

Se llaman así a las operaciones útiles para la solución de problemas

II.- SUGERENCIAS O PAUTAS HEURÍSTICAS

Se denominan así a aquellas preguntas, pautas o indicaciones dirigidas a centrar la atención del resolutor sobre ciertos aspectos del problema

III.- DECISIONES EJECUTIVAS

Se llaman así a aquellas decisiones que deben tomarse para poder resolver el problema

IV.- MODELO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

*Se denomina así a toda **teoría** que clasifique y analice las **fases** del proceso de resolución, las sugerencias, las **estrategias** heurísticas, las decisiones ejecutivas, y aquellos aspectos de orden cognoscitivo, **emocional**, científico, etc. que intervengan en el proceso.*

8 - FASES

Según Polya:

- 1.- Comprender el problema
- 2.- Hacerse un plan
- 3.- Llevar a cabo el plan
- 4.- Volver atrás. Revisar el plan.

1. FASE INTRODUCTORIA: COMPRENDER EL PROBLEMA

EL GRUPO SE FAMILIARIZA CON EL PROBLEMA.

AL ABORDAJE

- ⇒ Preparación
- Examen de la situación
- Manipulación para entenderla mejor
- Relación con situaciones semejantes



2. FASE EXPLORATORIA: HACERSE UN PLAN

ELABORACIÓN DE POSIBLES ESTRATEGIAS

TÉCNICA DEL "BRAINSTORNING" O tormenta de ideas

- *No evaluar las ideas.*
- *Durante la fase de producción de ideas está absolutamente prohibida toda crítica.*
- *Al eliminar todo juicio se crea un ambiente de compañerismo*
- *Entera libertad*
- *Gran cantidad de ideas, no demasiado elaboradas*
- *Numerar las ideas*
- *Las ideas son del grupo*
- *Otro del equipo puede mejorar la idea*
- *Cada componente del equipo evalúa las ideas y se comienza por la más valorada.*



3. FASE DE RESOLUCIÓN PROPIAMENTE DICHA: LLEVAR A CABO EL PLAN

EL GRUPO SELECCIONA UNA O VARIAS ESTRATEGIAS.

AL ATAQUE.

- **Tener el tesón justo que tal estrategia requiere**
- **Realizar el plan de acción**
- **Si ninguna estrategia resuelve el problema se puede volver a la fase anterior de búsqueda**



4. FASE DE VERIFICACIÓN: REVISAR EL PLAN.

REFLEXIÓN SOBRE EL PROCESO.
VOLVER ATRÁS

Generalizar

a) reflexión individual

b) reflexión del grupo

Examina a fondo el camino seguido

Localiza rutinas útiles

Generaliza

Intenta hacerlo más simple

Busca nuevos problemas relacionados

Busca la posible transferencia de resultados, métodos, procesos...



El juego del siete

Es un juego para dos jugadores

El primero dice un 1 o un 2. El segundo le suma un 1 o un 2 al número que dijo su compañero y dice el resultado. Así sucesivamente, por turnos. El que diga siete gana.

¿Lleva ventaja alguno de los jugadores?

¿Cómo tiene que jugar para ganar siempre?

- Experimenta, juega.
- Supón el problema resuelto
- Conjetura
- Generaliza: El juego del 31
- Analogía: El juego del Nim



Hotel de los líos

- Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra, y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente ¿Cómo están las puertas por la mañana?
- *Quedan abiertas los cuadrados de números primos*



Tres hijas

- Se encuentran dos amigos, y uno le dice al otro que tiene tres hijas, y añade: El producto de sus edades es 36, y la suma es el número del portal de enfrente.
- ¡Falta un dato!
- Es cierto, la mayor toca el piano.
- ¿Qué edades tienen las hijas?

- 
- b) Un almacén tiene su base cuadrada y su volumen es de 36 metros cúbicos. ¿Cuáles son sus dimensiones?
 - c) Un bloque de cemento de forma de ortoedro tiene un volumen de 36 decímetros cúbicos ¿Cuáles son sus dimensiones?

$1+6+6=13$ y $2+2+9=13$. Sol: 2, 2, 9.



Mesa de billar

- Una mesa de billar está cuadriculada y los lados tienen dimensiones enteras a y b . Se lanza una bola desde el vértice A que se mueve según las diagonales de los cuadraditos y rebota por reflexión perfectamente elástica. ¿A qué esquina llegará? ¿Cuántos rebotes habrá hecho?
- N° rebotes = $(a+b)/\text{mcd}(a,b) - 2$
- Si b impar y a par llega a D
- Si b impar y a impar llega a C
- Si b par y a impar llega a B
- Nunca vuelve a A



RECORRIDO A CINCO BANDAS

En un billar de 160cm de ancho está colocada una bola en la parte inferior derecha a 60cm de cada borde. Esa bola es lanzada sin efecto hacia la parte superior izquierda con un ángulo de 45° , después de haber tocado 5 bandas la bola vuelve a su punto de partida ¿Cuál es el largo del billar?

- $2OX + 2KX = 2OY$; $OX=160$; $KX=OX-60=100$
 $\Rightarrow OY=260$ cm



¡Vaya corte!

- En un papel cuadriculado trazamos un rectángulo que tenga un número entero de cuadraditos en cada lado. Una diagonal del rectángulo puede cortar o no a los cuadraditos por los que atraviesa y se considera que no corta si sólo contiene a un vértice. Se trata de encontrar una regla para poder calcular el número de cortes de la diagonal del rectángulo.

- 
- n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos que son todos distintos. Se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número R_n de esas regiones?

9. ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

- **Codificar:** Usar una buena notación: **Las perlas del rajá**
- **Organizar:**
 - i) Dibujar una figura: **La piscina.
El encuentro**
 - ii) Hacer un diagrama: **Las tres ruletas.
El color del pelo**
 - iii) Construir tablas: **¡Vaya corte!**
- **Experimentar:** Ensayo y error:
**El lobo, la cabra y la col.
Cien cuadrados**
- **Analogía:** Relacionar con un problema análogo: **Una mesa de billar**



➤ **Explorar:**

- i) Buscar simetrías: **El camino más corto**
- ii) Buscar regularidades y pautas
- iii) Analizar casos límite **¡Vaya corte!**

➤ **Introducir elementos auxiliares:** Variar las condiciones del problema

➤ **Subobjetivos:** Considerar casos sencillos

- Resolver antes un problema similar más sencillo
- Dividir un problema en partes o en subproblemas
- Estudiar todos los casos posibles de una situación
- Analizar las posibilidades

➤ **Suponer el problema resuelto** o empezar el problema desde atrás:

La invitación

Los cachorros

Los cocos



II.- SUGERENCIAS HEURÍSTICAS

FASE 2: ESTRATEGIAS DE PENSAMIENTO

- Experimenta, juega con el problema
- Hazlo más fácil para empezar
- Haz esquemas, diagramas, representaciones gráficas
- Escoge una buena notación
- Busca semejanzas con otros problemas
- Imagínate el problema resuelto
- Busca regularidades, pautas, explora la simetría
- Modifica el problema, cambia algo en el enunciado
- Si tienes una receta y te has asegurado que se ajusta a tu problema, aplícala



Radio de la Tierra

- El radio de la Tierra es de 6.240 Km aproximadamente. Rodeamos la Tierra con un cable. ¿Cuanto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15m? ¿Mas de 15m y menos de 15Km? ¿Mas de 15Km?

- * Hazlo mas fácil. Usa un cuadrado.
- * Toma luego un polígono de más lados

- 
- ¿Cual es el máximo número de ángulos rectos que puede haber en un polígono de n lados?

Grados de un polígono de n lados = $(n-2)*180$

Sea x el número de ángulos rectos

$$A = 180(n-2) - 90x$$

Si $n=3$ y $x=2 \Rightarrow A=0$ NO

$$x=1 \Rightarrow A=1$$

Si $n=4 \Rightarrow x=4$

Si $n=5 \Rightarrow x=3$

Las tres ruletas

- Disponemos de tres ruletas A, B y C cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales con distintos puntos:
- A: 7 sectores con la cifra 6 y 25 sectores con la cifra 3.
- B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.
- C: 7 sectores con la cifra 1 y 25 sectores con la cifra 4.
- Dos jugadores seleccionan una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con la ruleta. ¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, la persona que elige primero o la que elige en segundo lugar?



Color del pelo

Tres amigas Adela, Nieves y Lourdes, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están sentadas en una mesa circular haciendo un trabajo en cadena. Cada una pasa su informe a la que está a la derecha. Nieves ha pasado su informe a la rubia. Adela ha pasado su informe a aquella que ha pasado su informe a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de Adela, Nieves y Lourdes?



Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?



La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

- 
- Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos con tres jarras de 8, 5 y 3 litros.



El encuentro

- Dos personas que no se conocen conciertan por Internet una cita en un lugar determinado entre las 11 horas y las 12 horas con la siguiente condición, la primera que llega espera a la otra quince minutos y después se marcha. Si cada una llega al azar entre las 11 horas y las 12 horas, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?



FASE 4: VOLVER ATRÁS

- La tendencia "natural" a volver atrás es muy escasa
- Comprobar la solución utilizando todos los datos ¿Es razonable?
- ¿Se puede mejorar el método para llegar a la solución?
- Generaliza el problema: Inventa otros problemas variando el enunciado
- Intentar suscitar una discusión que se extienda a toda la clase:
 - Aprovechando si aparecen distintas soluciones
 - Buscando errores tipo.



GENERALIZAR es una ESTRATEGIA HEURÍSTICA

- ¿Te parece lógica la solución?
- ¿Has hecho primero una conjetura?
- ¿Has logrado demostrarla?
- ¿Te convence?
- ¿Serías capaz de convencer a los demás?
- Busca problemas que puedan resolverse de forma similar
- Cambia el enunciado del problema. Resuelve problemas parecidos, más fáciles y más difíciles. Hazlo más general.
- Se han ocurrido otros problemas mientras se resolvía este. Enúncialos.



GENERALIZAR es una DECISIÓN EJECUTIVA

- Repasa el problema paso a paso
- ¿Qué estrategias heurísticas hemos usado?
- ¿Qué etapas? ¿Cuándo ha terminado cada etapa y cuándo ha comenzado la siguiente?
- ¿Cómo he trabajado yo? ¿Y el grupo?
- ¿Hemos llegado a la mejor solución?



GENERALIZAR es una ETAPA

- **Etapas: Volver atrás o fase de verificación.**
- Comparar el resultado con la situación analizada y con el enunciado del problema.
- Ver si se puede resolver de otra manera, si hay un camino más fácil, más elegante o más interesante.
- Enunciar el problema de la forma más general posible.
- Escribir cuidadosamente la resolución del problema.
- Discutir primero en grupo y luego con toda la clase los resultados obtenidos

- 
- En una trama de puntos de tres por tres i) ¿Cuántos triángulos pueden formarse con los vértices en la trama?
 - ii) Ídem en una trama de cuatro por cuatro?
 - iii) ¿Cuántos cuadriláteros?
 - iv) ¿Y pentágonos?
 - v) **Generaliza**



Solución

- i) Todas las formas de coger tres puntos son $\binom{9}{3}$ y no sirven cuando están alineados (8).
- ii) Todas las formas de coger cuatro puntos son $\binom{16}{4}$.
- Cuatro puntos alineados $\Rightarrow 10$
- Tres puntos alineados $\Rightarrow 4 \cdot 10 \cdot 12 + 4 \cdot 13$

- 
- En una trama de cuatro por cuatro
¿Cual es el mayor número de lados
que puede tener un polígono con
vértices en puntos de la trama?
Generaliza a otras tramas

- 
- Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

$x = n^{\circ}$ de cocos; $y = n^{\circ}$ de cocos que quedan
 $8x - 27y = 38$; $x = 25$ e $y = 6$

Generalización a n marineros



UNA BOLA PESA MENOS

- Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cual es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola?
- ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13?
- **Generaliza** el problema a cualquier número de bolas.



LAS BOLAS DEFECTUOSAS

- A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "*Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquennla*" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada?
- Un mes más tarde llega otro mensaje: "*Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas*" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

III.- DECISIONES EJECUTIVAS

¿Qué hacer en un problema?

¿Qué caminos tomar o no tomar?

HACER UN PLAN

Seleccionar objetivos centrales y subobjetivos

Buscar los recursos que parecen adecuados:

conceptuales

técnicos

estratégicos

Evaluar la resolución

Revisar o abandonar planes

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos desastrosos

- **¿Qué estoy haciendo?**
- **¿Por qué lo hago?**
- **¿Para qué lo hago?**
- **¿Cómo voy a usarlo después?**

10. ACTITUDES, BLOQUEOS Y CREATIVIDAD

Actitud inicial: Condicionantes sociales o culturales

- **Positivas:** Confianza, tranquilidad, disposición para aprender, curiosidad
- **Negativas:** Bloqueos y obstáculos a la creatividad.

Para poder superar los es saber que los tenemos, conocerlos, analizarlos.

Tipos de bloqueos:

⇒ Bloqueos de tipo inercial

Surcos en la mente. Ejemplo: palillos

⇒ Bloqueos de origen afectivo

Sentimientos: apatía, pereza, miedo al fracaso, ansiedad. Los bloqueos emocionales se pueden deber a los sentimientos, al miedo a equivocarnos, rigidez de pensamiento, sobremotivación o falta de impulso.

⇒ Bloqueos de tipo cognoscitivo

Dificultades para percibir el problema, identificarlo.

⇒ Bloqueos de tipo cultural y ambiental

Ejemplo de bloqueo cultural: En una cuadrícula de tres por tres unir todos los puntos con cuatro rectas, sin levantar el lápiz.

Los bloqueos ambientales se producen si estamos a disgusto.



SUPOSICIONES OCULTAS

Palillos

¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?



11. POSIBLES OBSTÁCULOS

- Ausencia de plan de resolución
- Inflexibilidad para considerar alternativas
- Rigidez en la ejecución de procedimientos
- Incapacidad de anticipar las consecuencias
- **EI EFECTO TÚNEL.** La ejecución es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que estoy haciendo



Efecto túnel

- ¿En cuantos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?



Efecto túnel

- Cortar un cubo en dos piezas como las de la figura de manera que pueda armarse y desarmarse



■ Oso



La invitación

Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

12. UNA CLASE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I. Trabajo en grupos

- 1) Motivación
- 2) Tratamiento de la diversidad
- 3) Favorece la cooperación frente a la competitividad
- 4) Eficiencia
- 5) Se desarrollan actitudes sociales

II. Formación de equipos

Secretario/a u observador/a

Portavoz

Responsable o moderador/a

Animador/a

Secretario/a-observador/a: Anota los puntos más importantes del camino que sigue el resto del grupo en busca de la solución de problemas

Portavoz: Expone las conclusiones del grupo

Responsable-moderador: Planifica los tiempos y tareas asignadas a cada fase del trabajo

Animador/a: Mantiene el clima en el que todo el mundo colabore, sin inhibiciones ni competitividad.



El profesor/a debe:

- Enunciados
- Distribuir los problemas. Graduar dificultades
- Proporcionar ideas básicas sobre lo que se pretende
- Supervisar, actuando lo justo, sin intervenir demasiado, pero sugiriendo como salir de un bloqueo.
- Animar

Reflexión en común sobre la forma en que cada grupo ha procedido.

Evaluación

- De capacidades y destrezas. **Interpreta los resultados**
- Del trabajo en grupo. **Trabajan de forma cooperativa**



Torres de Hanoi

- Está en “Juegos”

- 
- En una cuadrícula de cuatro por cuatro, colocar los números del 1 al 16 en los cuadrados, cada uno en uno. Multiplicar los números de cada dos cuadrados adyacentes y escribir el producto en cada arista. Sumar los números que hay en cada arista. Queremos que la suma sea lo menor posible, ¿Cómo debemos colocar los números del 1 al 16?

- 
- En un triángulo isósceles los ángulos iguales B y C miden 80° . Por el vértice B trazamos una recta r que divida al ángulo en $60^\circ+20^\circ$ y que corte al lado opuesto en D , y por C una que lo divida en $50^\circ+30^\circ$ y que corte en E al lado opuesto. ¿Qué ángulo forma la recta r con la recta DE ?



Tomografías

- i) Las siguientes tomografías de que figura provienen.
- ii) Dibuja distintas series de tomografías que se obtienen si el cuerpo es un cilindro
- iii) Ídem en un cubo



Diamantes

- En la trama de triángulos dibuja todos los diamantes-dos posibles, todos los diamantes-tres posibles y todos los diamantes-cuatro posibles. ¿Con cuáles puedo construir un cuerpo en el espacio? A estos cuerpos de caras triangulares vamos a llamarlos **DELTAEDROS**. Investiga y construye todos los deltaedros posibles. ¿Cuántos hay?(Podemos restringir la búsqueda a deltaedros convexos)
- ¿Cuáles son también poliedros regulares? ¿Qué orden tienen sus vértices?
- ¿Hay deltaedros con menos de cuatro caras? ¿Hay deltaedros convexos con un número impar de caras? ¿Hay deltaedros con más de veinte caras?
- Haz un cuadro con los resultados obtenidos: N° caras, N° vértices, N° aristas, N° vértices de orden tres, de orden cuatro, de orden cinco, descripción de los posibles deltaedros: bipyramides, esquinas, bandas...



Pentaminos y hexaminos

- Dibuja todos los pentaminos posibles. ¿Cuántos hay?
- Utiliza todos los pentaminos para formar un rectángulo de 12×5
- Divide la cuadrícula de 3×5 en tres pentaminos con los que se pueda construir tres cajas sin tapa
- Dibuja todos los hexaminos y marca aquellos con los que se pueda construir un cubo.



Lógica

- Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos oficios. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pinto y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:
- 1: El chofer se burló del músico porque tenía el pelo largo
- 2: El músico y el jardinero pescan con Juan
- 3: El pintor compró al tabernero vino
- 4: El chofer cortejaba a la hermana del pintor
- 5: Jaime debía 5 dólares al jardinero
- 6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

Juan es pintor y barbero

Jaime es tabernero y músico

Jorge es chofer y jardinero

- 
- a) Lobo, cabra, col y barquero
 - Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

 - b) Ídem con tres mujeres y tres maridos celosos, si sólo caben dos personas en la barca.



Inés L. Seni

- Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lil Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de multiplicación:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ \text{L} \end{array}$$

$$\text{SENI}$$

- ¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una multiplicación correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, y también que la solución es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).



La cabra atada

- Una cabra está atada por una cuerda de 6 metros a una esquina exterior de un redil que mide 4 metros por 5 metros, rodeado por un campo de hierba. ¿En qué área puede pastar la cabra?



Cien cuadrados

- ¿Cuál es el menor número de líneas rectas que tenemos que dibujar para tener exactamente 100 cuadrados?



Cuadros mágicos

Todos distintos:

■ $n \rightarrow n/2(n^2+1)$

BIBLIOGRAFÍA

ALEM, J. P.: "Juegos de ingenio y entretenimiento matemático" Gedisa. Barcelona.

CARROLL, L.: "El juego de la lógica" Alianza. Madrid.

"Matemática demente" Tusquets. Barcelona.

DAVIS, M. D.: "Teoría del juego" Alianza. Madrid.

DAVIS, G. A y SCOTT, J. A.: "Estrategias para la creatividad". Paidós. Buenos Aires. 1980.

GARDNER, M.: En Labor o Alianza

GUZMAN, M.: "Cuentos con cuentas" Labor. Barcelona.

"Para pensar mejor"

POLYA. G.: "Cómo plantear y resolver problemas". Trillas. México. 1965.

"Matemáticas y razonamiento plausible". Tecnos. Madrid. 1966

"Mathemayical Discovery. On understanding, learning and theaching problem solving". Jhon Wiley. New York. 1962.

SMULLYAN, R.: "¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos" o "Alicia en el país de las adivinanzas" Cátedra. Madrid.

VIVES, P.: "Juegos de ingenio" Martínez Roca. Barcelona.

TORRANCE, E. P.: "Educación y capacidad creativa". Morova. Madrid. 1977.