Búsqueda de posiciones de equilibrio en un juego de competición política con restricciones

López, Mª Dolores. Universidad Politécnica de Madrid.
Rodrigo, Javier. Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

PROBLEMA

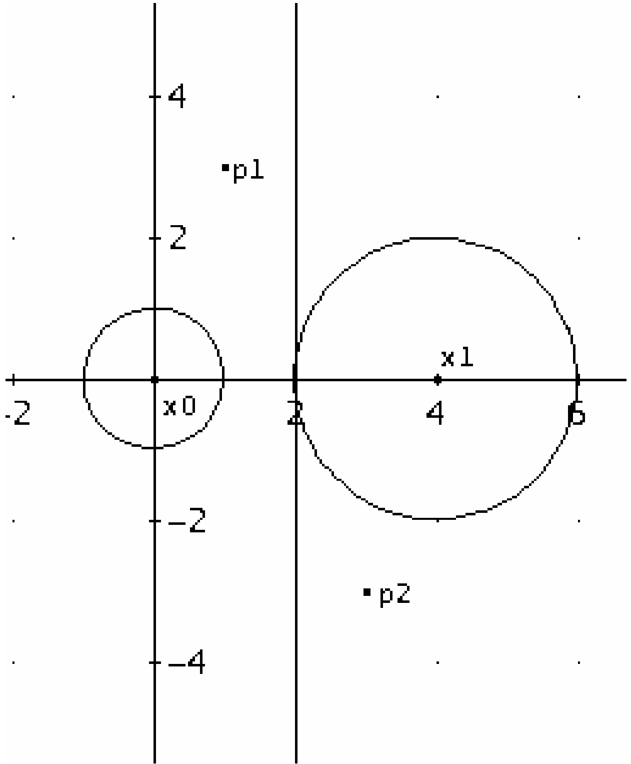
"Consideramos dentro del plano de políticas dos partidos, cuyas políticas iniciales sobre dos temas están dados por las coordenadas de dos puntos x_0 y x_1, y la localización de *n* votantes representada por los puntos p_i. Trazamos la mediatriz de $x_0 x_1$, que parte el plano en dos semiplanos. Cada partido gana a los votantes que están en su semiplano. Con el objetivo de conseguir el mayor número posible de votantes, aceptamos que cada partido puede cambiar sus políticas dentro de un entorno circular, siendo los dos entornos disjuntos. Buscamos las situaciones de equilibrio para los partidos dentro de sus entornos."

PLANTEAMIENTO

Políticas iniciales de los partidos:

$$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2\right) \quad x_1 = \left(x_1^1, x_1^2\right)$$

Votantes $\boldsymbol{p_i=(p_{i1}, p_{i2})} \quad \boldsymbol{i=1,\ldots\ldots,n}$



Entornos:

$$B = C\left(x_0, r\right) \qquad B' = C\left(x_1, r'\right)$$

Par de políticas:

$\left(t_1, t_2\right)$ **con** $t_1 \in B \quad t_2 \in B'$

Ganancias para ese par de políticas:

$$\Pi^1\left(t_1,t_2\right) = \text{número de puntos } p_i \text{ tales que } d\left(p_i,t_1\right) \leq d\left(p_i,t_2\right)$$

$$\Pi^2\left(t_1,t_2\right) = \left(\text{número de puntos } p_i \text{ tales que } d\left(p_i,t_1\right) > d\left(p_i,t_2\right)\right) = n - \Pi^1\left(t_1,t_2\right)$$

El concepto de equilibrio que estudiamos es el de Nash:

Definición: (t^{0}_{1}, t^{0}_{2}) es una posición de equilibrio de Nash si:

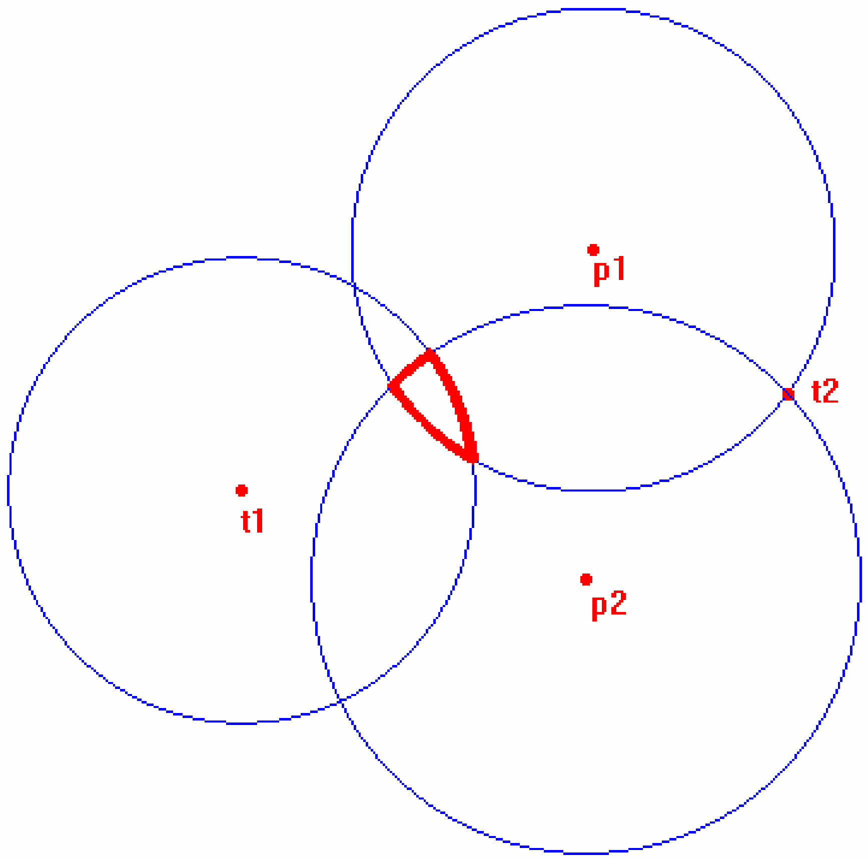
$$\Pi^{1}\left(t_1, t_2^0\right) \leq \Pi^{1}\left(t_1^0, t_2^0\right), \quad \Pi^{2}\left(t_1^0, t_2\right) \leq \Pi^{2}\left(t_1^0, t_2^0\right) \quad \forall t_1 \in B, t_2 \in B'$$

Son posiciones donde se pueden situar los jugadores de forma que si se mueve uno de ellos no mejora su ganancia.

Condiciones de existencia de equilibrio

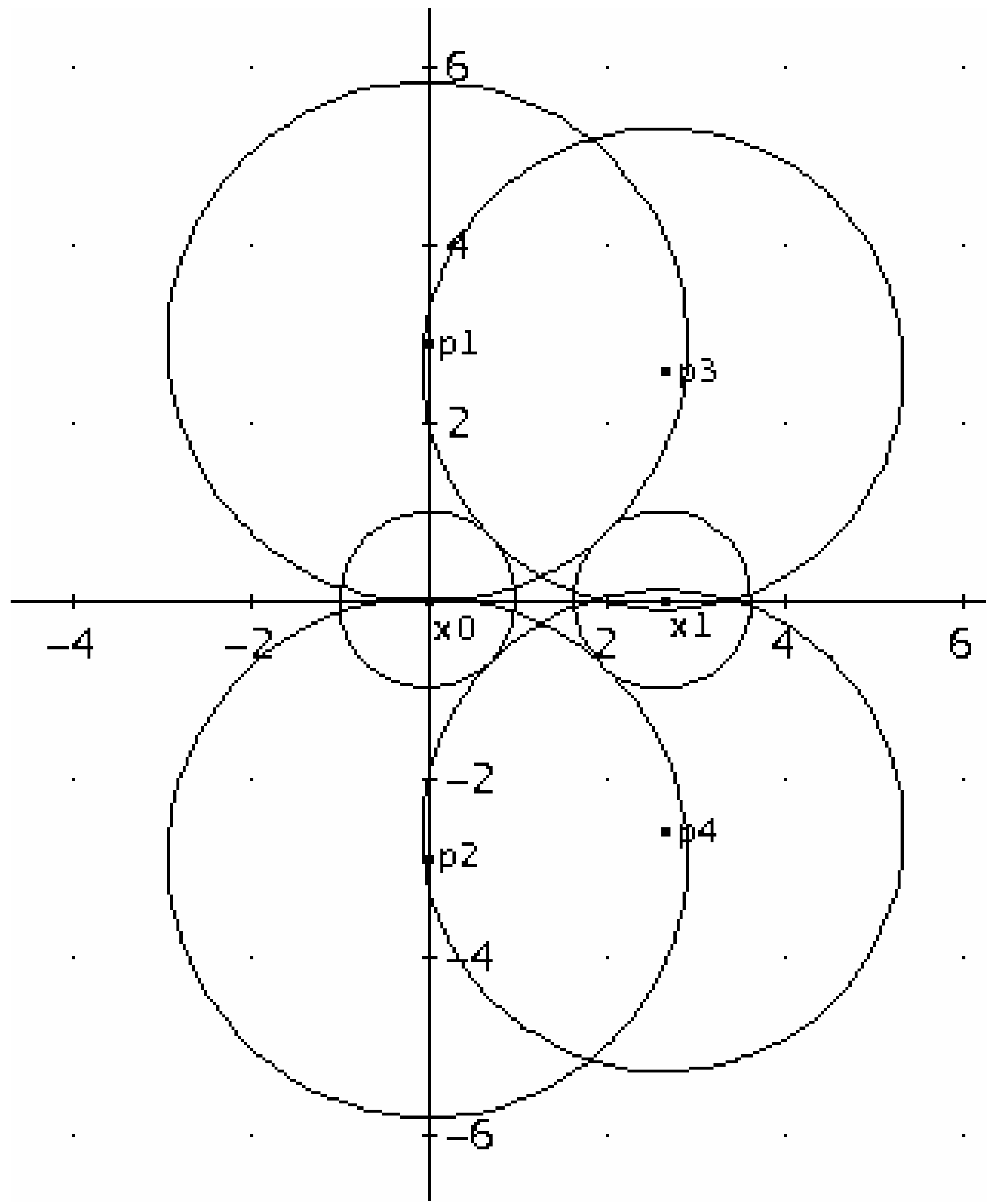
Condición necesaria y suficiente

Proposición 1: Las posiciones de equilibrio en el juego planteado serán las posiciones (t_1, t_2) de manera que t_1 está situado en la zona en B de máxima intersección de círculos de centro la posición de algún votante y radio la distancia de éste a t_2 , y t_2 está situado en la zona en B' de máxima intersección de círculos de centro la posición de algún votante y radio la distancia de éste a t_1


p1
t2
t1
p2

Condición suficiente

Sean p_1 , …, p_n las posiciones en el plano de los votantes. Llamamos $p^1_{i_1}$, …, $p^1_{i_k}$ a los puntos del conjunto anterior tales que $d\left(p^1_{i_j}, B\right) \le d\left(p^1_{i_j}, B'\right)$, $p^2_{i_{k+1}}$,…, $p^2_{i_n}$ a los que cumplen que $d\left(p^2_{i_j}, B\right) > d\left(p^2_{i_j}, B'\right)$ y llamamos $B^1_j = C\left(p^1_{i_j}, d\left(p^1_{i_j}, B'\right)\right) \cap B$, $B^2_j = C\left(p^2_{i_j}, d\left(p^2_{i_j}, B\right)\right) \cap B'$ Entonces, si $\bigcap_{j=1}^{k} B^1_j \neq \phi$ y $\bigcap_{j=k+1}^{n} B^2_j \neq \phi$, cualquier posición (t_1, t_2) con $t_1 \in \bigcap_{j=1}^{k} B^1_j$, $t_2 \in \bigcap_{j=k+1}^{n} B^2_j$ es de equilibrio.


6
4
p1
p3
2
-4
-2
x0
2
x1
4
6
-2
p2
p4
-4
-6

Observaciones

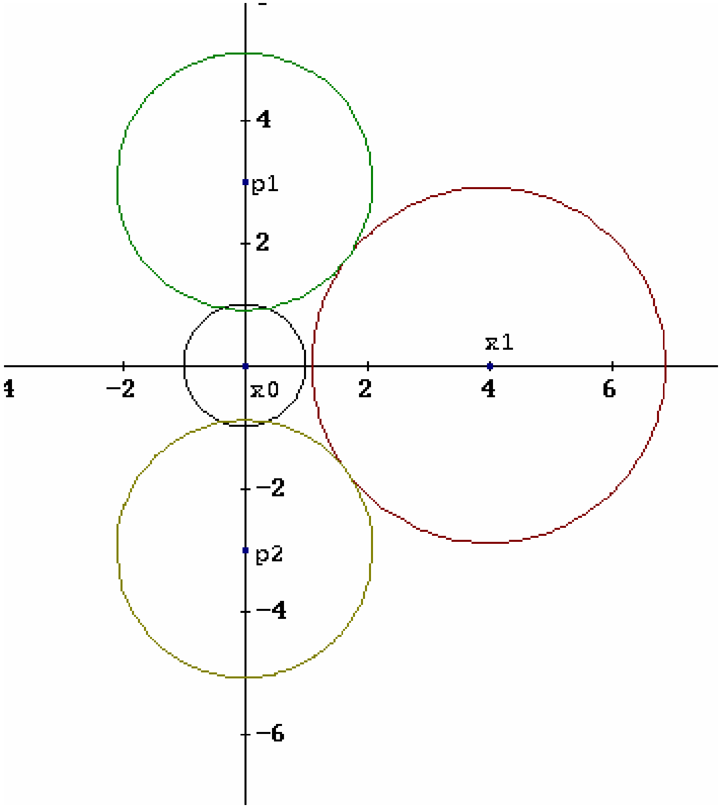
- La proposición asegura regiones de equilibrio

- Aunque no se cumplan las condiciones de la proposición puede haber equilibrio

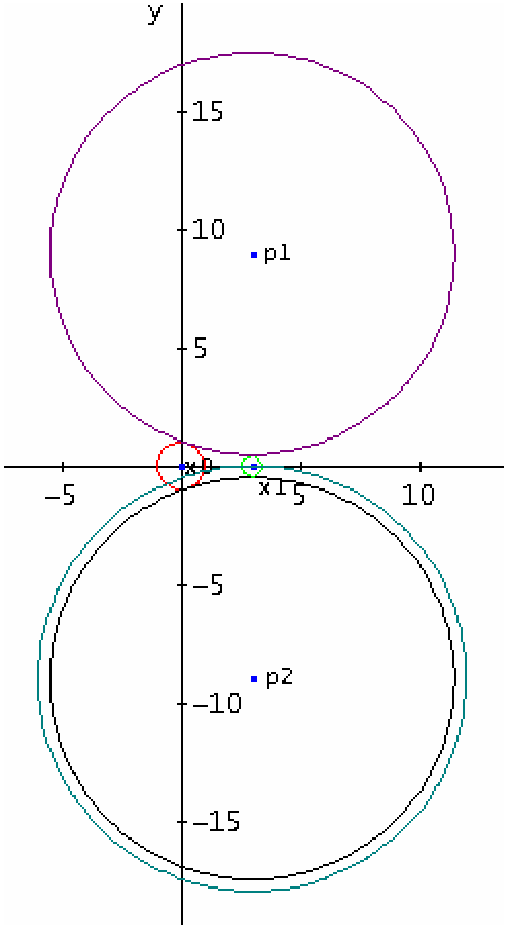
- Si existe equilibrio, éste no es único, al menos para el segundo partido (ventaja respecto a los juegos de Downs sin restricciones)

Ejemplos

Caso de no existencia de equilibrio

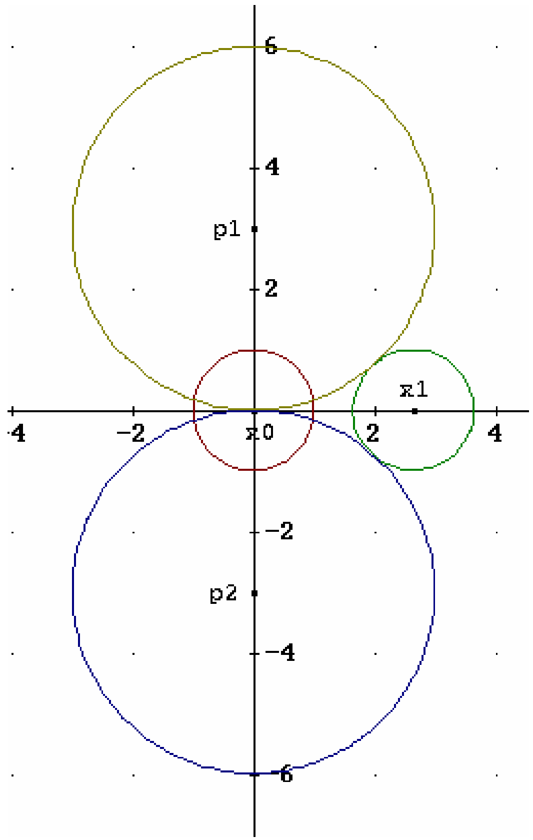


Caso de existencia de equilibrio sin que se dé la condición suficiente



Posiciones de equilibrio: cualquier (t_1, x_1) con $t_1 \in B_1^1$

Caso de unicidad de equilibrio para el primer partido (en el interior de su entorno)



Posiciones de equilibrio: cualquier (x_0, t_2) **con** $t_2 \in B'$

ALGORITMO PARA ENCONTRAR LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO

Se basa en la siguiente condición necesaria y suficiente de equilibrio para nuestro juego (condiciones de von Neumann):

Proposición 2: Se consideran los números:

$$m_1 = \min_{t\in B}\left(\text{máxima intersección en } B' \text{ de } C\left(p_i, d\left(p_i, t\right)\right), i = 1, \ldots, n\right)$$

(máxima ganancia mínima para el segundo jugador), $m_2 = \min_{t'\in B'}\left(\text{máxima intersección en } B \text{ de } C\left(p_i, d\left(p_i, t'\right)\right), i = 1, \ldots, n\right)$

Entonces existe equilibrio en el juego planteado si y sólo si $m_1 + m_2 = n$**. Las posiciones de equilibrio serán los** (t_1, t_2) **tales que** t_1 **es un punto de** B **donde se alcanza** m_1 **y** t_2 **es un punto de** B' **donde se alcanza** m_2**.**

Hay que hallar entonces m_1 , m_2 y zonas donde se alcanzan

Inconveniente: los conjuntos *B*, *B'* donde se buscan esos mínimos tienen infinitos puntos.

Ventaja: los valores que pueden tomar las máximas intersecciones que hay que minimizar son finitos (puesto que el conjunto de votantes es finito).

Idea: Hacer una partición de los entornos *B*, *B'* utilizando cuadrados, y hallar las máximas intersecciones de círculos centrados en los votantes y de radios las distancias máxima y mínima a los cuadrados. Cuando esas máximas intersecciones coincidan, en todo el cuadrado la máxima intersección es la misma

Algoritmo para encontrar zonas donde se alcanzan m_1, m_2 y posiciones de equilibrio si existen

Paso 1. Tomar un cuadrado Q que circunscriba a B
Hacer una partición de Q en k^2 cuadrados $Q_{i\,j}$

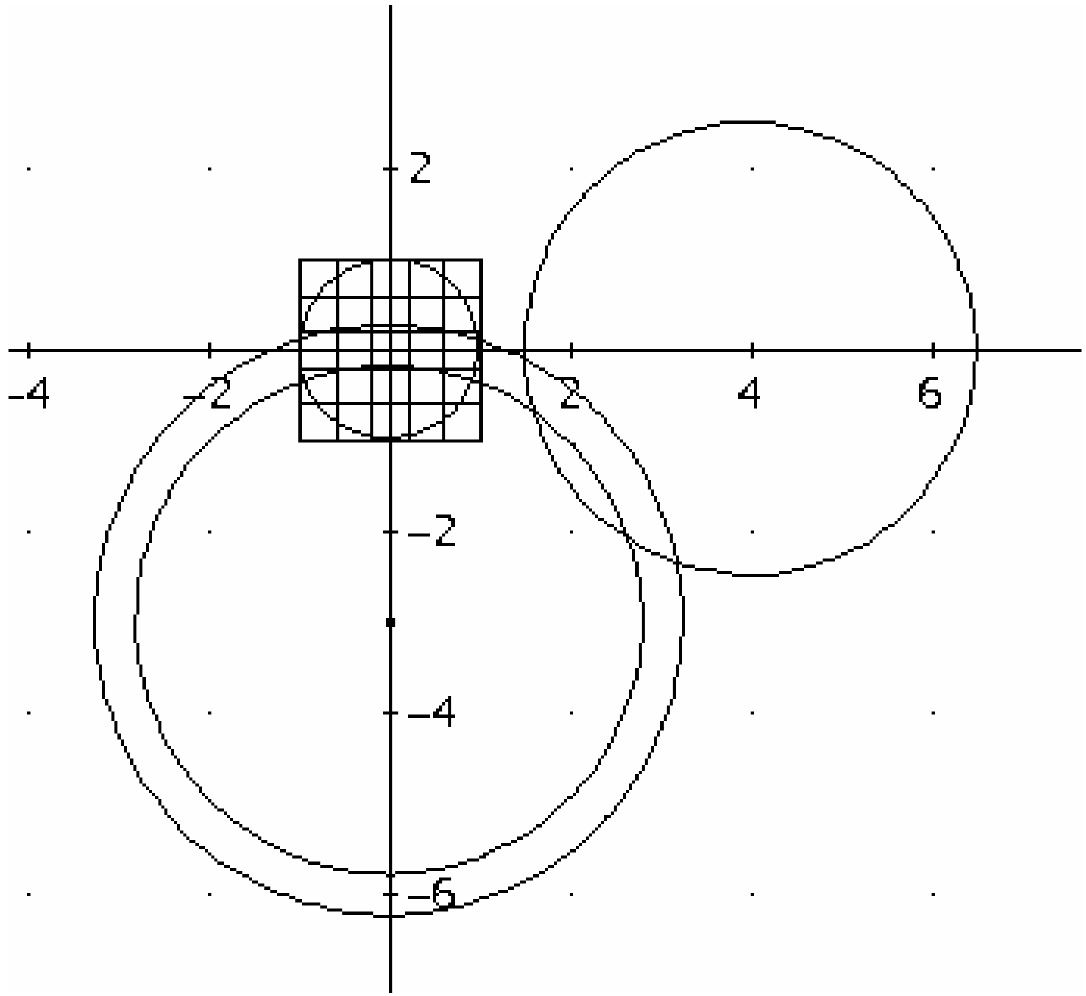
Paso 2. En los cuadrados considerados en el paso anterior, hallar para todo *i, j* la máxima intersección en *B'* de $C(p_s, d(p_s, Q_{i,j}))$, $s = 1, \ldots, n$ ($m_{Q_{i\,j}}$) y la máxima intersección en *B'* de: $C(p_s, \max\{d(p_s, x) / x \in Q_{i\,j}\})$, $s = 1, \ldots, n$ ($M_{Q_{i\,j}}$).

Paso 3. Hallar el $\min_{i,j} m_{Q_{i\,j}}$ y comprobar si para algún i_0, j_0 para el que se alcanza ese mínimo, $m_{Q_{i_0\,j_0}} = M_{Q_{i_0\,j_0}}$. En ese caso ir al paso 5 y almacenar los $Q_{i_0\,j_0}$, $m_{Q_{i_0\,j_0}}$. En caso contrario, ir al paso 4.

Paso 4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 para $k := 2k$

Paso 5. Repetir los pasos del 1 al 4 para un cuadrado *Q'* que circunscriba a *B'* y así encontrar los $Q'_{i_0\,j_0}$ **donde se alcanza el** $\min_{i,j} m'_{Q'\,i\,j}$ **y tales que** $m'_{Q'\,i_0\,j_0} = M'_{Q'\,i_0\,j_0}$ **.**
Almacenar estos $Q'_{i_0\,j_0}$ **y** $m'_{Q'\,i_0\,j_0}$

Paso 6. Hallar $m_{Q\,i_0\,j_0} + m'_{Q'\,i_0\,j_0}$**. Si este número es igual a *n*, existe equilibrio en el juego planteado y cualquier** (t, t') **con** $t \in Q_{i_0\,j_0} \cap B$ **,** $t' \in Q'_{i_0\,j_0} \cap B'$ **es posición de equilibrio (en** $Q_{i_0\,j_0} \cap B$ **se alcanza** m_1 **, y en** $Q'_{i_0\,j_0} \cap B'$ **se alcanza** m_2 **.**
Se cumple además que $m_1 = m_{Q\,i_0\,j_0}$ **,** $m_2 = m'_{Q'\,i_0\,j_0}$**)**
Si el número anterior no es *n*, no existe equilibrio en el juego planteado.



Idea gráfica del algoritmo para un votante en la posición (0, -3)

OBSERVACIONES

1) Los interiores de las regiones en que se alcanzan m_1 **,** m_2 **han de ser no vacíos para que el algoritmo "funcione" (en ese caso se cumple seguro la condición de parada del paso 3)**

2) La complejidad del algoritmo es $O\left(k^2\, n^2 \log n\right)$ **(hay que hallar la máxima intersección en** k^2 **arreglos de *n* círculos, cada uno de ellos tiene complejidad** $O\left(n^2 \log n\right)$ **. Se puede rebajar ligeramente esta complejidad)**

3) Para que un valor de *k* dé los $Q_{i_0 j_0}$ **, ha de ser necesariamente** $k \geq \frac{2\sqrt{2}\, r}{diam(D)}$
(*D*: región en la que se alcanza m_1 **)**

PROBLEMA: Que el interior de *D* sea vacío

Puede ocurrir (recordad el tercer ejemplo, con unicidad de equilibrio para el primer partido: *D* se reduce a un punto)

Para tratar estos casos, hay que analizar arreglos de círculos "degenerados" (que tienen intersecciones en un solo punto: ver Halperin y Leiserowitz)

Se puede adaptar el algoritmo para que cubra estos casos, pero aumentando su complejidad

CONCLUSIONES

En el análisis del equilibrio de la mayoría de los juegos de competición multidimensionales, se encuentra que no existen posiciones de equilibrio salvo en casos singulares. Además, cuando existe suele ser único y con los dos jugadores adoptando la misma estrategia

En este trabajo se ha propuesto un modelo de competición bidimensional con restricciones de entorno y se han desarrollado estrategias geométricas que encuentran las posiciones de equilibrio, si existen

Ventaja del modelo: existen casos en los que las posiciones de equilibrio no sólo no son únicas sino que son regiones en el plano, lo que aporta mayores posibilidades al juego

REFERENCIAS

ABELLANAS, M., LILLO, I., LÓPEZ, M. y RODRIGO, J. (2006). Electoral strategies in a dynamical democratic system: geometric models. European Journal of Operational Research, 175, pp. 870–878.

AURENHAMMER, R. y KLEIN, R. (2000). Voronoi diagrams. In: Sack, J.-R. and Urrutia, J. (eds.), Handbook of Computational Geometry. Elsevier, Amsterdam.

BENTLEY J. L. y OTTMANN T. A. (1979) Algorithms for reporting and counting geometric intersections. IEEE Trans Comput., C-28, pp. 643–647

de BERG, M., van KREVELD, M., OVERMARS, M. y SCHWARZKOPF, O. (1997). Computational Geometry, Algorithms and Applications. Springer. New York.

REFERENCIAS

CABELLO, S., DÍAZ BÁÑEZ, J. M., LANGERMAN, S., SEARA, C. y VENTURA, I. (2005). Reverse facility location problems. Actas de los XI Encuentros de Geometría Computacional, pp. 263-270.

EDELSBRUNNER H., GUIBAS L., PACH J., POLLACK R., SEIDEL R., SHARIR M. (1992). Arrangements of curves in the plane-topology, combinatorics, and algorithms. Theoretical computer science, 92, pp. 319-336

HALPERIN, D., LEISEROWITZ, E. (2004). Controlled perturbation for arrangement of circles. International Journal of Computational Geometry and Applications, 14, pp. 277-310

KRAMER, G.H. (1973). On a class of equilibrium conditions for majority rule. Econometrica, 42, pp. 285–297.

REFERENCIAS

MCKELVEY, R. D. (1976).
Intransitivities in multidimensional voting models and implications for agenda control. Journal of Economic Theory, 12, pp. 472–482.

NASH, J. (1951).
Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54, pp. 286–295

von NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. (1944).
Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press. Princeton.

ROEMER, J. (2001).
Political Competition. Harvard University Press. Harvard.