# Recursos en el aula de Matemáticas

Adela Salvador

Universidad Politécnica de Madrid

# Recursos

- Los materiales de uso en el aula pueden ser:
  - Sofisticados o simples
  - Unidireccionales o susceptibles de múltiples exploraciones
  - Apropiados para una edad determinada o para un amplio abanico de edades
  - Caros o baratos
  - Duraderos o efímeros

# Recursos

- Criterios:
  - Fáciles de producir o adquirir
  - Precio razonable
  - Apropiados para edades diversas
- No veremos herramientas espectaculares
- Buscamos una nueva organización del aula
- Serán de uso habitual con el objetivo de hacer del aula de matemáticas un taller-laboratorio donde se hagan matemáticas

# Recursos

- Recursos materiales
- La resolución de problemas
- El número de oro
- La historia como recurso
- Mosaicos, frisos, transformaciones geométricas
- El juego en el aula de matemáticas
- El entorno
- Fractales
- Ordenadores, calculadoras, actividades tecnológicas
- Inteligencia artificial. Lógica borrosa

# Bibliografía


- Recursos en el aula de matemáticas. Francisco Hernán y Marisa Carrillo. Nº 34. Colección: Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Editorial Sintesis. 1988.

# ¿Qué se puede hacer con....?

- Palillos
- Tramas
- Dados, ruletas, tableros...
- Cartulinas y tijeras.
- Varillas
- Tangrams
- Folios, fotocopias
- Dominós...

# Palillos

- Se reúnen 4 profesores y piensan sobre actividades con palillos
  - ¿Cuántos palillos iguales se necesitan para hacer *n* triángulos equiláteros?
    - Sucesiones
    - Geometría
    - Surgen tres situaciones: tiras, red y norias
    - Juego: En una red cada jugador retira un palillo. Gana el que quite el último triángulo. ¿Estrategia ganadora?

# Palillos

- Con palillos grandes, intersecciones
- Polígonos:
  - ¿Cuántos?
  - ¿Ángulos rectos?
  - Clasificaciones con distintos criterios
- Regiones:
  - Con *n* palillos, ¿cuántas regiones pueden determinarse? ¿Cuál es el mayor número de regiones cerradas?
- ¿Cuál es el mayor número de ángulos rectos que pueden formarse con *n* palillos?

# Palillos

- Con palillos largos y cortos
- Mosaicos
- Polígonos
  - Con *n* palillos ¿cuál es el polígono con mayor número de ángulos rectos?
  - Simetrías
  - Clasificaciones

# Tramas

- Una misma actividad para edades distintas
- Construir triángulos en una trama triangular de puntos:
  - Con 7 años: Dibujar, ordenar y contar (con dificultad)
  - Con 8 años
  - Con 10 años: Secuencia de impares, de cuadrados...
  - Con 12 años: Dificultades imprevistas, nuevos triángulos. Dibujar un triángulo y contar los triangulitos que contiene

# Tramas

- Áreas
- Dado un triángulo de área 1, ¿cuántos otros tiene igual área? ¿Cuál es el de menor perímetro?
- Buscar triángulos de área 2
- Cuadrados
- Hexágonos. ¿Se puede construir un hexágono de área doble a uno dado?

# Experimentación

- Vaso con agua
  - Elipse y/o circunferencia
  - Horizontal y vertical

# Un juego

- Un juego con dos dados y dos tableros (cuadrados de 5 casillas por lado con números elegidos al azar del 0 al 9) y fichas.
- Se lanza primero un dado, sale por ejemplo 2, y luego el otro, sale, por ejemplo el 4, se forma el número 24. El jugador pone una ficha en uno cualquiera de los divisores de 24. Gana el jugador que primero ponga 4 fichas en línea (horizontal, vertical o diagonal)
- Objetivos: Divisores
- **Material fotocopiado**

# Otro juego

- Idem, pero ahora los dos tableros son iguales para ambos jugadores, tiene 7 casillas por filas y está relleno con números primos del 2 al 19.
- Se tira un dado y luego el otro, si por ejemplo sale el 42, el jugador puede poner una ficha en el 3, en el 2 y en el 7 (en los factores primos de 42). Pasa el turno al otro jugador.
- Si el número es primo, y el jugador lo descubre, vuelve a tirar. Si no lo descubre, pasa el turno.
- Gana el que primero consiga una fila o una columna.
- Objetivos: Divisores, primos...
- **Material fotocopiado**

# Y otro juego más

- Ruletas y tableros
  - Tres ruletas, la primera con los dígitos del 0 al 9, la segunda con los números del 11 al 20, y la tercera, con los números 6, 7, 8 y 9.
  - Dos tableros iguales.
  - Se gira cada ruleta y se multiplican, mentalmente, los 2 primeros números y se divide por el tercero. Se pone una ficha si la casilla está vacía. Si está ocupada, se juega de nuevo. Si de nuevo está ocupada, cede su turno. Si comete un error de cálculo, debe retirar una de sus fichas.
  - Gana el primero que complete una fila o una columna.
  - Objetivos: Practicar la multiplicación y la división
- **Material fotocopiado**

# Ruletas, azar y más jeugos

- Multiplicación y división
  - **Material fotocopiado**
- Decisiones y estrategia
  - **Material fotocopiado**

# Herramientas

- El ábaco
  - Para sumar, restar, multiplicar....
  - Números decimales
  - Metros, decámetros, decímetros
  - Números montañas, nº valle, capicúas, complementarios...
- Problemas
  - Con un ábaco de 3 barras, construir y escribir en 5 minutos todos los números valle que se pueda con 8 bolas.
  - Idem con 12 bolas y números complementarios

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- En primaria: ¿cuándo?, ¿por qué?, ¿para qué?
- Debate
- Maneras de hacer cálculos:
  - Con lápiz y papel
  - Mentalmente
  - Por aproximación
  - Con calculadora
- Y todas ellas deben ser trabajadas

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Hacer **cálculo mental**, todos los días, algunos minutos
- Por ejemplo: Sesión de 15 minutos:
- 1) Se multiplican dos números y se suma otro
  - 9 x 7 + 32
  - 100 x 25  + 500...
- 2) Al revés. Se da el resultado, y el alumnado busca el producto y la suma.
  - Por ejemplo, 1000, 250 x 2 + 500.
  - Más difícil, 4500, 4 x 1000 + 500

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- 3) Si han hecho cálculo mental, ya pueden usar la calculadora. Cada uno con su calculadora.
- Buscar dos números cuyo producto esté entre 1500 y 1600. Anotar varias soluciones.
- Idem entre 150 y 160.
- Idem si uno de los números es 4.
- Idem si el resultado es 5.
  - 5 x 1; 2,5 x 2...
  - Entre 150 y 160: 38,5 x 4...

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Una actividad con calculadoras
  - **Material fotocopiado**

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- ¿Por qué?
  - ¿Se necesita en la **vida cotidiana** calcular la raíz cuadrada de 432,7, o dividir 84,56 entre 12,64?
  - ¿Qué aporta la práctica repetida de esos algoritmos con lápiz y papel? ¿Conceptualmente? ¿Capacidad matemática?
  - Estos procedimientos son destrezas para tener éxito en la escuela (**supervivencia escolar**).
  - Si duda de alguna destreza, pregunte a sus conocidos si la han necesitado, en el último año, en la vida. Si ninguno lo ha hecho, considere que es una destreza de supervivencia escolar, sus alumnos la deben dominar porque está en el programa y no deje de enseñarla. Pero téngalo en cuanta.

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- ¿Por qué?
  - Permite seguir haciendo matemáticas al alumnado que carece de esas destrezas
  - Les permite inventar sus propios algoritmos
  - Permite proponer otros problemas
  - Ayuda a comprender las operaciones y sus propiedades, hacer aproximaciones, centrarse en el proceso de resolución del problema, más que en los cálculos

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- ¿Para qué?
- Fielker, D. Usando la calculadora con niños de 10 años. Generalitat Valenciana. 1986.
- ¿Puede la calculadora ser un instrumento útil en sesiones de cálculo mental?
- Primera vez que se usa la calculadora en clase
- Fase de exploración
- Un juego
- Problemas con enunciado

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Fase de exploración
  - Escribir distintos números
  - Poner la máquina a cero
  - Contar de 3 en 3 empezando por el 1. Primero mentalmente, y luego con calculadora
    - Escribir: 1 +  3 =; + 3 =,   ... (¿7 años?)
    - Escribir: 1 +  + 3 = = =  ... (10 años?)
    - Contar de 5 en 5 empezando por 11
    - ¿Cómo volver al 11? – – 5 = = =...

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Un juego. (Sumas)
- Cada pareja dispone de una calculadora, lápiz y papel. Contar de 6 en 6 empezando con el 4. Uno de los jugadores con calculadora y el otro con cálculo mental. Se anotan los resultados. Fin. Se cotejan las series y gana aquel que tenga escritos más términos correctos.
- Si no conocen  + +, suele ganar el que lo hace con cálculo mental. Cuando lo conocen (o se les enseña) gana ya el que usa la calculadora.

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Cálculo con lápiz y papel, mental y con calculadora
  - Buscar 6 pares de números cuyo producto sea 23.
  - Idem 0,5.
  - Hacer raíces cuadradas: 1) con lápiz y papel, 2) aproximando el resultado a enteros y luego con una cifra decimal, 3) con calculadora. (12 años)
  - Dar un folio, con teclas a pulsar en la calculadora, y rellenarlo, primero, en una columna, mentalmente, y luego, usar la calculadora. (13 años): Ejemplo: 1/ 0 =?¿?¿; 4 sqrt sqrt sqrt...; 0,5 sqrt sqrt sqrt...; Dejar que el alumnado haga conjeturas.

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- Problemas con enunciado:
- Dice el fabricante que estas calculadores tienen 10 mil horas de vida. ¿Cuánto es en meses?
- El área de un rectángulo es 23, cuáles son sus lados.
- Escribir en la calculadora 0,01 sin usar la tecla del 0 ni la del 1.

# ¡Aprende a conocer tu calculadora!
# **Una actividad para el aula**

- En las calculadoras las expresiones decimales se escriben con un punto, en lugar de con una coma.
- Para conocer mejor tu calculadora, cuenta el número de cifras que pueden aparecer en la pantalla.
- Hay calculadoras que usan más cifras de las que se ven. Para averiguarlo, haz las siguientes operaciones:
  - 1 : 7 = aparece en la pantalla: 0.1428571
  - $\times$ 10 =
  - Si el resultado es 1.428571 significa que la calculadora no trabaja con cifras de reserva. Si aparece un 4 al final: 1.4285714 es que tiene **cifras de reserva**. Restando la cifra de las unidades y multiplicando, de nuevo, por 10, hasta que se pierdan dígitos, puedes saber cuántas cifras de reserva tiene tu calculadora.

# ¡Aprende a conocer tu calculadora! **Una actividad para el aula**

- También es importante saber si tu calculadora **redondea o trunca**. ¿Cómo saberlo?
  - Para averiguarlo, divide 70 entre 9. Si el resultado es 7.7777777 la calculadora trunca, si es 7.7777778 redondea. Si la calculadora no tiene cifras de reserva, o se le acaban, entonces trunca. Solo redondea si utiliza cifras de reserva
- Calcula 3 : 9 $\times$ 9. Explica el resultado
- Para calcular el 20 % de 970 se teclea:

  970 $\times$ 20 %
- En la pantalla aparece:

  194

# ¡Aprende a conocer tu calculadora!
# **Una actividad para el aula**

- En algunas calculadoras M+ o M - suma o resta a la **memoria** lo que aparece en la pantalla.
- MR lleva a la pantalla el contenido de la memoria.
- MC borra el contenido de la memoria.
  - *Ejemplo*: Para calcular:

$$4 + 9 \times 3$$

  - aprieta las teclas:

4 M+ 9 x 3 = M+ MR

  - y en la pantalla se obtiene: 31.
  - ¿Por qué?

# ¡Aprende a conocer tu calculadora!
# **Una actividad para el aula**

- Para contar de 5 en 5, usando la calculadora, empezando por el 4, un truco muy útil es hacerlo usando las teclas:

  4 + + 5 = = =

  – Haz la prueba.
- Con la calculadora se pueden hallar las **potencias sucesivas** de un número.
- Pulsa las teclas 5 x x = ¿Qué obtienes?
- Pulsa a continuación = y obtendrás $5^3$. Si continúas pulsando = obtendrás las siguientes potencias de 5.
  – Haz la prueba.

# Cálculo mental, calculadoras. ordenadores

- La calculadora es una herramienta para suscitar la reflexión, es descubrimiento y la diversión.

# Catalizadores

- Multicubos
- Libro de espejos

# Multicubos

- Construir y comprobar.
- Construir y conjeturar.
  - Hacer sus construcciones y clasificarlas en las que se mantienen de pie, y las que no. Analizar.
  - Hacer plataformas cuadradas, hileras, cubos...
  - Bicubos, tricubos, tetracubos... (Igualdad, menor superficie...). Dibujarlos en una trama de puntos triangular. Todos los tricubos (tetracubos) tienen igual volumen ¿y superficie?
  - ¿Con qué tetracubos iguales puede construirse un cubo?
  - ¿Cuál es el menor cubo que puede construirse con túneles?

# Libro de espejos

- Construcción
- Mirar un punto, con distintas aberturas.
- Mirar un segmento, con distintas aberturas.
- Hacer que aparezca un segmento paralelo. Idem, perpendicular.

# Libro de espejos

- Colocar el libro para ver un cuadrado, pentágono, hexágono, triángulo equilátero...? Anotar los ángulos. Para que sea un polígono de 11 lados, ¿cual debe ser el ángulo?
- Polígonos estrellados
- ¿Cómo se podrá ver un cubo?
  - Superficie?

# Libro de espejos

- Circunferencia
  - Flores
- El eje en:
  - El centro de la circunferencia
  - En un punto interior
  - Exterior y lados secantes
  - Exterior y lados tangentes
  - Exterior y un lado secante y el otro exterior, tangente...

# Libro de espejos

- Conseguir:
  - 8 círculos
  - 4 círculos
  - 1 círculo
  - Hallar el centro
- Concurso
  - Producir con el libro de espejos el diseño más atractivo y armonioso

# Un juego de azar

- Juego de azar, con estrategia y cambio de reglas
  - Material: Ruleta del 0 al 9. Dos tableros (hexagonales) iguales. Fichas rojas y azules.
  - El jugador rodará ambas ruletas, y sumará los números obtenidos. Pondrá una ficha en la casilla del número, si está vacía.
  - A) Si está ocupada el otro jugador quitará la ficha de su tablero de esa casilla.
  - Gana el primero que consiga una diagonal de 4 o 5 casillas.
  - Cambio de las reglas: En A) el jugador podrá optar por: 1) el otro jugador retire la ficha, 2) volver s rodar la ruleta, 3) poner una ficha en una casilla que tenga desocupada.

# El juego

- Juego de azar, con estrategia
  - Dos jugadores
  - Material:
    - Dos dados y 18 fichas para cada jugador
    - Dos carros, con casillas numeradas del 0 al 6.
  - Reglas del juego
    - Cada jugador coloca las 18 fichas en su carro, en los números que prefiera, tantas como desee.
    - Tira los 2 dados y resta lo obtenido. Si la diferencia coincide con una casilla con fichas, quita una.
    - Gana el jugador que, al cabo de 30 jugadas, tenga menos fichas en su carro
  - Estrategia:
    - 1) Observar las frecuencias. Jugar.
    - 2) Diagrama en árbol. 0: 6; 1: 10; 2 : 8; 3: 6; 4: 4; 5: 2; 6: 0.

# El juego

- La pila de 11.
  - Cada jugador, por turno, retira 1, 2 o 3 fichas de una pila de 11. Pierde el jugador que retire la última ficha.
  - Juego de estrategia ganadora. Gana el jugador que empieza. Buscar la estrategia.
- – Retirar dos, y luego el complemento.
- – Generalizarlo.

# Situaciones abiertas

- Tres propuestas:
  - 1) Ordena de mayor a menor: 2 elevado a 55; 3 elevado a 44; 5 elevado a 33; 6 elevado a 22.
  - 2) Completa la serie: R, V, R, V, V, R, V, V, V, R....
  - 3) Colorea un cuadrado en rojo y verde, de las formas más distintas que se ocurran con la condición que haya tanto rojo como verde.
- La propuesta 1 es cerrada y única; la 2, es confusa, tendrá tantas respuestas como criterios posibles; la 3, tiene infinitas, y es una situación abierta. Puede haber soluciones muy creativas.

# Situaciones abiertas

- ¿Qué números, del 1 al 100, pueden escribirse como suma de números consecutivos?
  - Ensayo y error
  - Con 2, todos los impares, y ningún par. Buscar la expresión algebraica.
  - Con 3, los múltiplos de 3.
  - Con 4 ?¿
  - Con 5...
  - El 2, 4, 8, 16, 32... No pueden escribirse. ¿Por qué?

# Situaciones abiertas

- En una trama de puntos de 4 x 4, se dibujan polígonos. ¿Cuál es el máximo número de lados que puede tener un polígono de vértices en dicha trama? Idem, de 5 x 5....
  - 4: 16 lados. No puede haber más pues hay 16 puntos.
  - 5: ¿Podría tener 25 lados? Sólo logro dibujar de 24.
  - 6: Otra vez 36.
  - 2: 1
  - 3: ?¿?¿
  - Buscar la explicación

# Otros recursos

- Exposiciones
- Concursos
  - Fotografía matemática
  - Relatos con contenido matemático
  - Maquetas con curvas y superficies
- Paneles
  - Lectura de novelas con contenido matemático y confección del panel
  - Idem de películas

# Recursos para un tema

- Fracciones y decimales
  - Multicubos
  - Doblado de papel
  - Libro de espejos
  - Folios con grabados
  - Ábaco
  - Dominó
  - Transparencias con la recta numérica
  - Juegos de tablero
  - Juegos con calculadora
- **Material fotocopiado**

# Recursos para un tema

- **PAPEL DE LOS RECURSOS.**
- **UTILIZACIÓN DE LOS RECURSOS PARA EL TRATAMIENTO DE LAS CURVAS.**
- Veamos el capítulo 13 del libro:
- Didáctica de las Matemáticas. J. Brihuega. M. Molero. A. Salvador. Editorial Complutense.

# Curvas. INTRODUCCIÓN

- Las tendencias actuales en educación matemática ponen énfasis en la importancia de un laboratorio o taller de matemáticas donde alumnas y alumnos **aprendan matemáticas haciendo matemáticas**, mediante experimentos y manipulando los conceptos. Pueden utilizarse desde medios sofisticados como videos u ordenadores a materiales muy simples como fotocopias, palillos, datos recogidos del medio próximo al centro escolar o incluso, simplemente, el doblado de papel.

# Curvas. INTRODUCCIÓN

- Se puede elegir un material muy simple y barato, palillos por ejemplo, y seleccionar múltiples exploraciones apropiadas para un amplio intervalo de edades que permitan una nueva organización del aula de matemáticas. Este trabajo puedes encontrarlo ya realizado de forma magistral en el primer capítulo de **Recursos en el aula de matemáticas** de F. Hernan y E. Carrillo editado en Síntesis [6]. Es un libro sumamente interesante tanto por las actividades propuestas como por la metodología empleada.

# Curvas. INTRODUCCIÓN

- El **objetivo** de este tema es contemplar el empleo de recursos condicionado por un determinado contenido. ¿Qué recursos pueden ayudar a la comprensión de un determinado concepto? ó ¿Para adquirir o consolidar una destreza concreta? Para ello debemos tener en cuenta las dificultades específicas con las que vamos a encontrarnos y los bloqueos psicológicos que puedan obstaculizar el ritmo de aprendizaje.

# Curvas. INTRODUCCIÓN

- Para concretar hemos elegido un "tema", **curvas**, suficientemente complejo como para que deba ser visto a lo largo de la educación de secundaria en distintas ocasiones, como ampliación del concepto de función en secundaria obligatoria, como aplicación de técnicas de máximos y mínimos o de áreas y volúmenes o al estudiar las cónicas, en el bachillerato científico y tecnológico, o explícitamente como contenido en las matemáticas de la forma del bachillerato artístico.

# Curvas. Bibliografía


- [1] ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. M. (1987): **Invitación a la didáctica de la geometría.** Ed. Síntesis. Madrid.
- [2] ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. M. (1988): **Materiales para construir la geometría.** Ed. Síntesis. Madrid.
- [3] BOLT, B. (1988): **Actividades matemáticas.** Ed. Labor. Barcelona.
- [4] GRUPO CERO (1980): **Geometría.** I.C.E. Univ. Valencia. Valencia.
- [5] GUZMÁN, M. (1984): **Cuentos con cuentas.** Ed. Labor. Barcelona.
- [6] HERNÁN, F. y CARRILLO, E. (1988): **Recursos en el aula de matemáticas**. Ed. Síntesis. Madrid.
- [7] VASÍLIEV, N. B. y GUTENMÁJER, V. L. (1980): **Rectas y curvas.** Ed. Mir. Moscú.

# Curvas

- Podemos encontrar actividades con cónicas en muchísimos libros, cómo en [3] que explica actividades similares a las que desarrollaremos, o como en [5] en los capítulos con los sugerentes títulos de "Las matemáticas en un bocata" o "El secreto del Salón Ovalado". Tratar de enumerarlas nos llevaría a escribir un tratado completo sobre ellas. Por ejemplo, en la revista SUMA, nº 11 y 12, el artículo **¿Cómo cambiar las concepciones erróneas de los estudiante? Una experiencia en matemáticas,** de J. Río, analiza las ideas previas sobre cónicas confeccionando un cuestionario con 40 items, diseña dos metodologías didácticas, una mediante resolución de problemas y otra por descubrimiento dirigido, y evalúa el resultado obtenido probando que mediante ambos métodos se supera el rendimiento del método expositivo tradicional. En la misma revista el artículo **Visión heurística de la clasificación de una cónica mediante calculadora gráfica y ordenador a nivel de 3º de BUP**, de G. Sáez presenta programas de ordenador hechos por estudiantes que clasifican una cónica dada.

# Curvas. DESARROLLO DEL TEMA . Aprendizaje

- El espacio, según Piaget, se construye mentalmente. La percepción espacial es el resultado de distintas actividades de construcción que interactúan entre sí. Van Hiele [1] propone cinco niveles. 1º) Se perciben las **figuras** de forma global. 2º) Se analizan sus partes o **propiedades**. 3º) Se determinan las figuras por sus propiedades, se describen las **relaciones** de la figura con sus partes. 4º) Se puede **demostrar** una propiedad partiendo de otras. 5º) Se puede analizar el grado rigor del **sistema** deductivo. Van Hiele y otros psicólogos soviéticos han demostrado que el paso de un nivel a otro es independiente de la edad, incluso muchos adultos se encuentran en el primer nivel. Esto es un dato importante para tener en cuenta en la clase de matemáticas.

# Curvas. DESARROLLO DEL TEMA . Aprendizaje

- Propone también Van Hiele unas fases de aprendizaje que permitan pasar de un nivel a otro: **discernimiento**, **orientación dirigida** en la que el profesor o profesora propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar, **explicitación** en la que el alumnado expresa sus resultados y estructura el sistema de relaciones exploradas, **orientación libre** donde aplican sus conocimientos a otras situaciones, e **integración** donde objetos y relaciones se unifican en el sistema mental de conocimientos.

# Curvas. DESARROLLO DEL TEMA . Aprendizaje

- Es conveniente analizar el modo de estructurar la enseñanza-aprendizaje de cualquier contenido y en nuestro caso  de las curvas teniendo en cuenta los niveles de conocimiento, las fases, actividades, materiales, objetivos, habilidades y procesos que permita al alumnado, autor de su propio aprendizaje, trabajando con las curvas, construir ese difícil conocimiento del espacio.
- **Mediante la utilización de distintos recursos materiales iremos facilitando al alumnado el paso de un nivel a otro.**

# Curvas. DESARROLLO DEL TEMA . Materiales

- Los materiales que vamos a utilizar son: compás y regla, cartulinas y papel, semicírculo graduado, barras articuladas, varillas, hilos y cuerdas, chinchetas, espejos, fichas, monedas, anillas, ruedas dentadas...

# Curvas. DESARROLLO DEL TEMA . Cónicas

- Las cónicas ya eran conocidas por los griegos. Euclides, Arquímedes y Apolonio hicieron que a finales del S. III a C. ya se supiera sobre ellas tanto como conocemos hoy. Reaparecieron en el siglo XVII con Kepler al explicar el movimiento de los planetas. Estudiando sus propiedades podemos encontrar el porqué de muchas de sus aplicaciones: antenas parabólicas, faros, trayectoria de satélites...
- Al haber tan amplia bibliografía sobre cónicas y ser estas muy conocidas, únicamente comentaremos alguna actividad sobre ellas:

# **Cónicas. *Actividad 1:*** La elipse construida por puntos o un mecanismo

- *Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve un gatito sentado en la escalera?*
- Basta establecer un sistema de coordenadas para encontrar la ecuación de una elipse y, en el caso particular de que el gatito estuviera en el punto medio de una circunferencia. También se puede dibujar unos ejes coordenados y mediante una varilla de longitud constante dibujar distintas posiciones de un punto marcado y observar como aparece la elipse. Partiendo de esta idea se construye un mecanismo, el **elipsógrafo de Leonardo da Vinci** que traza elipses.
- Depende de los alumnos y alumnas a los que vaya dirigida la actividad y sus niveles de conocimiento para que una u otra sea más adecuada. Desde percibir la forma de una elipse, probar que realmente lo es, hasta llegar a demostrar que es la envolvente, podemos ir pasando por los distintos niveles de conocimiento y fases de aprendizaje descritos por Van Hiele.

# ***Actividad 2:*** La elipse como lugar geométrico

- *Un jardinero clava dos estacas y ata a ellas una cuerda. Manteniendo la cuerda estirada traza una elipse.*
- En clase se puede repetir esta actividad con dos chinchetas y un hilo que no se deforme. Permite observar que la elipse (o la hipérbola y la parábola) se puede definir como el lugar geométrico.
- La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos fijos es constante.

# ***Actividad 2:*** La elipse como lugar geométrico

- Se puede aplicar este concepto dibujando distintas elipses o hipérbolas en una trama de circunferencias concéntricas; o parábolas en una trama de circunferencias concéntricas y rectas paralelas.

# ***Actividad 3:*** La elipse como envolvente

- *Dibuja una circunferencia y en su interior un punto distinto del centro. Dobla el papel de forma que hagas coincidir al punto con uno de la circunferencia. Repite el proceso al menos diez veces. Observa como los dobleces envuelven a una elipse.*
- Esto se basa en la siguiente propiedad de las elipses: "El conjunto de puntos simétricos a un foco respecto a todas las tangentes a la elipse es una circunferencia".
- Hacerlo.

# ***Actividad 3:*** La hipérbola y la parábola como envolventes

- Si se repite el proceso con un punto exterior a la circunferencia se obtendrá una hipérbola.
- Para conseguir una parábola se debe dibujar una recta y un punto y hacerlos coincidir con sucesivos dobleces.

# ***Actividad 4:*** La elipse como sección de un cono

- Emma Castelnuovo, cuando estuvo en Madrid en marzo de 1994, realizó esta experiencia ante un grupo de profesores de matemáticas. Con una lámpara con pantalla cónica consiguió un cono de luz perfecto que proyectó sobre paredes y techo donde aparecieron, según la inclinación, circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas.

- En geometría es muy recomendable ir del plano al espacio y del espacio al plano siempre que sea posible.
- Se puede construir un **hiperboloide de revolución de una hoja** utilizando lanas y dos cartulinas.
- Se dibuja en cada cartulina una circunferencia y se marca en ella puntos igualmente separados. Se hace pasar la lana de una circunferencia a otra confeccionando un cilindro que al torcerlo proporciona una superficie reglada, lo que permite observar que todas sus secciones son elipses, hipérbolas y parábolas.

# La cardiode

- La cardiode es una curva de la familia de las concoides, es la concoide del círculo.
- La concoide de una curva con relación a un punto fijo es el *lugar geométrico* de los puntos obtenidos al tomar sobre toda secante que pase por aquel punto y a ambos lados del punto de intersección con la curva, una longitud constante.

# La cardioide

- *Actividad 5:* **La cardioide como epicicloide**
- *Toma dos monedas, o dos fichas, o dos ruedas dentadas, iguales.*
- *Señala en cada una de ellas un punto del borde.*
- *Colócalas de forma que los puntos señalados coincidan.*
- *Deja fija una de ellas y haz rodar la otra alrededor de la fija hasta que los puntos señalados vuelvan a encontrarse.*
- *Ve dibujando la trayectoria que sigue el punto marcado en la moneda móvil.*
- *Esa trayectoria es una cardioide.*

# La cardioide

- Esta es la forma usual de ver una cardioide, como trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar por otra inmóvil de igual radio.
- Si modificamos la actividad y las dos monedas ya no son iguales obtenemos otras curvas de la misma familia de las **concoides del círculo o caracoles de Pascal**. Una de ellas es la cardioide, otra la nefroide.
- Podemos preguntarnos que ocurre si el radio de la circunferencia inmóvil es r y el de la circunferencia móvil es r/2, r/3, 2r/3. ¿Cuantas vueltas dará hasta cerrar la curva? Es interesante seguir investigando posibilidades. [7]

# ***Actividad 6:*** La cardioide como envolvente

- *Dibuja una circunferencia y marca un punto fijo A en ella.*
- *Utiliza un compás y con centro en cualquier punto Q de la circunferencia y radio AQ, dibuja otra circunferencia.*
- *Repítelo para muchas posiciones de Q.*
- *Una curva en forma de corazón toca a todas las circunferencias (es tangente a todas ellas).*
- *La **envolvente** de la familia de circunferencias es la cardioide.*
- ¿Cómo modificaremos la actividad para obtener otras curvas de la familia?

# ***Actividad 7:*** La cardioide construida por puntos

- *Traza una circunferencia. Llama "a" a su diámetro.*
- *Fija un punto O de la circunferencia.*
- *Toma otro punto P de la circunferencia y únelo a O.*
- *Sobre esa secante utiliza una regla y una varilla para llevar un segmento de longitud "a", a cada lado del punto P.*
- *Repite el proceso con otros puntos de la circunferencia.*
- Esta actividad nos proporciona a la cardiode como lugar geométrico. De ella es fácil deducir la ecuación polar de la cardioide. ¿Cómo obtendremos las de otras curvas de la familia?. En general será $r=f(\alpha)+a$.

# La astroide

*Actividad 8:* **La astroide como hipocicloide**

- *Recorta en una cartulina un círculo de diámetro 4a. Quédate con la cartulina.*
- *Recorta un círculo de diámetro "a".*
- *Coloca el círculo en contacto con la cartulina agujereada.*
- *Marca el punto de contacto en ambas circunferencias.*
- *Haz rodar el círculo pequeño, sin resbalar, por el interior del círculo mayor, hasta que vuelvan a coincidir.*
- *Dibuja la línea que describe el punto del círculo pequeño.*

# La astroide

- Obtienes la **astroide como hipocicloide de la circunferencia**. La aplicación a rodamientos y engranajes es evidente.
- Si únicamente hacemos esto, nos quedaremos en la fase de discernimiento; pero podemos ir avanzando por todas las fases de aprendizaje y niveles de conocimiento si a continuación sugerimos observar que ocurre cuando la relación entre los radios es "a" y "3a" (obtenemos una **deltoide o curva de Steiner)**; y posteriormente si es "a" y "2a". Si logramos demostrar que en este último caso el punto se mueve en línea recta, exactamente por un diámetro de la circunferencia habremos probado el sorprendente teorema de **Copérnico**.
- En general podemos definir las k-cicloides, que son epicicloides si *k* es mayor que cero e hipocicloides si es menor.

# La astroide

- *Actividad 9:* **La astroide como envolvente**
- *Dibuja unos ejes rectangulares.*
- *Toma una varilla de longitud fija QR. Apóyala en los ejes y dibújala en muchas posiciones.*
- *Dibuja la envolvente de todos esos segmentos (o curva tangente a todos ellos)*.

# La astroide

*Actividad 10:* **La astroide como envolvente de una familia de elipses**

- *Dibuja unos ejes rectangulares.*
- *Elige una cantidad constante "c".*
- *Dibuja muchas elipses de semiejes "a" y "b" de modo que a + b = c.*
- *La astroide es la envolvente de las elipses de la familia.*
- Podemos relacionar estas dos últimas actividades con la actividad 1.

# La cicloide

- La cicloide es la curva engendrada por un punto situado sobre una circunferencia que gira sobre una recta sin deslizarse. La historia de la cicloide data de 1634. Muchos matemáticos se han ocupado de estudiarla: Pascal, Galileo, Descartes. La elegante solución que dio Descartes del problema de la construcción de la tangente a la cicloide se ha convertido en la base de una nueva teoría general de geometría.
- Es fácil deducir su ecuación paramétrica:

$$x=R\alpha-R\operatorname{sen}\alpha$$

$$y=R(1-\cos\alpha)$$

# La cicloide

- En [4] podemos ver la cicloide como evoluta y la cicloide construida por puntos.
- Si pensamos en la trayectoria de una válvula de una bicicleta tendremos una **cicloide acortada** y si pensamos en un punto de una rueda de un tren que sobresale del rail tendremos una **cicloide alargada.**
- Otras actividades que podemos realizar están dirigidas a comprobar las propiedades mecánicas de la cicloide. Christian Huygens descubrió que es "tautócrona", es decir, una partícula que se mueva por la acción de la gravedad sobre una cicloide con los puntos cúspide hacia arriba, oscilará exactamente con un movimiento armónico simple. Jaques Bernouilli probó que es "braquistócrona", es decir, una partícula tarda el mínimo tiempo posible entre dos puntos de la cicloide en la posición anterior, incluso menos que en línea recta. Actividades para comprobarlo pueden verse en [4].

# Lemniscata de Bernouilli

*Actividad 11:* **Construcción mediante mecanismos**

- Vamos a hacer un *sistema articulado de tres varillas*. Dos varillas deben ser de igual longitud "a" entre perforaciones y la tercera de longitud "$\sqrt{2}a$". La grande la perforamos también en el centro de forma que se pueda introducir el lápiz.
- Sujetamos, de forma que quede articulado, la varilla larga a cada una de las cortas. Los extremos libres de las varillas cortas los sujetamos al papel a una distancia de $\sqrt{2}a$. El punto perforado recorre una curva en forma de ocho que es una lemniscata.
-

# Lemniscata de Bernouilli

- *Actividad 12:* **La lemniscata como envolvente**
- Al dibujar una hipérbola equilátera de centro O, y trazar circunferencias de centro un punto de la hipérbola P y radio OP obtenemos a la hipérbola como envolvente de esa familia de circunferencias.

# Lemniscata de Bernouilli como lugar geométrico

- La lemniscata es un caso particular de una familia de curvas: **los óvalos de Cassini**.
- Un óvalo de Cassini es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante.
- Por tanto su ecuación bipolar es muy sencilla, $r.r'=k$, y su ecuación cartesiana es $[(x-c)^2+y^2].[(x+c)^2+y^2]=k^2$
- Para la lemniscata es $k=c^2$, su ecuación cartesiana: $(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0$ y su ecuación polar es: $r^2=2c^2\cos 2\alpha$.
- Si $k<c^2$ la curva costa de dos pedazos separados.

# RESUMEN

- Hemos analizado el papel de los recursos didácticos como medio para trabajar los niveles de conocimiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele utilizando a las curvas como disculpa.
- Estas curvas notables aparecen como trayectorias de puntos, lugares geométricos, envolventes, secciones de superficies...
- Hemos utilizado para construirlas y poder manipularlas materiales muy sencillos y baratos.

# RESUMEN

- Esto nos permite analizar el partido que podría obtenerse con cada actividad, desde la simple visualización de una forma, a ir modificando y observando propiedades, clasificando en familias, viendo lo que tienen de común y lo que las diferencia, obteniendo sus ecuaciones, buscando aplicaciones, demostrando las propiedades, iniciando pequeños trabajos de investigación, nos lleva a terminar en un aprendizaje significativo.

# AUTOEVALUACIÓN

- 1.- Se obtiene una elipse al cortar un chorizo o al inclinar un vaso con agua. Realizar esta experiencia ¿A qué fase de aprendizaje de Van Hiele corresponde?.

- 2.- Buscar la ecuación polar de la cardioide:

$$r=a(1+\cos\alpha)=2a\cos^2(\alpha/2)$$

- ¿A qué nivel de conocimiento y qué fase de aprendizaje corresponde?

# AUTOEVALUACIÓN

- 3.- El ejercicio:
- *"En la curva de ecuación $r = 5(1 - \cos\alpha)$*
- *a) ¿Se modifica el valor de r al sustituir α por -α?*
- *b) ¿Puede ser r negativo?. Fíjate entre que valores puede variar cosα. ¿Entre qué valores puede variar r?*
- *c) Haz una tabla*
- *d) Dibuja la curva*
- *e) ¿En qué se diferencia de las curvas anteriores? ¿Es una cardioide?"*
- ¿Ayuda ha consolidar los conocimientos adquiridos?

# AUTOEVALUACIÓN

- 4.- Realiza las actividades 2, 3, 6, 9 y 12. Escribe un comentario sobre sus dificultades en llevarlas a cabo en un aula y sus posibilidades para mejorar el aprendizaje

# SOLUCIÓN

1.- Si sólo se observa la forma corresponde a la fase de discernimiento o al nivel de conocimiento de reconocer la figura. Pero puede corresponder a cualquier fase o nivel si continuamos investigando en la actividad, por ejemplo, correspondería a un nivel de conocimiento 4 si se demostrara que una elipse se obtiene como sección de un cilindro e incluso a una fase de integración si se estudian las cónicas como secciones de un cono o de otras superficies.

# SOLUCIÓN

2.- Corresponde al nivel 4, el de demostrar una propiedad partiendo de otras. Recuerda que si los/as estudiantes están un nivel de conocimiento n-1 y se les presenta una situación de aprendizaje que requiera un vocabulario, conceptos, y conocimientos de nivel n, no son capaces de progresar y se produce un fracaso en su enseñanza ya que no se lleva a cabo su aprendizaje. Pero mediante la actividad 7, con la que construimos la cardioide por puntos, es posible pasar por sucesivas fases de aprendizaje y ir de un nivel a otro.

# SOLUCIÓN

3.- Es un ejercicio de orientación dirigida por el profesor/a donde se proponen una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar. Manipular, hacer tablas, gráficos, hacerse preguntas mejora el aprendizaje.

4.- Observa de nuevo lo ya comentado al respecto en el tema. Manipular mejora el aprendizaje. Pero la simple manipulación, sin una reflexión posterior, no es en absoluto eficaz.

# Recursos materiales

- Recursos para alumnado de 12 años