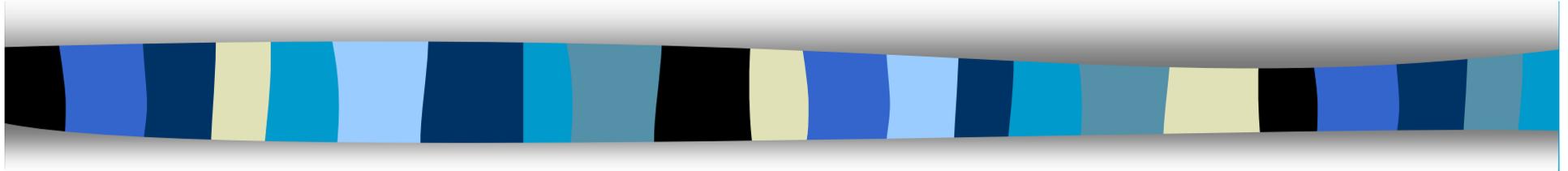
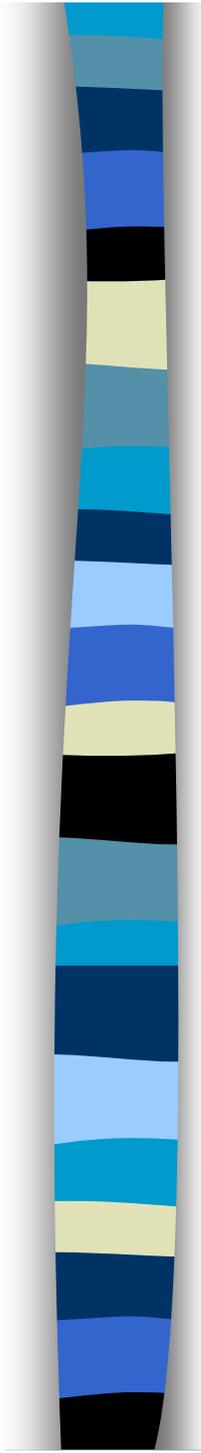


El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas



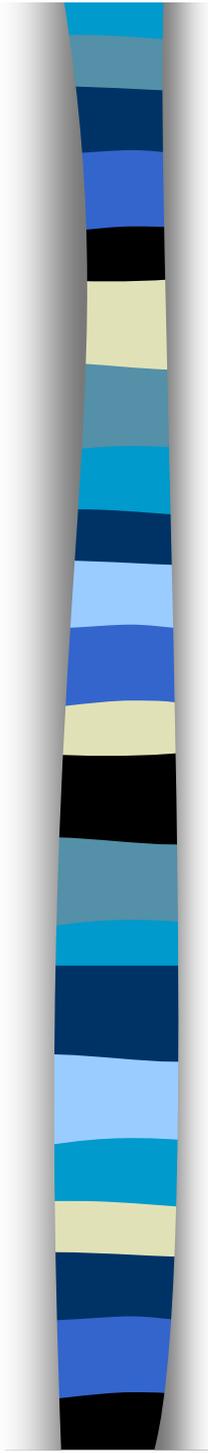
Adela Salvador

Universidad Politécnica de Madrid



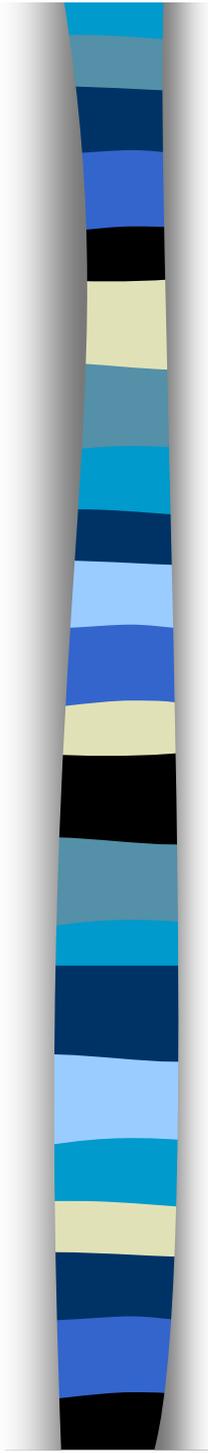
Introducción

- ¿Se debe jugar en la clase de Matemáticas?
- Ventajas e inconvenientes
- ¿Qué es un juego?
- Fases, estrategias... de un juego
 - Análisis de algunos juegos
- ¿Juego cooperativo?
- Más juegos



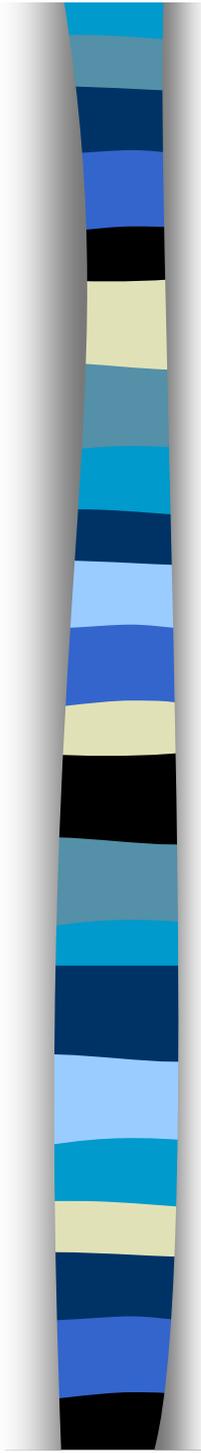
Introducción

- Es importante potenciar la reflexión de los alumnos y alumnas sobre la actividad manipulativa que desarrollan, pues esta reflexión es la base para la construcción de sus propias ideas matemáticas.
- Por esta razón, el papel de los recursos en el aula de matemáticas cobra una importancia cada vez mayor, considerándose incluso el interés de tener un "taller de matemáticas" o "laboratorio de matemáticas".
- En particular considerar al juego como un recurso



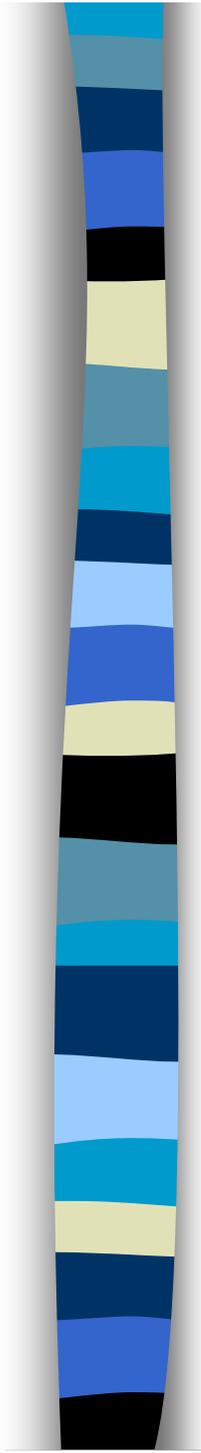
¿Se debe jugar en la clase de Matemáticas? Debate

- Un grupo debe defender que una clase de Matemáticas es algo serio, donde nunca se debe jugar.
- Otro grupo debe defender que el juego puede ser adecuado y beneficioso en la clase de Matemáticas
- Cada grupo debe aportar razones



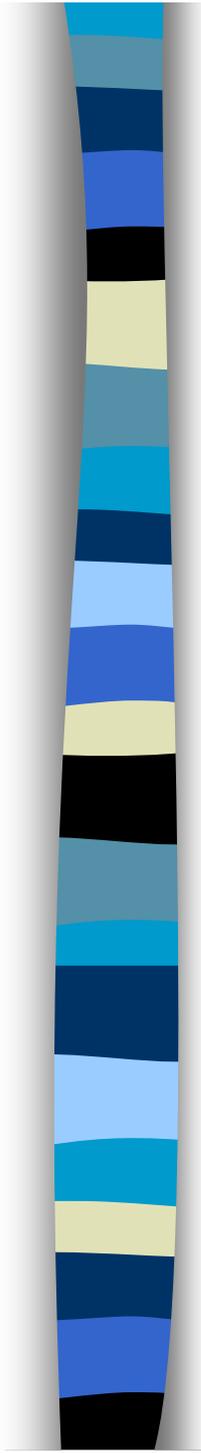
Ventajas e inconvenientes

- *Un juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos o procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos y consolidar un contenido.*



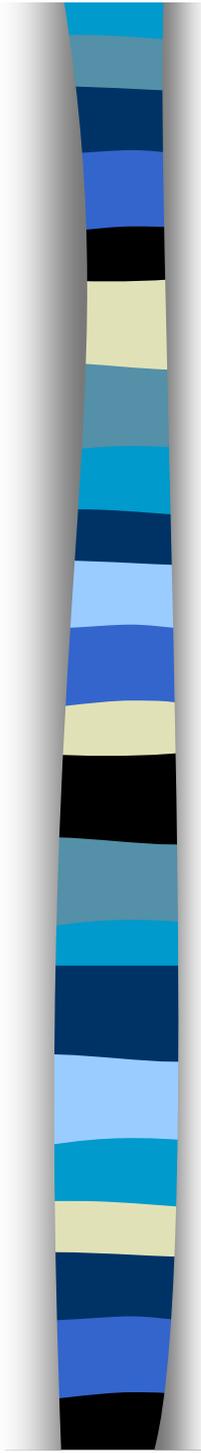
Ventajas e inconvenientes

- *Ayuda a los estudiantes a adquirir altos niveles de destreza en el desarrollo del pensamiento matemático.*
- *Sirve para enseñar contenidos y estrategias de la resolución de problemas.*
- *Una clase con un juego es una sesión motivada desde el comienzo hasta el final, produce entusiasmo, diversión, interés, desbloqueo y gusto por estudiar matemáticas.*
- *Atiende las peculiaridades individuales de cada alumno(a).*



Ventajas e inconvenientes

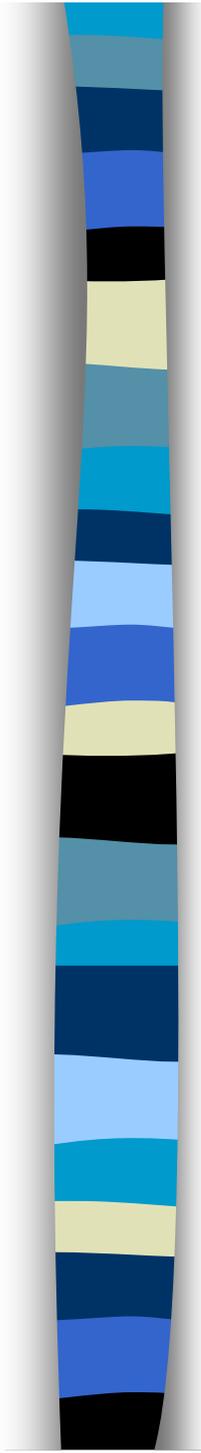
- Mediante el juego el alumnado no sólo se divierte, sino que desarrolla su personalidad y estado anímico.
- Un niño que no juega no es feliz.
- Un juego conduce al estudiante a la conquista de su autonomía, y a la adquisición de una conducta que le ayudará en sus actividades.



Ventajas e inconvenientes

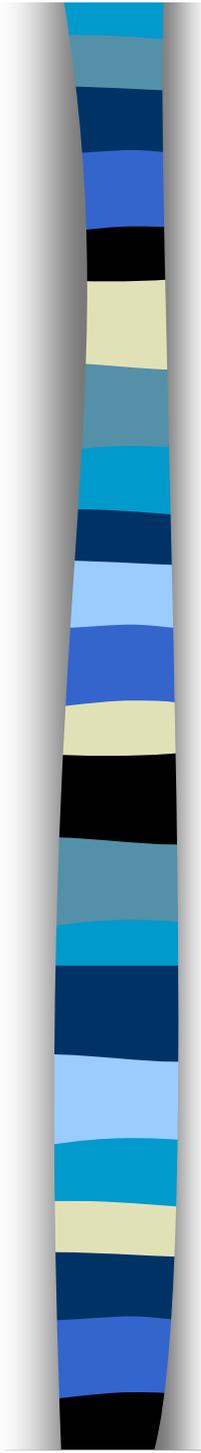
- Según **Piaget**, los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla. De tal modo el juego es esencialmente de asimilación de la realidad por el yo.

Piaget. (1985): “**Seis estudios de Psicología**”. Ed. Planeta.
Barcelona. Pág. 20.



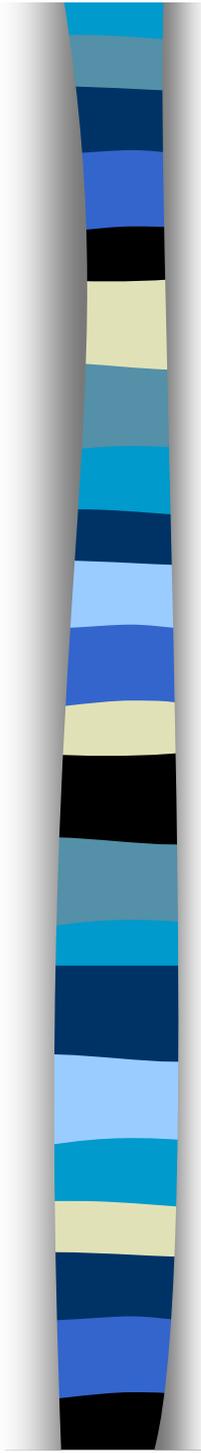
Ventajas e inconvenientes

- Otro autores argumentan que a través del juego se crea un espacio intermedio entre la realidad objetiva y la imaginaria, lo que permite realizar actividades que realmente no se podrían llevar a cabo.
- Esta idea fue compartida por **Vigosky**, que menciona que este espacio supone una zona de desarrollo potencial de aprendizaje.
- El juego promueve el conocimiento de los objetos y su uso.
- Se distinguen dos tipos de juegos, uno libre y otro juego estructurado mediante reglas. Cualquiera de los dos son necesarios para el desarrollo intelectual y social.



Ventajas e inconvenientes

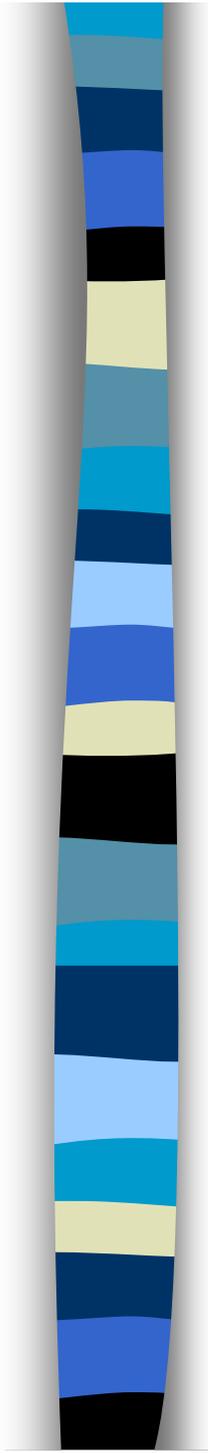
- **Miguel de Guzmán**, relaciona al juego y la enseñanza de las matemática mediante el siguiente pensamiento:
- *“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza?”*



Ventajas e inconvenientes

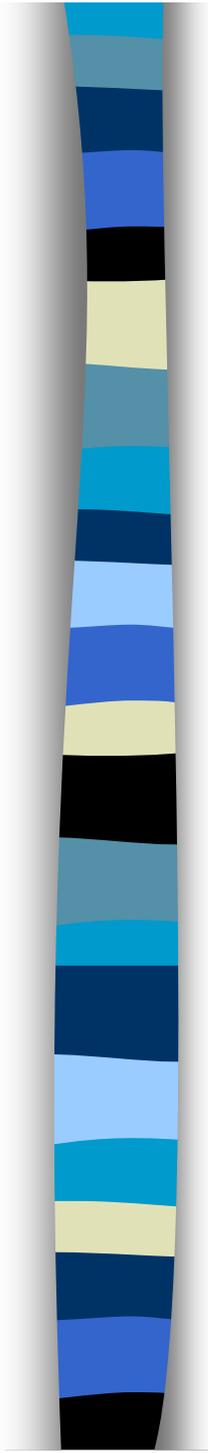
- *"La matemática ha sido y es **arte y juego** y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable"*

GUZMÁN, M. (1989): **Juegos y matemáticas** Revista SUMA, nº4, 61-64.



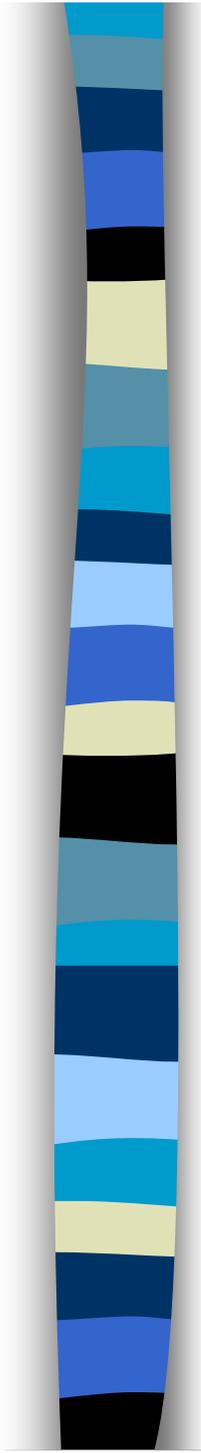
Ventajas e inconvenientes

- Teorías matemáticas muy importantes han surgido teniendo como origen algún juego o pasatiempo lo que nos lleva a pensar que el juego ayuda en el desarrollo intelectual fomentando la creatividad y el ingenio.



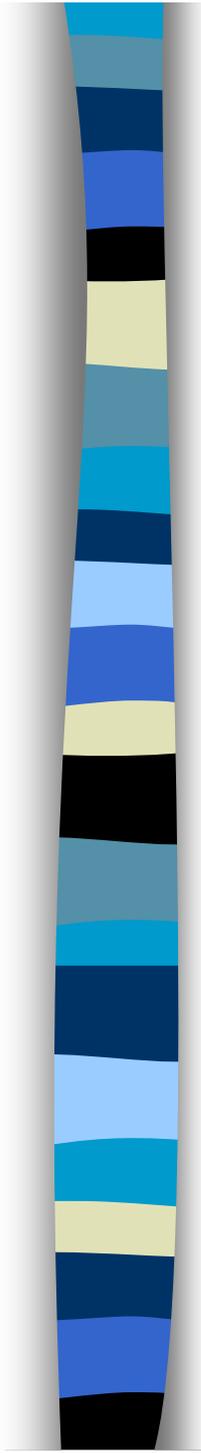
Ventajas e inconvenientes

- El juego constituye una forma de relación y comunicación entre el alumnado y un instrumento de asimilación e integración en el mundo de los adultos. Tiene un claro valor educativo y resulta ser un valioso elemento metodológico. Sin embargo, nuestro sistema educativo lo considera una actividad poco "seria", no adecuada para los procesos de aprendizaje que tienen lugar en el aula.



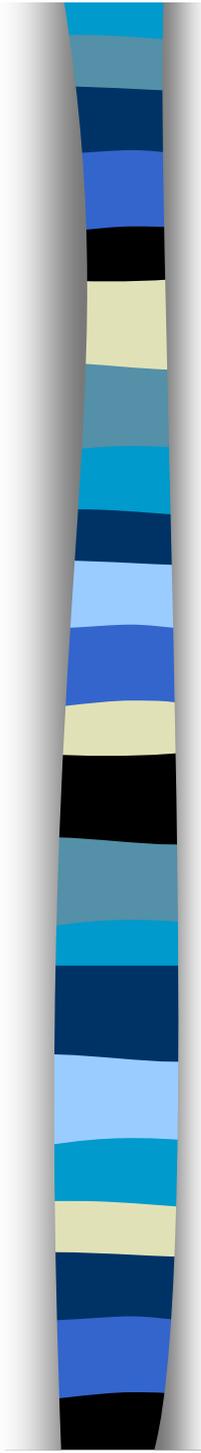
Ventajas e inconvenientes

- El juego es un instrumento didáctico que puede ayudarnos en una pedagogía activa, a "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*", frente un aprendizaje pasivo y verbalista; a tener en cuenta los procesos intelectuales y los afectivos, al intercambio de actitudes y puntos de vista, a la participación activa, al trabajo colectivo, a propiciar la creatividad y la imaginación.



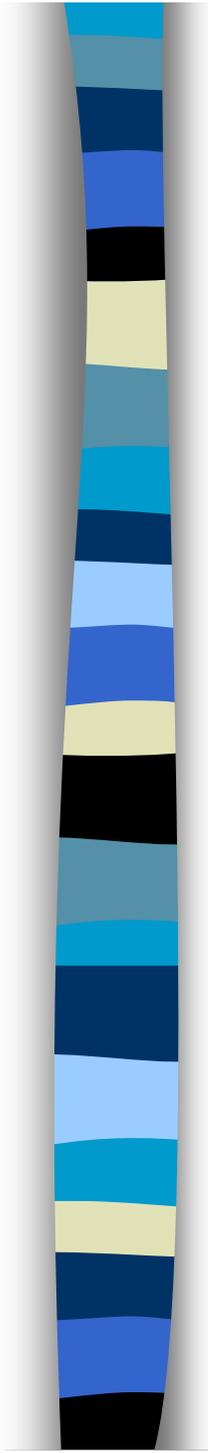
Ventajas e inconvenientes

- Es también un elemento de motivación, de estimulación y exploración.
- Mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar.
- Todo esto puede ser conducido a la construcción del conocimiento, al aprendizaje significativo.
- Las implicaciones de tipo emocional, el carácter lúdico, el desbloqueo emocional, la desinhibición, son fuente de motivación, es una forma distinta de acercarse al conocimiento muy diferente de la que tiene lugar en las situaciones de aprendizaje tradicionales.



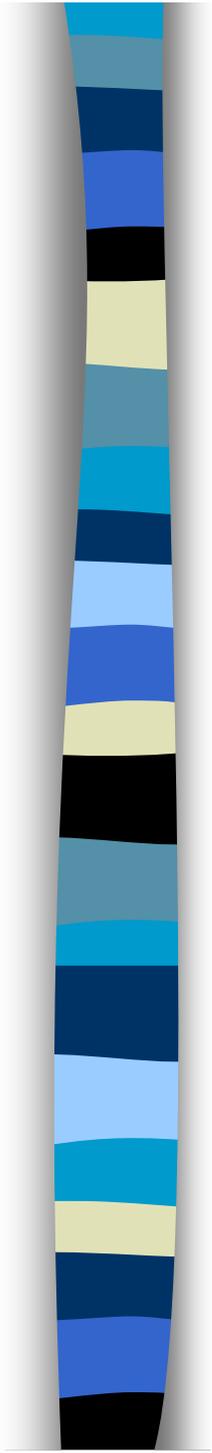
Ventajas e inconvenientes

- Es importante destacar el papel del profesorado durante el juego como agente orientador de los procesos de aprendizaje de matemáticas por los alumnos y alumnas.
- Se puede jugar sin aprender nada.
- Lo importante es saber sacar partido de las ventajas del juego para el aprendizaje.



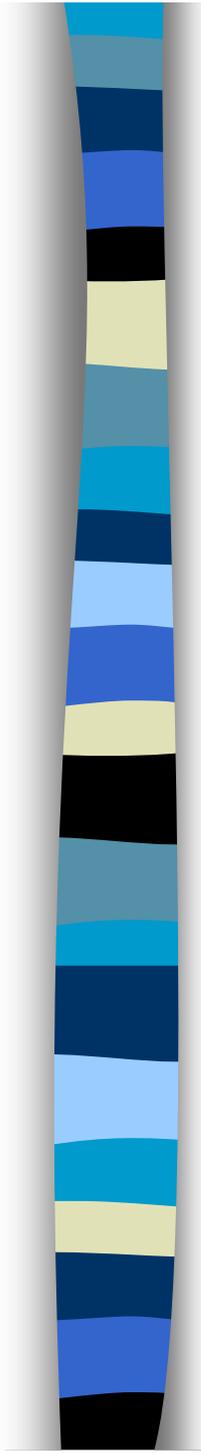
Ventajas e inconvenientes

- En los juegos puede encontrarse una gran riqueza matemática y, por otra parte muchos profundos teoremas matemáticos tienen una formulación o la apariencia de un juego (teorema de los cuatro colores, problema del billar triangular, problema de la aguja). Al analizar los juegos podemos encontrar en ellos gran riqueza en temas matemáticos y muchas posibilidades para promover el aprendizaje de las Matemáticas.



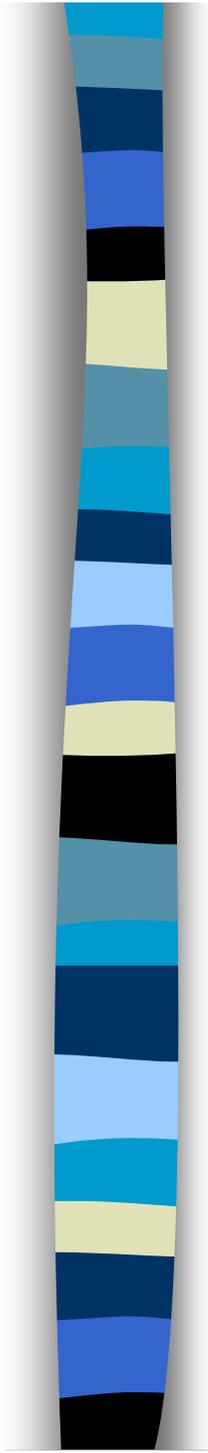
Ventajas e inconvenientes

- De la misma forma que el investigador matemático se plantea los problemas en forma de juego, la mejor manera de despertar el interés y el deseo de descubrir a los alumnos y alumnas es presentando un juego, una paradoja, un truco de magia o una experiencia.



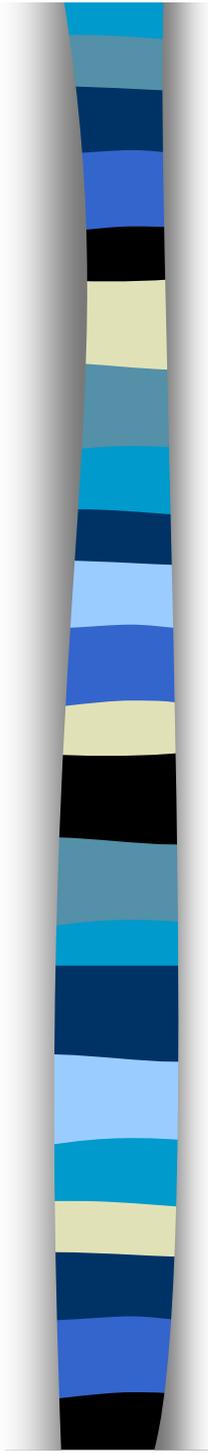
Ventajas e inconvenientes

- Un juego bien elegido desde el punto de vista metodológico puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos o los procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en un algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos o consolidar un contenido.



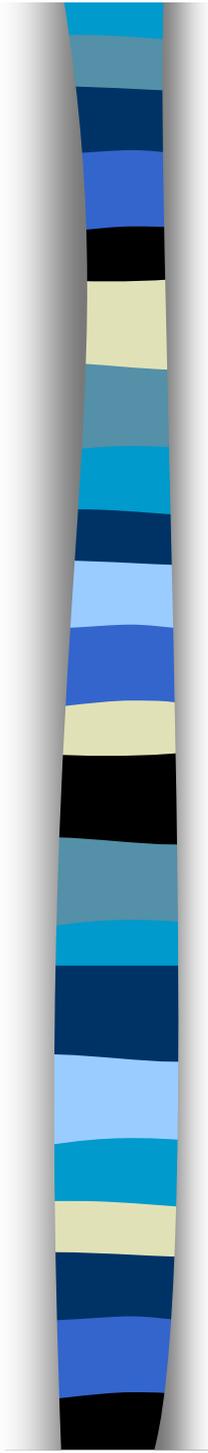
Ventajas e inconvenientes

- Es una fuente de ideas con la que interesar a los alumnos y alumnas por las matemáticas. Las ventajas de este recurso didáctico son innumerables: entusiasmo, diversión, interés, desbloqueo, motivación. Las matemáticas se verán como algo útil y lleno de interés.



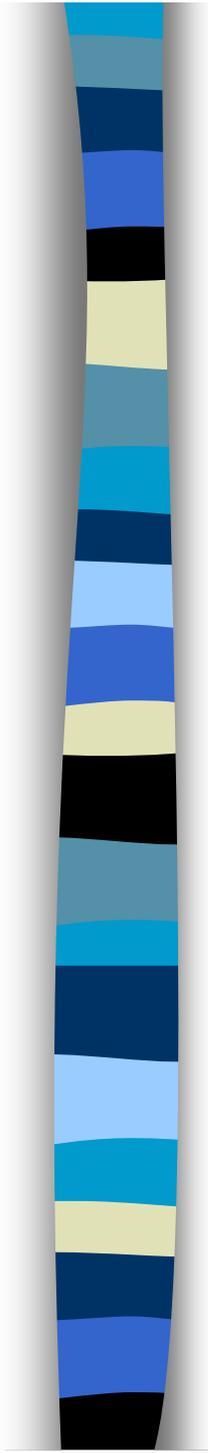
Ventajas e inconvenientes

- Para seleccionar adecuadamente los juegos es necesario conocer las necesidades e interés de aquellos a los que vayan dirigidas las actividades.



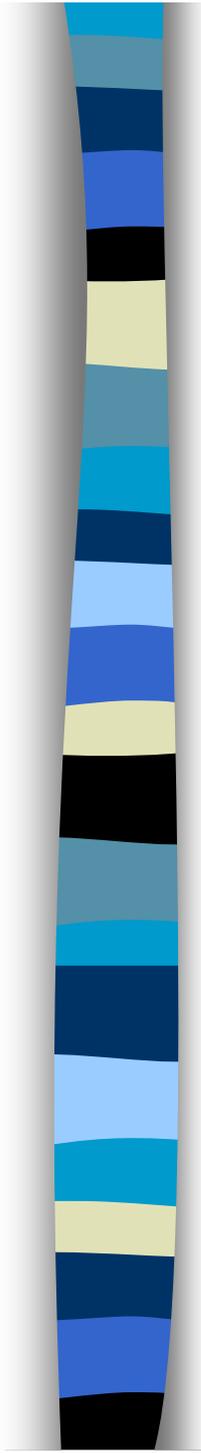
Ventajas e inconvenientes

- Es inherente al juego la utilización de:
- una pedagogía **activa**,
- un **trabajo en grupo** donde se fomentará
- el desarrollo de la **expresión oral**,
- la **reflexión** acerca del razonamiento seguido para llegar a una solución,
- ya que al jugar los alumnos y alumnas deben hablar, discutir, compartir, para después comprobar y **explicar**.



Ventajas e inconvenientes

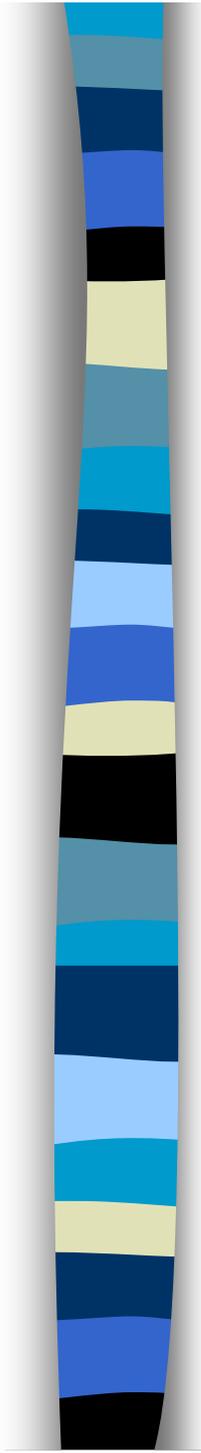
- **En resumen:**
- **Las Matemáticas son arte y juego, y en los juegos hay Matemáticas.**



¿Qué es un juego?

- El diccionario de la Real Academia, menciona varias acepciones, y de ellas, la primera dice:

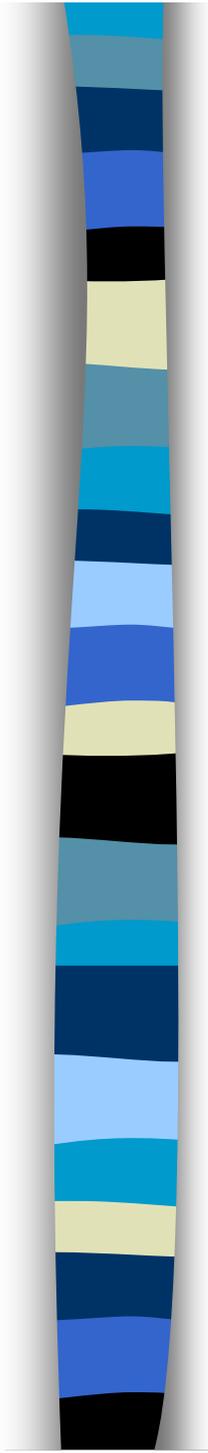
“Ejercicio recreativo sometido a reglas y en el que se gana o se pierde”.



¿Qué es un juego?

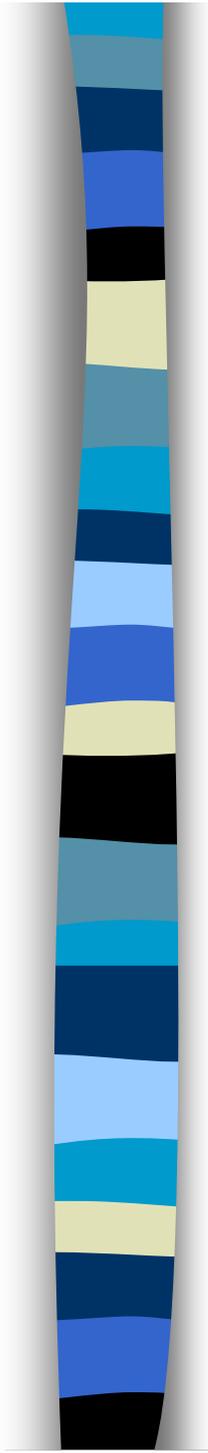
- “Gran Enciclopedia Larousse” define el juego como:

“Actividad de orden físico o mental, no impuesta que no busca ningún fin utilitario, y a la que uno se entrega para divertirse y obtener placer”.



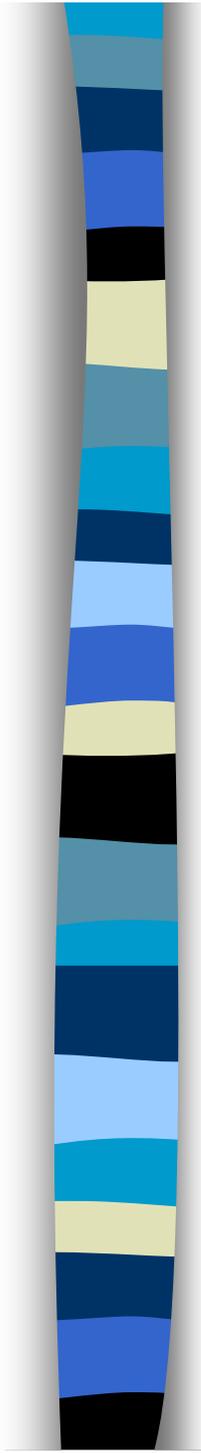
¿Qué es un juego?

- Analizando ambas definiciones se observa que los elementos que caracterizan a un juego son:
 - Actividad recreativa, sirve para divertirse
 - Puede ser una actividad tanto física como mental
 - Existen unas reglas a las que atenerse
 - No busca ningún fin utilitario.



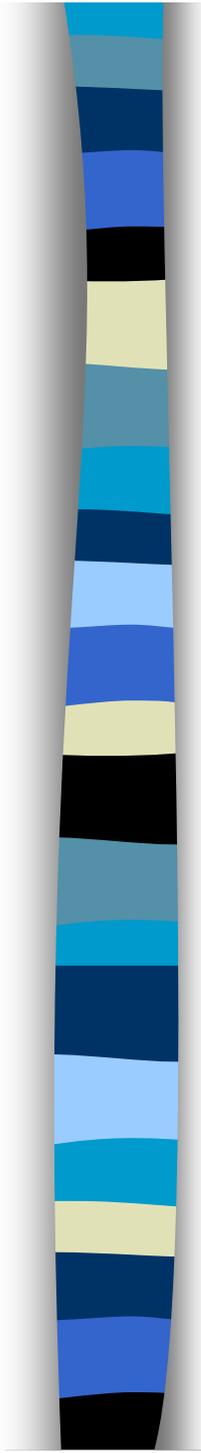
¿Qué es un juego?

- El niño o la niña juega y con el juego se prepara para la vida. La persona adulta también juega. El juego es una actividad diferenciada de la vida cotidiana que produce placer y debe tomarse en serio. Es una actividad libre, pero con una cierta función. Tiene sus reglas.



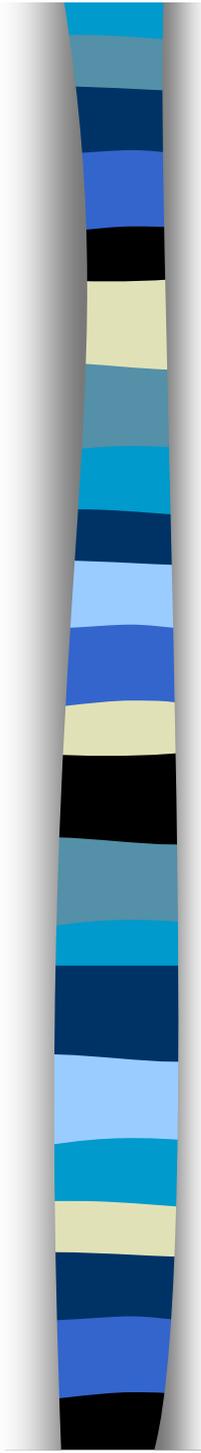
¿Qué es un juego?

- Un juego comienza estableciendo unas reglas que definen la función de unos objetos, de igual forma que comienza una teoría matemática. Al jugar se adquiere práctica con esas reglas y se adquieren técnicas que dan buen resultado. Son los ejercicios elementales y la adquisición de automatismos. Podemos continuar **estableciendo paralelismos entre las características del juego y de las Matemáticas.**



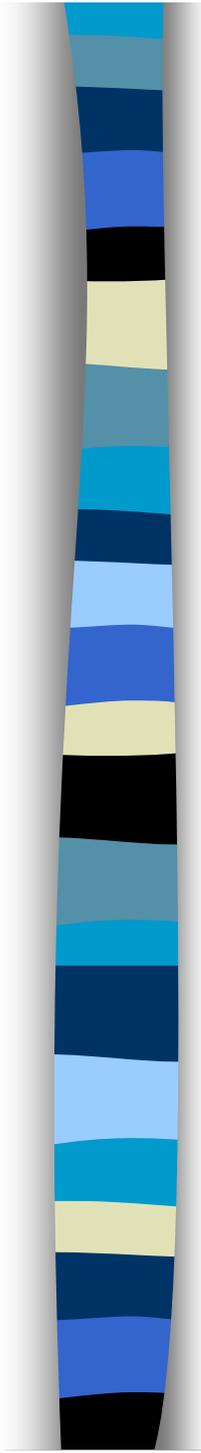
Fases, estrategias... de un juego

- Los procesos de pensamiento útiles en el desarrollo de la matemática son, por la semejanza entre matemática y juego, los mismos que se desarrollan en el juego. Las fases de la resolución de problemas, las estrategias heurísticas, los métodos y herramientas son similares a los que pueden utilizarse en la exploración de un juego.



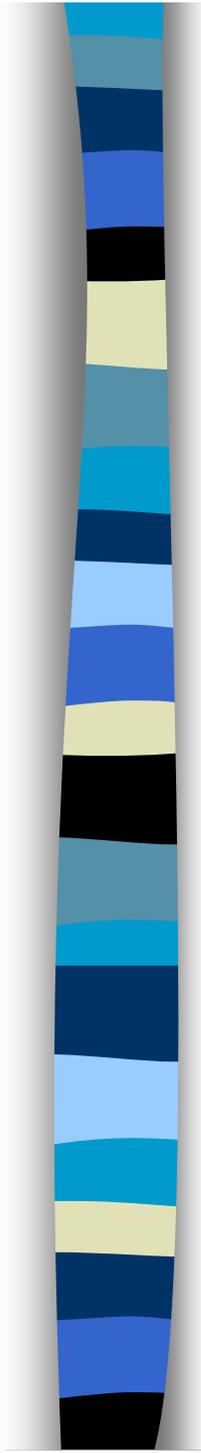
Fases, estrategias... de un juego

- En un juego se encuentran las siguientes fases:
- 1ª fase de juego de libre desarrollo,
- 2ª fase de creación de relaciones de comunicación con los demás,
- 3ª fase de situación de juego simbólico y
- 4ª fase de expresión de la creatividad.



Fases, estrategias... de un juego

- **1.- Comprender el problema o reglas de juego**
- En un problema:
 - Comprender qué se pide.
 - Comprender qué quiero encontrar
 - Comprender qué datos tengo
- En un juego
 - Comprender los requisitos.
 - Comprender los movimientos.
 - Comprender cómo se gana



Fases, estrategias... de un juego

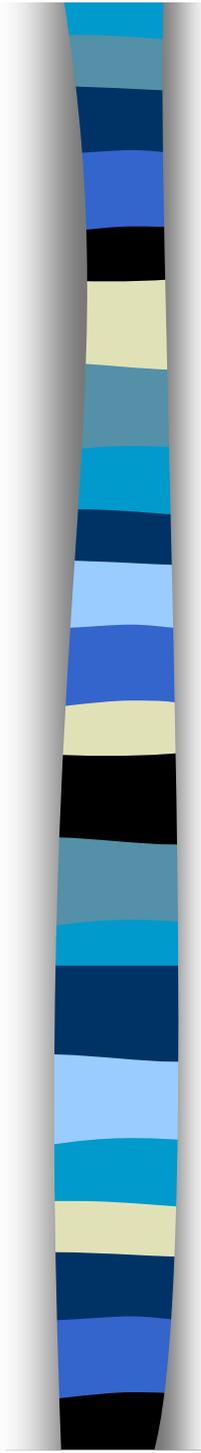
■ 2.- Concebir un plan

■ En un problema

- Existe un problema parecido
- Formular conjeturas
- Seleccionar posibles estrategias

■ En un juego

- ¿He jugado algún juego similar?
- Seleccionar posibles estrategias



Fases, estrategias... de un juego

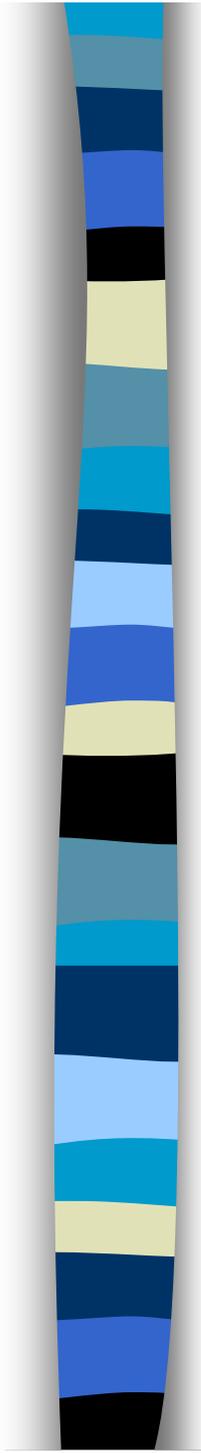
■ 3.- Ejecutar el plan

■ En un problema

- Examinar la validez de cada conjetura

■ En un juego

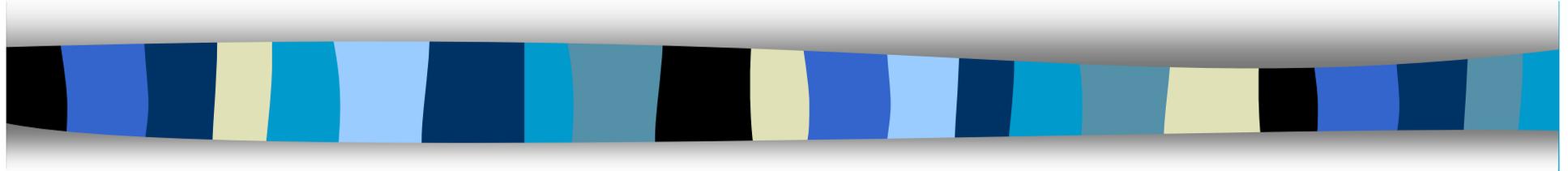
- ¿Qué movimientos de ataque oposición hacen que el jugador progrese?



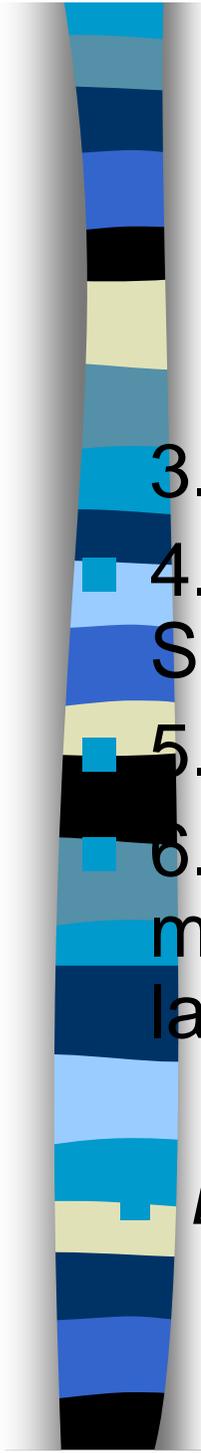
Fases, estrategias... de un juego

- **4.- Examinar el resultado**
- Se ha resuelto el problema:
 - ¿Cuál es la estrategia general?
 - ¿Se puede usar otra estrategia?
 - ¿Funciona con otros problemas similares?
 - Modifica el problema.
- En un juego
 - ¿Es la estrategia seleccionada la mejor posible?

Análisis de juegos



El juego de la rana



EL JUEGO DE LA RANA

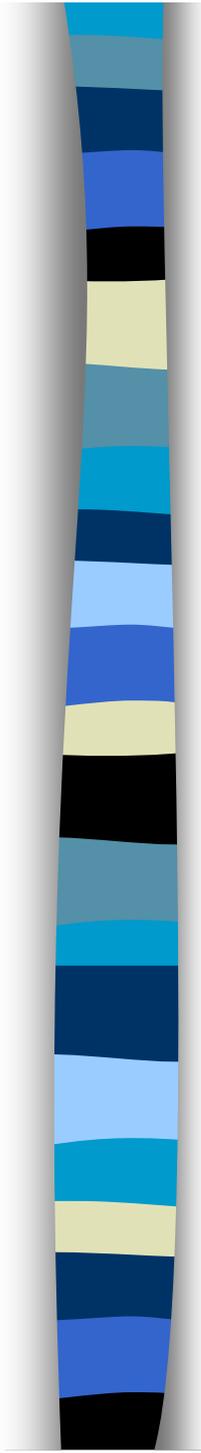
3.- EDAD DE LOS ALUMNOS(AS): 12-13 años

4.- CLASE DE JUEGO: Juego de **estrategia**.
Solitario - cooperativo

5.- MATERIAL NECESARIO: Una ficha diseñada

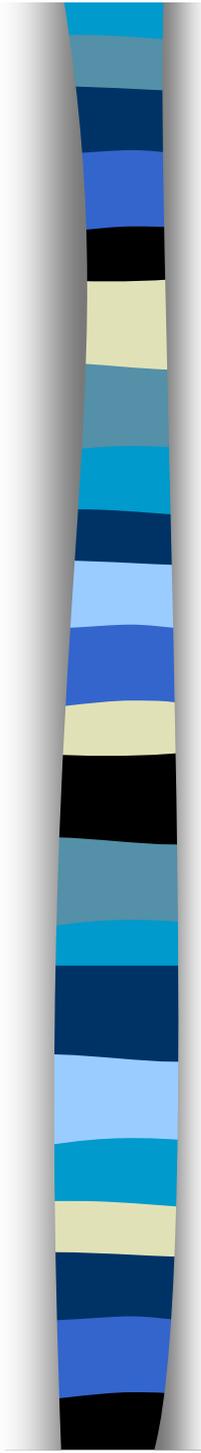
6.- COMPETENCIAS: Realiza el juego con el menor número de movimientos. Intercambiando las posiciones de las fichas negras con las blancas

*Brihuega, J; Molero, M; Salvador, A. (1996): “**Didáctica de las Matemáticas**”. Edit. Complutense Madrid. Pág. 141.*

- 
- *Enunciado:*
 - *Se necesitan un cierto número de fichas de dos colores, blancas y negras por ejemplo. Se colocan las fichas blancas a la izquierda de un espacio libre y a la derecha las fichas negras.*



- *El objetivo del juego es, con el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas*
- *Las reglas son las siguientes:*
- *1.- Las fichas blancas sólo pueden moverse hacia la derecha y las negras sólo hacia la izquierda.*
- *2.- Una ficha puede moverse a una casilla adyacente si está vacía.*
- *3.- Una ficha también puede saltar, sobre otra de distinto color, a una casilla vacía, en el sentido permitido.*
- *Cada movimiento consiste en mover una sola ficha*



- Ha sido tratado por muchos autores:

BELL, A. W. (1976): **The Learning of General Mathematical Strategies**, Univ. Nottingham.

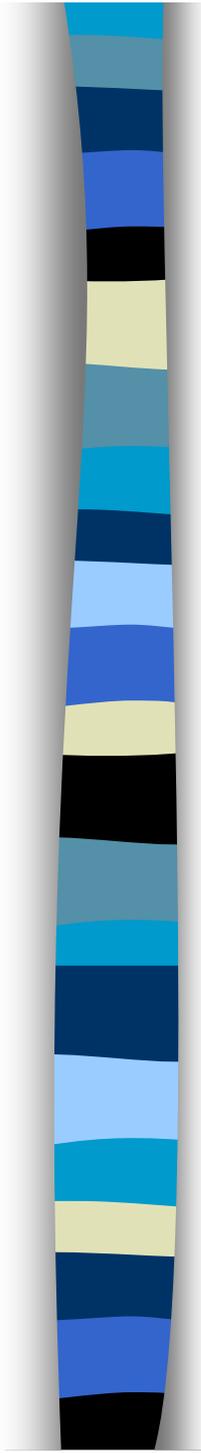
HERNÁN, F. (Grupo Cero de Valencia) (1985): **Investigaciones** "Nueva Revista de Enseñanzas Medias", nº 7.

MERCHÁN F. (1994): **El salto de la rana**. Revista "Suma" nº 14-15, 50-59.

MORATA, M. (1994): **Los Juegos en la Educación Matemática**, taller de "Matemáticas y Coeducación. Jornadas sobre Matemáticas y Coeducación", Ed. OECOM "Ada Byron". Madrid.

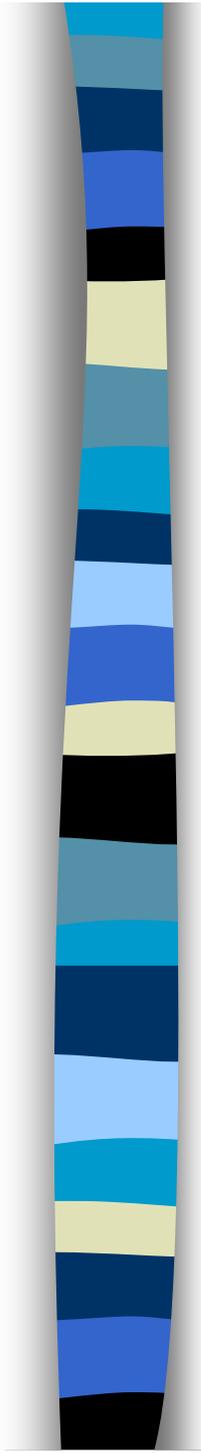
Además de por:

- *Brihuega, J; Molero, M; Salvador, A. (1996): "Didáctica de las Matemáticas". Edit. Complutense Madrid. Pág. 141.*



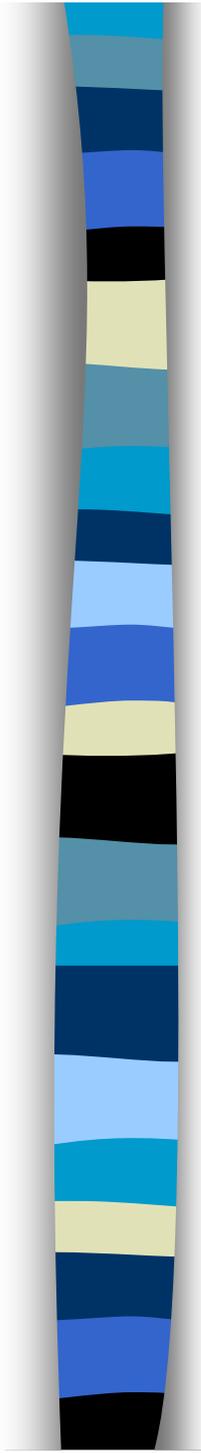
EL JUEGO DE LA RANA

- Antes de seguir leyendo juega un poco para comprender las reglas del juego y su dificultad.



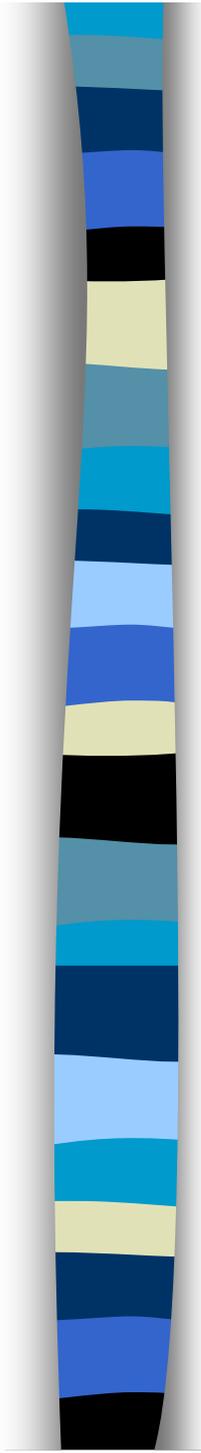
EL JUEGO DE LA RANA

- Al proponer el juego a un grupo de alumnos y alumnas comienzan jugando. Esta fase se corresponde con la **fase introductoria o "de abordaje"** de la resolución de problemas. Es comprender las reglas del juego. El profesor/a deja un tiempo de juego libre sin intervenir más que para aclarar, si es preciso, las normas.



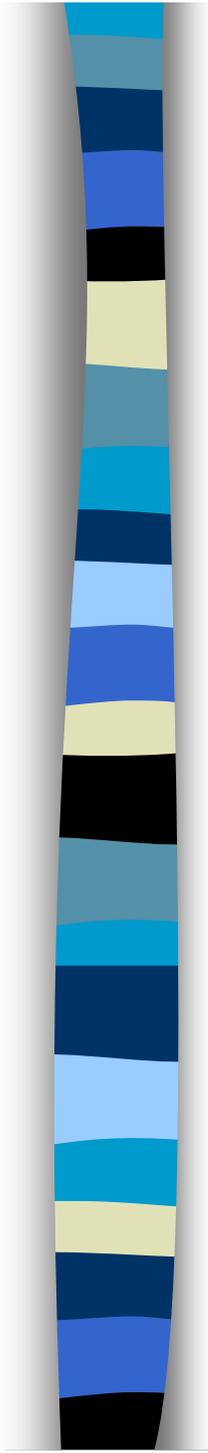
EL JUEGO DE LA RANA

- En la fase exploratoria se seleccionan posibles estrategias. Por ejemplo podemos seleccionar **particularizar**. Propone el profesor/a que primero se juegue con sólo dos fichas una de cada color y rápidamente todos ven que con tres movimientos se consigue el objetivo. Después propone jugar con dos, tres, cuatro, cinco fichas y confeccionar una tabla.



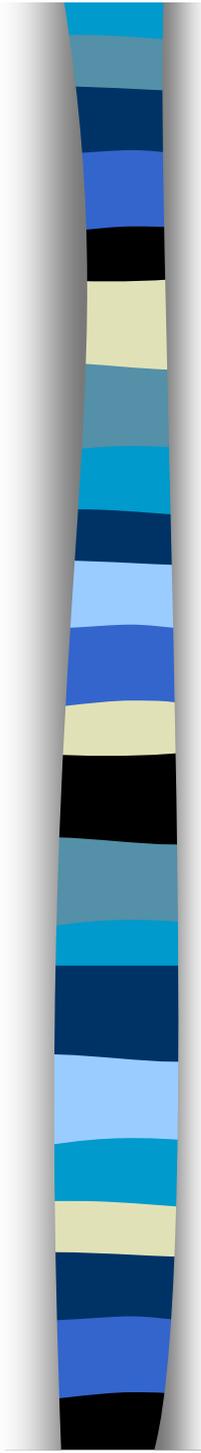
EL JUEGO DE LA RANA

- Comienzan las complicaciones. Deben buscarse estrategias ganadoras. Estamos en la fase de ejecutar el plan. A la vista de las tablas ¿estamos seguros que son los mínimos movimientos? Los alumnos y alumnas van jugando y discutiendo en el grupo sus estrategias de juego y sus tablas. Llegan a un acuerdo respecto de la tabla: "El número de movimientos son: 3, 8, 15, 24, 35, ..."



EL JUEGO DE LA RANA

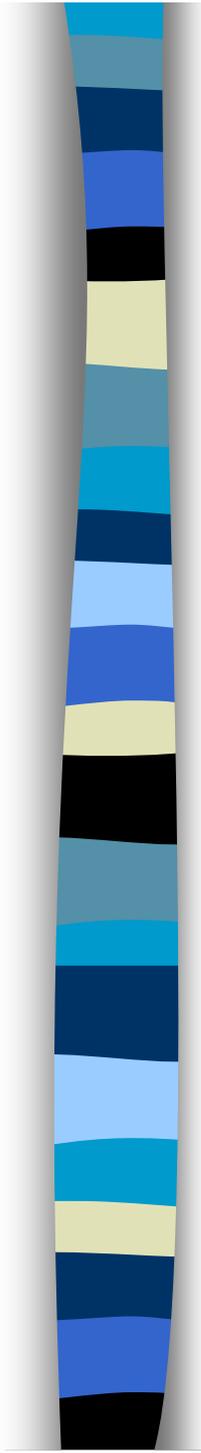
- Hasta ahora el juego lo hemos podido utilizar para aplicar el concepto de sucesión, el término n -ésimo de una sucesión o incluso utilizar diferencias finitas para calcularlo.



EL JUEGO DE LA RANA

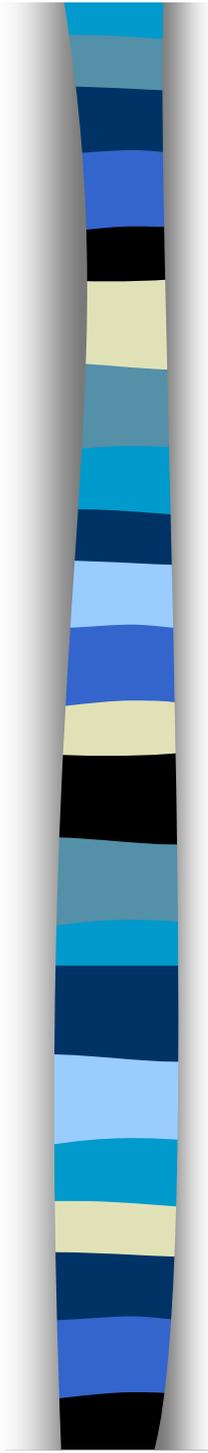
- En la siguiente fase deben buscar una fórmula que generalice el resultado e intentar probarla.
- Hacen la **conjetura** de que la fórmula buscada es:

$$a_n = n^2 + 2n.$$



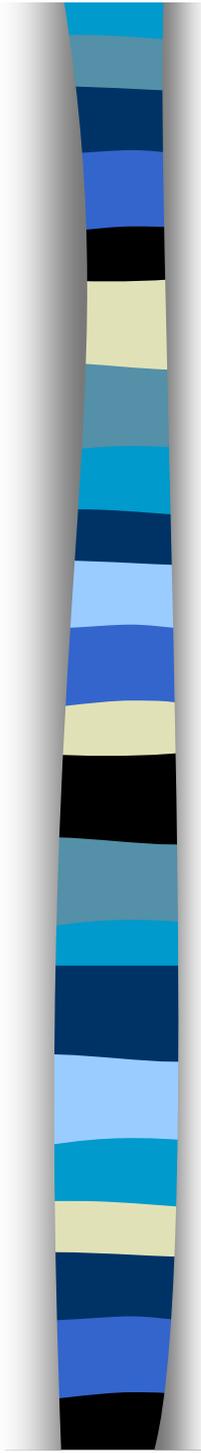
EL JUEGO DE LA RANA

- Otras estrategias que pueden emplear para recordar cuales han sido los movimientos que van haciendo es **buscar una buena notación**. Llamar 0 al hueco inicial, y numerar con números positivos las posiciones de la derecha y con negativos a los de la izquierda. Podemos indicar el primer movimiento de la ficha blanca como $(-1,0)$ si va de la casilla -1 a la casilla 0, y el primer movimiento de la ficha negra como $(1,-1)$ si salta de la casilla 1 a la casilla -1.



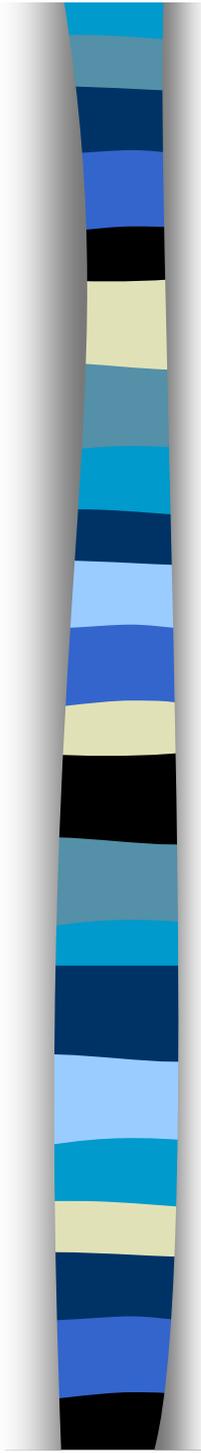
EL JUEGO DE LA RANA

- Se pueden **representar gráficamente** estos pares ordenados y **buscar pautas y regularidades**. Buscar una **recursión**. Es conveniente que analices las estrategias heurísticas que tu has empleado.



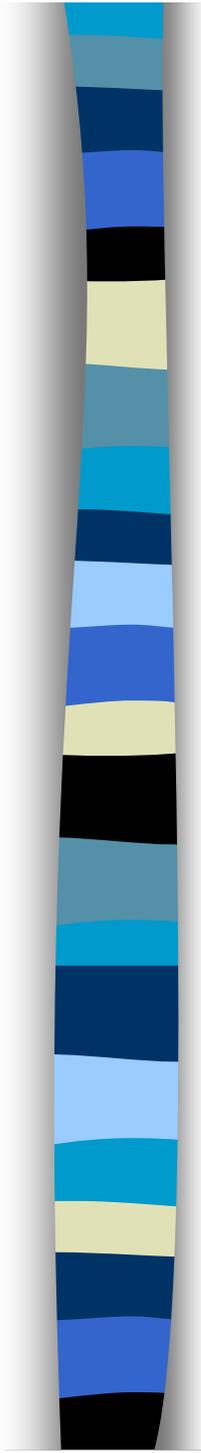
EL JUEGO DE LA RANA

- Veamos ahora como un juego tan sencillo puede utilizarse como elemento motivador de otros muchos contenidos del currículo. Al representar los pares ordenados estaremos aplicando conceptos como par ordenado, abscisa, ordenada, ejes de coordenadas.
- Si ahora el profesor/a pide que se unan mediante una poligonal los pares ordenados que representan cada movimiento, por orden, desde el primero hasta completar el juego, se obtendrán distintas figuras según el número de fichas.



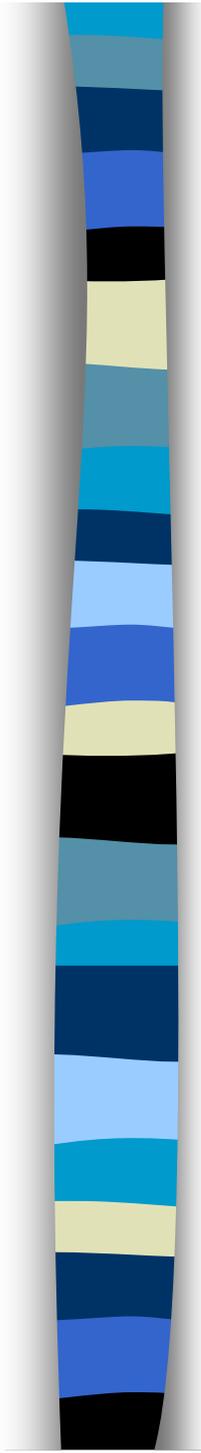
EL JUEGO DE LA RANA

- Al observar estas figuras y compararlas entre sí, se pueden trabajar conceptos geométricos. Por ejemplo, las figuras obtenidas son simétricas respecto a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Cada figura contiene a las figuras obtenidas con un número menor de fichas. Los puntos correspondientes a fichas de un mismo color están a un mismo lado de la recta $y=x$, en un mismo semiplano. Si comienzan jugando las otras fichas, las figuras ahora obtenidas son simétricas a las anteriores, de eje de simetría la recta $y=x$.



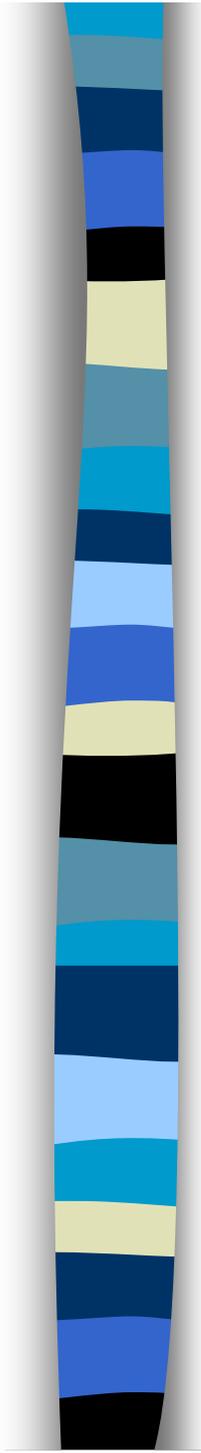
EL JUEGO DE LA RANA

- También se puede calcular el área encerrada por estas figuras. Todas las figuras son cerradas excepto para el caso de una sola ficha de cada color. Se revisa el cálculo de áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios, paralelogramos... Al preguntarnos cuanto vale el área total según el número de fichas, tenemos un nuevo ejemplo de sucesión, que ahora es una progresión aritmética de término general $8n-7$.



EL JUEGO DE LA RANA

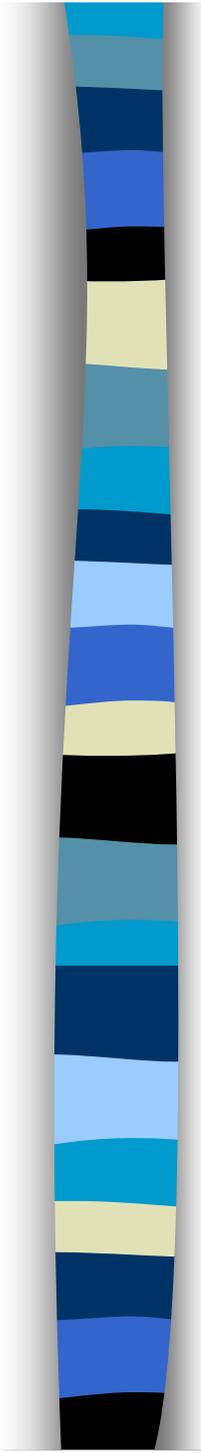
- Por último, F. Hernán comenta que es posible plantear este mismo juego de forma mucho más abierta, permitiendo que alumnos y alumnas elaboren las reglas del juego. De este modo la riqueza de posibilidades aumenta.



EL JUEGO DE LA RANA

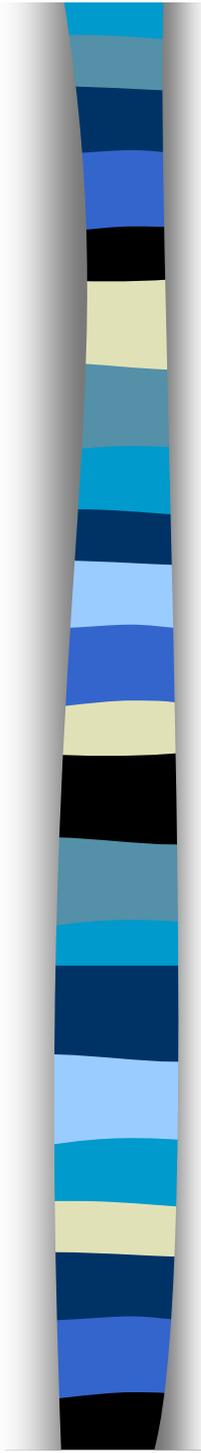
- **En resumen:**

- **E**ste juego puede servirnos para aplicar técnicas de resolución de problemas analizando fases, métodos, estrategias heurísticas y la búsqueda de un modelo matemático.
- Puede utilizarse como elemento motivador para introducir o para aplicar conceptos en sucesiones o en geometría.



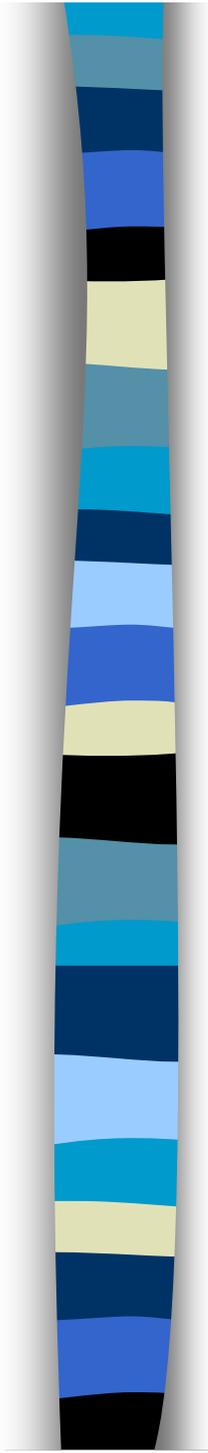
Llegar a cien

- Vamos a analizar un juego, fácil de jugar, que ilustra bien las técnicas de resolución de problemas en el aula, y que tiene una estrategia ganadora sencilla, pero no obvia. Es un juego de dos jugadores.



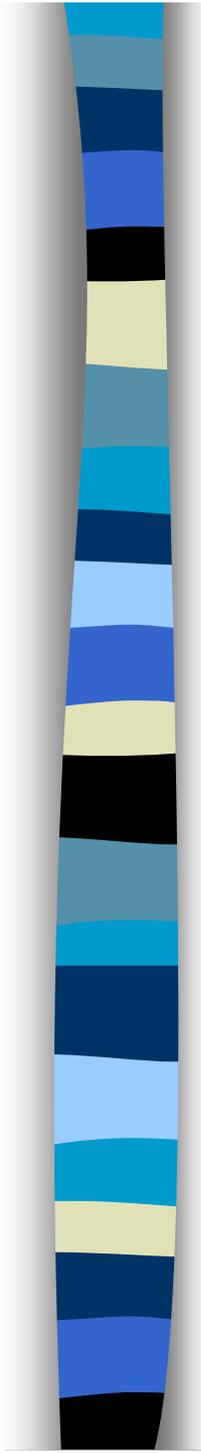
Llegar a cien

- *Cada jugador/a elige por turnos un número entre 1 y 10 y lo suma a los números elegidos anteriormente. Gana el primer jugador/a que consigue sumar exactamente cien. ¿Puedes hallar alguna estrategia ganadora?*



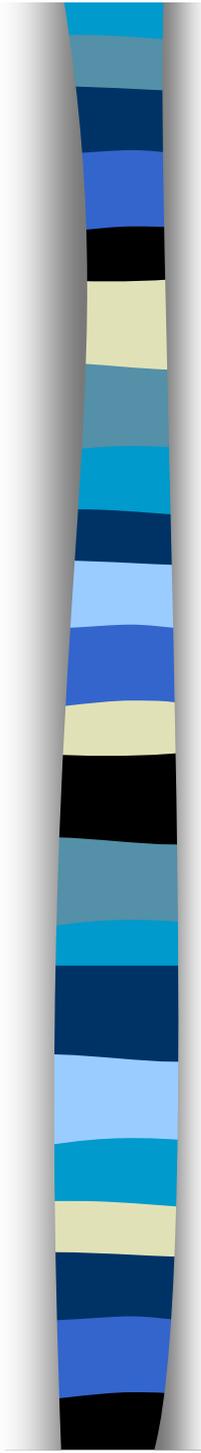
Llegar a cien

- Antes de seguir leyendo, juega.



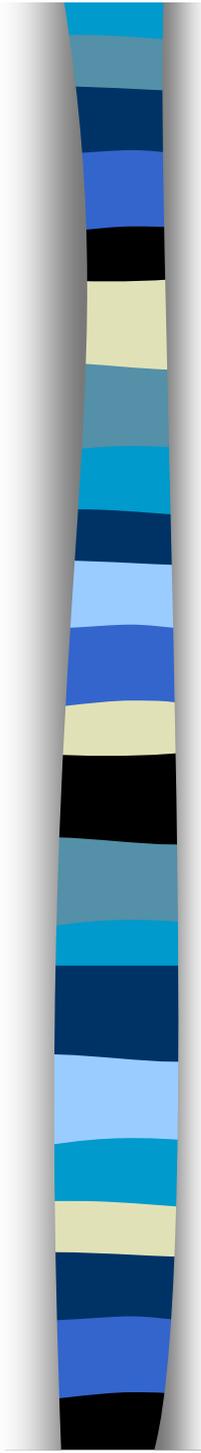
Llegar a cien

- Para proponer este juego en el aula sugerimos las siguientes pautas:
- Jugar en la pizarra, en voz alta, algunas partidas, para aclarar las reglas del juego.
- Dejar jugar a los alumnos y alumnas libremente, durante un corto espacio de tiempo. Es la fase de libre desarrollo del juego. Podemos animar a que anoten las partidas para luego poder reflexionar sobre ellas.



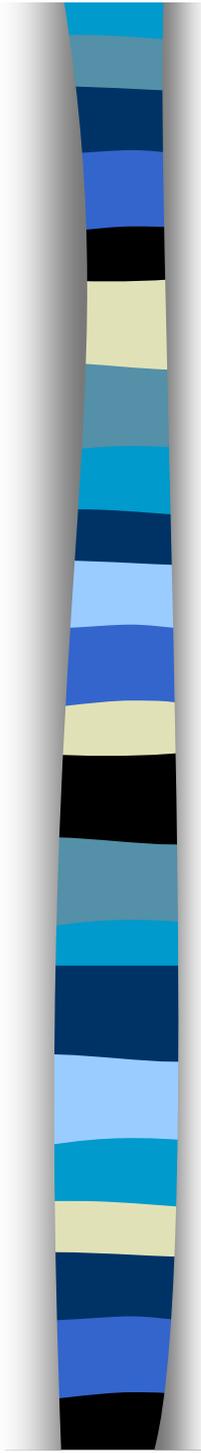
Llegar a cien

- En la segunda fase, de creación de relaciones, el profesor/a invita a comenzar el análisis del juego. Posibles sugerencias son:
- a) **Particularizar**, simplificando el juego: llegar sólo hasta 20, elegir números entre 5 y 10, partir de un valor próximo a cien y desde ese punto terminar la partida.
- b) Analizar si hay elecciones buenas o malas.
- c) **Suponer el problema resuelto**: buscar posiciones desde las que siempre se pueda ganar, o buscar posiciones desde las que se pueda llegar a una posición ganadora.
- El profesor/a anota, en la pizarra, una lista de los descubrimientos del alumnado.



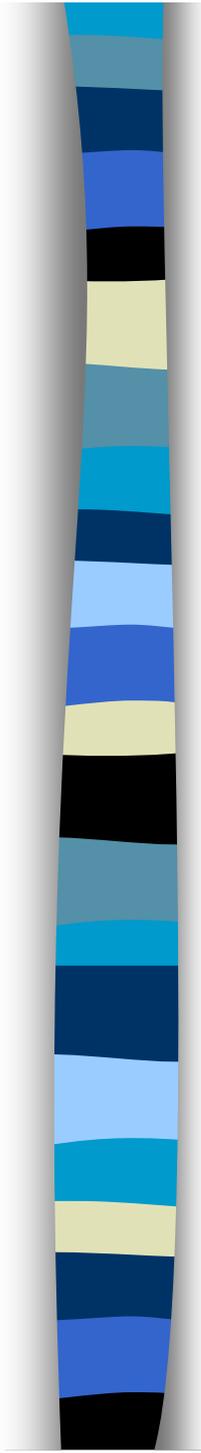
Llegar a cien

- La tercera fase de situación de juego simbólico comienza solicitando a los alumnos y alumnas que hagan una **conjetura**, que escriban una descripción de una regla que permita ganar siempre la partida y comprueben la regla.
- ¿Es posible ganar a alguien que aplica esa regla?
- ¿Se puede convencer al resto que esa estrategia es ganadora?
- Cada alumno o alumna debe confeccionar y entregar un informe donde explique sus hallazgos y sus métodos.



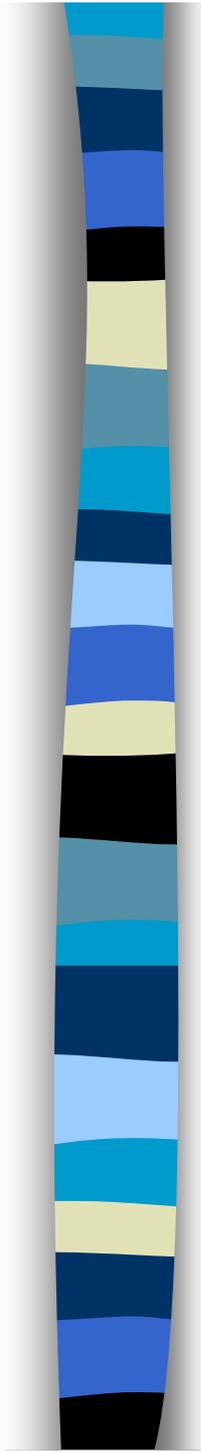
Llegar a cien

- La **cuarta** fase de expresión de la **creatividad** consiste en modificar el juego, en generalizarlo.
- Posible **sugerencias** son:
 - i) Suponer que el primero que llega a cien pierde.
 - ii) Acotar de otra forma los números que se pueden sumar.
 - iii) Ganar el primero que llega a 127.
 - iv) Sólo poder sumar 5, 10 o 25 y ganar el primero que llega a cien.
- Permitir que elaboren un **trabajo de investigación** y escriban sobre su propio juego es una forma de expresión de la creatividad.



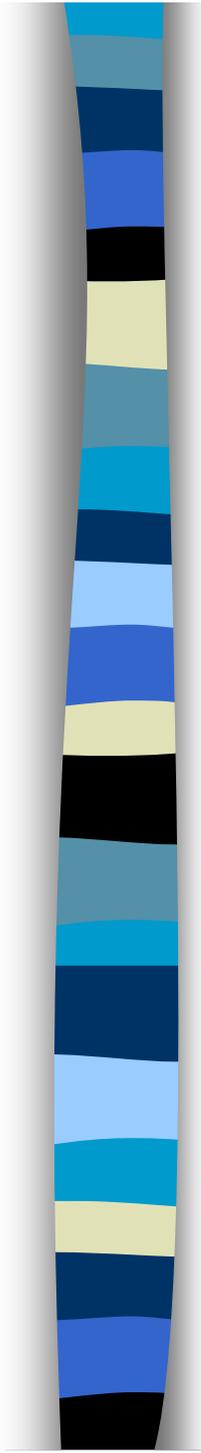
Juego cooperativo

- El juego cooperativo se caracteriza, por eliminar la competencia, no hay nadie que pierda o gane. La meta que se persigue no es ganar sino obtener un determinado objetivo de equipo, éstas actividades constituyen los contenidos transversales de la educación.



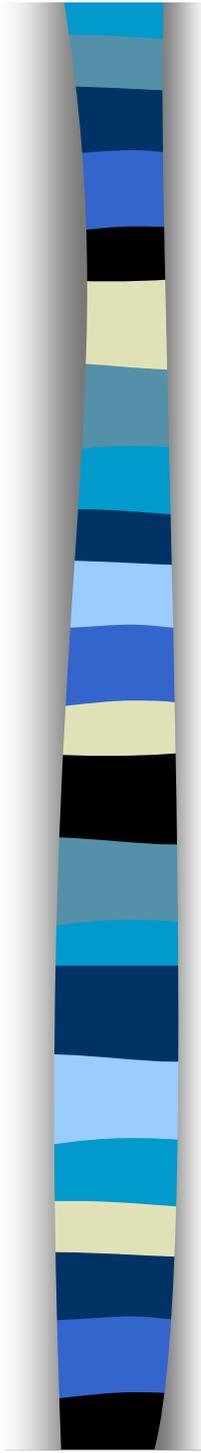
Juego cooperativo

- Es una primera reflexión para hablar de educación para la paz si nos proponemos actividades sin competición y sin necesidad de que trabaje uno en contra de otro. Porque la competición produce sentimiento de frustración y hace sentir a las personas como torpes. Los juegos cooperativos favorecen el desarrollo de capacidades nuevas a quienes por sus limitaciones se ven excluidos o se autoexcluyen en el aula.



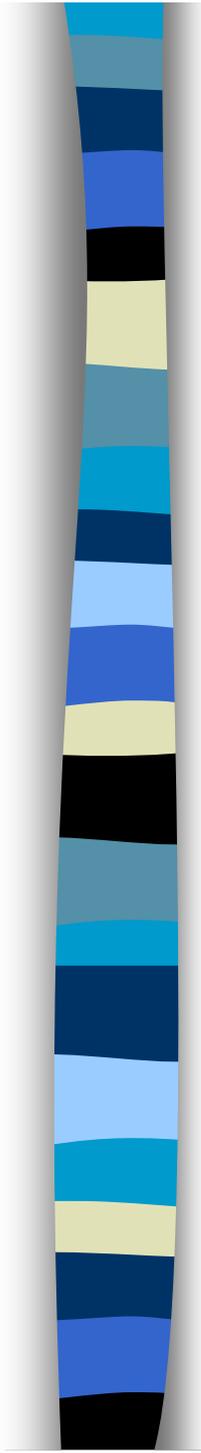
Juego cooperativo

- A nadie nos gustan las situaciones opresivas, en las que en lugar de preocuparnos por nuestro trabajo, tengamos que intranquilizarnos por los fallos, la crítica o el rechazo. Eliminar que se den este tipo de situaciones hará que todo el trabajo sea mucho más relajado, mucho más creativo y mucho más humanizado.



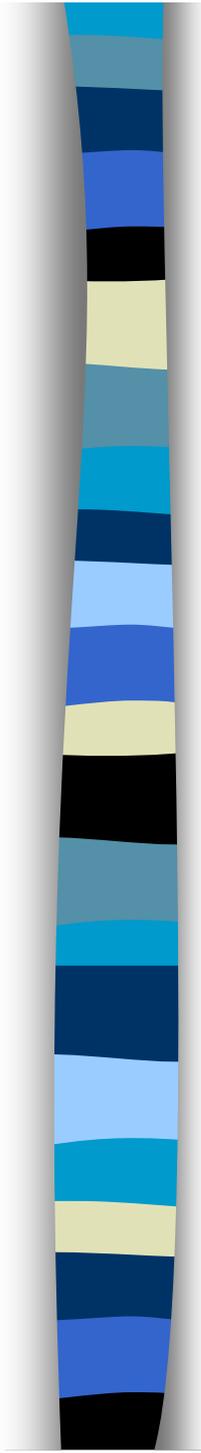
Juego cooperativo

- No se trata en absoluto de *obligar* a cooperar a los alumnos y alumnas porque “haya que ser solidarios”, sino de ofrecer situaciones, cada vez más, que fomenten la amistad, la colaboración y el trabajo en grupo como algo necesario y divertido, sin necesidad de que alguien gane o pierda.



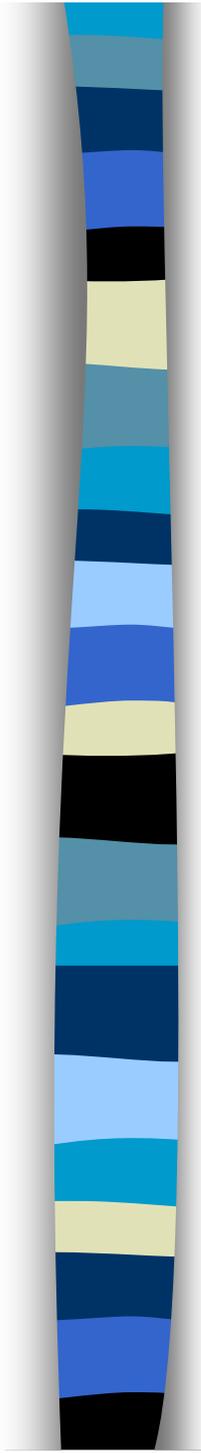
Juego cooperativo

- Investigaciones recientes muestran que la interacción y la cooperación entre el alumnado cuando se enfrentan a las metas de grupo y la búsqueda común de estrategias para la resolución de un determinado problema suelen ofrecer mejores resultados.



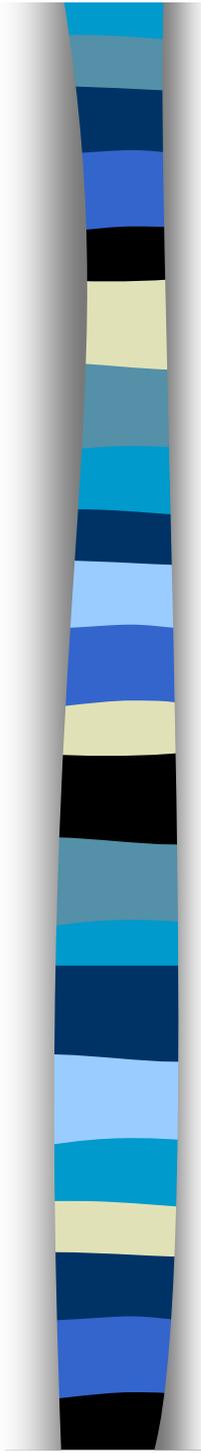
Juego cooperativo

- **Terry Orlick**, en su libro *“Libres para cooperar, libres para crear”* afirma:
- *Lo mágico de los juegos cooperativos gira en torno a varias libertades que ayudan el desarrollo de la cooperación, de los buenos sentimientos y del apoyo mutuo.*



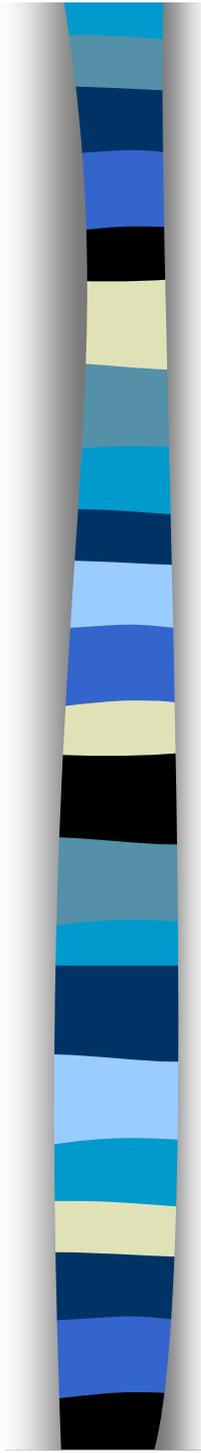
Juego cooperativo

- **Libres para competir**
- La estructura interna de los juegos cooperativos rechaza la competición.
- Las personas que aceptan el éxito competitivo, no sólo son capaces de destruir a otros sino también destruirse a sí mismas y a sus familiares, manifestando altos niveles de angustia, depresión, agresividad destructiva y abandono.



Juego cooperativo

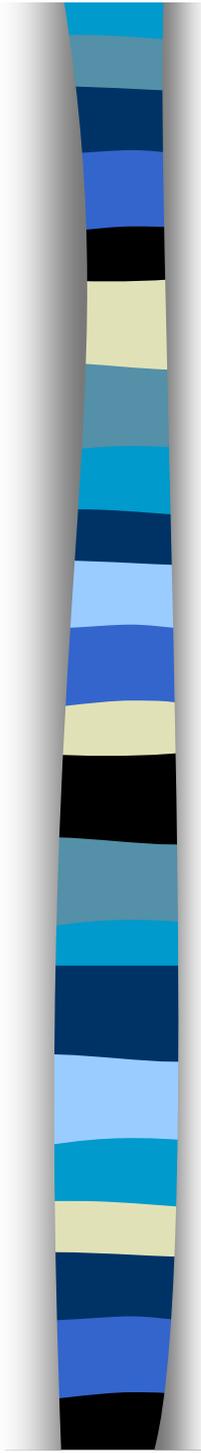
- **Libres para crear**
- Construir cooperativamente es crear, es sinónimo de echar cimientos para una sociedad pacífica. Los juegos cooperativos han desarrollado el pensamiento creativo de diversos pueblos y continuarán haciéndolo evitando que los participantes se involucren en tareas estáticas y rígidas.



Juego cooperativo

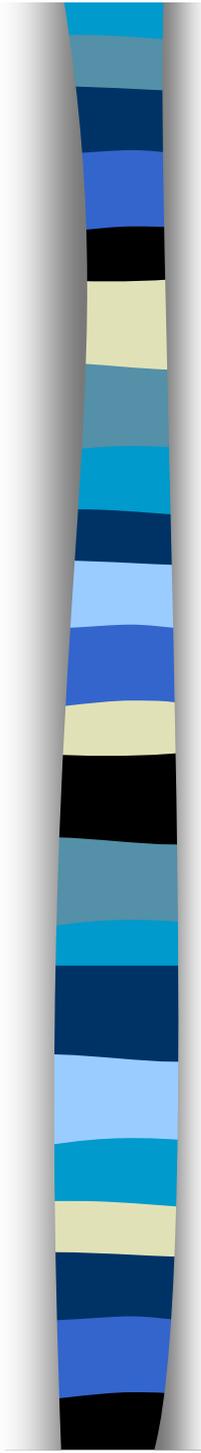
- **Libres de exclusión**

- Los juegos competitivos expulsan a las personas brutalmente, alimentando sentimientos de rechazo y desconfianza eliminado mejorar destrezas. En este sentido los juegos verdaderamente cooperativos rechazan dividir a los jugadores en ganadores y perdedores.



Juego cooperativo

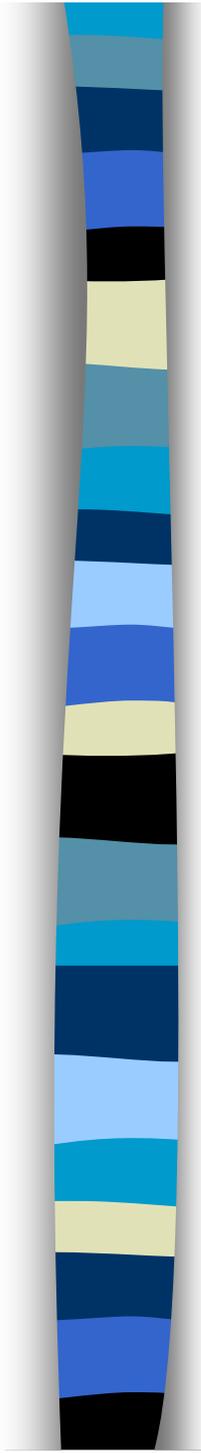
- **Libres para elegir**
- Cuando tratamos al alumnado como seres autónomos responsables, comienza a comportarse como persona capaz de sentirse importante y se mejora el control personal resolviendo muchos problemas, logrando tomar decisiones por sí mismas. Una experiencia temprana de cooperación, creatividad y elección permitirá a más personas ser más felices en la cooperación y más sanos en la competición



Juego cooperativo

- **Libres de agresión**

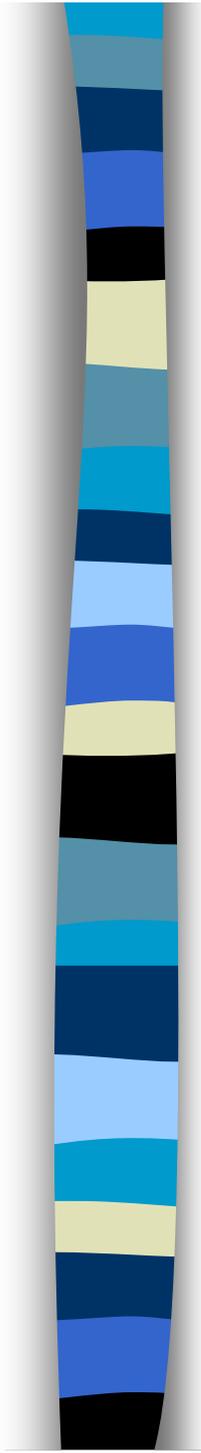
- En las sociedades pacíficas los alumnos son libres de agresión y ésta se consigue cuando los juegos son cooperativos.



Juego cooperativo

- *“Una vez que los niños y niñas están familiarizados con diversos tipos de actividades y diferentes maneras de jugar juntos de forma constructiva, se encuentran en una mejor posición para elegir entre opciones cooperativas, competitivas e individuales. Una experiencia temprana de cooperación, creatividad y elección permitirá a más personas ser más felices en la cooperación y más sanos en la competición.*

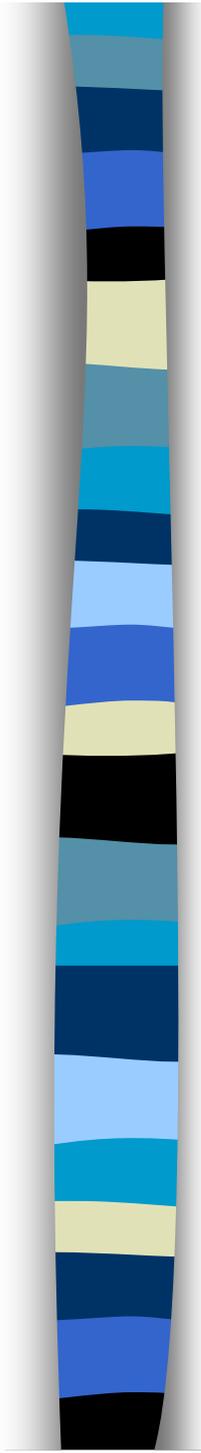
(Orlick; 1995).



Juego cooperativo

- *“La característica distintiva de los juegos cooperativos frente a todos los otros juegos, viejos o nuevos, es su estructura interna. Los juegos cooperativos han desarrollado el pensamiento creativo de diversos pueblos y continúan haciéndolo, nunca deberían ser tan rígidos y estáticos que impidieran la entrada a la creatividad y a la sensibilidad de los y las participantes. Ninguna regla debería verse como algo inflexible”*

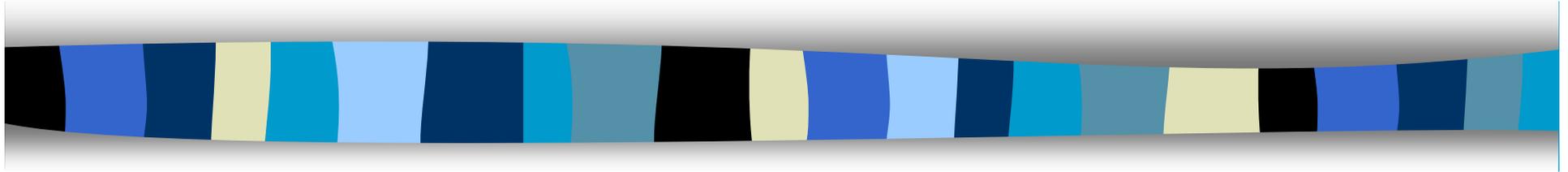
(Orlick; 1995).



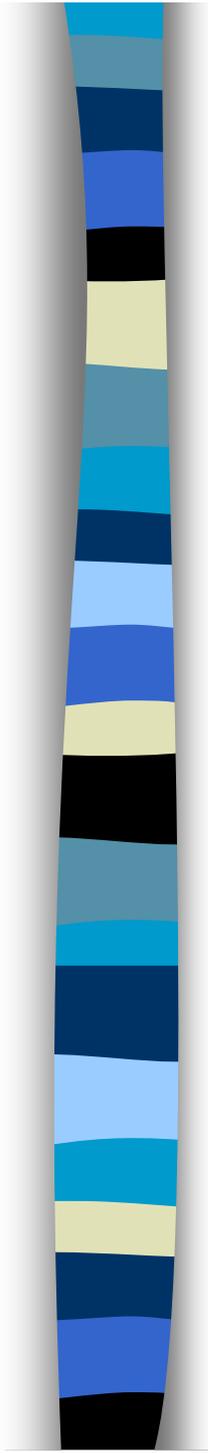
Juego cooperativo

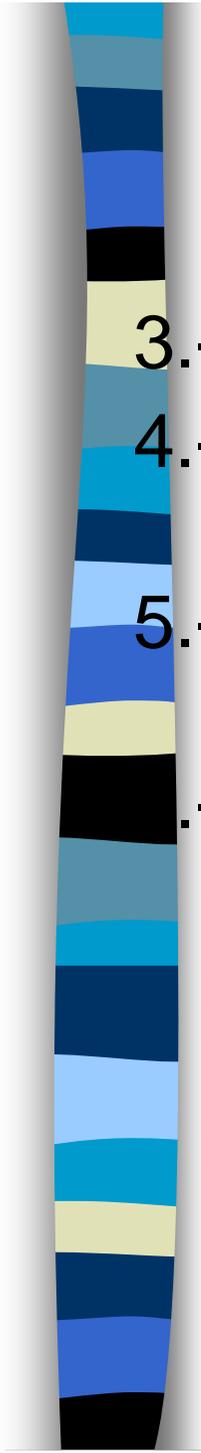
- Una actividad interesante desde el punto de vista del análisis de juegos cooperativos consiste en modificar juegos tradicionalmente competitivos en otros en los cuales la colaboración entre los y las participantes es necesaria para concluir el juego. Resulta un ejercicio de imaginación, que no siempre es fácil, y en el que hay reflexionar hasta llegar a algo que sea realmente bueno, pero cuando se consigue los resultados son más que gratificantes.
- **Taller:** Hacer que el juego de la rana y llegar a cien sean juegos cooperativos

Algunos juegos



Algunos juegos

- 
1. LA MOSCA ANTOJADIZA
 2. LAS TORRES DE HANOI
 3. CUATRO OPERACIONES
 4. EL DADO GANADOR
 5. CUADRADOS MÁGICOS
 6. TRIÁNGULO MÁGICO
 7. NÚMEROS CURIOSOS
 8. JUEGO CON EDADES
 9. LLEGAR AL CIELO
 10. ESTRELLA DE ORO
 11. SUMA MÁXIMA Y SUMA MÍNIMA
 12. COLECCIÓN SOMA
 13. DOS JARRAS
 14. DOMINÓS, BARAJAS, JUEGOS DE TABLERO



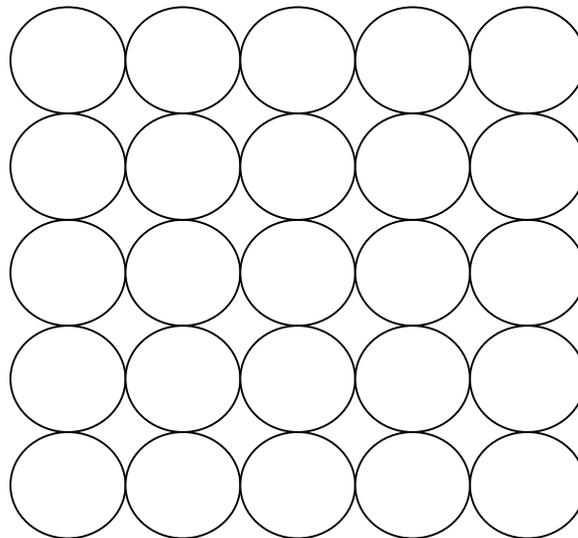
LA MOSCA ANTOJADIZA

- 3.- EDAD DE LOS ALUMNOS(AS): 12-13 años
- 4.- CLASE DE JUEGO: Juego de estrategia, solitario, cooperativo
- 5.- MATERIAL NECESARIO: Una ficha diseñada
- .- COMPETENCIAS: Familiarización con las estrategias de resolución de problemas.

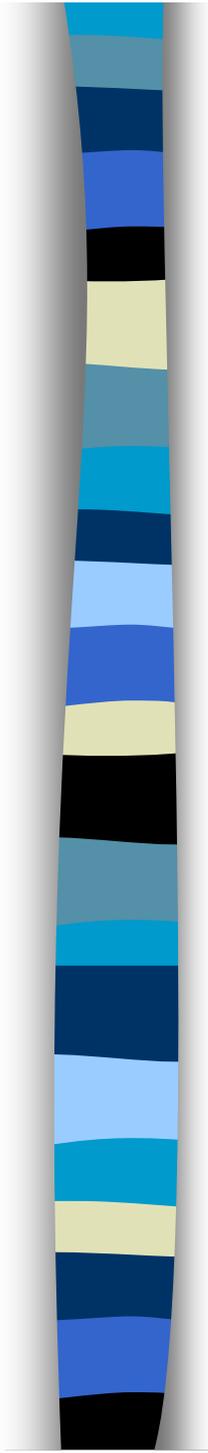
- Cubillo, S. (1998): Módulo: “*Resolución de problemas*”. Cátedra. UNSAAC.

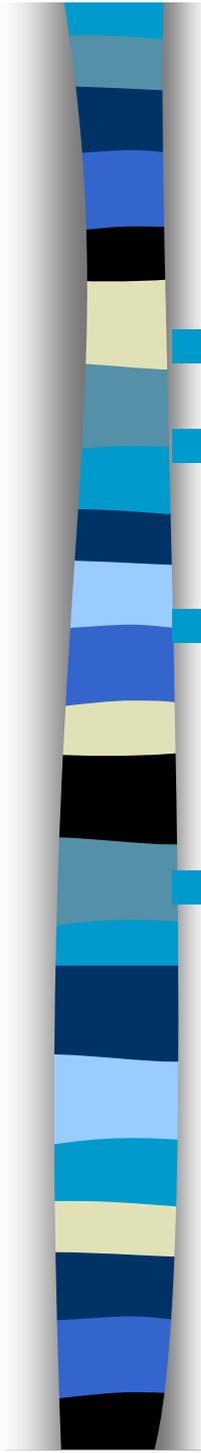
ENUNCIADO DEL PROBLEMA.

*Se han colocado sobre una mesa 25 monedas. Viene una mosca volando y se posa sobre una de las monedas, se le ocurre que le gustaría patear todas las monedas, anulando y pasando de una moneda a otra (que la toque) sin volar y sin repetir monedas. ¿Podría hacerlo? ¿Cuál sería su itinerario?*1



Adela Salvador

- 
- Este es un juego solitario, pero se puede discutir en grupo de forma cooperativa
 - Debes leer detenidamente el problema hasta comprenderlo, y luego utilizando el plan de ataque, diseña los trazos correspondientes.
 - Utiliza la estrategia “Hazlo más fácil”



LAS TORRES DE HANOI

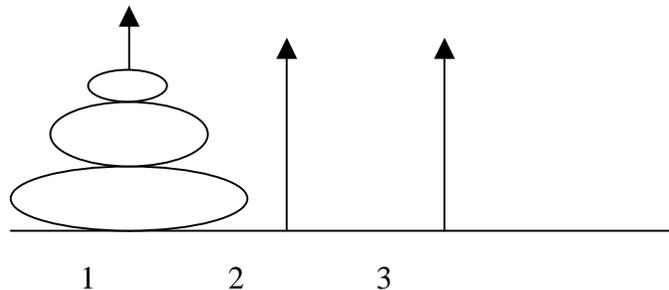
- 3.- EDAD DE LOS ALUMNOS: 12-13 años.
- 4.- CLASE DE JUEGO: Juego de estrategia, cooperativo
- 5.- MATERIAL NECESARIO: Tres pedazos de alambres fijos colocados en madera con fichas circulares de tres tamaños diferentes.
- 6.- COMPETENCIAS: Al finalizar este juego establecer una ley de formación

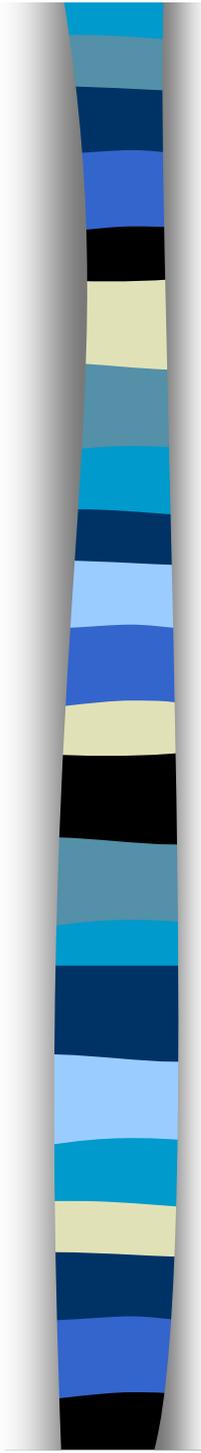
Gómez, I. (1992): "Desarrollo de diversos juegos de estrategia para la utilización en el aula". Épsilon 22.

Pág. 12

■ 8.- ENUNCIADO DEL PROBLEMA

- *Tengo 3 varillas. Sobre la varilla 1 están aplicados n discos de madera A, B, C de diámetros decrecientes el problema consiste en llevar estos discos a varilla 3 respetando las reglas siguientes:*
- *a) No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.*
- *b) Un disco sólo puede descansar sobre otro de diámetro superior.*



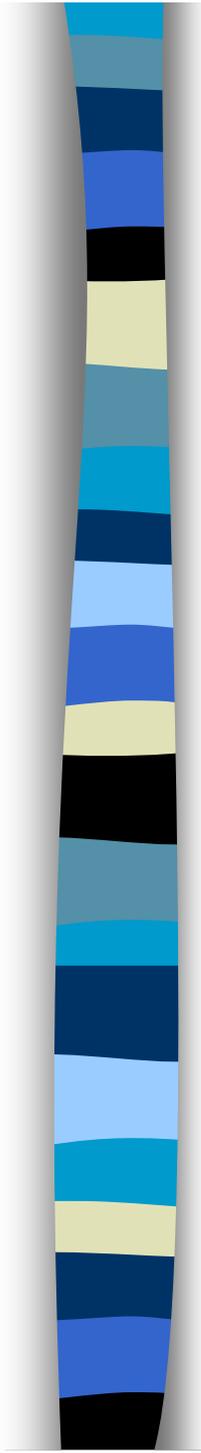
- 
- Se pide el número mínimo número de elementos para desplazar n discos. Establecer una ley de formación de la sucesión.
 - Hazlo más fácil: Comienza con 1 disco, luego 2... Haz una tabla
 - Solución: $m = 2^n - 1$

CUATRO OPERACIONES

- *En este juego se trata de completar los cuadros en blanco con una cifra para que se cumplan las igualdades indicadas. Sólo deben emplearse las cifras del 1 al 9 sin que se repita ninguna en dos casillas*

The image shows a purple rectangular box containing three mathematical equations. Each equation has empty boxes for digits. The first equation is subtraction: $\square - \square = \square$. The second equation is multiplication: $\square \cdot 3 = \square$, with a small 'x' symbol below the equals sign. The third equation is addition: $\square + \square = \square$.

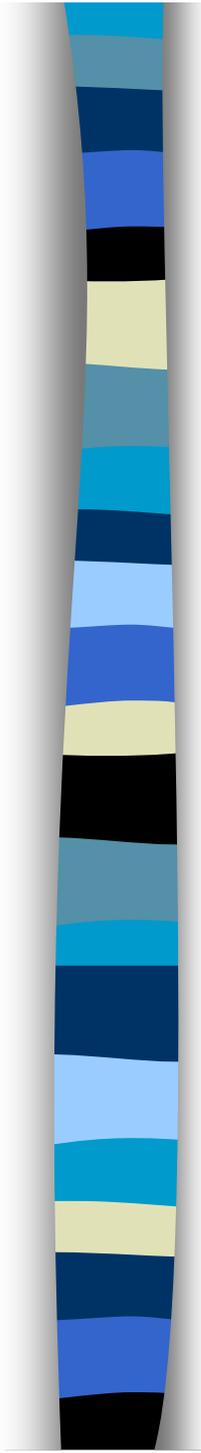
Audra Salvador



EL DADO GANADOR

- *Construye tres dados tetraédricos con las siguientes numeraciones en sus caras: Dado A: 6-3-3-3; Dado B: 5-5-2-2; Dado C: 4-4-4-1.*
- Si eres el primer jugador, ¿qué dado debes elegir? Si eres el segundo jugador, ¿qué dado debes elegir?
- ¿Es un juego equitativo? ¿Tienen la misma posibilidad siendo el primero o siendo el segundo?
- Si la respuesta es negativa, ¿existe alguna evaluación de las diferencias entre las dos opciones?
- ¿Depende de los dados que se elijan?

*Corbalán, F. (1998): “**Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato**”. Edit. Síntesis. Madrid. Pág.184.*

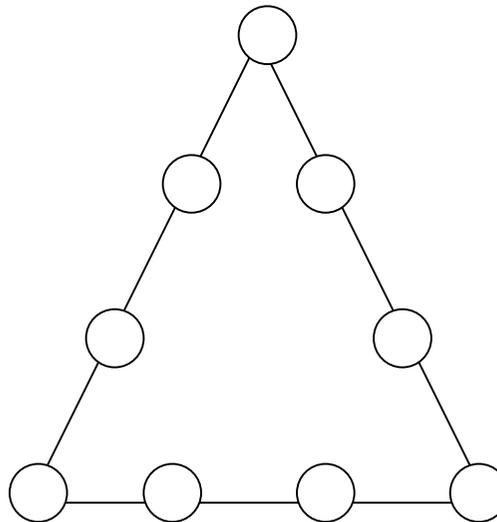


CUADRADOS MÁGICOS

- *Dibuja el cuadrado mágico 3×3 , completa los casilleros en blanco, de manera que sumados, horizontalmente, verticalmente y diagonalmente sumen 15*
- *Idem los números del 1 al 16 en un tablero de 4×4 .*
- *Idem del 1 al 25 en un tablero del 5×5 .*
- *¿Cómo completar el cuadrado mágico, de forma que la suma de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal sea 42? Todos los números son de dos cifras.*

TRIÁNGULO MÁGICO

- *Coloca todos los números del 1 al 9 de tal manera que la suma de los cuatro números de cada lado del triángulo sumen 23*



- *Jimeno, M. (1994): “**Curiosidades y pasatiempos matemáticos**”. Labor Barcelona. Pág.3.*

NÚMEROS CURIOSOS

- *En este juego empieza restando el 9 con el 1, considera al minuendo como un número descendente en una unidad y al sustraendo ascendente en otra unidad hasta que el último dígito sea 1.*

$$9 - 1 = \text{---}$$

$$98 - 21 = \text{----}$$

$$987 - 321 = \text{----}$$

- *En los productos siguientes multiplique lo indicado y observa lo que obtienes*

$$\begin{array}{r} 12345679x \\ \underline{\quad 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12345679x \\ \underline{\quad 27} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12345679x \\ \underline{\quad 18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12345679x \\ \underline{\quad 45} \end{array}$$

Calabría, M. (1990): “**Juegos Matemáticos**”. Edit. Akal. Madrid. Pág.13.

JUEGO CON EDADES

- *Adivina la edad de tu compañero/a. Para ello dile que multiplique su edad por 10 y el número de personas de tu casa por 9. Para obtener su edad resta ambos números y se obtiene la edad y el número de personas de su casa.*



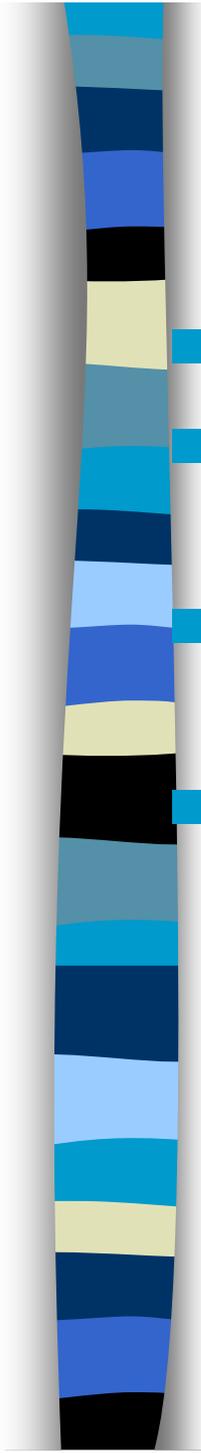
- *Por ejemplo: Si la edad a adivinar es: 45 y el número de personas es 5, entonces:*

$$45 \times 10 = 450$$

$$5 \times 9 = 45.$$

Hallamos la diferencia 405, entonces:

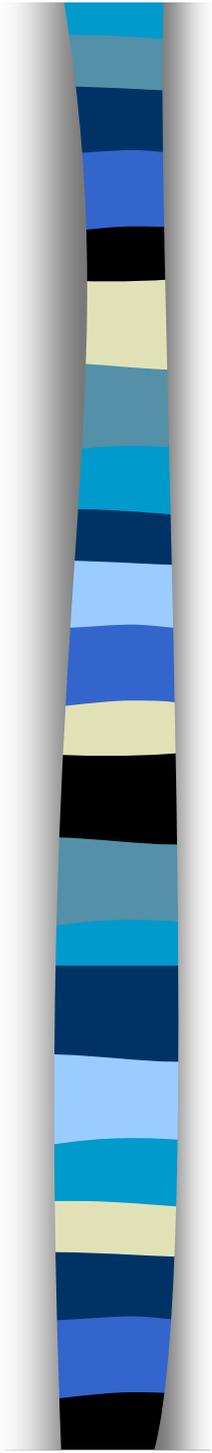
$40+5 = 45$ es la edad y 5 el número de personas.



LLEGAR AL CIELO

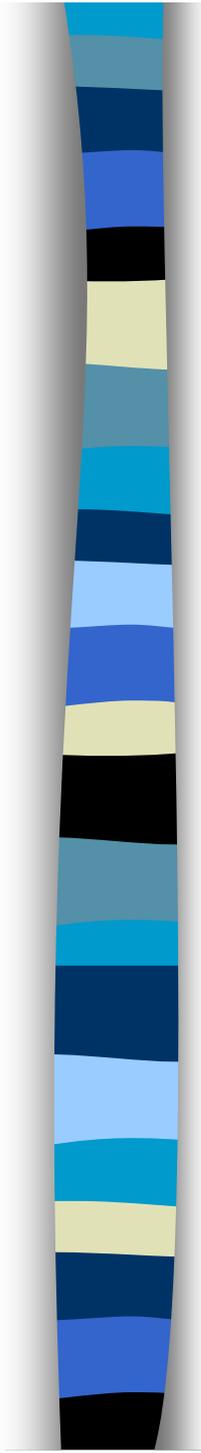
- 3.- EDAD DE LOS ALUMNOS(AS): 12-13 años
- 4.- CLASE DE JUEGO: Juego de estrategia. Para dos jugadores. Cooperativo
- 5.- MATERIAL NECESARIO: Un tablero de nueve líneas
- 6.- COMPETENCIAS: Identifica e interpreta el juego buscando estrategias ganadoras.

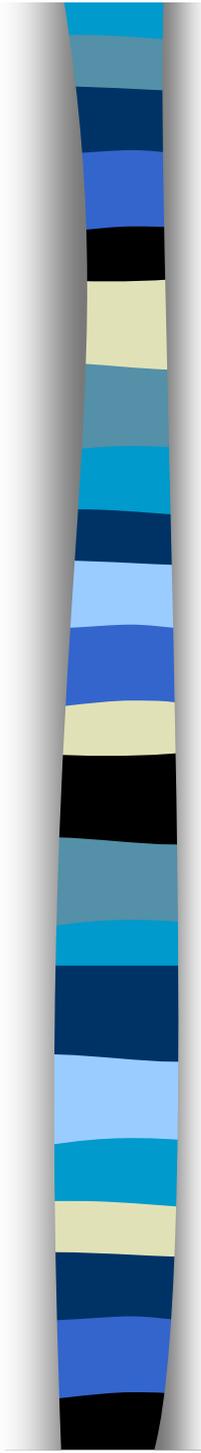
*Brihuega, J; Molero, M; Salvador, A. (1996):
“Didáctica de las Matemáticas”. Edit.
Complutense. Madrid. Pág. 144*



LLEGAR AL CIELO

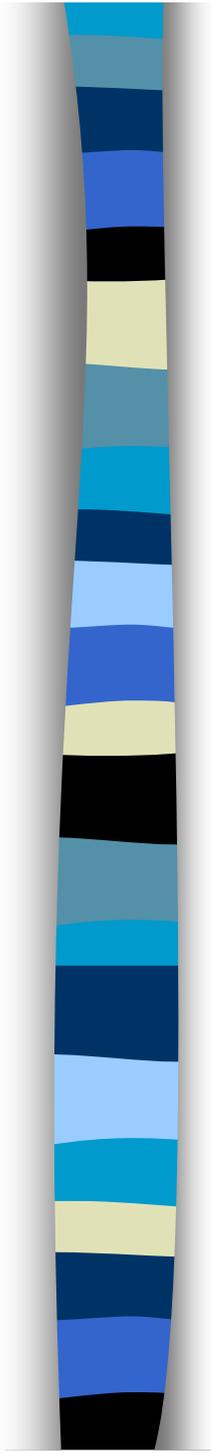
- En muchos juegos interviene el azar. Bastantes de estos juegos son modelos de procesos físicos o biológicos, como los juegos de la vida, o el estudio de procesos de nacimiento y muerte. Analizaremos el siguiente juego, "*llegar al cielo*", no como modelo, sino únicamente como instrumento para aumentar la comprensión sobre el comportamiento del azar.

- 
- Concepto de azar
 - Concepto de probabilidad
 - Frecuencia relativa
 - Frecuencia absoluta
 - Frecuencia acumulada
 - Porcentajes
 - Histograma
 - Polígono de frecuencias



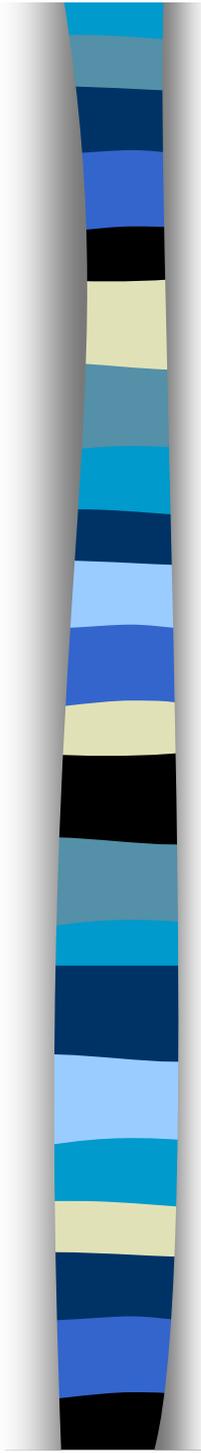
LLEGAR AL CIELO

- Lo conveniente es comenzar jugando y anotando los resultados para tener la seguridad de que se comprenden las reglas del juego. Se observa que el juego es ventajoso para B. Se pueden plantear entonces otras cuestiones como: ¿En qué proporción tendrían que ir las apuestas para que el juego fuese justo? ¿Cuánto tarda A, por término medio, en llegar al cielo? ¿Cuánto tarda B, por término medio, en ganar a A?



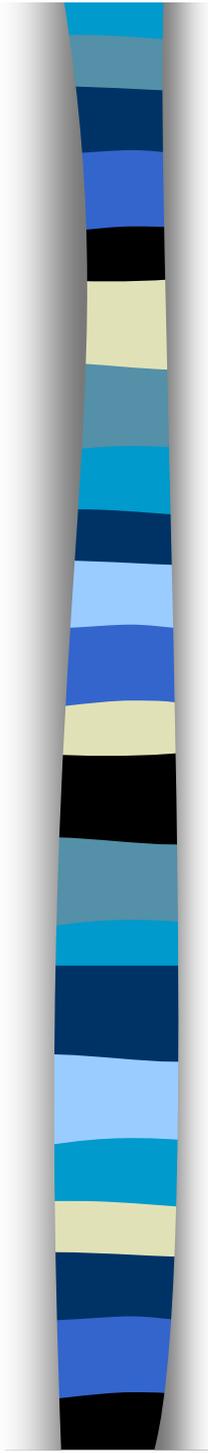
LLEGAR AL CIELO

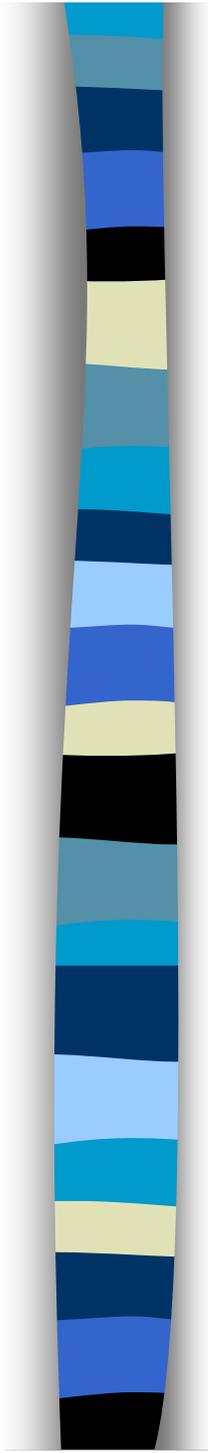
- Calcular la probabilidad de que gane uno de los jugadores de forma teórica es complicado, incluso utilizando un diagrama de árbol o una cadena de Markov. Al llevar este juego a una clase y jugar y anotar los resultados se puede confeccionar una tabla con los resultados de todos. Analizando la tabla podemos dar respuesta a las cuestiones.



LLEGAR AL CIELO

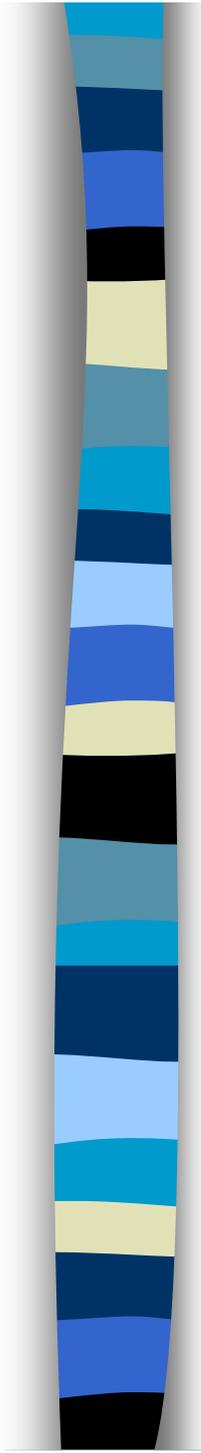
- El profesor/a debe seguir planteando preguntas para conseguir mejorar la comprensión de las reglas del azar. Una de las estrategias de resolución de problemas es la de particularizar. Se puede sugerir a los alumnos y alumnas que trabajen con una única capa, luego con dos, y así con sucesivos casos particulares. Confeccionamos tablas para cada caso.

- 
- Modificar el número de líneas horizontales menor que 9 o mayor que 9 y conjeturar en cada caso si tiene ventaja el jugador A o el jugador B.
- 1º.- Dibuja una tabla de frecuencias para nueve jugadas
 - 2º.- Tabula convenientemente y calcula la frecuencia relativa, frecuencia absoluta frecuencia acumulada y el porcentaje.
 - 3º.- Dibuja en diagrama de barras, histogramas, polígono de frecuencias ...



LLEGAR AL CIELO

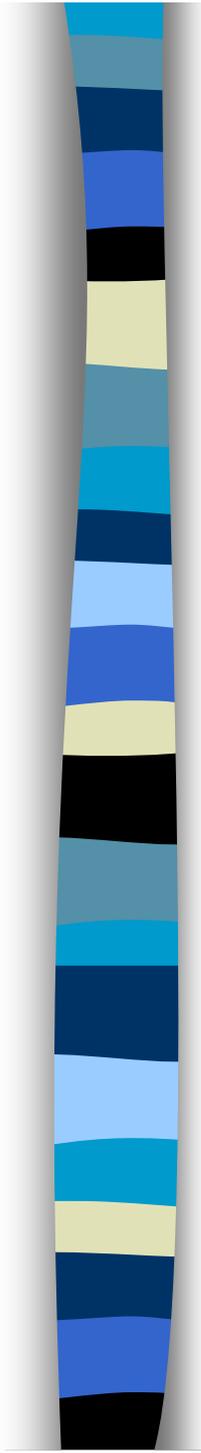
- Utilizar el ordenador, o la calculadora, para simular el juego un número grande de veces proveerá de gran número de resultados.



LLEGAR AL CIELO

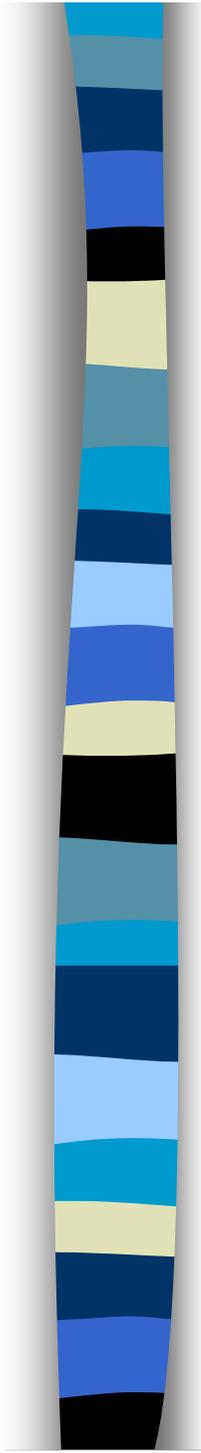
- La siguiente fase consiste en buscar una fórmula recursiva y comprobar el ajuste entre los resultados experimentales y los teóricos. Si llamamos p_n a la probabilidad de que gane B al jugar con n capas obtenemos la expresión:

$$8p_{n+1} = 3 + 4p_n + p_n^2$$



LLEGAR AL CIELO

- En la fase de generalización se puede estudiar la manera de modificar el juego para que sea más equilibrado.
- El enunciado queda abierto. Por ejemplo, podemos estudiar que ocurre si el jugador A, cuando sale cara, añade cuatro ramas y, cuando sale cruz, añade sólo una. Ahora el juego ha dejado de ser un "problema" para convertirse en una "investigación". Tenemos muchas nuevas posibilidades para continuar.



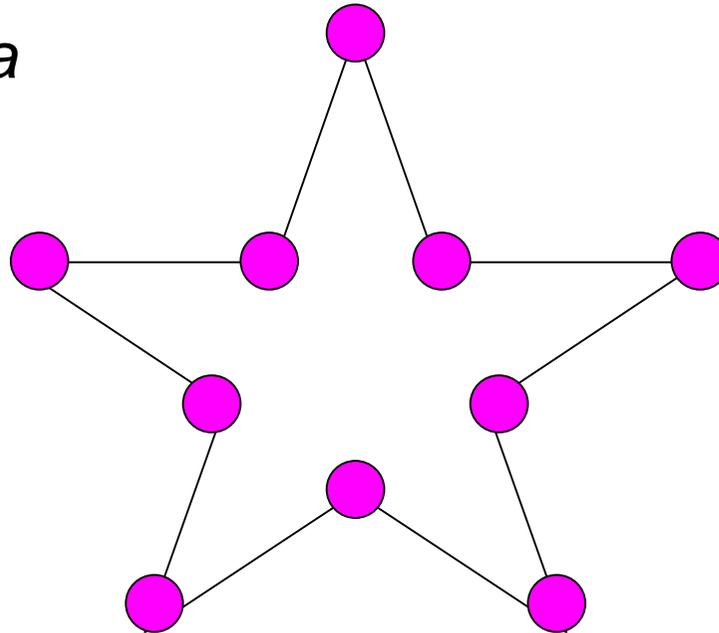
ESTRELLA DE ORO

- 3.- EDAD DE ALUMNOS(AS): 12-13 años
- 4.- CLASE DE JUEGO: Juego de estrategia. Solitario-cooperativo
- 5.- MATERIAL NECESARIO: Ficha diseñada
- 6.- COMPETENCIAS: Identifica, interpreta y resuelve el juego planteado.

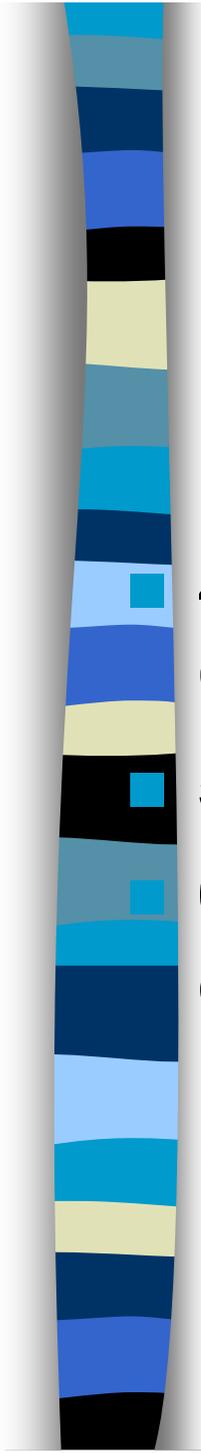
Corbalan, F. (1996): “Estrategias utilizadas por alumnos de secundaria en la resolución de juegos”. Suma 23. Pág. 24.

ENUNCIADO

- *En la figura de la estrella que observas elige un vértice cualquiera que tenga ficha, cuenta a partir de la ficha elegida dos vértices que forman con el inicial una línea recta, quita la ficha que está en el último vértice que hemos contado. Continúa el procedimiento hasta eliminar las 9 fichas y quedarte con sólo una*



Adela Salvador



SUMA MÁXIMA Y SUMA MÍNIMA

EDAD DE ALUMNOS: 12-16 años.

4.- CLASE DE JUEGO: Juego de estrategia.
Cooperativo

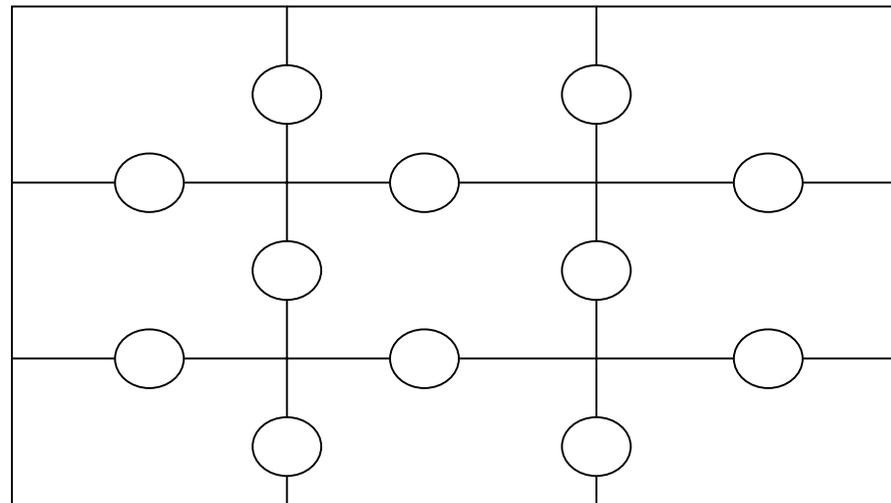
5.- MATERIAL NECESARIO: Ficha diseñada

6.- COMPETENCIAS: Desarrolla destrezas de cálculo mental en la adición multiplicación en N

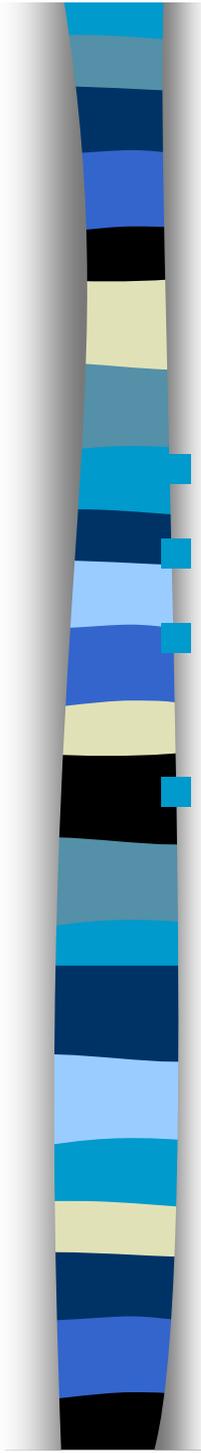
Molla, A. (2000): Módulo de Recursos II. Cátedra

ENUNCIADO

- *En la ficha debes colocar los números del 1 al 9 en los cuadrados vacíos, multiplicando los dos números de los 2 cuadrados adyacentes y escribe el producto en el círculo que hay entre los cuadrados. Sumando los números que hay en todos los círculos obtener el mayor posible de la suma de los productos (suma máxima) entre 2000- 2400 y la menor entre 1000-2000 (Suma mínima)*



Adela Salvador



COLECCIÓN SOMA

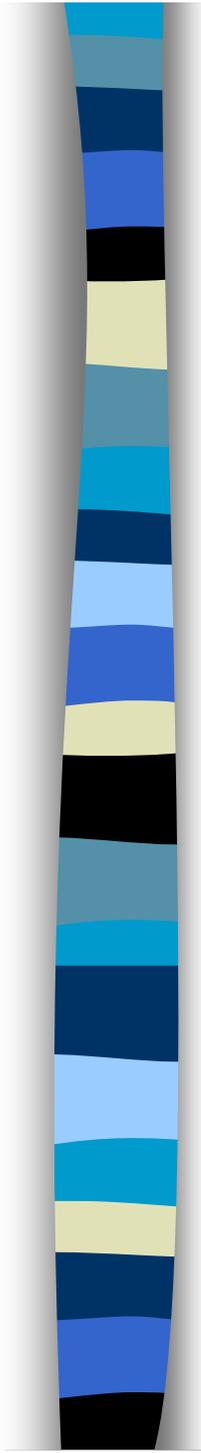
EDAD DE ALUMNOS(AS): 11 –16 años

4.- CLASE DE JUEGO: Puzzle. solitario - cooperativo

5.- MATERIAL NECESARIO: Policubo – cubos de madera

6.- COMPETENCIAS: Realizar comparaciones entre objetos formados por policubos y demostrar las equivalencias de volúmenes de diferentes objetos formados por policubos.

Corbalán, F. (1998): “Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato”. Edit. Síntesis. Madrid.

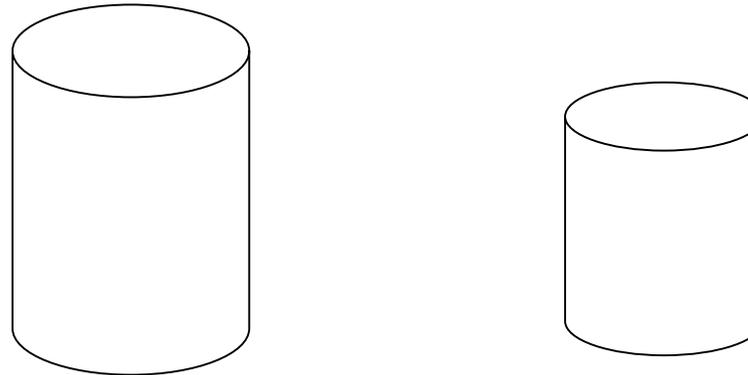


ENUNCIADO

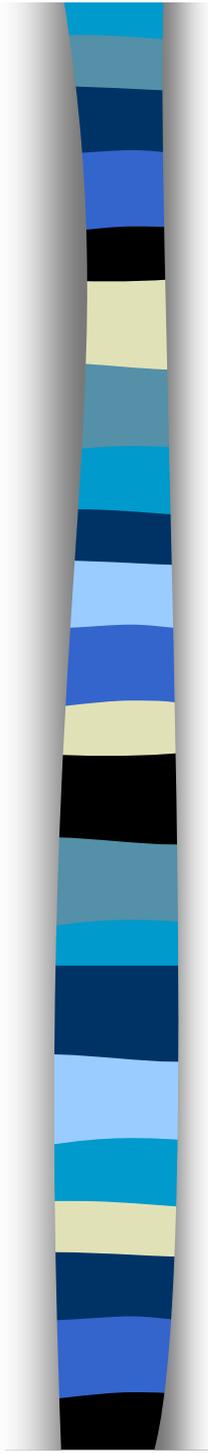
- *Utilizando los policubos manipula y representa las figuras simétricas, luego trace todas las formas de los bicubos, tricubos y tetracubos.*
- *Con 6 tetracubos y 1 tricubo se construyen los objetos de la colección soma. (perro, pato, ganso, etc.)*

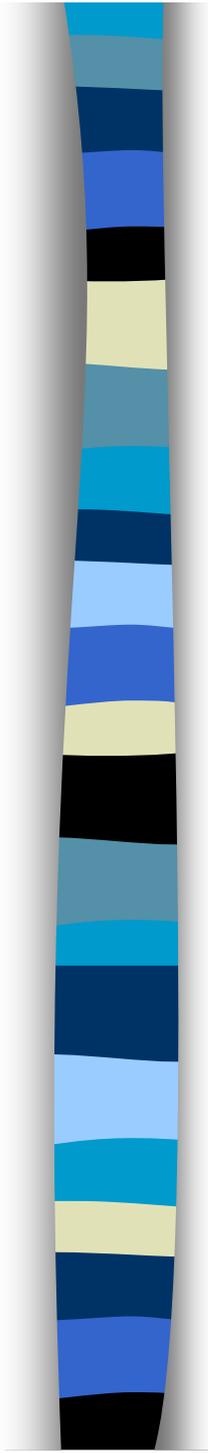
DOS JARRAS

- *Después de haberse perdido muchas horas en el desierto, Juan llegó a un oasis y se creyó salvado, pero los guardianes del agua sólo dejaron satisfacer su sed con la siguiente condición: Juan debería recoger exactamente 4 litros de agua con la ayuda de un vasija de 3 litros y otra de 5. ¿Cómo lo hace?*



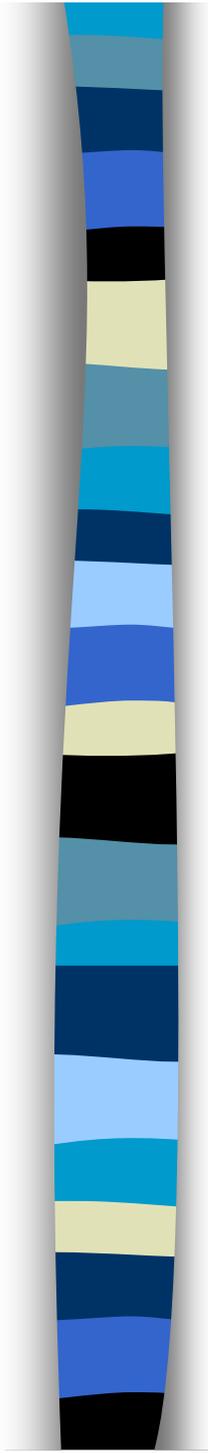
- Calabría, M. (1990): “**Juegos Matemáticos**”. Edit. Akal. Madrid. Pág.8.

- 
- a) ¿Qué harías para medir exactamente 6 litros de agua con la sólo ayuda de dos vasijas una de 9 y otra de 4 litros?
 - b) ¿Qué harías para medir exactamente 7 litros de agua sí sólo dispones de dos vasijas, una de 9 litros de agua y otra de 5 litros?
 - En cada caso explicar las estrategias realizadas.



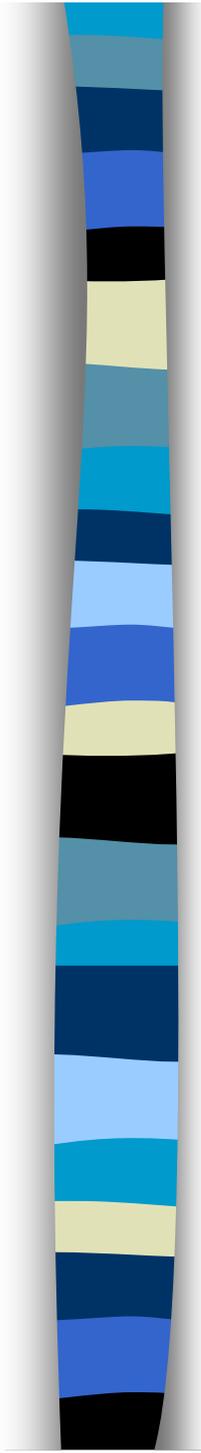
DOMINÓS, BARAJAS, JUEGOS DE TABLERO

- Otra forma de utilizar el valor motivador del juego en la clase de matemáticas es usarlo para reforzar automatismos o en recuperación. Se pueden adquirir barajas, dominós y juegos de tablero adecuados para trabajar con números decimales, fracciones, ecuaciones, etc.



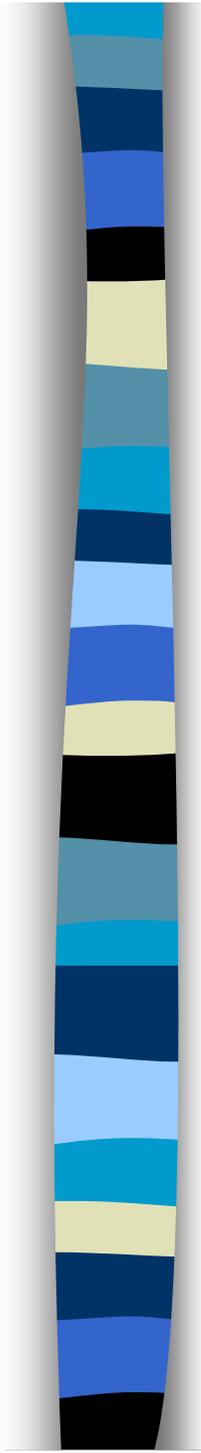
DOMINÓS, BARAJAS, JUEGOS DE TABLERO

- También es posible fabricarlos en el "taller de matemáticas". Vamos a suponer que queremos fabricar un dominó que sirva para trabajar con las funciones trigonométricas. El material necesario es una simple cartulina de donde recortar las fichas o fichas de madera y pegatinas. Se juega con las mismas reglas del juego clásico del dominó.



DOMINÓS, BARAJAS, JUEGOS DE TABLERO

- Tendremos que seleccionar 7 valores, por ejemplo:
- $0, 1, 1/2, \sqrt{3}/2, -1, -1/2, \sqrt{2}/2$
- Para cada uno de los valores buscaremos siete formas de expresarlos. Por ejemplo:
- $1/2 = \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \cos 300^\circ$
 $= \sin 150^\circ = \cos \pi/3 = \sin \pi/6.$



DOMINÓS, BARAJAS, JUEGOS DE TABLERO

- El proceso de diseño de estos juegos clásicos es ya de por si interesante.
- Diseñar un juego

Bibliografía

1. BELL, A. W. (1976): **The Learning of General Mathematical Strategies**, Univ. Nottingham.
2. BORRÁS, E y MORATA, M. (1989): **Generación y resolución de problemas: dos ejemplos**. Rev. SUMA nº 4, 15-20.
3. Brihuega, J; Molero, M; Salvador, A. (1996): **“Didáctica de las Matemáticas”**. Edit. Complutense Madrid.
4. GUZMÁN, M. (1989): **Juegos y matemáticas** Revista SUMA, nº4, 61-64.
5. HERNÁN, F. (Grupo Cero de Valencia) (1985): **Investigaciones** "Nueva Revista de Enseñanzas Medias", nº 7.
6. MERCHÁN F. (1994): **El salto de la rana**. Revista "Suma" nº 14-15, 50-59.
7. MORATA, M. (1994): **Los Juegos en la Educación Matemática**, taller de "Matemáticas y Coeducación. Jornadas sobre Matemáticas y Coeducación", Ed. OECOM "Ada Byron". Madrid.
8. VANNIER, E. y CHAUVEAU, P. (1979): **Como jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo**. Ed. Altalena. Madrid.