Recursos para el aula. El número de oro

Adela Salvador

Universidad Politécnica de Madrid

El número de oro. Esquema

- El número de oro está en todas partes
- Primer número irracional
- ¿Qué es? Es una proporción
- Propiedades aritméticas del número de oro
- Historia del número de oro
- El número de oro en Geometría
- Sucesión de Fibonacci
- El número de oro en la música
- Estudios armónicos
- Referencias
- Talleres

El número de oro está en todas partes

El número de oro está en todas partes

El número áureo está en todas partes: en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, caracoles...

- Sucesión de Fibonacci
- La Naturaleza
- Música
- **Veremos las Matemáticas como fuente de inspiración en el arte: pintura, arquitectura, escultura, ingeniería, diseño gráfico, música ...**

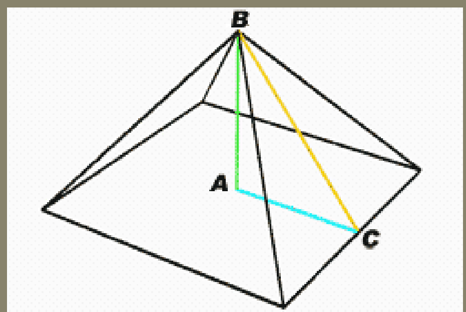
El número de oro está en todas partes: En el arte

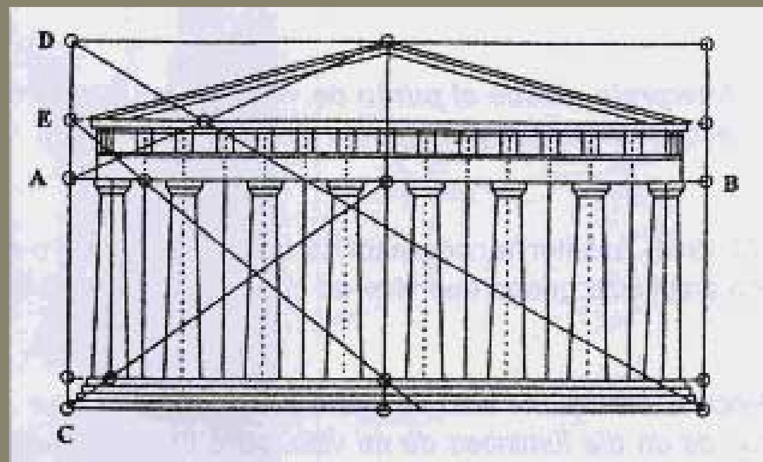
- Egipto:
  - Pirámide de Keops:
    - ϕ = apotema / mitad del lado de la base
  - Tumba de Ramses IV
  - Tumba de Tutamkamon
- Grecia:
  - Estatuas de Policleto
  - Partenón
  - Capitel Jónico
  - Vasos griegos
- Arte gótico
- Renacimiento
- Le Corbusier

El Número de Oro en la arquitectura

- Relaciones arquitectónicas en las Pirámides de Egipto.

La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas





El número de oro está en todas partes: En la naturaleza

- En la naturaleza, aparece la proporción áurea en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros y la formación de caracolas.

¿Qué es? Es una proporción

Primer número irracional

- Primer número irracional.
- Pitágoras
- Sólo para iniciados
- Clave de la armonía viva

¿Qué es?

Nombres: El ***número de oro***, ***número dorado***, ***sección áurea***, ***razón áurea***, ***razón dorada***, ***media áurea***, ***proporción áurea*** y ***divina proporción***,

Representado por letra griega Φ, φ (fi) en honor al escultor griego Fidias.

Se trata de un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción.

Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en las partes de un cuerpo, y en la naturaleza etc.

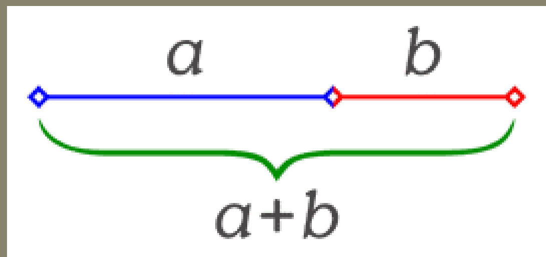
¿Qué es?

- **Es una proporción: La "Divina Proporción" de Leonardo**
- **Altura total / altura del ombligo al suelo = altura del ombligo al suelo / resto**
- **Altura total/Altura hasta los dedos**
- **Nacimiento del pelo hasta el mentón / Entrecejo al mentón**
- **Nariz al mentón / Comisura de los labios al mentón**
- **Estadísticas de Zeysing hasta los 21** años
- **Medir cada persona a otra, y calcular su proporción**

¿Qué es?

Definición

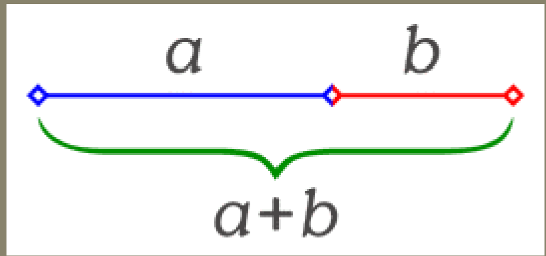
La razón entre la totalidad del segmento y una parte (la mayor) sea igual a la razón entre esta parte y la otra



Un punto divide a un segmento en sección áurea si uno de los segmentos es media proporcional entre el total y el otro.

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

¿Qué es?



- En $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, hacemos: $a/b = x$, $b = 1$, $a = x \Rightarrow (x+1)/x = x = \phi \Rightarrow x^2 = x + 1$
- Resolver la ecuación de segundo grado: $x = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638\,117\,720\,309\,179\,805\ldots$$

Es una proporción

- No se sabe si la armonía, la proporción armónica, la *divina proporción* se debe a algo natural o es algo aprendido.

Propiedades aritméticas del número de oro

Propiedades aritméticas

- 1) Φ es el único número positivo tal que:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Si ϕ = 1,61803… entonces ϕ^2 = 2,61803…

- 2) $\Phi - 1 = 1/\Phi$. Deducir
- **Luego $1/\phi$ = 0,61803…**
- **¡¡El número de oro, su cuadrado y su inverso tienen las mismas, infinitas, cifras decimales!!!**
- 3) $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ Deducir

Representación mediante raíces anidadas

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$$

Representación mediante raíces anidadas

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Si se llama "L" al valor del límite, fácilmente se comprueba que se verifica la ecuación: $\sqrt{1+L} = L$

Elevando al cuadrado los dos miembros y pasando todos los términos a la izquierda se obtiene la ecuación final

$$L^2 - L - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación es nuestro número de oro (la otra es negativa).

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Representación mediante fracciones continuas

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Esta iteración es la única donde sumar es multiplicar y restar es dividir.

Es también la más simple de todas las fracciones continuas y la que tiene la convergencia más lenta.

Demostrarlo

Representación mediante fracciones continuas

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

- Sea "M" el valor del límite. Se comprueba la relación $1 + \frac{1}{M} = M$
- Quitando denominadores y pasando todos los términos a la izquierda se obtiene la ecuación $M^2 - M - 1 = 0$

cuya solución positiva es el número de oro.

Historia del número de oro

Historia del número de oro

- Existen numerosos textos que sugieren que el número áureo se encuentra como proporción en ciertas estelas babilonias y asirias de alrededor de 2000 a. C.
- Sin embargo no existe documentación histórica que indique que el número áureo fue usado conscientemente por los arquitectos o artistas en la construcción de las estelas.

- También es importante notar que cuando se mide una estructura complicada es fácil obtener resultados curiosos si se tienen muchas medidas disponibles.
- Además para que se pueda considerar que el número áureo está presente, las medidas deben tomarse desde puntos relativamente obvios del objeto y este no es el caso de los elaborados deducciones que defienden la presencia del número áureo.
- Por todas estas razones Mario Livio concluye que es muy improbable que los babilonios hayan descubierto el número áureo.

Historia del número de oro. Euclides

- El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue **Euclides** (c. 300 - 265 a. C.), en ***Los Elementos***.
- Lo definió de la siguiente manera:

"Se dice que una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor."

- Euclides demostró también que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir es irracional.

- **Platón** (c. 428-347 a. C.) vivió antes de que Euclides estudiara el número áureo, sin embargo, a veces se le atribuye el desarrollo de teoremas relacionados con el número áureo debido que el historiador griego Proclo en *Un comentario sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides*, escribió:

"Eudoxo... multiplicó el número de teoremas relativos a la sección a los que Platón dio origen."

- Se interpretó la palabra sección (**τομή**) como la sección áurea. Sin embargo a partir del siglo XIX esta interpretación ha sido motivo de gran controversia y muchos investigadores han llegado a la conclusión de que la palabra *sección* no tuvo nada que ver con el número áureo. No obstante, Platón consideró que los números irracionales, descubiertos por los pitagóricos, eran de particular importancia y la llave a la física del cosmos. Esta opinión tuvo una gran influencia en muchos filósofos y matemáticos posteriores, en particular los neoplatónicos.

- A pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, **Platón** se dio a la tarea de estudiar el origen y la estructura del cosmos, cosa que intentó usando los cinco **sólidos platónicos**, construidos y estudiados por Teaetus.
- En particular, combinó la idea de Empédocles sobre la existencia de cuatro elementos básicos de la materia, con la teoría atómica de Demócrito, para Platón cada uno de los sólidos correspondía a uno de las partículas que conformaban cada uno de los elementos.
- Según Platón, la tierra estaba asociada al cubo, el fuego al tetraedro, el aire al octaedro, el agua al icosaedro, y finalmente el Universo como un todo, estaba asociado con el dodecaedro.

Historia del número de oro. Pacioli

- En 1509 el matemático y teólogo **Luca Pacioli** publica su libro ***De Divina Proportione*** (La Proporción Divina), en el que plantea **cinco** razones por las que considera apropiado **considerar divino al número áureo**:

1. La **unicidad**; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.
2. El hecho de que esté definido por **tres** segmentos de recta, Pacioli lo asocia con la Trinidad.
3. La **inconmesurabilidad**; para Pacioli la inconmesurabilidad del número áureo, y la inconmesurabilidad de Dios son equivalentes.
4. La **autosimilaridad** asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.
5. Según Pacioli, de la misma manera en que Dios dio ser al Universo a través de la **quinta esencia**, representada por el dodecaedro; el número áureo dio ser al **dodecaedro**.

Historia del número de oro. Durero

- En 1525, Alberto Durero publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas* donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea, que se conoce como "**espiral de Durero**".

Historia del número de oro. Kepler

- El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), desarrolló un modelo platónico del Sistema Solar utilizando los sólidos platónicos, y se refirió al número áureo en términos grandiosos:

"La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa"

Johannes Kepler en *Mysterium Cosmographicum* (El Misterio Cósmico).

- El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán **Martin Ohm**, (hermano del célebre físico Georg Simon Ohm), en la segunda edición de 1835 de su libro *Die Reine Elementar Matematik* (Las Matemáticas Puras Elementales).
- Ohm escribe en una nota al pie:

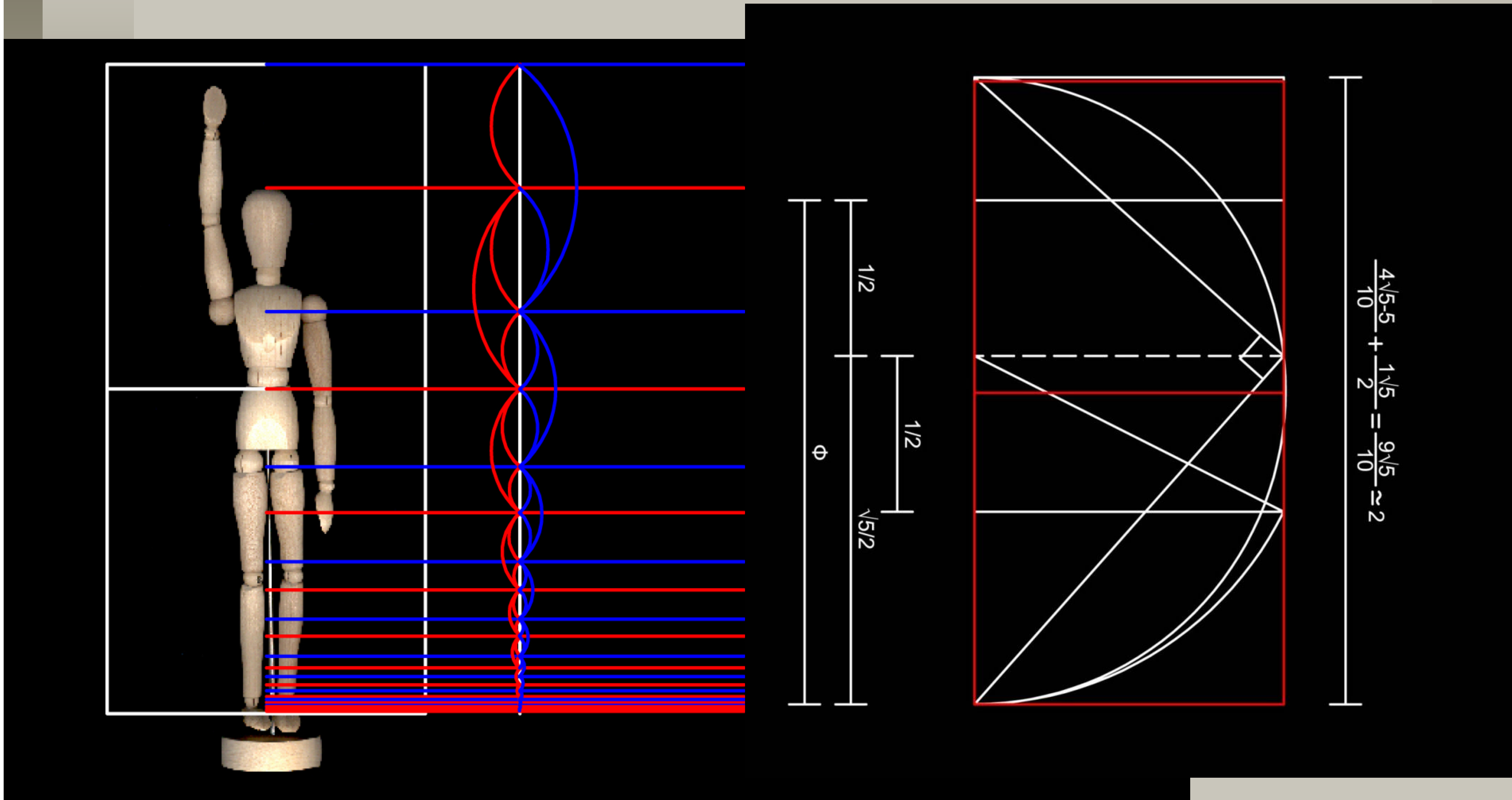
"Uno también acostumbra llamar a esta división de una línea arbitraria en dos partes como éstas la sección dorada."

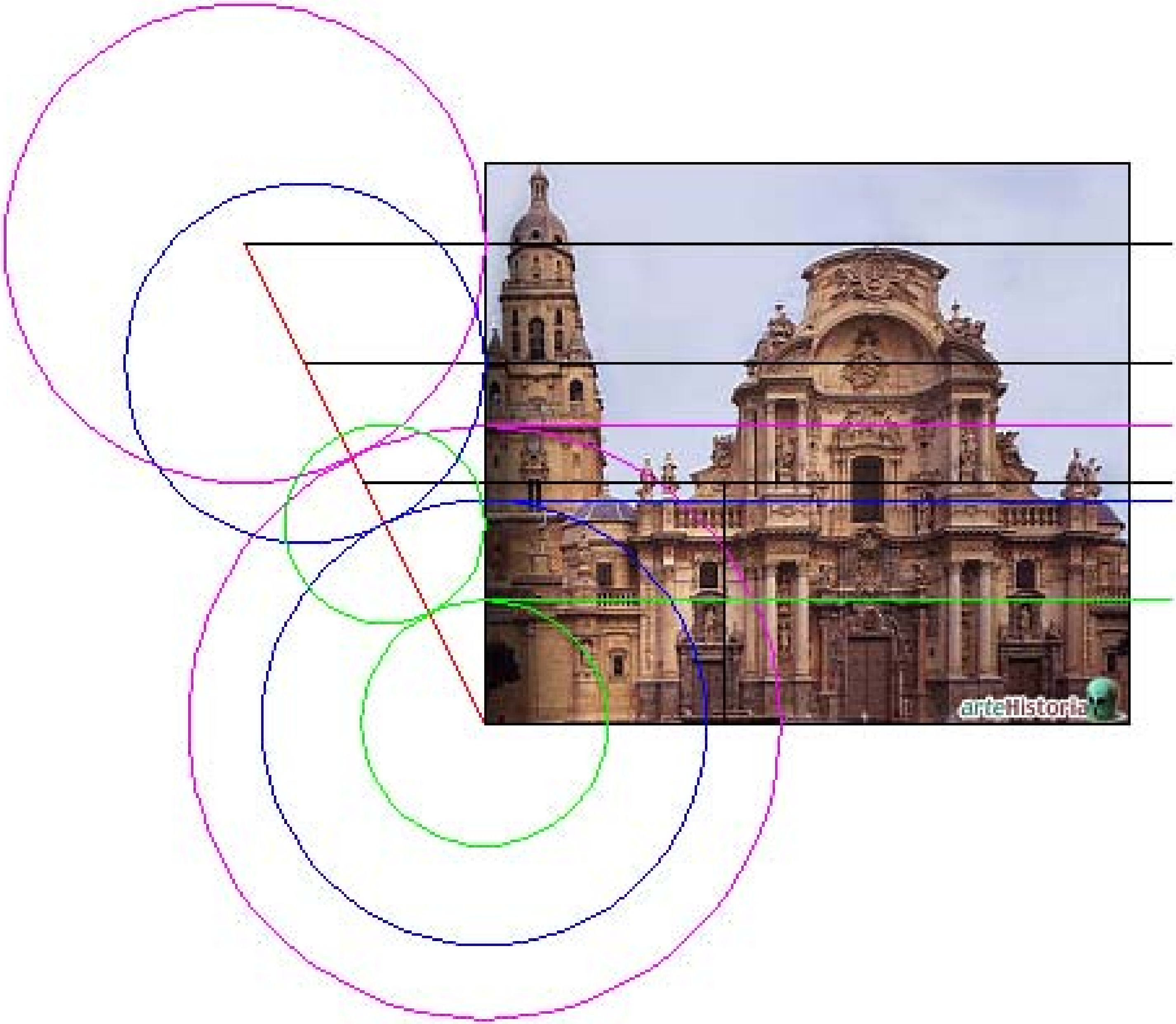
- A pesar de que la forma de escribir sugiere que el término ya era de uso común para la fecha, el hecho de que no lo incluyera en su primera edición sugiere que el término pudo ganar popularidad alrededor de 1830.

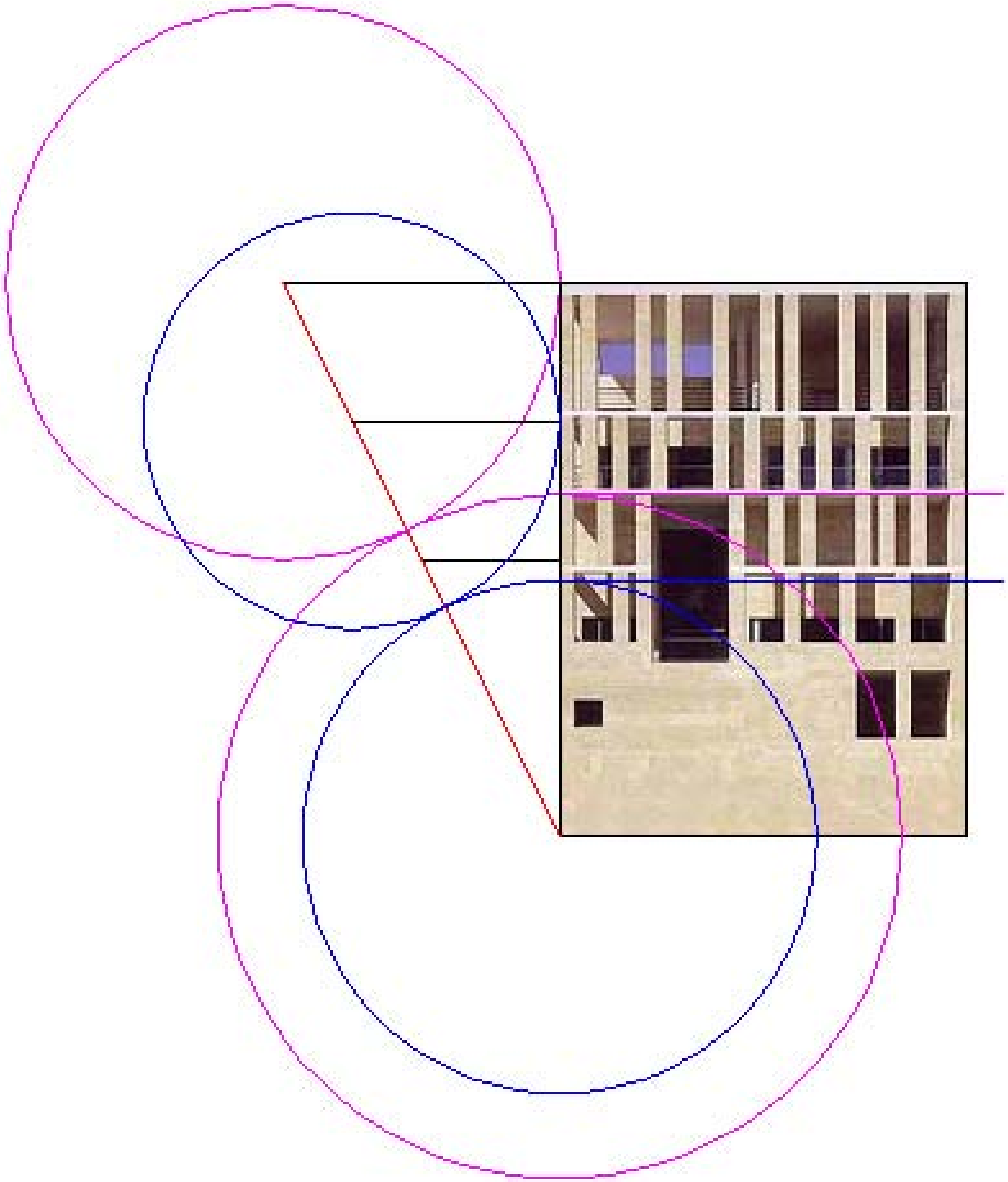
- En los textos de matemáticas que trataban el tema, el símbolo habitual para representar el número áureo fue **τ** del griego **τομή** que significa corte o sección.
- Sin embargo, la moderna denominación **Φ** ó **φ**, la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en honor a **Fidias** ya que ésta era la primera letra de su nombre **Φειδίας**. Este honor se le concedió a Fidias por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas, propiedad que ya por entonces se le atribuía también al número áureo.
- Mark Barr y Schooling fueron responsables de los apéndices matemáticos del libro *The Curves of Live*, de Sir Theodore Cook.

Algunos estudios áureos

Modulor de Le Corbusier







Número de oro en Geometría

El número de oro en Geometría

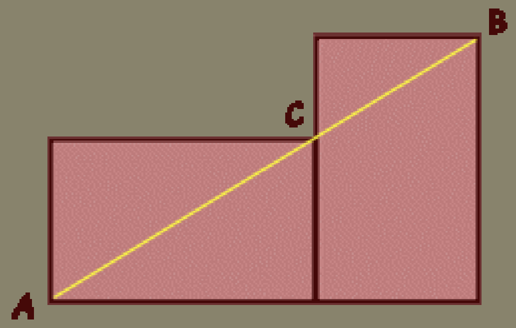
- Rectángulo áureo
- Construcción de Euclides
- Espiral logarítmica
- Triángulo áureo
- Estrella pitagórica
- Polígonos
  - Pentágono regular: ϕ = diagonal / lado
    - Nudo áureo: Dem
  - Decágono regular: ϕ = radio / lado
- Poliedros regulares: Dodecaedro

Rectángulo áureo

- Definición
- Estudio
- Transformación geométrica
- Espiral logarítmica
- Se reproduce la semejanza la quitar (o añadir) un cuadrado
- Estudio armónicos de figuras

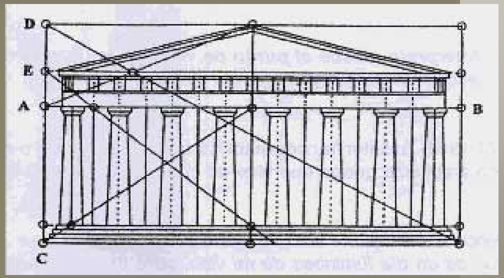
Rectángulo áureo

- Obtener un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea.
- Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura, la diagonal AB pasa por el vértice C.



Rectángulo áureo

- A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que más se han utilizando en arquitectura: Partenón, pirámides egipcias y diseño: Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestro carnet de identidad y también en las cajetillas de tabaco.
- Medir objetos y analizar si son rectángulos áureos



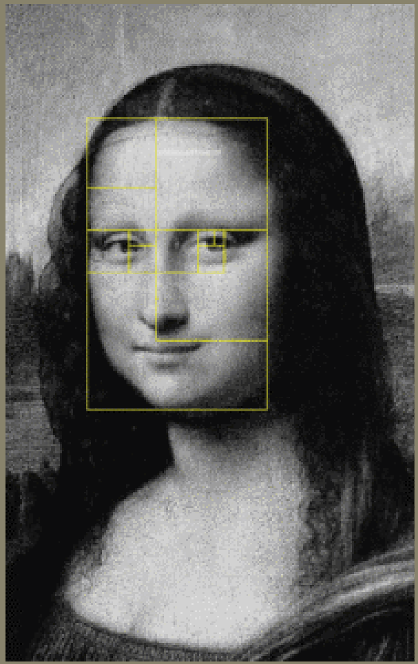
El Número de Oro en la Pintura

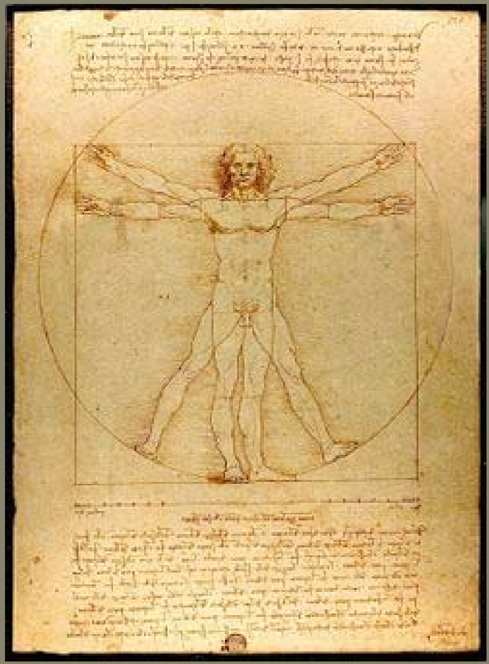
Leonardo Da Vinci lo utilizó para definir todas las proporciones fundamentales en su pintura:

• La **última cena**: dimensiones de la mesa, disposición de Cristo y los discípulos sentados, las proporciones de las paredes y ventanas al fondo.

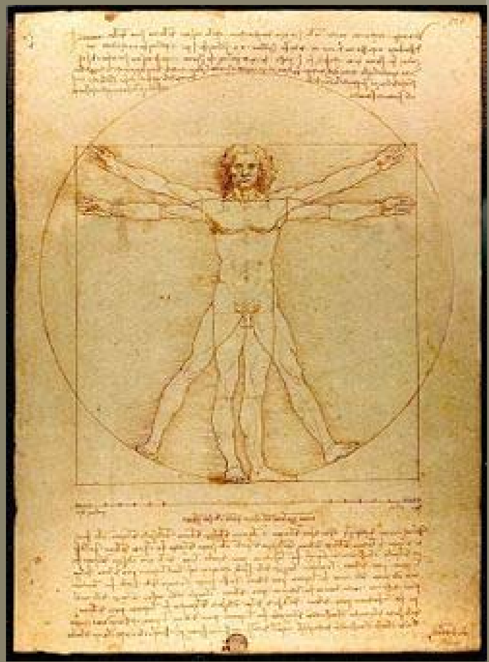
• Utilizó rectángulos áureos para plasmar el rostro de **Mona Lisa**.

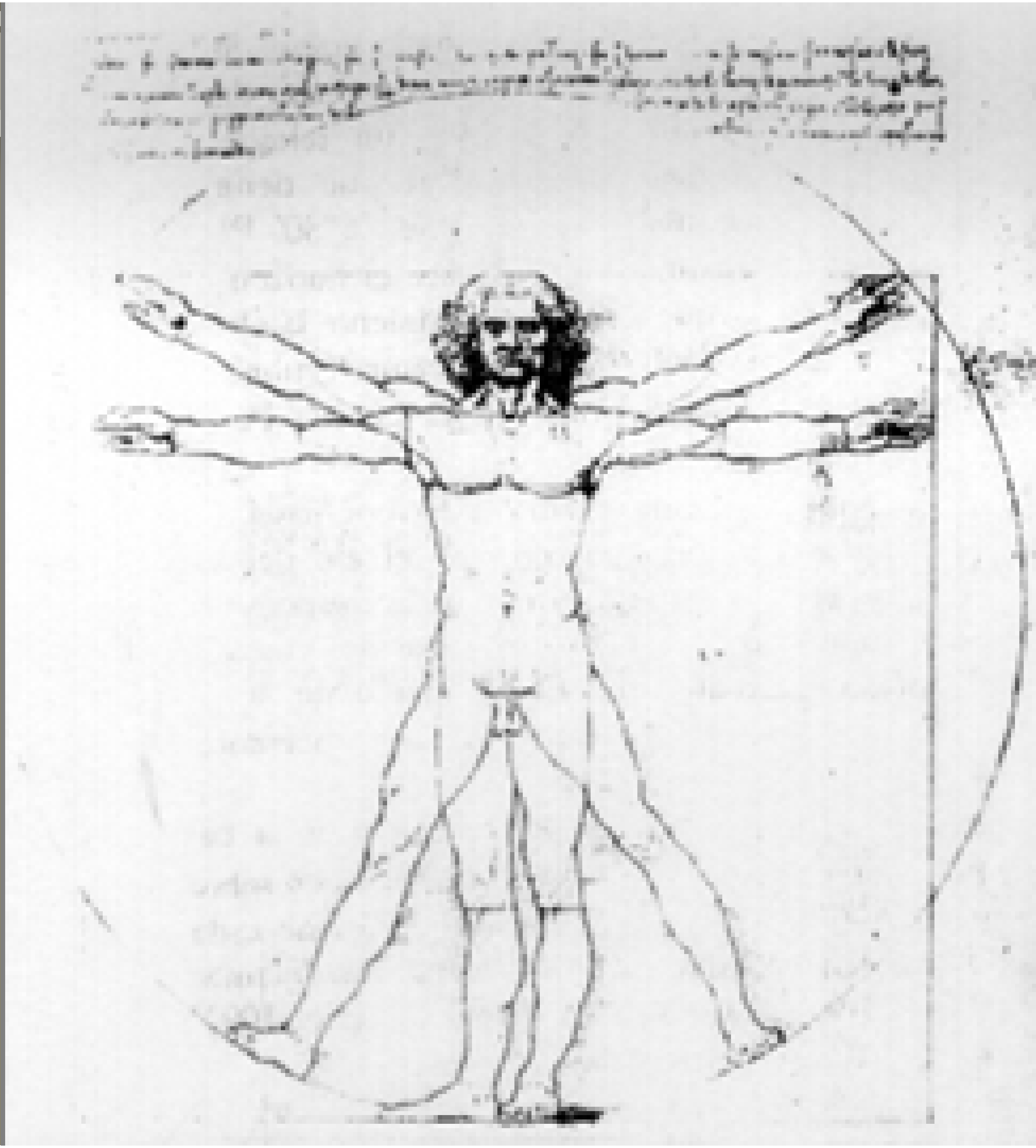
• Las relaciones en el **hombre de Vitruvio**



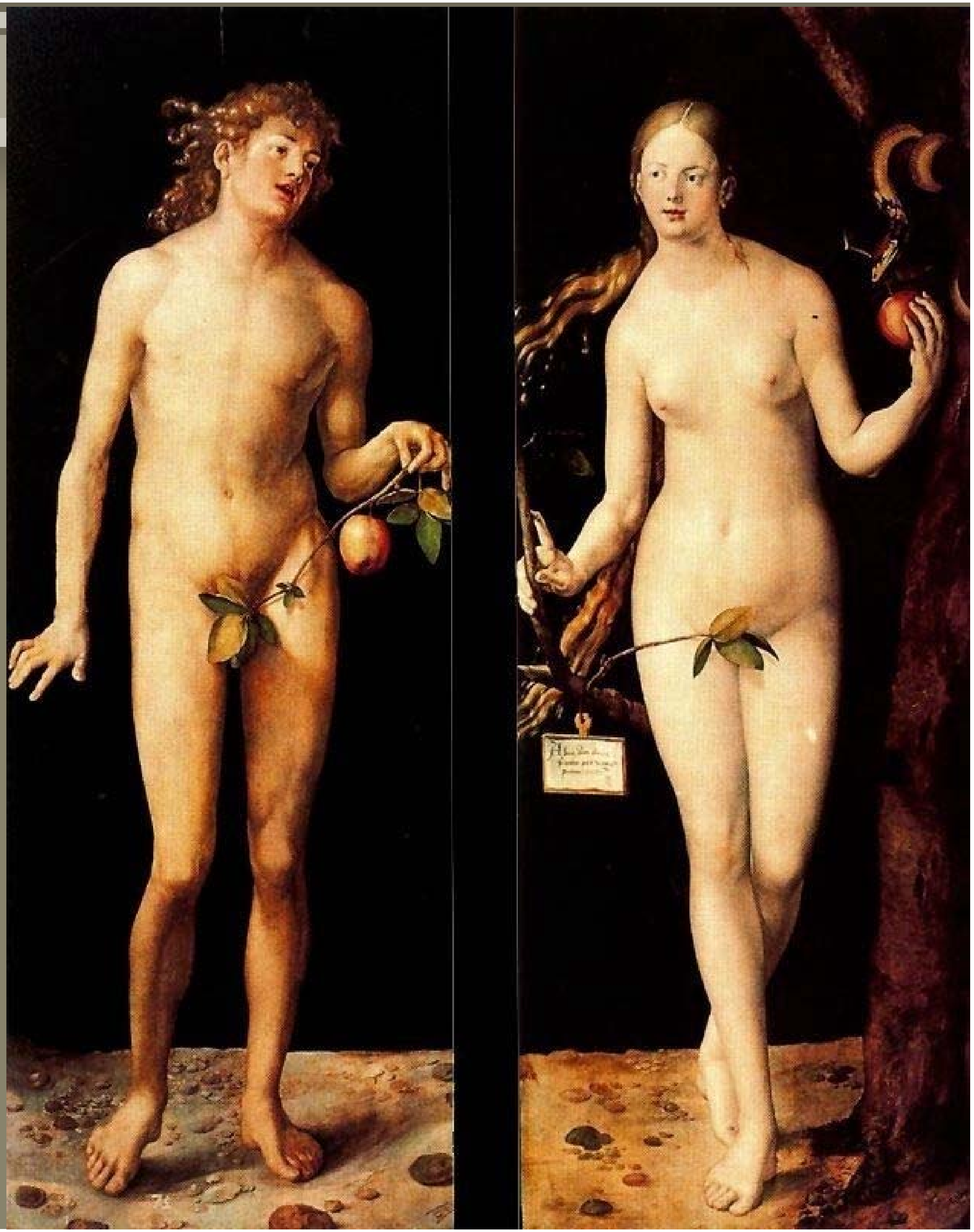


- En la “Divina Proporción” se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas.
- En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas.
- Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia.
- El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco.

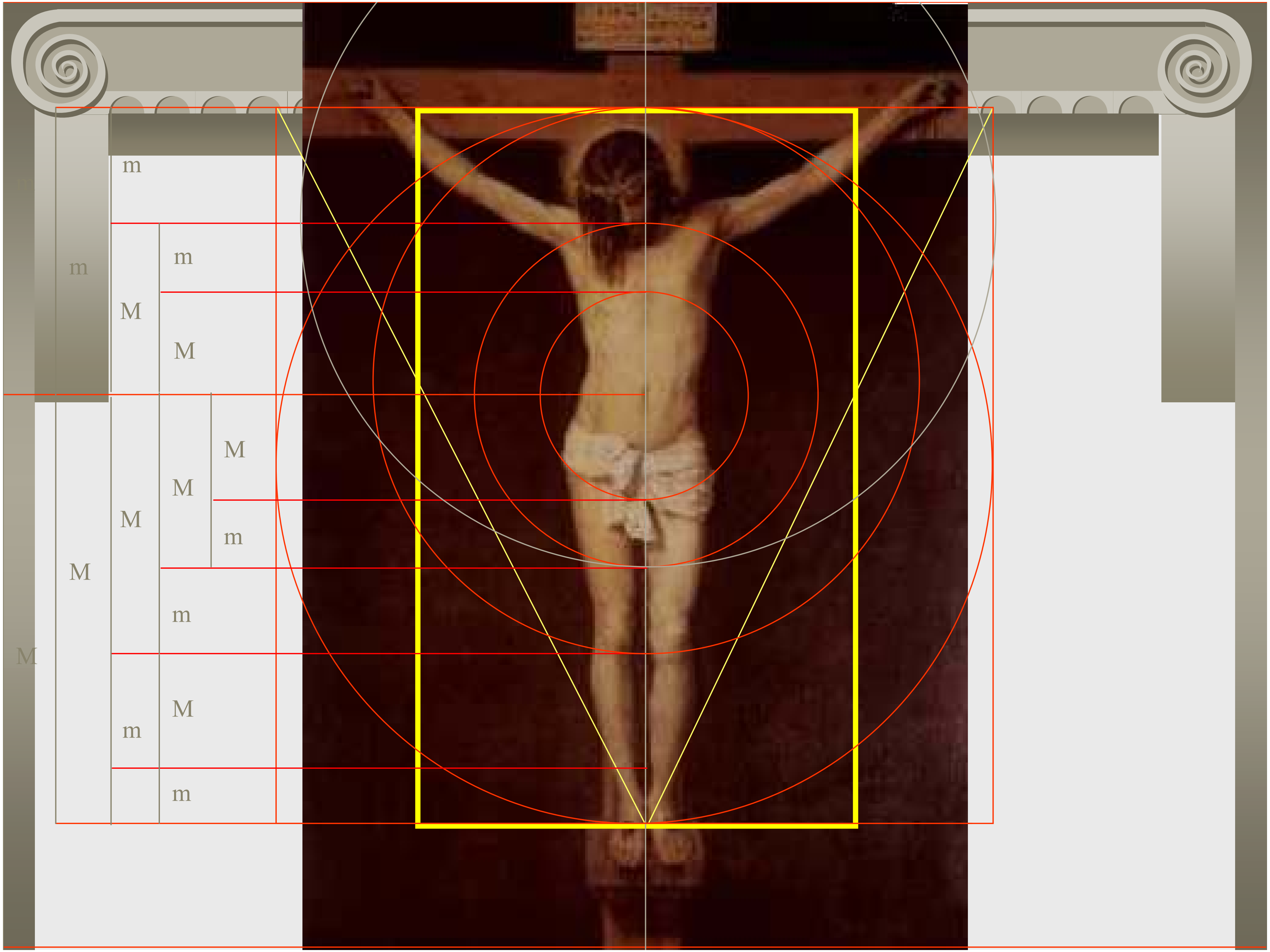




- En la pintura de Durero

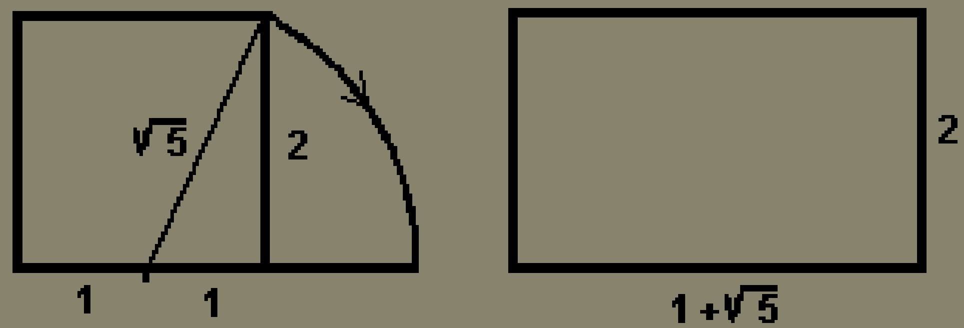


- En la escultura. Apolo de Belvedere.
- Los lados del rectángulo en el cual está idealmente inscrita la estatua del Apolo de Belvedere están relacionados según la sección áurea, es decir, con una proporción de 1:1,618.


m
m
m
M
M
M
M
M
m
M
m
M
M
m
m

Construcción de Euclides

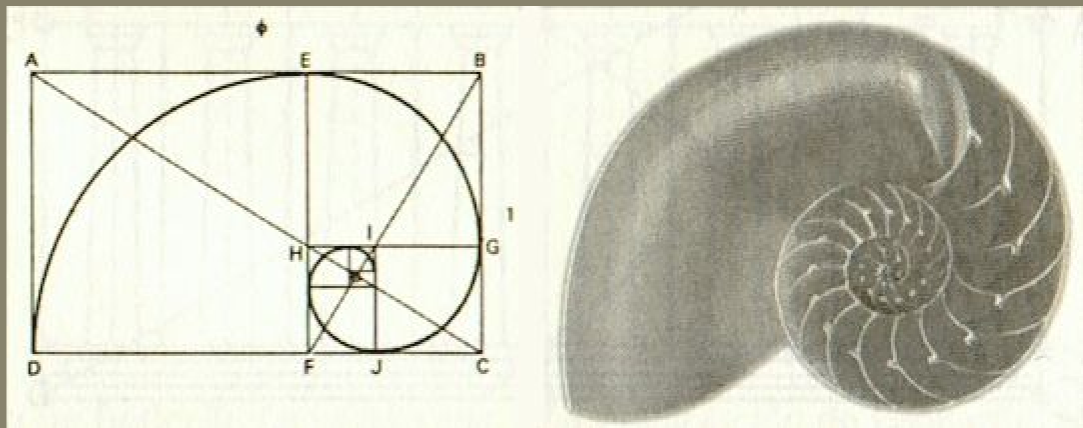
- Euclides en su proposición 2.11 de *Los elementos* obtiene la siguiente construcción:
- Traza el cuadrado de vértices *ABCD*. Sea *G* el punto medio de *AB*. Con centro en *G* y radio *GC* se obtiene el punto *E* de la recta *AB*, y por lo tanto si *GB* = 1, entonces *AE* = ¿¿?¿



- Traza el rectángulo *AEFD*. Comprueba que es áureo.
- Los rectángulos *AEFD* y *BEFC* son semejantes, de modo que éste último es asimismo un rectángulo áureo.

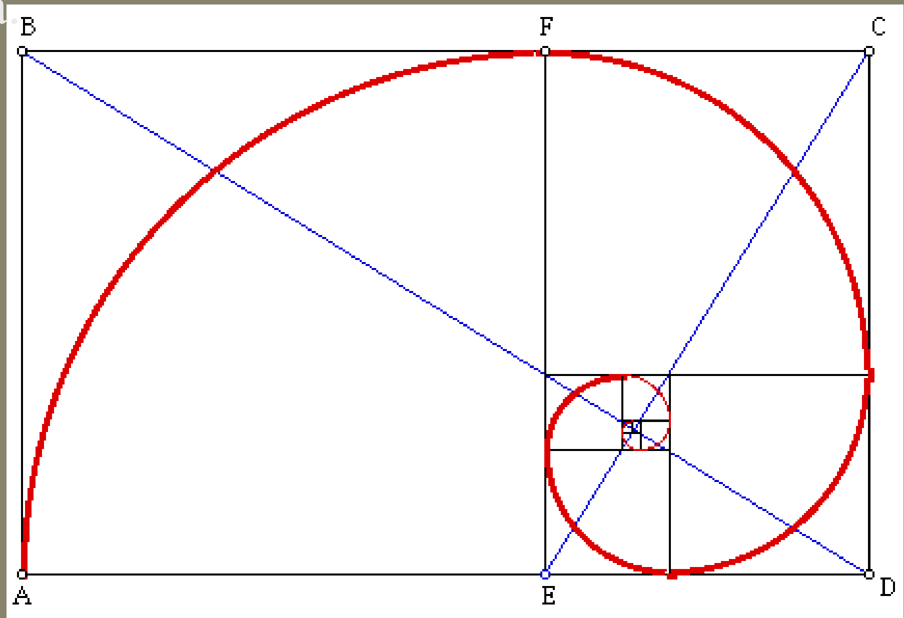
El Número de Oro: Espirales

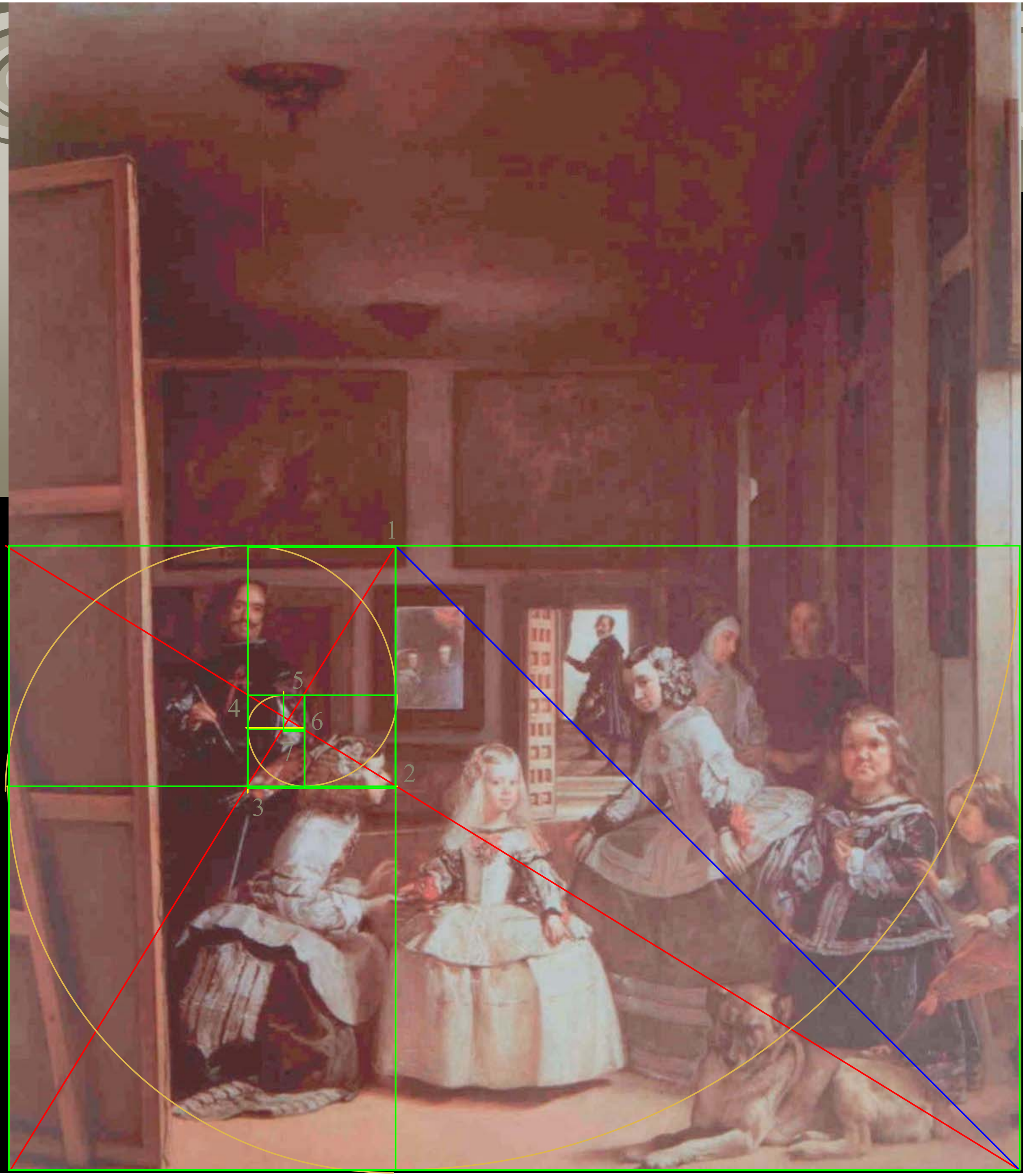
Se construye una espiral logarítmica con un rectángulo áureo (es decir, un rectángulo cuyos lados están en la proporción de oro). Podemos entonces con un compás proyectar un lado y trazar una línea perpendicular. Así tenemos un cuadrado y otro rectángulo áureo. Repetimos esto unas cuantas veces y finalmente unimos los lados con el compás



El número de oro: Espirales

Si tomamos un rectángulo áureo *ABCD* y le sustraemos el cuadrado *AEFD* cuyo lado es el lado menor AB del rectángulo, resulta que el rectángulo *EDCF* es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado *FCGH*, el rectángulo resultante *HGED* también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice *O* de una espiral logarítmica.





La luz

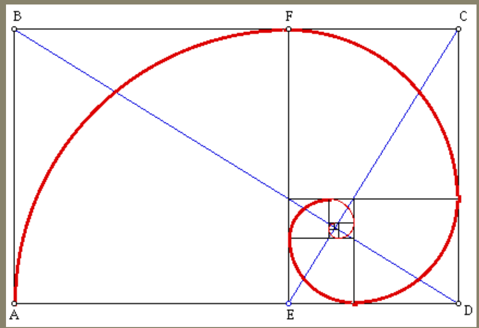
Espiral logarítmica

Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas.

Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética).

J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

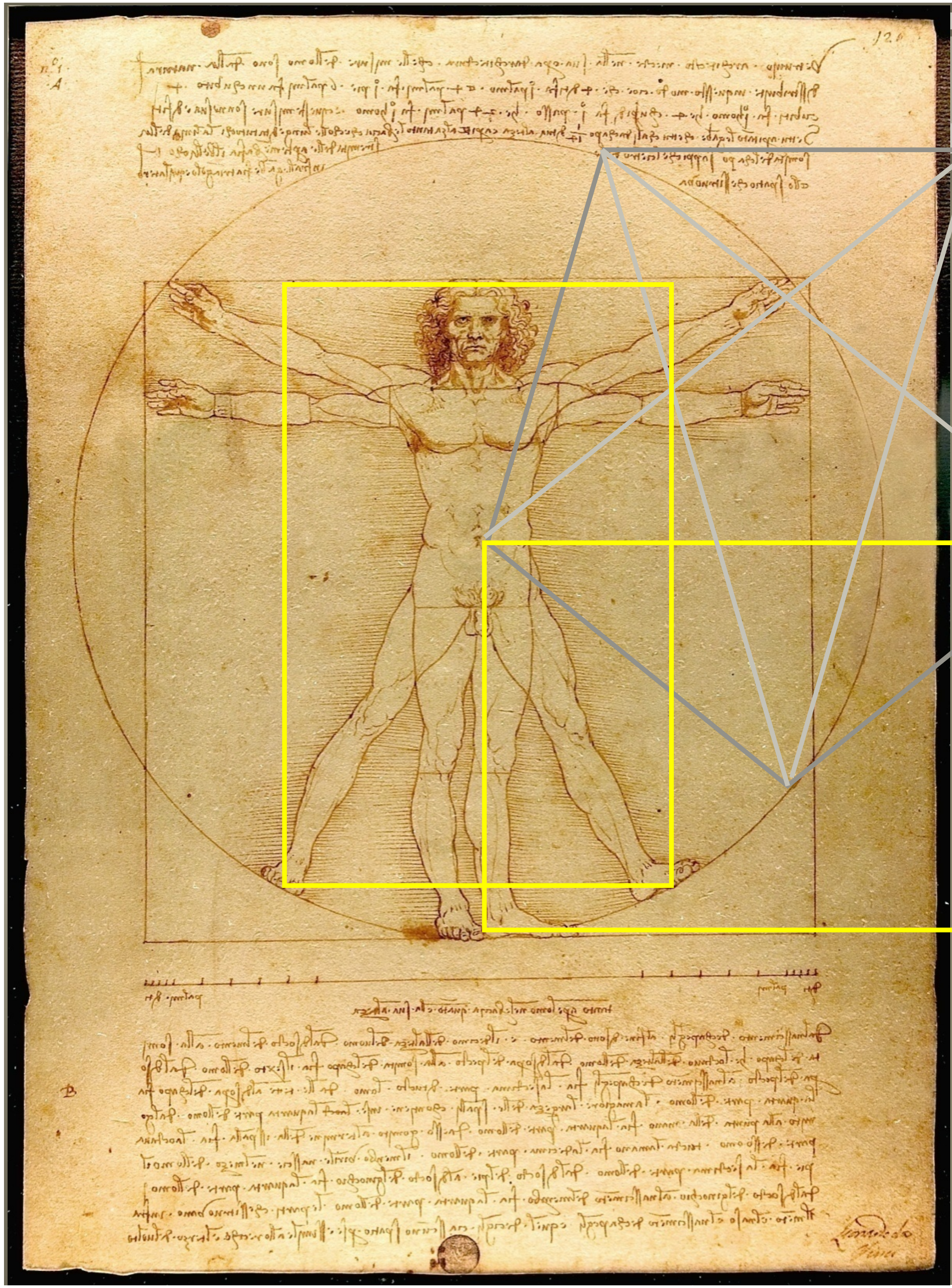
Estudio de las transformaciones geométricas: giros, homotecias, semejanzas….



Espiral logarítmica

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

Estudio de la concha del nautilus



-Una palma es la anchura de cuatro dedos.
-Un pie es la anchura de cuatro palmas.
-Un antebrazo es la anchura de seis palmas.
-La altura de un hombre son cuatro antebrazos (24 palmas).
-Un paso es igual a cuatro antebrazos.
-La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.
-La distancia entre el nacimiento del pelo y la barbilla es un décimo de la altura de un hombre.
-La altura de la cabeza hasta la barbilla es un octavo de la altura de un hombre.
-La distancia entre el nacimiento del pelo a la parte superior del pecho es un séptimo de la altura de un hombre.
-La altura de la cabeza hasta el final de las costillas es un cuarto de la altura de un hombre.
-La anchura máxima de los hombros es un cuarto de la altura de un hombre.
-La distancia del codo al extremo de la mano es un quinto de la altura de un hombre.
-La distancia del codo a la axila es un octavo de la altura de un hombre.
-La longitud de la mano es un décimo de la altura de un hombre.
-La distancia de la barbilla a la nariz es un tercio de la longitud de la cara. -La distancia entre el nacimiento del pelo y las cejas es un tercio de la longitud de la cara.
-La altura de la oreja es un tercio de la longitud de la cara.

Lo que produce la belleza es la armonía de las partes del cuerpo entre sí y con el alma; porque la naturaleza ha dispuesto el cuerpo como un instrumento que debe estar en armonía con todas las necesidades de la vida. Al mismo tiempo es preciso que, mediante un debido acuerdo, el alma posea virtudes análogas a las cualidades del cuerpo, y que en ella la templanza corresponda a la salud, la prudencia a la sensibilidad, el valor al vigor y a la fuerza y la justicia a la belleza. La naturaleza nos suministra gérmenes de estas cualidades, pero es preciso desenvolverlas y perfeccionarlas mediante la cultura; las del cuerpo con la gimnasia y la medicina, las del alma con la educación y la filosofía.

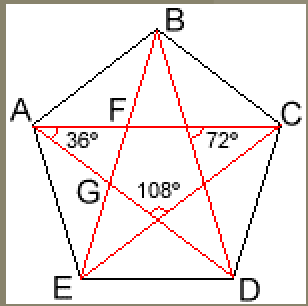
Platón, El Timeo

Triángulo áureo

- Buscar triángulos tal que $a/b = \phi$
- Ángulos: 36º, 72º, 108º
- Transformación geométrica
- Espiral logarítmica
- Relación con la estrella pitagórica

Pentágono, estrella y triángulo áureo

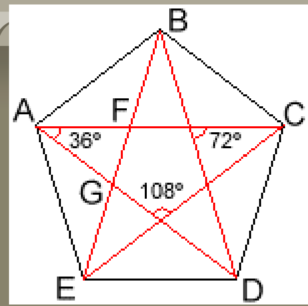
- Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales.
- En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36º, 72º y 108º. La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36.



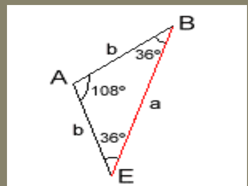
- Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos *ABE*, *ABF* y *AFG*. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional.
- Hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, que llamaremos: $BE=a$, $AB=AE=b$, $AF=BF=AG=c$ y $GF=d$.

Triáulo ABF

Pentágono, estrella y triángulo áureo

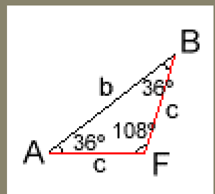


- Consideremos cada uno de estos triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno.
- Triángulo *ABE*



$$\frac{a}{\text{sen}108^{o}} = \frac{b}{\text{sen}36^{o}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}108^{o}}{\text{sen}36^{o}}$$

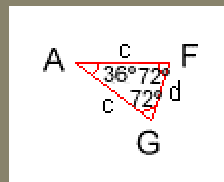
- Triángulo *ABF*



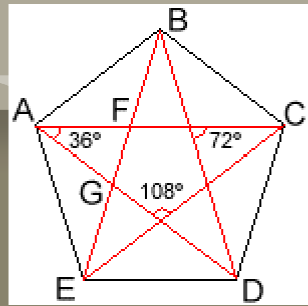
$$\frac{b}{\text{sen}108^{o}} = \frac{c}{\text{sen}36^{o}} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}108^{o}}{\text{sen}36^{o}}$$

- Triángulo *AFG*

$$\frac{c}{\text{sen}72^{o}} = \frac{d}{\text{sen}36^{o}} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{\text{sen}72^{o}}{\text{sen}36^{o}} = \frac{\text{sen}108^{o}}{\text{sen}36^{o}}$$



- Como 72º=180º-108º, se verifica que sen72º=sen108º.



Pentágono, estrella y triángulo áureo

- En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}=1{,}618033988\ldots$$

- Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.
- Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que $c=a-b$ y haciendo $b=1$

Pentágono, estrella y triángulo áureo

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\rightarrow a^2-a-1=0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.
- Como consecuencia, se verifica:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Estrella pitagórica

- Pentágono
- Construcción de un pentágono con una tira de papel
- La estrella. Penta alfa. Figura áurea por excelencia.
- Hermética

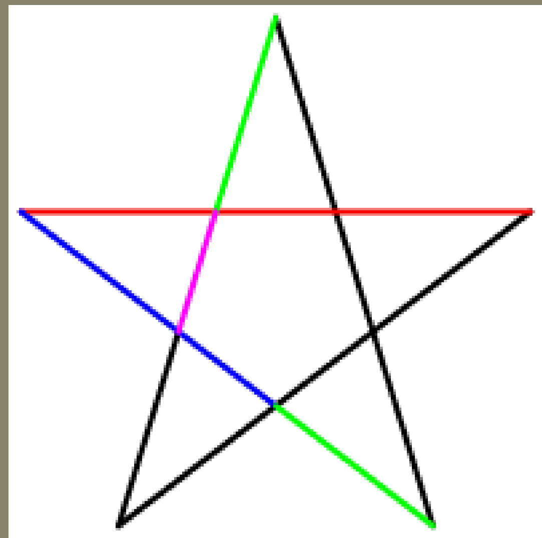
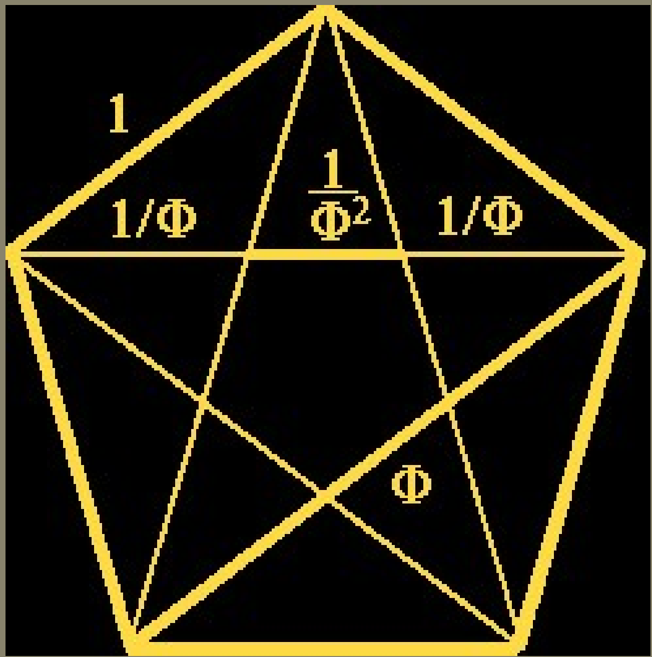


Foto: Pilar Moreno

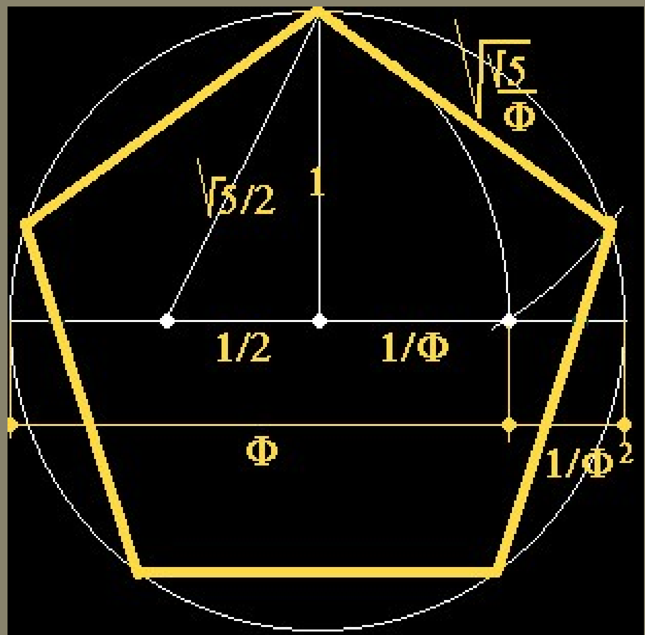
Pentágono regular

- Realiza un estudio completo del pentágono regular

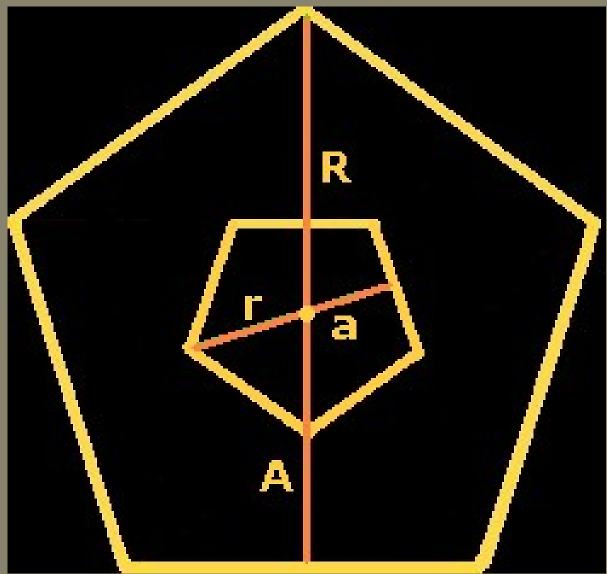


Pentágono regular

- Construcción del pentágono regular



Pentágono regular



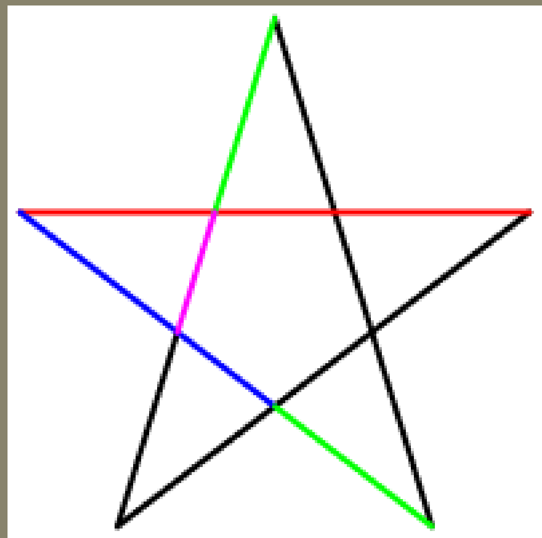
Pentágono regular

SEGÚN	5	Φ Y $3/4$	Φ	tan 54° Y Φ
RADIO MAYOR 0,85065080 L	$\sqrt{\frac{\sqrt5+5}{10}}\,L$	$\frac{2\sqrt{\frac34+\Phi}}{2+\Phi}\,L$	$\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ}{\Phi}\,L$
APOTEMA MAYOR 0,68819096 L	$\sqrt{\frac{2\sqrt5+5}{20}}\,L$	$\frac{\sqrt{\frac34+\Phi}}{\sqrt5}\,L$	$\frac{\Phi}{2}\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ}{2}\,L$
DIAGONAL MAYOR 1,53884176 L	$\sqrt5\sqrt{\frac{2\sqrt5+5}{20}}\,L$	$\sqrt{\frac34+\Phi}\,L$	$\frac{\Phi+2}{2}\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ\sqrt5}{2}\,L$
radio menor 0,32491969 L	$\frac{(\sqrt5-1)\sqrt{\frac{\sqrt5+5}{10}}}{\sqrt5+1}\,L$	$\frac{2\sqrt{\frac34+\Phi}}{\Phi^3\sqrt5}\,L$	$\frac{\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}}{\Phi^2}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ}{\Phi^3}\,L$
apotema menor 0,26286555 L	$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt5+5}{10}}}{\sqrt5+1}\,L$	$\frac{\sqrt{\frac{\frac34+\Phi}{5}}}{\Phi^2}\,L$	$\frac{\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}}{2\Phi}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ}{2\Phi^2}\,L$
diagonal menor 0,58778525 L	$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt5+5}{10}}}{\frac{1}{\sqrt5}+1}\,L$	$\frac{\sqrt{\frac34+\Phi}}{\Phi^2}\,L$	$\frac{\sqrt5\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}}{2\Phi}\,L$	$\frac{\tan 54^\circ\sqrt5}{2\Phi^2}\,L$
S ÁREA 1,72047740 L^2	$\frac{5\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)\sqrt{\frac{\sqrt5+5}{10}}}{4}\,L^2$	$\frac{\sqrt5}{2}\sqrt{\frac34+\Phi}\,L^2$	$\frac{5\Phi\sqrt{\frac{\Phi+2}{5}}}{4}\,L^2$	$\frac{5\tan 54^\circ}{4}\,L^2$

Pentágono regular

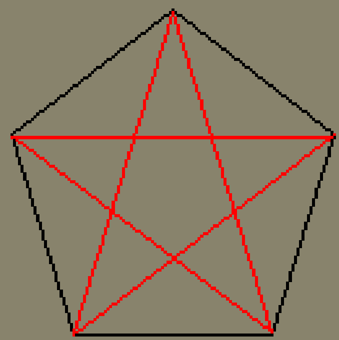
	R	A	D	r	a	d	S
RADIO MAYOR 0,85065080 L	–	$\frac{2A}{\Phi}L$	$\frac{2D}{\Phi\sqrt{5}}L$	$r\Phi^2 L$	$2a\Phi L$	$\frac{d2\Phi}{\sqrt{5}}L$	$\frac{4S}{5\Phi}L$
APOTEMA MAYOR 0,68819096 L	$\frac{\Phi R}{2}L$	–	$\frac{D}{\sqrt{5}}L$	$r\left(\Phi^2-\frac{1}{2}\right)L$	$a\Phi^2 L$	$\frac{d\Phi^2}{\sqrt{5}}L$	$\frac{2S}{5}L$
DIAGONAL MAYOR 1,53884176 L	$(R+A)L$	$(A+R)L$	–	$\frac{r\Phi^3\sqrt{5}}{2}L$	$a\Phi^2\sqrt{5}L$	$d\Phi^2 L$	$\frac{2S}{\sqrt{5}}L$
radio menor 0,32491969 L	$\frac{R}{\Phi^2}L$	$\left(\frac{A}{\Phi^2-\frac{1}{2}}\right)L$	$\left(\frac{D}{\Phi^3+\frac{1}{2}}\right)L$	–	$\frac{2a}{\Phi}L$	$\frac{2d}{\Phi\sqrt{5}}L$	$\frac{4S}{5\Phi^3}L$
apotema menor 0,26286555 L	$\frac{R}{2\Phi}L$	$\frac{A}{\Phi^2}L$	$\left(\frac{D}{\Phi^4-1}\right)L$	$\frac{\Phi r}{2}L$	–	$\frac{d}{\sqrt{5}}L$	$\frac{2S}{5\Phi^2}L$
diagonal menor 0,58778525 L	$\frac{R\sqrt{5}}{2\Phi}L$	$\frac{A\sqrt{5}}{\Phi^2}L$	$\frac{D}{\Phi^2}L$	$(r+a)L$	$(a+r)L$	–	$\frac{2S}{\Phi^2\sqrt{5}}L$
S ÁREA 1,72047740 L^2	$\frac{5R\Phi}{4}L^2$	$\frac{5A}{2}L^2$	$\frac{D\sqrt{5}}{2}L^2$	$\frac{5r\Phi^3}{2}L^2$	$\frac{a5\Phi^2}{2}L^2$	$\frac{d\left(\sqrt{5}+\frac{5}{2}\right)}{\Phi}L^2$	–

Estrella pitagórica

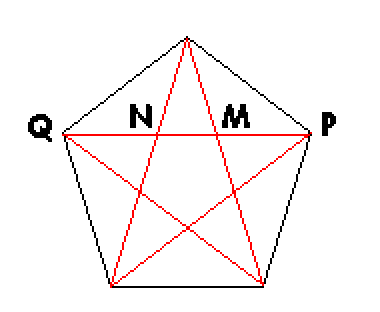


Estrella pitagórica

- La relación entre la diagonal del pentágono y su lado es el número de oro:

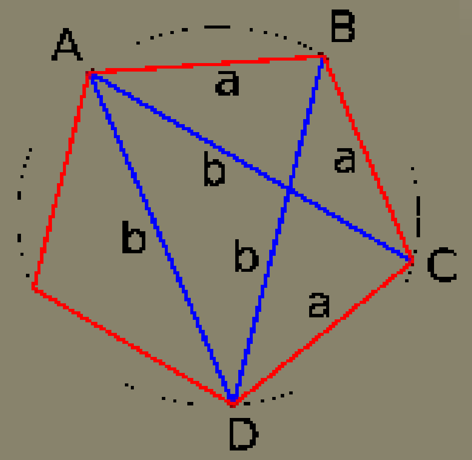


- Los segmentos *QN*, *NP* y *QP* están en proporción áurea:



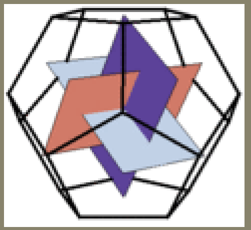
El teorema de Ptolomeo y el pentágono

Claudio Ptolomeo desarrolló un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo, el cual permite trazar un pentágono regular con regla y compás.
Si las diagonales y la base mayor miden *a*, y los lados y la base menor miden *b*, resulta que
$b^2 = a^2 + ab$ lo que implica:



$$\frac{b}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

El número de oro en los poliedros regulares

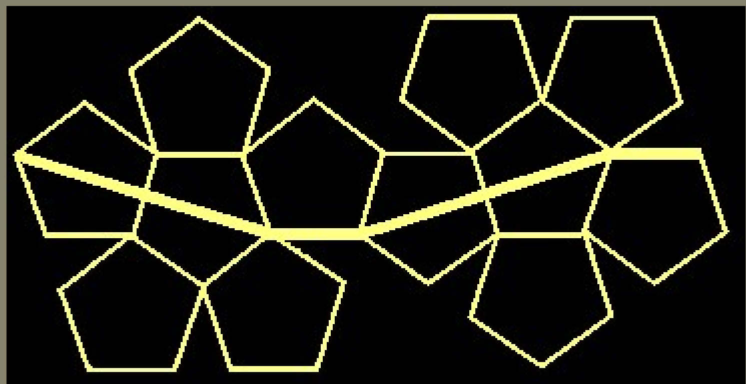


- Con tres tarjetas de visita, que sean rectángulo áureos se puede construir un dodecaedro y un icosaedro.
- Las 12 esquinas de los rectángulos coinciden con los centros de las caras del dodecaedro y los vértices del icosaedro.
- Construirlo
- El punto que los rectángulos tienen en común es el centro tanto del dodecaedro como del icosaedro.

Dodecaedro

Dodecaedro

- Desarrollo del dodecaedro



Dodecaedro e icosaedro

- Los vértices de un icosaedro pueden darse en coordenadas cartesianas por los siguientes puntos: $(0, \varphi, 1)$, $(0, \varphi, -1)$, $(0, -\varphi, 1)$, $(0, -\varphi, -1)$, $(1, 0, \varphi)$, $(1, 0, -\varphi)$, $(-1, 0, \varphi)$, $(-1, 0, -\varphi)$, $(\varphi, 1, 0)$, $(\varphi, -1, 0)$, $(-\varphi, 1, 0)$, $(-\varphi, -1, 0)$
- Los vértices de un dodecaedro también se pueden dar en términos similares: $(0, \varphi, \varphi)$, $(0, \varphi, -\varphi)$, $(0, -\varphi, \varphi)$, $(0, -\varphi, -\varphi)$, $(\varphi, 0, \varphi)$, $(\varphi, 0, -\varphi)$, $(-\varphi, 0, \varphi)$, $(-\varphi, 0, -\varphi)$, $(\varphi, \varphi, 0)$, $(\varphi, -\varphi, 0)$, $(-\varphi, \varphi, 0)$, $(-\varphi, -\varphi, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$

Dodecaedro e icosaedro

- Para un dodecaedro con aristas de longitud *a*, su volumen y su área total se pueden expresar también en términos del número áureo:

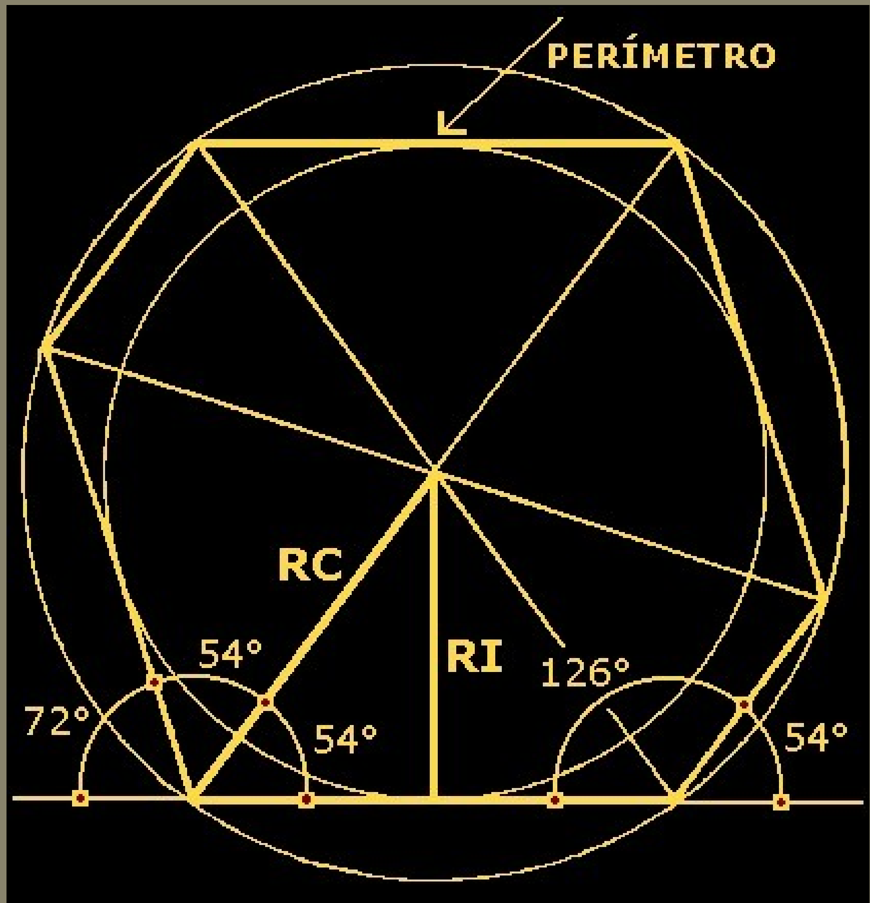
$$A = a\frac{15\phi}{\sqrt{3-\phi}}$$

$$V = a\frac{5\phi^3}{\sqrt{6-2\phi}}$$

Dodecaedro

	CONVENCIONAL	SEGÚN Φ	tan 54°	A
PERÍMETRO 8,15536707 L	$2+4\sqrt{\frac{3+2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}}\,L$	$2+4\sqrt{\frac{3}{4}+\Phi}\,L$	$2+2\sqrt{5}\tan 54°\,L$	$2+\frac{\Phi^3}{A}\,L$
RADIO ESFERA CIRCUNSCRITA 1,14012585 L	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,L$	$\Phi\sqrt{\frac{3}{4}}\,L$	$\frac{\Phi\sqrt{\frac{3}{4}}\tan 54°}{2A}\,L$	$\frac{A2\sqrt{5}\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\Phi\sqrt{5}}}\,L$
RADIO ESFERA INSCRITA 1,11351636 L	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}\,L$	$\frac{\Phi\sqrt{\frac{3}{4}+\Phi}}{\sqrt{5}}\,L$	$\frac{\Phi\tan 54°}{2}\,L$	$\Phi A\,L$
ÁREA 20,6457288 L^2	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,L^2$	$3\sqrt{5\,\Phi^2(2+\Phi)}\,L^2$	$15\tan 54°\,L^2$	$30\,A\,L^2$
VOLUMEN 7,66311896 L^3	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,L^3$	$\frac{\Phi^4\sqrt{5}}{2}\,L^3$	$5\,\Phi\,A\tan 54°\,L^3$	$10\,\Phi A^2\,L^3$

Dodecaedro



Número de oro en la naturaleza

El número de oro en la naturaleza

- En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea:
- No hay simetría pentagonal ni pentágonos regulares en la materia inanimada. El pentágono surge únicamente en los seres vivos. Ningún cristal, por ejemplo, tiene forma de pentágono regular.

El Número de Oro en la Naturaleza

El número de oro aparece en distintos elementos de la naturaleza:

- La relación entre la distancia entre las espiras del interior de algunos caracoles
- La disposición de los pétalos de las flores
- La distribución de las hojas en un tallo
- La distancia entre las espirales de una piña

El número de oro en la naturaleza

- La sucesión de Fibonacci se puede encontrar también en botánica. Así, por ejemplo, ciertas flores tienen un número de pétalos que suelen ser términos de dicha sucesión; de esta manera el lirio tiene 3 pétalos, algunos ranúnculos 5 o bien 8, las margaritas y girasoles suelen contar con 13, 21, 34, 55 o bien 89.

El número de oro en la naturaleza

- La parte de la botánica que estudia la disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas se denomina Filotaxia. En la mayoría de los casos es tal que permite a las hojas una captación uniforme de la luz y aire, siguiendo, normalmente, una trayectoria ascendente y en forma de hélice.

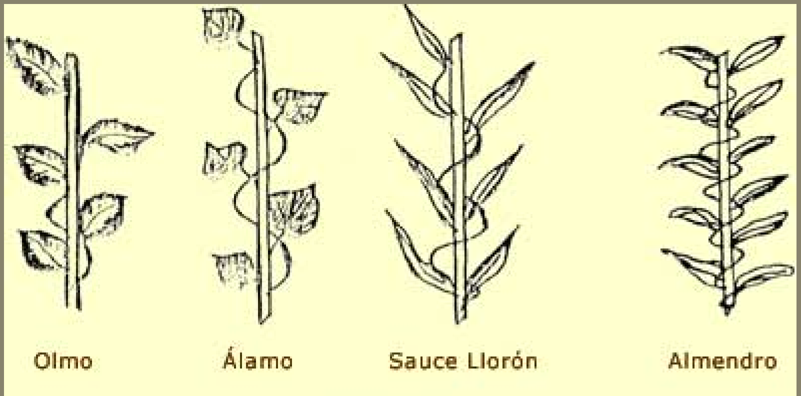


Figura 2

El número de oro en la naturaleza

- Si tomamos la hoja de un tallo y contamos el número de hojas consecutivas (supongamos que son '*n*') hasta encontrar otra hoja con la misma orientación, este número es, por regla general, un término de la sucesión de Fibonacci.
- Además, si mientras contamos dichas hojas vamos girando el tallo (en el sentido contrario a las agujas del reloj, por ejemplo) el número de vueltas '*m*' que debemos dar a dicho tallo para llegar a la siguiente hoja con la misma orientación resulta ser también un término de la sucesión.

El número de oro en la naturaleza

- Se llama "característica" o "divergencia" del tallo a la fracción *m/n*, y que, como muestra en la *figura*, en el olmo es 1/2, en el álamo 2/5, en el sauce llorón 3/8 y en el almendro 8/13.
- Si representamos por F_n el término que ocupa el lugar '*n*' en la sucesión de Fibonacci (consideremos, por ejemplo: $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$), en la mayoría de los casos la característica viene dada por una fracción del tipo F_n/F_{n+2}.
- Así, en el caso del sauce

llorón sería F_4/F_6.

¿Y en el caso del olmo, álamo, Almendro?

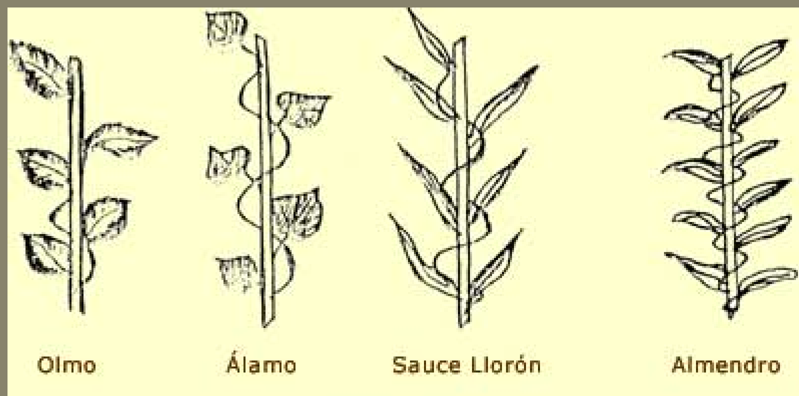


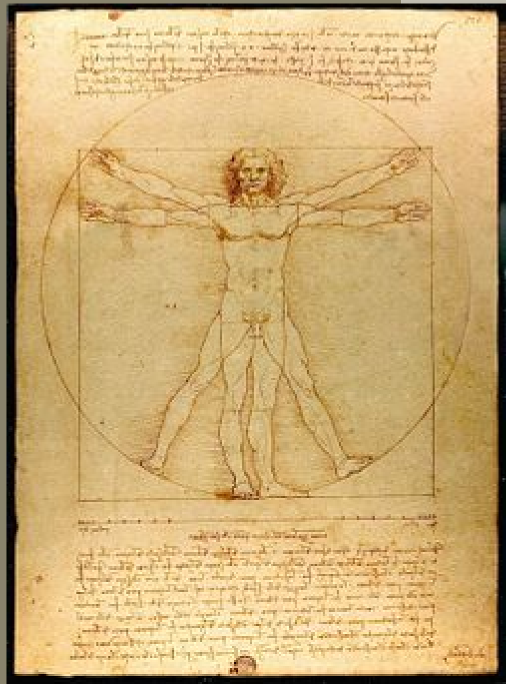
Figura 2

El número de oro en la naturaleza

- Las “escamas" de una piña de pino tienen, por regla general, una característica de 5/8 o bien 8/13, presentando propiedades similares las hojas de las lechugas, los pétalos de las flores, las escamas de una piña tropical, las ramas de las palmeras, el ficus, etc., ejemplos que se pueden comprobar fácilmente.

El número de oro en el ser humano

- La Anatomía de los humanos se basa en una relación Φ estadística y aproximada, así vemos que:
  - La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
  - La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.



- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
- La relación entre el primer hueso de los dedos

El número de oro en el ser humano

- La relación entre la longitud de la cabeza y su anchura es también este número.
- La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz
- Es Φ la relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea inter-pupilar
- Cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene Φ, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).

El número de oro en el ser humano

- La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es Φ

- La relación entre las falanges de los dedos es el número áureo,

Número de oro y sucesión de Fibonacci

Sucesión de Fibonacci

- Leonardo de Pisa (Fibonacci), en su *Libro de los ábacos* (Liber abacci, 1202, 1228), usa la sucesión que lleva su nombre para calcular el número de pares de conejos *n* meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse, suponiendo que los conejos están aislados por muros, se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad, tardan un mes desde la fecundación hasta la parición y cada camada es de dos conejos.
- El problema se halla en las páginas 123 y 124 del manuscrito de 1228.

Sucesión de Fibonacci

- El número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano nos conduce a la sucesión de Fibonacci, y por lo tanto, al número áureo.
- Si observamos el árbol genealógico de un zángano, podemos ver como el número de abejas en cada generación es uno de los términos de la sucesión de Fibonacci.

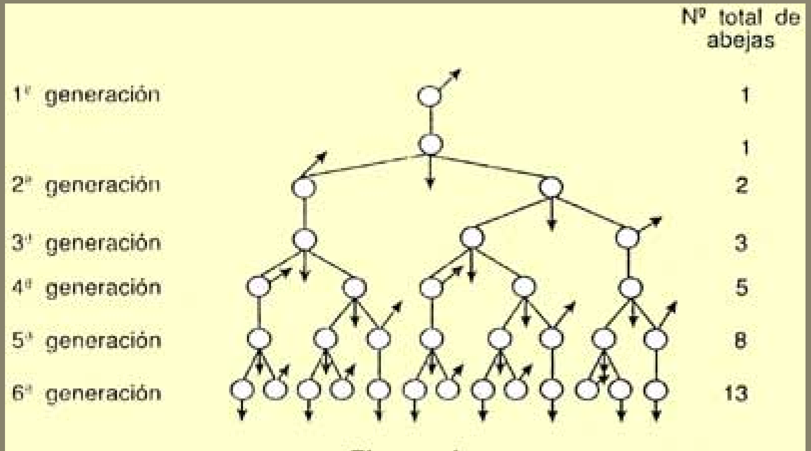


Figura 1

Sucesión de Fibonacci

- La sucesión de Fibonacci y en número de oro son dos caras de la misma moneda. Ambos expresan la misma ley de crecimiento y armonía
- Filotaxia
  - Crecimiento de los pétalos
  - Pipas de girasol
  - Escamas de las piñas
  - Ángulo ideal de las hojas
- Concha del Nautilus

Sucesión de Fibonacci

- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- La distribución de las hojas en un tallo.
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias
- La distancia entre las espirales de una piña.

Sucesión de Fibonacci

- Consideremos la siguiente sucesión de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

- Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 21 = 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55.
- Esta sucesión es la llamada "sucesión de **Fibonacci**".
- ***Fibonacci** **es el sobrenombre con el que se conoció al rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240). Viajó por el Norte de África y Asia y trajo a Europa algunos de los conocimientos de la cultura árabe e hindú, entre otros la ventaja del sistema de numeración arábigo (el que usamos) frente al romano.****

Propiedades de la sucesión de Fibonacci

Generación de la sucesión:

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 1$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ si } n > 2$$

(términos de la sucesión: números de Fibonacci)

Relación con el número de oro:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \varphi$

2. Ecuación característica de la sucesión: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

Su mayor solución: el número de oro

Sucesión de Fibonacci

- La sucesión de **Fibonacci** presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo las he enunciado en casos particulares (aunque se cumplen en general) y he calculado los primeros doce términos de esta sucesión:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Sucesión de Fibonacci

- Si sumas los cuatro primeros términos y añades 1, te sale el sexto (1+1+2+3 + 1 = 8).
- Si sumas los cinco primeros términos y añades 1, te sale el séptimo (1+1+2+3+5 + 1 = 13).
- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5) sale el sexto término (t_6), (1+2+5 = 8).
- Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5,t_7) sale el octavo término (t_8), (1+2+5+13 = 21).
- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6) y añades 1, sale el séptimo término (t_7), (1+3+8 + 1 =13). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6,t_8) y añades 1, sale el noveno término (t_9), (1+3+8+21 + 1 =34).

Sucesión de Fibonacci

- Tomemos dos términos consecutivos, por ejemplo: $t_4=3$ y $t_5=5$; elevando al cuadrado y sumando: $3^2+5^2=9+25=34$ que es el noveno (4+5) término de la sucesión. Tomando $t_6=8$ y $t_7=13$; elevando al cuadrado y sumando: $8^2+13^2=64+169=233$ que es el (6+7) decimotercer término de la sucesión.
- Pero si elevamos al cuadrado los cinco primeros términos y los sumamos, sale el producto del quinto y el sexto término: $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=40=5*8$.
- Si hacemos lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término: $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=104=8*13$.

- Por ejemplo: 3/2 = 1.5, 5/3 = 1.6, y = 1.615384..., lo que se acerca considerablemente al número áureo. Entonces se tiene que:
- Esta propiedad fue descubierta por el astrónomo italiano Johannes Kepler, sin embargo, pasaron más de cien años antes de que fuera demostrada por el matemático inglés Robert Simson.
- A mediados del siglo XIX el matemático francés Jacques Phlipe Marie Binet redescubrió una fórmula que aparentemente ya era conocida por Leonhard Euler, y por otro matemático francés, Abraham de Moivre. La fórmula permite encontrar el enésimo número de Fibonacci sin la necesidad de producir todos los números anteriores. La fórmula de Binet depende exclusivamente del número áureo.

Sucesión de Fibonacci

- Dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos:

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1´5
5 : 3 = 1´66666666
8 : 5 = 1´6

13 : 8 = 1´625
21 :13 = 1´6153846....
34 :21 = 1´6190476....
55 :34 = 1´6176471....
89 :55 = 1´6181818....

- Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro:

1,61803....

Demostrarlo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \varphi$$

Sucesión de Fibonacci

- Efectivamente,

$$L = \lim \frac{t_n}{t_{n-1}} = \lim \frac{t_{n-1} + t_{n-2}}{t_{n-1}} = \lim \left(1 + \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} \right) =$$

$$= 1 + \lim \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \phi$$

Número de oro en la música

El número de oro en la música

- En los violines, la ubicación de las efes (los "oídos", u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.
- En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras).

El número de oro en la música

- Es necesario aclarar que cuando se menciona al número áureo en una realización artística de cualquier naturaleza se está haciendo mención a una aproximación racional adecuada a las circunstancias o a un dibujo hecho con regla no graduada de un solo borde y longitud indefinida y un compás de abertura fija o variable.
- Generalmente se utilizan cocientes de números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci que dan valores aproximados, alternativamente por defecto o por exceso, según la necesidad o la sensibilidad humana y hasta la capacidad de separación tonal de cada instrumento.

El número de oro en la música

- Un violín, por ejemplo, puede separar hasta un tercio de tono.
- El oído humano sano y entrenado distingue hasta trescientos sonidos por octava.
- Como un ejemplo conocido y no discutido tenemos a la escala atemperada o templada. Esta es una escala logarítmica. Se creó muy poco tiempo después de que los logaritmos pasaran al patrimonio de la matemática.
- La octava atemperada está basada en $\sqrt[12]{2}$
- Este número irracional tiene infinitos decimales, pero la afinación se hace redondeando las cifras de las frecuencias a uno o dos decimales.

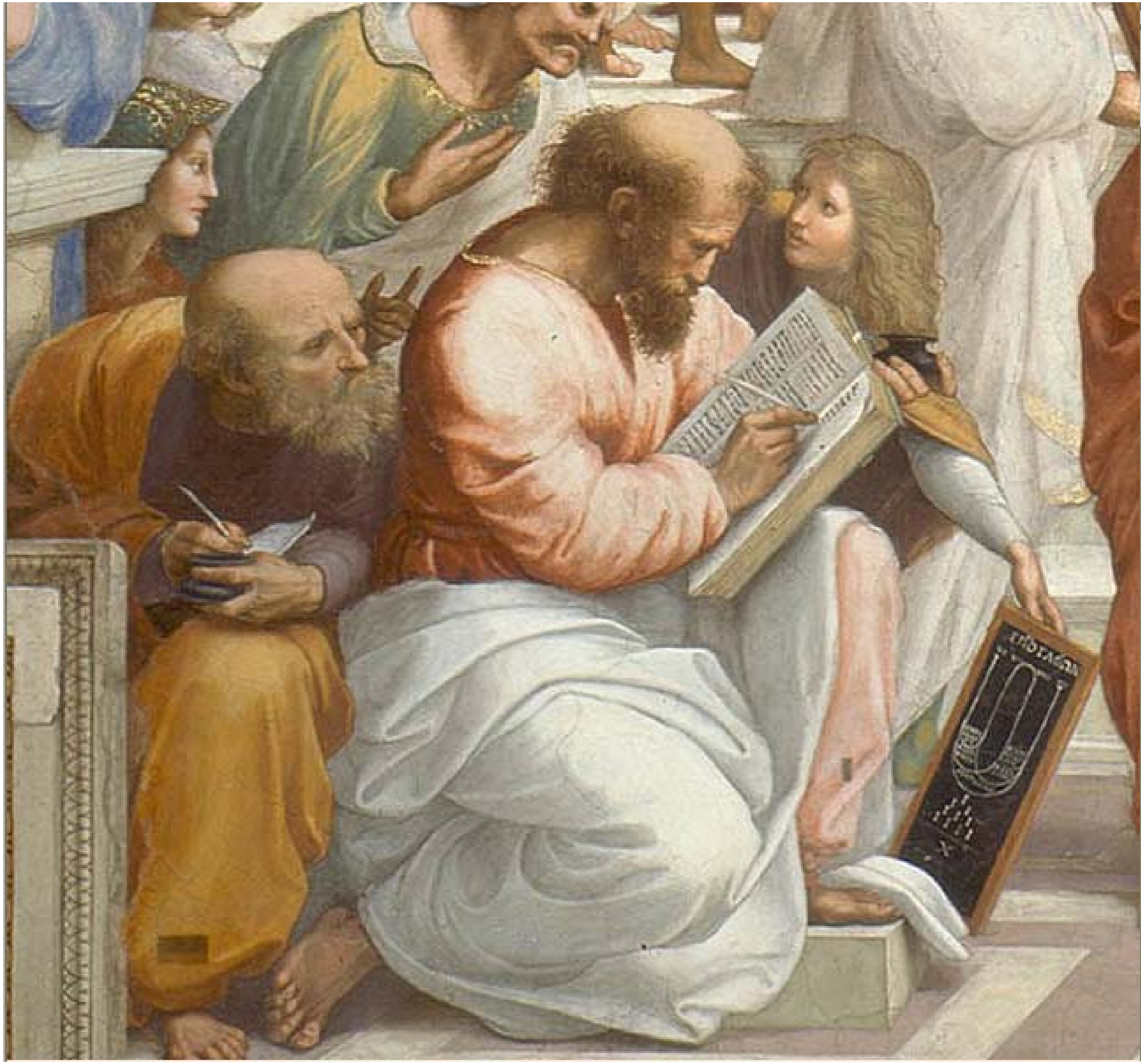
El número de oro en la música

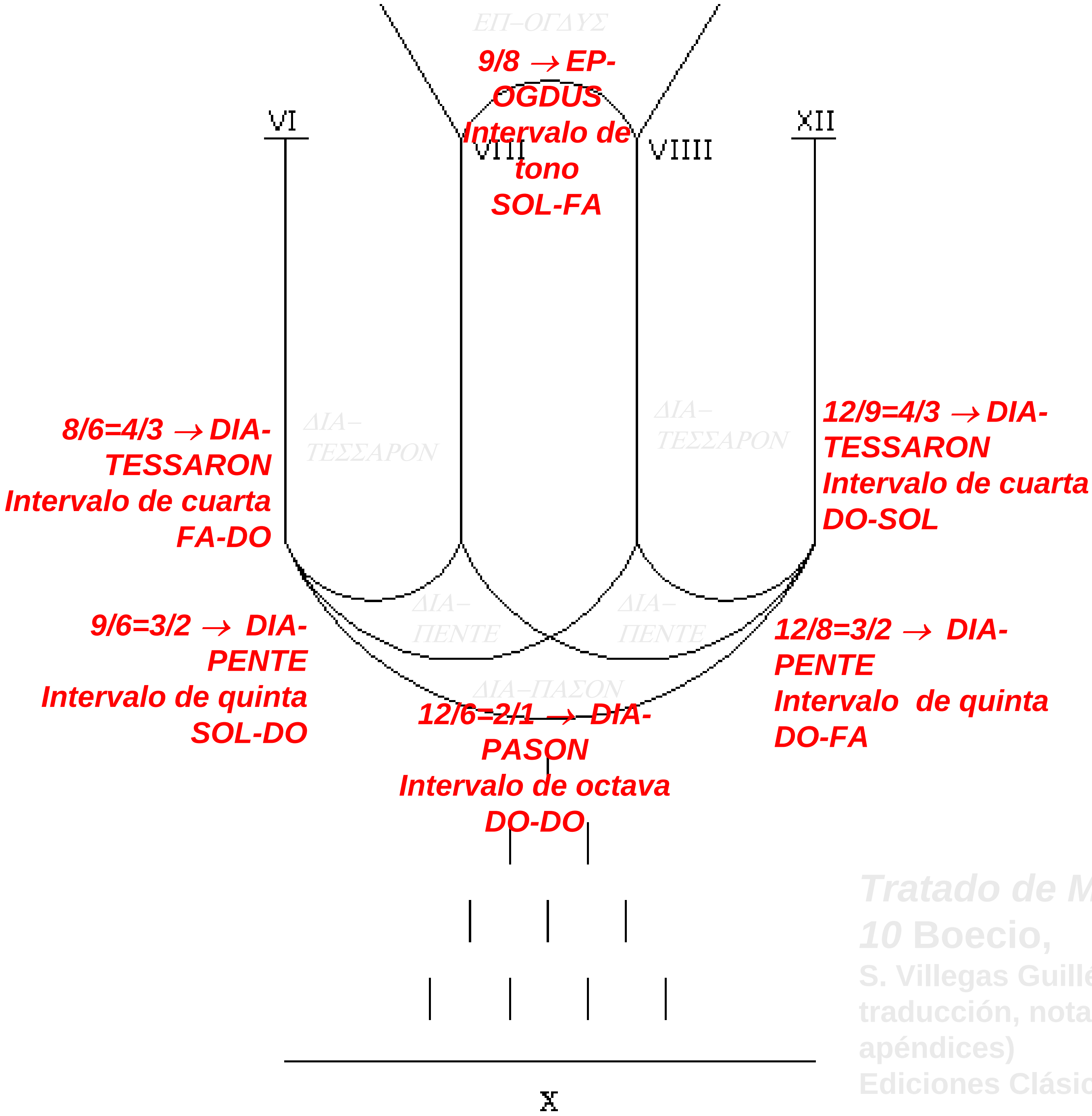
- De cualquier manera, el error tonal total cometido no es superior al doceavo de tono y el oído humano no lo nota. La uniformidad de la separación de las notas y la coincidencia de bemoles y sostenidos permite comenzar una melodía por cualquier nota sin que se produzcan las desagradables disonancias de la escala diatónica y la escala física.
- De la misma manera se actúa con la distribución de tiempos o la altura de los tonos usando el número áureo; con una aproximación racional que resulte práctica.

El número de oro en la música

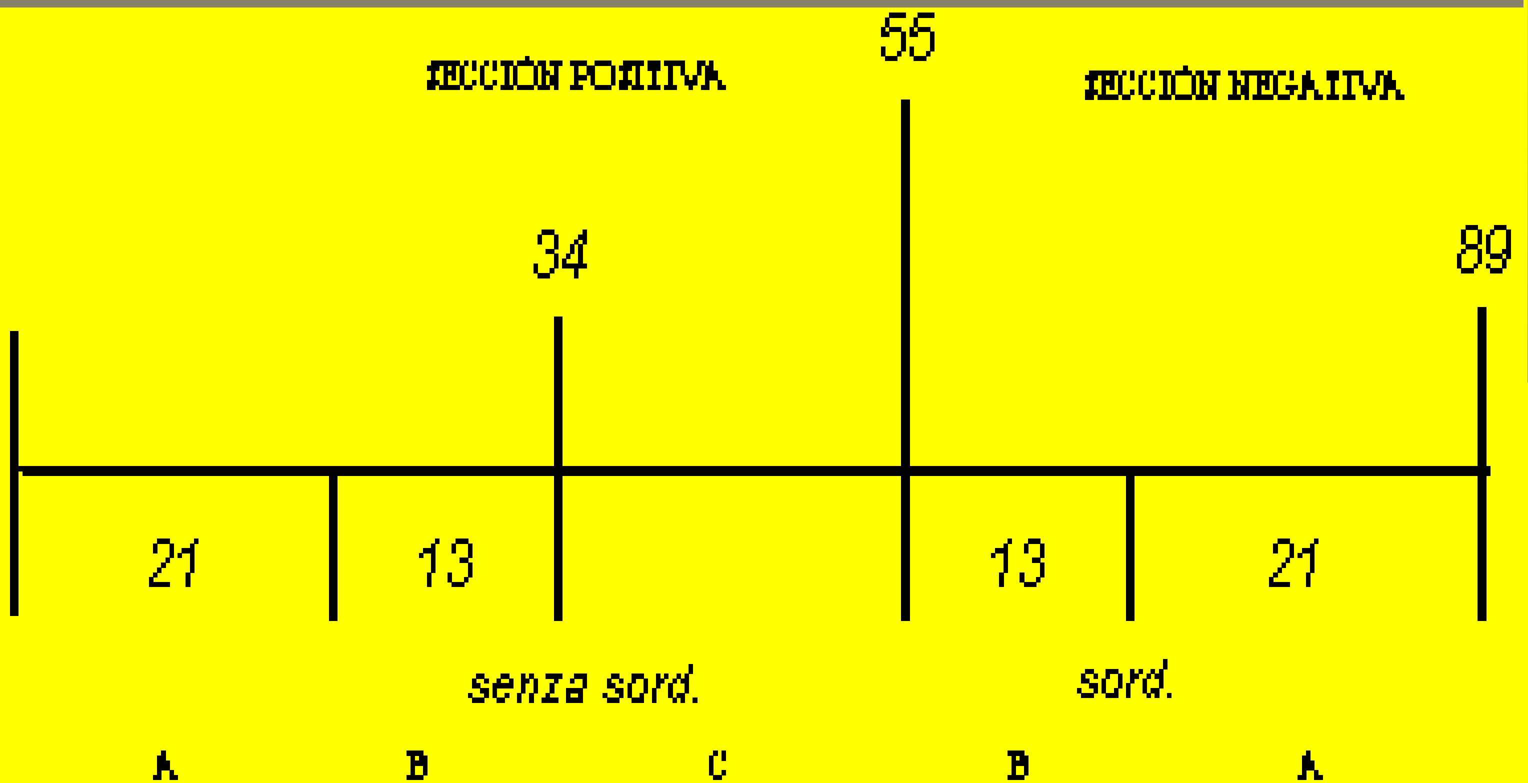
- Existen numerosos estudios al respecto, principalmente de la Universidad de Cambridge.
- Autores como Bártok, Messiaen y Stockhausen, entre otros, compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con la sección áurea.
- El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra *Alcancías*, para organizar las partes (unidades formales).
- El grupo de rock progresivo norteamericano Tool, en su disco Lateralus (2001) hacen múltiples referencias al número áureo y a la secuencia Fibonacci, sobre todo en la canción que da nombre al disco, pues los versos de la misma están cantados de forma que el número de sílabas pronunciadas en cada uno van componiendo dicha secuencia. Además la voz entra en el minuto 1:37, que pasado al sistema decimal coincide muy aproximadamente con el número áureo.


TIMEO
ETIC
Platón
Aristóteles





Tratado de Música, I, 10 Boecio,
S. Villegas Guillén (Prólogo, traducción, notas y apéndices)
Ediciones Clásicas, Madrid

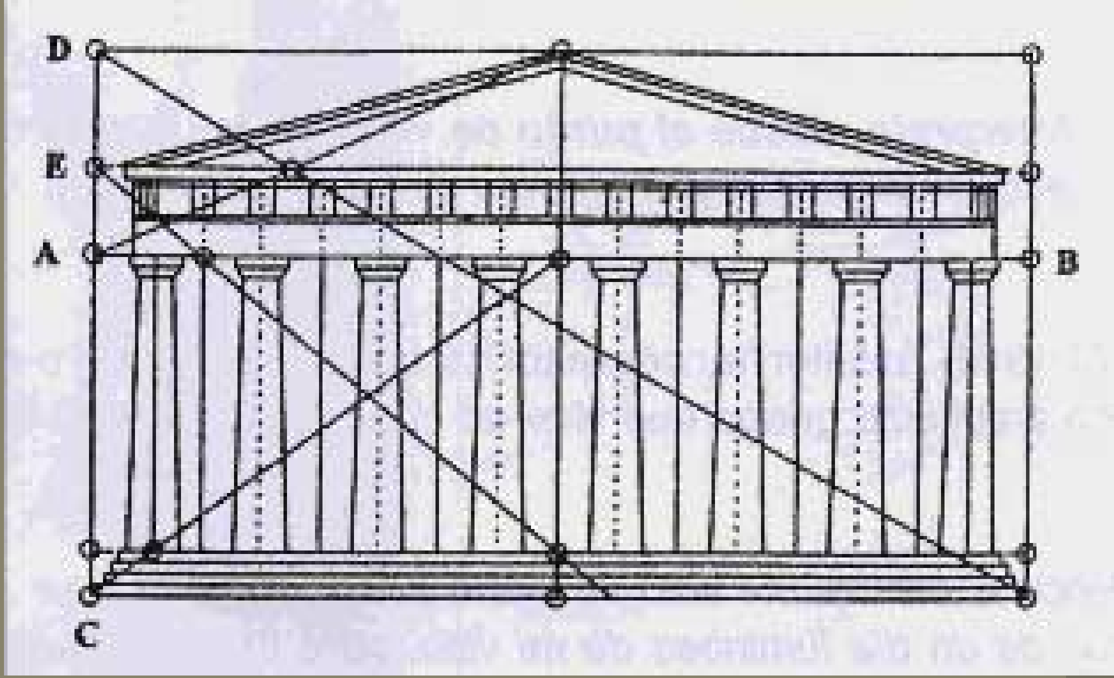

SECCIÓN POSITIVA
55
SECCIÓN NEGATIVA
34
89
21
13
13
21
senza sord.
sord.
A
B
C
B
A

Estudios armónicos

Estudio armónico del Partenón

En la figura se puede comprobar que *AB/CD* = ϕ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: *AC/AD* = ϕ y *CD/CA*= ϕ.

Busca, describe y anota los rectángulos áureos en el Partenón.



Estudio armónico del Partenón

- Durante el primer cuarto del siglo XX, Jay Hambidge, de la Universidad de Yale, se inspiró en un pasaje del Theeteto de Platón para estudiar las proporciones relativas de las superficies, algo muy natural cuando se trata de obras arquitectónicas.
- Posteriormente Hambidge estudió a los monumentos y templos griegos y llegó a encuadrar el frontón del Partenón en un rectángulo áureo.

$$\frac{4\Phi - 2}{\Phi + 1}$$

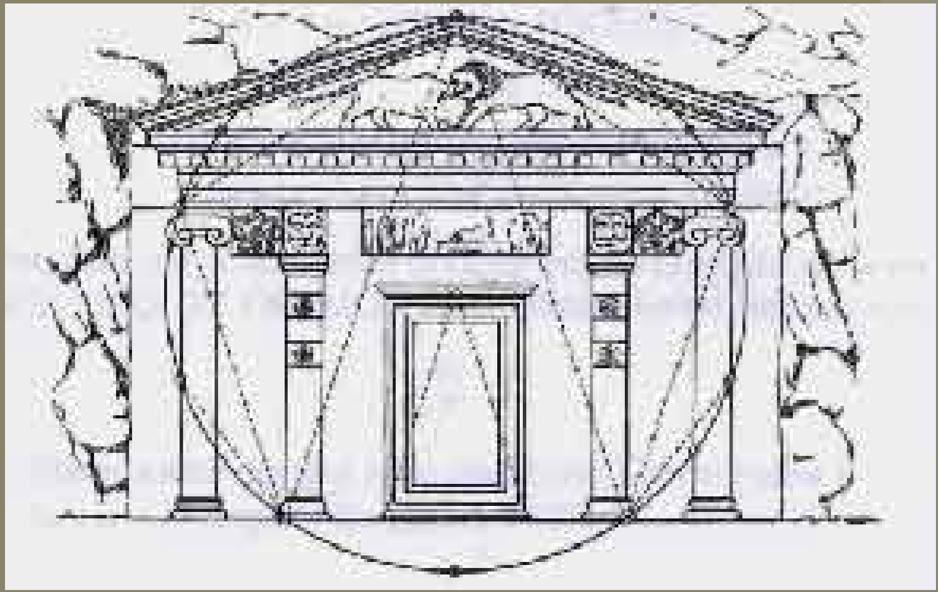
- Por medio de cuatro diagonales suministra las principales proporciones verticales y horizontales. Este rectángulo es descompuesto en otros seis y cuatro cuadrados.

Estudio armónico de la Tumba Rupestre de Mira

Ya vimos que el cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo.

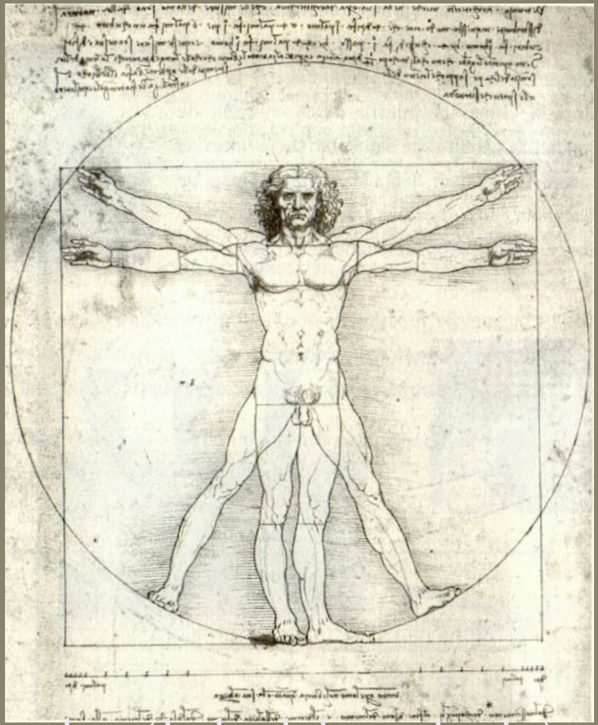
En un pentágono regular está basada la construcción de la **Tumba Rupestre de Mira** en Asia Menor.

Busca, describe y anota el estudio armónico de la Tumba rupestre de Mira.



Estudio armónico del hombre de Vitrubio

Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci**. Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509. Busca, describe y anota el estudio armónico de esta ilustración.



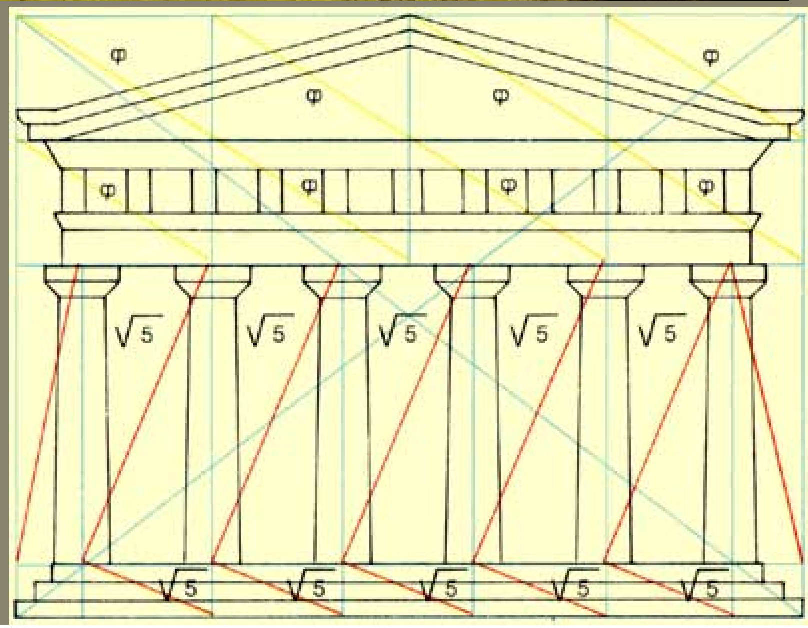
- Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

Estudio armónico de Leda atómica

El cuadro de Dalí *Leda atómica*, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico. Busca, describe y anota el estudio armónico de esta ilustración.

Estudio armónico del Templo de Ceres

Templo de Ceres en Paestum (460 a.C.) tiene su fachada construida siguiendo un sistema de triángulos áureos, al igual que los mayores templos griegos, relacionados, sobre todo, con el orden dórico.

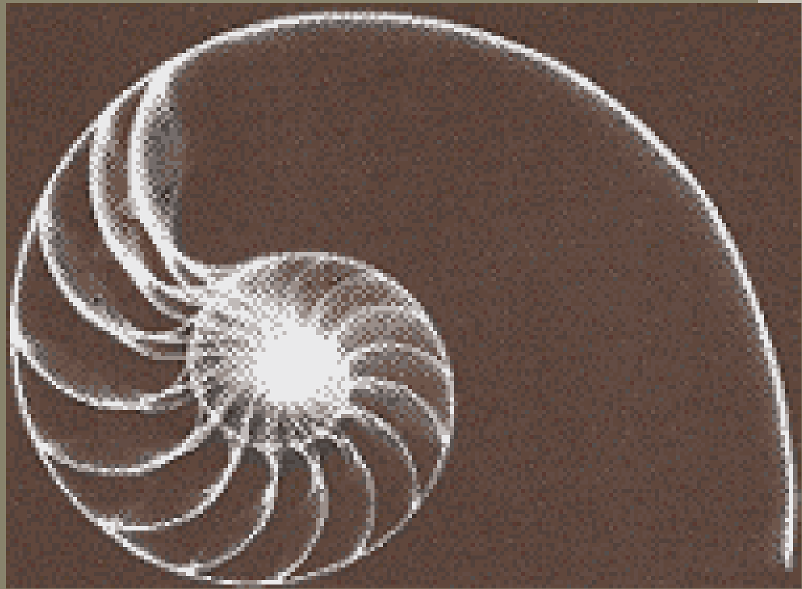


Busca, describe y anota el estudio armónico del Templo de Ceres.

Estudio armónico de caracoles

La relación entre la distancia entre las espiras del interior de muchos caracoles (no sólo del <u>nautilus</u>)

Hay por lo menos tres espirales logarítmicas en las que se puede encontrar de alguna manera al número áureo.



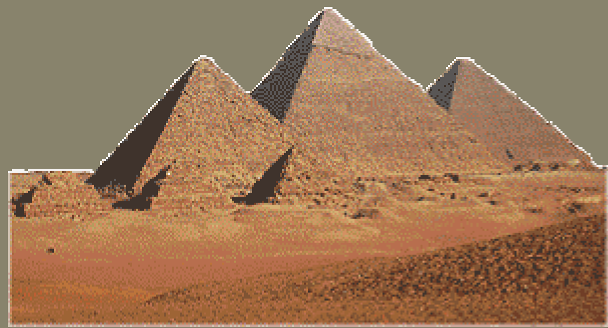
La primera de ellas se caracteriza por la relación constante igual al número áureo entre los radiovectores de puntos situados en dos evolutas consecutivas en una misma dirección y sentido.

Las conchas del Fusus antiquus, del Murex, de Scalaria pretiosa, de Facelaria y de Solarium trochleare, entre otras, siguen este tipo de espiral de crecimiento.

Estudio armónico de la pirámide de Keops

El primer uso conocido del número áureo en la construcción aparece en la pirámide de Keops, que data del 2600 a.C.

La afirmación de Herodoto de que el cuadrado de la altura es igual a la superficie de una cara es posible únicamente si la semi-sección meridiana de la pirámide es proporcional al triángulo rectángulo:



$$\left(1,\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

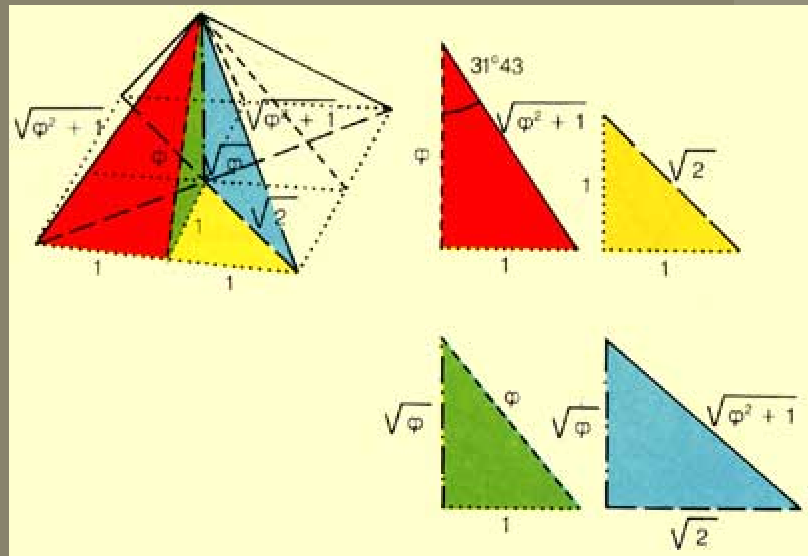
donde 1 representa proporcionalmente a la mitad de la base, la raíz cuadrada del número áureo a la altura hasta el vértice inexistente y el número áureo o hipotenusa del triángulo a la apotema de la Gran Pirámide.

Estudio armónico de la pirámide de Keops

Esta tesis ha sido defendida por los matemáticos Jarolimek, K. Kleppisch y W. A. Price, cuenta con el testimonio histórico de Herodoto y resulta teóricamente con sentido, aunque una construcción de semejante tamaño deba contener errores inevitables a toda obra arquitectónica y a la misma naturaleza de la tecnología humana, que en la práctica puede manejar únicamente números racionales.

Estudio armónico de la pirámide de Keops

Esta pirámide tiene cada una de sus caras formadas por dos medios triángulos áureos: la más aparente, aunque no es la única, relación armónica identificable en el análisis de las proporciones de este monumento funerario en apariencia simple.



Realizar el estudio

Referencias

Videos: YouTube

•Más por menos. El número de oro.

Libros:

•Ghyka, Matila (1992), *El Número de Oro*, Barcelona: Poseidón, S.L.. ISBN 9788485083114

•Ghyka, Matila (2006), *El Número de Oro. I Los ritmos. II Los Ritos*, Madrid: Ediciones Apóstrofe, S. L.. ISBN 9788445502754.

•Pacioli, Luca (1991), *La Divina Proporción*, Tres Cantos: Ediciones Akal, S. A.. ISBN 9788476007877.

Referencias

Páginas web:

Leonardo de Pisa y serie de Fibonacci

http://suanzes.iespana.es/suanzes/

http://www.redesc.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate4k.htm

http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/Biografias/Fibonacci.htm

Relación entre la serie de Fibonacci y la proporción aúrea:

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html (en Inglés)

http://www.geider.net/esp/mate/logo.htm

Numero de oro y propiedades:

http://rt000z8y.eresmas.net/matemat.htm

http://roble.pntic.mec.es/%7Ejarran2/cabriweb/numerooro/numero_de_oro.htm

Número de oro y arquitectura y naturaleza:

http://www.elalmanaque.com/acertijos/num-oro.htm

http://www.explora.cl/otros/metro/fibonacci.html

http://www.anarkasis.com/pitagoras/202_aurea_arquitectura/

http://www.epsilones.com/paginas/a-bestiario.html

http://www.red-dental.com/o_v02401.htm

Referencias

Algunos artículos en la web:

ENSAYO INTRODUCTORIO

LA ARMONÍA UNIVERSAL

PRESENCIA DEL NÚMERO DE ORO

GEOMETRÍA DE LA PARÁBOLA SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

GEOMETRÍA DE LOS EXAPENTA SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

CUADRATURA DEL CÍRCULO SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

PROPORCIONES ARMÓNICAS EN LA PUERTA DEL SOL DE TIWANAKU

EL NÚMERO DE ORO EN EL TESTIMONIO DE GUDEA

EL NÚMERO DE ORO Y LA CUADRATURA DEL CÍRCULO EN EGIPTO

PROPORCIONES ARMÓNICAS EN LAS MEDIDAS SUMERIAS

EL TRIÁNGULO DORADO DE CALVIMONT

GEOMETRÍA DEL DODECAEDRO SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

GEOMETRÍA DE LA GOTA SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

GEOMETRÍA DE LA ESPIRAL ANDINA SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

CÓDIGO BIOMÉTRICO SEGÚN EL NUMERO DE ORO

LOS ARCOS CONOPIALES SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

GEOMETRÍA DE HOJAS DE ÁRBOLES SEGÚN EL NÚMERO DE ORO

EL NÚMERO DE ORO EN LOS INSTRUMENTOS DE CUERDA

Taller: Trabajo en grupo

- Seleccionar, dentro de una lista, un posible trabajo en grupo sobre el número de oro.
- Proporcionar al alumnado referencias, y explicar en qué va a consistir la evaluación:
  - Originalidad
  - Claridad y orden
  - Presentación en papel
  - Explicación a la clase
- Exposición

Taller: Trabajo en grupo. Objetivos

- Acercar las matemáticas al alumnado a través de las aplicaciones que en diversos campos tiene la sucesión de Fibonacci y el número áureo.
- Facilitar la asimilación del concepto de semejanza y proporción.
- Implicar a los estudiantes en investigaciones.
- Realizar con los alumnos y alumnas estudios de tipo estadístico para la verificación de algunas propiedades que la sucesión de Fibonacci y el número áureo poseen.
- Participar en la exposición conjunta que se llevará a cabo para mostrar al resto del centro el trabajo desarrollado.

Taller: Trabajo en grupo. Actividades

- Tras recoger los datos necesarios, elaboración de tablas estadísticas sobre la divergencia de lechugas, girasoles, piñas…, e investigar dicha divergencia en algunas plantas presentes en las áreas ajardinadas del centro educativo, así como en el campo cuando se realice alguna excursión programada por el departamento de Ciencias Naturales.
- Estudio de cómo se ajustan las espirales de conchas marinas a espirales logarítmicas. Para ello será preciso que los alumnos y alumnas recojan y traigan las conchas, lo que puede hacerse también aprovechando alguna excursión organizada por el departamento de Ciencias Naturales.

Taller: Trabajo en grupo. Actividades

- Construcción, en el taller de tecnología, de **rectángulos áureos, ortoedros áureos** y otros cuerpos, empleando el material adecuado.
- Elaboración de **estadísticas** que pongan de manifiesto la presencia del número áureo en las proporciones humanas: estatura completa en relación a la longitud desde el extremo superior de la cabeza al ombligo, esta última con relación a la longitud del ombligo a los pies...
- Estudio de las **dimensiones** de algunos muebles, como, por ejemplo, mesitas de noche, para ver si las proporciones se ajustan a las de un ortoedro áureo del espacio.

Taller: Trabajo en grupo. Actividades

- Colaboración en el montaje de la "Exposición", elaborando algunos murales y contribuyendo al desarrollo de la exposición, mediante comentarios y aclaraciones a los chicos y chicas que la visiten.
- Los murales que se confeccionen pueden reproducir el grabado de Leonardo Da Vinci para ilustrar los trabajos de Vitrubio acerca de las proporciones humanas, la pirámide de Keops y otros edificios famosos donde se manifieste el número áureo, alguna espiral logarítmica acompañada de fotos de conchas marinas, como la del Nautilus, de modo que salte a la vista su ajuste...

Taller. Ordenador

- **Tecnologías de la información y la comunicación.**

- **Sucesión de Fibonacci.**

Tecnologías de la información y la comunicación.

Sucesión de Fibonacci.

En esta actividad se utiliza la hoja de cálculo para calcular términos de la sucesión de Fibonacci (sobrenombre de Leonardo de Pisa) que fue el primero que la observó en 1202 tratando de calcular el número de conejos nacidos de una pareja determinada que cada mes produce una nueva pareja, que a su vez después de un mes ya está apta para reproducirse, el número de parejas agregadas cada mes sería 1, 2, 3, 5, 8, …
También se comprobará a qué número se aproxima el cociente entre dos términos consecutivos de esta sucesión.

Procedimiento:

- Abre un nuevo archivo en la hoja de cálculo. En la celda **A1** introduce el valor 1, en **A2** también 1 y en **A3** introduce la fórmula **=A1+A2**, con el controlador de relleno copia la fórmula de **A3** hasta **A7**, observa en la barra de fórmulas que lo que aparece en la celda **A4** es **=A2+A3**, en la celda **A5** cambia a **=A3+A4** en la celda **A6** es **=A4+A5** y en la **A7** se tiene **=A5+A6**, y sin embargo en la celda correspondiente observamos en **A3** un *2*, en **A4** un *3*, en **A5** un *5*, en **A6** un *8* y en **A7** un *13*. De esta manera la fórmula que estamos copiando no es sumar los valores de las celdas A1 y A2, sino el criterio de sumar en cada celda los valores de las dos anteriores.
- Copia la fórmula de la celda **A7** hasta **A25**. Los números que obtienes son los términos de la sucesión de Fibonacci.
- Colócate en la fila 1 e inserta dos filas en la parte superior, en la primera vas a poner título a la hoja: ***Sucesión de Fibonacci***.
- Con el cursor en la columna A, inserta una columna en la parte izquierda de la hoja escribe *meses* en la celda **A2**, un 1 en **A3** y **rellena en serie** hasta **A27**.
- Escribe en **D2** el texto *Sucesión1* y en **D3** la fórmula **=B4/B3** que expresa el cociente entre un término de la sucesión de Fibonacci y el anterior y cópiala hasta **D26**.
- Situado en la celda **E2** escribe el texto *(1+Raiz(5))/2* y en la celda **E3** la misma expresión como fórmula, **=(1+Raiz(5))/2.**
- Si es necesario, para obtener 8 decimales en las columnas D y E, elige en el menú **Formato** la opción **Celdas** y en la pestaña **Número** la opción **Número** y determina 8 en **posiciones decimales**.

Sucesión de Fibonacci

meses		*Sucesión1*	*(1+raiz(5))/2*
1	1	1,00000000	1,61803399
2	1	2,00000000	
3	2	1,50000000	
4	3	1,66666667	
5	5	1,60000000	
6	8	1,62500000	
7	13	1,61538462	
8	21	1,61904762	
9	34	1,61764706	
10	55	1,61818182	
11	89	1,61797753	
12	144	1,61805556	
13	233	1,61802575	
14	377	1,61803714	
15	610	1,61803279	
16	987	1,61803445	
17	1597	1,61803381	
18	2584	1,61803406	
19	4181	1,61803396	
20	6765	1,61803400	
21	10946	1,61803399	
22	17711	1,61803399	
23	28657	1,61803399	
24	46368	1,61803399	
25	75025		

- Compara los resultados de las celdas **D26 y E3.** ¿Qué te parece?
- Aumenta el número de decimales a 10 en las columnas D y E. ¿Qué ocurre?
- Centra los datos y utiliza cursiva y negrita para dar formato a la hoja.

El número de oro en la red

- El número de oro muy completo
- Cuestionario y páginas recomendadas
- Fi en la naturaleza
- Taller
- Construcciones geométricas
- Aparece donde menos te lo esperas
- Actividades de aula

El número de oro en la red

- Introducción
- Tareas
- Proceso
- Recursos
- Evaluación
- Conclusiones
- Vídeos
- Enciclopedia Wikipedia