La historia como recurso: Biografías de mujeres matemáticas

Adela Salvador

Universidad Politécnica de Madrid.

La historia como recurso

- En la clase de matemáticas usualmente se proporcionan los conceptos y los hechos totalmente elaborados y no se estudian las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido. Conocer la **evolución histórica de las matemáticas**, la forma de trabajar del matemático y la contribución de éste, mejora el aprendizaje.
- La historia como elemento motivador

Introducción

- Si revisamos la Historia de la Ciencia observamos que muy pocas mujeres han sabido Matemáticas, pero ha habido mujeres, en todas las épocas que han disfrutado trabajando en matemáticas.

Objetivos

- Hoy vamos a hacer un recorrido por la Historia de las Matemáticas fijándonos en aquellas mujeres que han sabido Matemáticas y analizando:
  - Cómo ha sido su educación,
  - Cuáles sus preocupaciones
  - Qué circunstancias las condujo a interesarse por aprender Matemáticas
  - Cómo y cuando podría utilizarse su biografía o anécdotas referentes a ellas, en el aula de Matemáticas, como recurso motivador.

Biografías de mujeres matemáticas

- 1) Teano
- 2) Hipatia
- 3) Émilie, marquesa de Châtelet
- 4) Sophie Germain
- 5) María Gaetana Agnesi
- 6) Ada Lovelace
- 7) Mary Somerville
- 8) Sonia Kovalevskaya
- 9) Emmy Noether
- 10) Grace Chisholm Young

1) Teano

- Teano, natural de Crotona, Grecia, s. VI a.C., se casó con Pitágoras cuando éste ya era viejo. Fue su discípula y más tarde enseñó en la Escuela Pitagórica.
- A Pitágoras lo mataron durante una rebelión contra el gobierno de Crotona en la que la Escuela fue destruida y sus miembros muertos o exiliados.
- Teano sucedió a Pitágoras a la cabeza de esta comunidad, ahora dispersa. Con la ayuda de dos de sus hijas difundió los conocimientos matemáticos y filosóficos en Grecia y Egipto.

1) Teano

- La Escuela Pitagórica estaba formada por los seguidores de Pitágoras (572 - 497 a.C.). En la influyente escuela pitagórica las matemáticas se estudiaban con pasión. Se afirmaba "*todo es número*" ya que se creía que en la naturaleza todo podía explicarse mediante los números. Lo que se trabajaba llevaba el nombre de la Escuela, y por tanto todo es atribuido a Pitágoras. Pero saber Matemáticas era peligroso y por eso la Escuela fue perseguida.

1) Teano

- Dentro de la sociedad griega el tratamiento de la mujer en la Escuela Pitagórica fue una excepción.
- La mujer griega se ocupaba de las cosas de casa, y era prácticamente una posesión del esposo.
- Sólo las extranjeras, las hetairas, eran compañeras de los hombres y hablaban, sabían...

1) Teano

- Escribió mucho. Se le atribuye haber escrito tratados de matemáticas, física y medicina, y también el precepto matemático de la proporción áurea.
- Ha habido muchas mujeres en distintas ramas de la Escuela Pitagórica. Han sobrevivido algunos nombres como **Damo, Myia, Fintis, Melisa, Tymicha**.

1) Teano. Actividades

- ***El trabajo de Teano: "Números". "El número de oro". "La proporción áurea". "Rectángulos áureos". "Estrella pitagórica".***
- Para recordar a Teano proponemos actividades relacionadas con los números o con la divina proporción, proporción áurea o número de oro.

Actividad: Números perfectos y números amigos

- Abrimos un nuevo archivo de la hoja de cálculo de Excel y nos colocamos el la celda A1 para ponerle título.
- En la celda A6 escribimos Número N= y en B6 el número que vamos a comprobar si es perfecto. En nuestro caso este número es 28. En A7 escribimos “d=“ y en B7 posibles divisores de N.
- En A9 escribimos d, en B9 N/d, en C9 Entero(N/d) y en D9 divisores, la fila 10 la dejamos para separar este encabezamiento de las fórmulas que vamos a introducir a continuación.

Actividad: Números perfectos y números amigos

- En A11 escribimos 1, seleccionamos el rango (A11:A37) y activamos **Llenar en serie** para introducir en esta columna desde 1 hasta 27 que son los posibles divisores de 28, exceptuando el mismo.
- En B11 escribimos la fórmula =$B$6/A11, seleccionamos el rango (B11:B37) y activamos **Llenar hacia abajo.** Así vamos obteniendo los distintos cocientes al dividir el número que esta en la celda B6 que es 28 y como B está entre el simbolo $ permanece invariante entre todos sus posibles divisores.
- En C11 introducimos la fórmula =Entero(B11), y seleccionando el rango (C11:C37) activamos **Llenar hacia abajo**.

Actividad: Números perfectos y números amigos

- Para seleccionar los números introducidos en la columna A que son divisores del número considerado, basta con comprobar que en su fila correspondiente las columnas B y C coinciden, para lo que es suficiente introducir en D11 la fórmula =SI(B11=C11;A11;0) y seleccionando el rango (D11:D37) activar **Llenar hacia abajo.**
- Colocados en la celda B29 introducimos el texto "Suma de divisores" y en D29 la fórmula =SUMA(D11:D37). Si el valor de esta suma coincide con el número de la celda B6, entonces este número es perfecto.
- Observa que 6 es también perfecto. Otro número perfecto es 496.
- Si copiamos el rango (A6:D39) en (F6:I39) tendremos diseñada una hoja de cálculo para determinar si dos números son amigos, cambiando en G11 $B$6 por $G$6 e introduciendo valores en B6 y G6, por ejemplo dos números amigos son 284 y 220.

NÚMEROS PERFECTOS

****

Esta hoja de cálculo permite determinar si un número es perfecto calculando la suma de sus divisores exceptuando el propio número

Número N=	28			
d=	posibles divisores			
d	N/d	Entero(N/d)	divisores	
========	=========	============	============	
1	28	28	1	
2	14	14	2	
3	9,3333	9	0	
4	7	7	4	
5	5,6	5	0	
6	4,6667	4	0	
7	4	4	7	
8	3,5	3	0	
9	3,1111	3	0	
10	2,8	2	0	
11	2,5455	2	0	
12	2,3333	2	0	
13	2,1538	2	0	
14	2	2	14	
15	1,8667	1	0	
16	1,75	1	0	
17	1,6471	1	0	
18	1,5556	1	0	
19	1,4737	1	0	
20	1,4	1	0	
21	1,3333	1	0	
22	1,2727	1	0	
23	1,2174	1	0	
24	1,1667	1	0	
25	1,12	1	0	
26	1,0769	1	0	
27	1,037	1	0	
	Suma de divisores:		28	

1) Teano. Actividades

- El número de oro: El todo es a la parte, como esa parte es a lo que queda.
- La proporción áurea. Concepto de proporción. El alumnado debe medir, cada uno a una persona, la altura total, y la altura desde el ombligo al suelo, y calcular el cociente. Anotar los resultados.
- Rectángulos áureos
- Triángulos áureos y estrella pitagórica

1) Teano. Actividades

- La proporción áurea. Concepto de proporción. El alumnado debe medir, cada uno a una persona, la altura total, y la altura desde el ombligo al suelo, y calcular el cociente. Anotar los resultados.
- El objetivo es que comprendan que una proporción es el cociente de dos cantidades, en este caso longitudes.

1) Teano. Actividades

- Resulta interesante observar como los resultados obtenidos se acercan al número de oro. Suelen estar entre 1’5 y 1’7. Cuanto más próximo sea el resultado a 1’618... más armónica podemos decir que es esa persona.
- *También pueden medirse, y dividirse las longitudes de la altura total y la altura hasta el borde de los dedos, o la distancia desde el nacimiento del pelo al mentón y la distancia desde el nacimiento del pelo a la comisura de los labios.*

1) Teano. Actividades: Rectángulos áureos

- Un “rectángulo áureo” es un rectángulo cuyos lados AC y AD están en proporción áurea, es decir, AC/AD = Φ.
- *Comprueba que un rectángulo áureo tiene las siguientes propiedades: Si a un rectángulo áureo ADFC le quitamos (o le añadimos) un cuadrado de lado AD obtenemos el rectángulo BEFC semejante al de partida y que por lo tanto también es áureo. Al cuadrado que quitamos (o añadimos) se le llama “gnomon”. Es lo que hay que quitar o añadir para que algo siga siendo semejante a si mismo.*

1) Teano. Actividades: Rectángulos áureos

- *De esta forma se pueden construir espirales (pseudoespirales) como la de la figura. Observa como los puntos A, E, ... están en una espiral logarítmica. Al crecer los ángulos en progresión aritmética de diferencia* α *= 90º, crecen los lados en progresión geométrica de razón* Φ.

1) Teano. Actividades: Triángulos áureos y estrella pitagórica

- Igual que hemos hecho con los rectángulos, podemos plantearnos como debe ser un triángulo isósceles para que al quitarle un “gnomon” el triángulo resultante sea semejante al de partida.
- *Investígalo. ¿Cuál es la proporción entre sus lados? ¿Es el número de oro?*
- Se observa que si el triángulo es acutángulo sus ángulos miden, uno 36º y los otros dos 72º. (Si fuese obtusángulo medirían uno 108º y los otros dos 36º).

1) Teano. Actividades: Triángulos áureos y estrella pitagórica

- *Observa una estrella de cinco puntas. ¿Son triángulos áureos todos los triángulos que aparecen? Escribe la proporción existente entre cada dos longitudes consecutivas de la estrella.*
- En la estrella de cinco puntas aparece la proporción áurea entre cada dos longitudes consecutivas. Por eso recibe también el nombre de estrella pitagórica, ya que los pitagóricos, y recordemos que Teano quedó como responsable de la escuela pitagórica a la muerte de Pitágoras, asombrados al descubrir las propiedades tan asombrosas del número de oro, tomaron a la estrella como emblema, un saber reservado únicamente a los iniciados.

2) Hipatia

Alejandría (370? - 415 d.C.)

- *La leyenda de Hipatia de Alejandría nos muestra a una joven, virgen y bella, matemática y filósofa, cuya muerte violenta marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval.*
- *Fue recordada como una gran maestra y admirada por la magnitud de sus conocimientos.*
- *Ha sido considerada como el mejor matemático vivo del mundo greco-romano*.

2) Hipatia

- El padre de Hipatia, Teón, era un ilustre matemático y astrónomo, que supervisó la educación de su hija. Quiso que fuese un ser humano perfecto por lo que vigiló la educación de su mente y de su cuerpo mediante todo tipo de ejercicios una buena parte de cada día. Este riguroso entrenamiento consiguió su objetivo ya que la belleza de Hipatia y su talento fueron legendarios.

2) Hipatia

- *Enseñó Matemáticas, Astronomía y Filosofía.*
- *Escribió un trabajo titulado “El Canón Astronómico”,*
- *Comentó las grandes obras de la matemática griega como la “Aritmética” de Diofanto, “Las Cónicas” de Apolonio, el libro III del “Almagesto” de Tolomeo, probablemente comentara junto a su padre, los “Elementos” de Euclides y el resto del “Almagesto”.*
- *Construyó instrumentos científicos como el astrolabio y el hidroscopio.*

2) Hipatia

- En el año 412 dos ideologías se oponen violentamente con distintos intereses: el orden antiguo, simbolizado por el gobernador Orestes, defensor del imperio greco-romano; y el poder cristiano en expansión conducido por el patriarca cristiano Cirilo, cristiano fanático, que se apoya en el nacionalismo egipcio, en el malestar social, las masas oprimidas de esclavos y de no ciudadanos. Todos ellos se dejan convertir a la nueva religión.

2) Hipatia

- Hipatia se negó a convertirse al cristianismo. Pagana, científica y personaje político influyente su situación fue cada vez más peligrosa en Alejandría. En la cuaresma, en marzo de 415, acusada de ejercer sobre Orestes una influencia contraria a Cirilo, fue asesinada. Un grupo de cristianos exaltados, la encontraron en el centro de Alejandría *"La arrancaron de su carruaje; la dejaron totalmente desnuda; le tasajearon la piel y las carnes con caracoles afilados, hasta que el aliento dejó su cuerpo; descuartizaron su cuerpo ..."*

2) Hipatia. Actividades

- Sopa de letras
- Problemas
- Las cónicas:
  - Construidas por puntos
  - La elipse como lugar geométrico
  - La elipse como envolvente
  - Secciones del cono

Actividad: Sopa de letras

- Busquemos en esta sopa de letras diez nombres de hombres y mujeres matemáticos/as de la antigüedad:

H	A	D	I	O	F	A	N	T	O
I	T	A	L	E	S	D	A	M	O
P	I	T	A	G	O	R	A	S	O
A	N	E	U	C	L	I	D	E	S
T	O	A	P	O	L	O	N	I	O
I	E	N	O	T	A	L	P	E	I
A	T	O	L	O	M	E	O	I	S

Actividad: ¡Sobra un sestercio!

- Estaba un día Hipatia paseando por la orilla del Nilo cuando vio venir a dos mujeres que discutían acaloradamente. Las mujeres al ver a Hipatia le consultaron su problema, pues como tenía tanta fama de mujer sabia no dudaban que quisiera ayudarlas a resolverlo.
- Las mujeres habían ido al mercado a vender 30 manzanas cada una. La primera tenía la intención de vender cada dos manzanas por un sestercio. *¿Cuanto pensaba ganar?*
- La segunda quería venderlas cada tres manzanas por dos sestercios. *¿Cuánto ganaría?*
- Pero como no querían quitarse posibles compradores y hacerse la competencia decidieron llegar a un acuerdo: vender ambas cada cinco (2+3) manzanas por tres (1+2) sestercios. Habían vendido todo. ¡Muy bien! Habían ganado 36 sestercios. Pero, y de ahí la discusión. ¡les sobraba un sestercio! pues por la venta anterior pensaban ganar 15 + 10 =25 sestercios. El sestercio sobrante se lo habían gastado en un pastel, pero no habían dejado de discutir de donde había salido. ¡No entendían nada! *¿Podemos ayudar a Hipatia a resolver y explicar el problema a estas mujeres?*

Actividad: ¡Falta un sestercio!

- Se pusieron tan contentas cuando Hipatia les explicó detenidamente el problema anterior que decidieron las tres irse a comer juntas.
- La comida costó 30 sestercios, así que cada una pagó 10 sestercios. Pero el tabernero, que también admiraba mucho a Hipatia, decidió hacerles una rebaja, y devolvió 5 sestercios. Como 5 no es divisible entre 3, decidieron dejar 2 sestercios de propina al camarero y repartirse los 3 sestercios restantes.
- Pero una campesina dijo ¡Ahora falta un sestercio! Y explicó: Hemos pagado cada una 10 –1 =9 sestercios, que por 3 son 9 x 3 =27. Hay que sumar los 2 que hemos dejado de propina, luego son 27 + 2= 29. Pero en un principio había 30. Luego ¡falta uno! Hipatia, muerta de risa explicó donde estaba el error. Pero *¿cómo lo explicó?*

2) Hipatia. Actividades. Cónicas

- Las cónicas ya eran conocidas por los griegos. Euclides, Arquímedes y Apolonio hicieron que a finales del S. III a C. ya se supiera sobre ellas tanto como conocemos hoy.
- Ya hemos visto que también Hipatia escribió un libro *Sobre las cónicas de Apolonio* acerca del trabajo de éste, que vivió un siglo antes.
- Estuvo fascinada por estas curvas, (círculos, elipses, parábolas e hipérbolas, que aparecen al cortar un cono con un plano), igual que lo estuvieron otros griegos anteriores.

2) Hipatia. Actividades

- La curiosidad científica entre los griegos estuvo impulsada por un sentido estético, sin otra finalidad que la de satisfacer sus aspiraciones intelectuales. Las cónicas fueron para los griegos un juego del intelecto.
- Posteriormente reapareció el interés por ellas en el siglo XVII, con Kepler, al explicar el movimiento de los planetas. Durante muchos siglos se consideró que las órbitas de los planetas eran circulares. Los cometas tienen órbitas que son elipses más achatadas, e incluso algunos tienen órbitas hiperbólicas.
- Estudiando sus propiedades podemos encontrar el porqué de muchas de sus aplicaciones: antenas parabólicas, faros, trayectoria de satélites, etc.

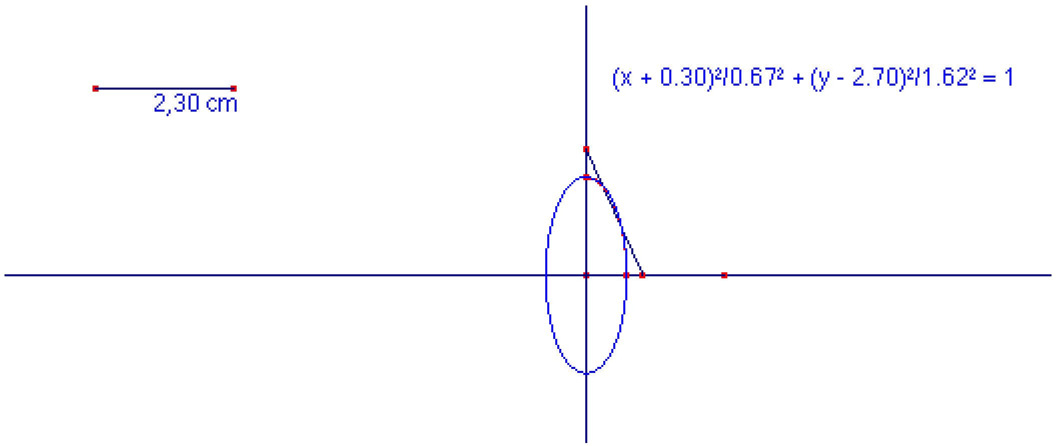
2) Hipatia. Actividades

- Al explicar el tema de cónicas podemos mencionar a Hipatia (aunque también sería justo mencionarla al estudiar alguna ecuación con soluciones enteras -ecuación diofántica- o al trabajar la geometría euclídea).
- Quizás, gracias a su trabajo, haya llegado a nosotros el conocimiento de la obra de Apolonio, o de las otras obras antes mencionadas.
- La bibliografía sobre cónicas es muy amplia y muy conocida. Veremos por eso sólo algunas actividades sobre ellas.

2) Hipatia. Actividades

***Actividad:* La elipse construida por puntos**

- *Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve un gatito sentado en la escalera?* (Vasíliev; 1980).



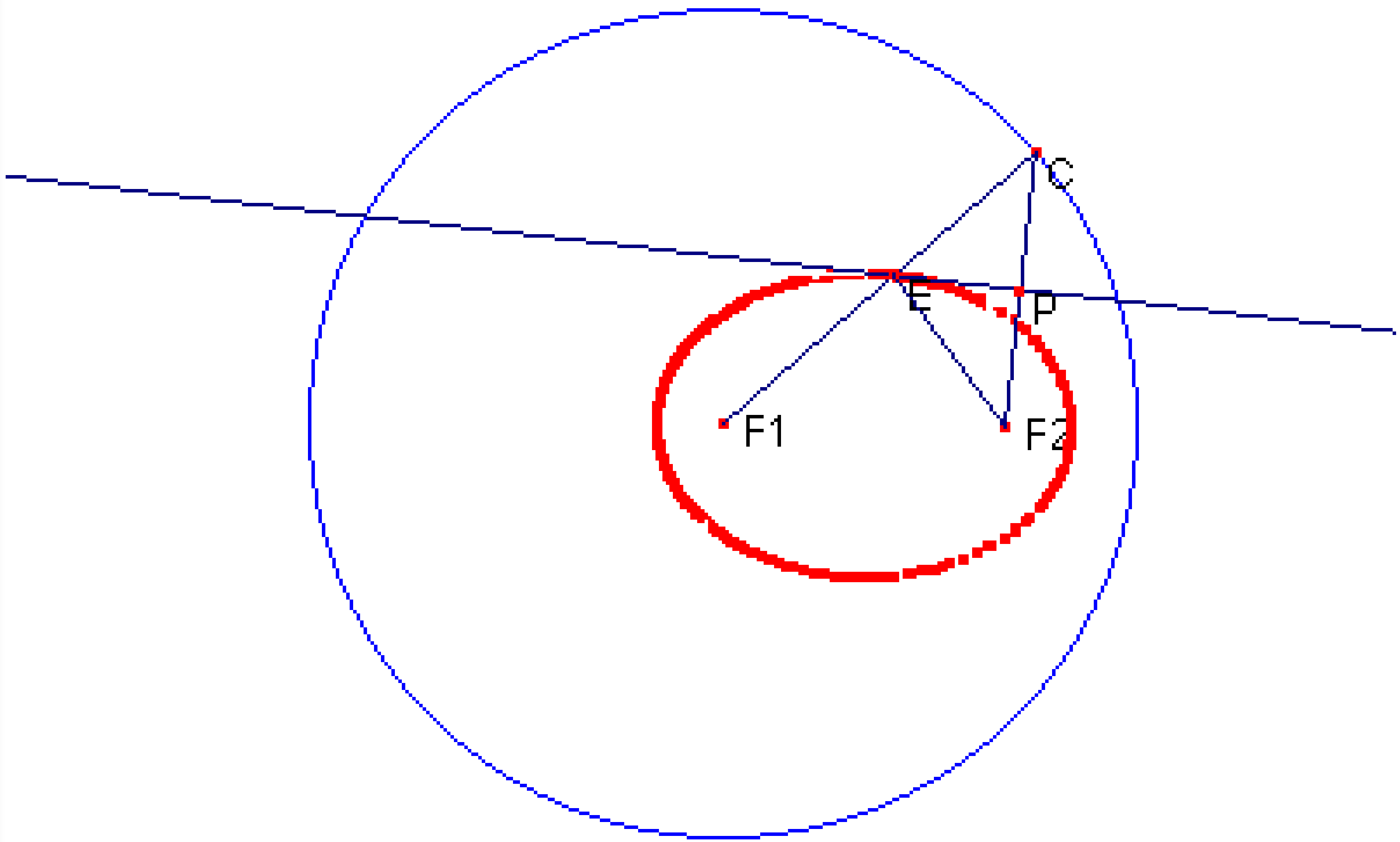
2) Hipatia. Actividades

***Actividad:* La elipse como lugar geométrico**

- *Un jardinero clava dos estacas y ata a ellas una cuerda. Manteniendo la cuerda estirada traza una elipse.*
- *Dibuja una trama de circunferencias concéntricas como las de la figura y traza en ella diversas elipses: aquellas cuya suma de distancias sea 12; sea 14...*
- *Dibuja ahora sobre la trama de circunferencias concéntricas distintas hipérbolas: aquellas cuya diferencia de distancias sea 8; sea 6 ....*

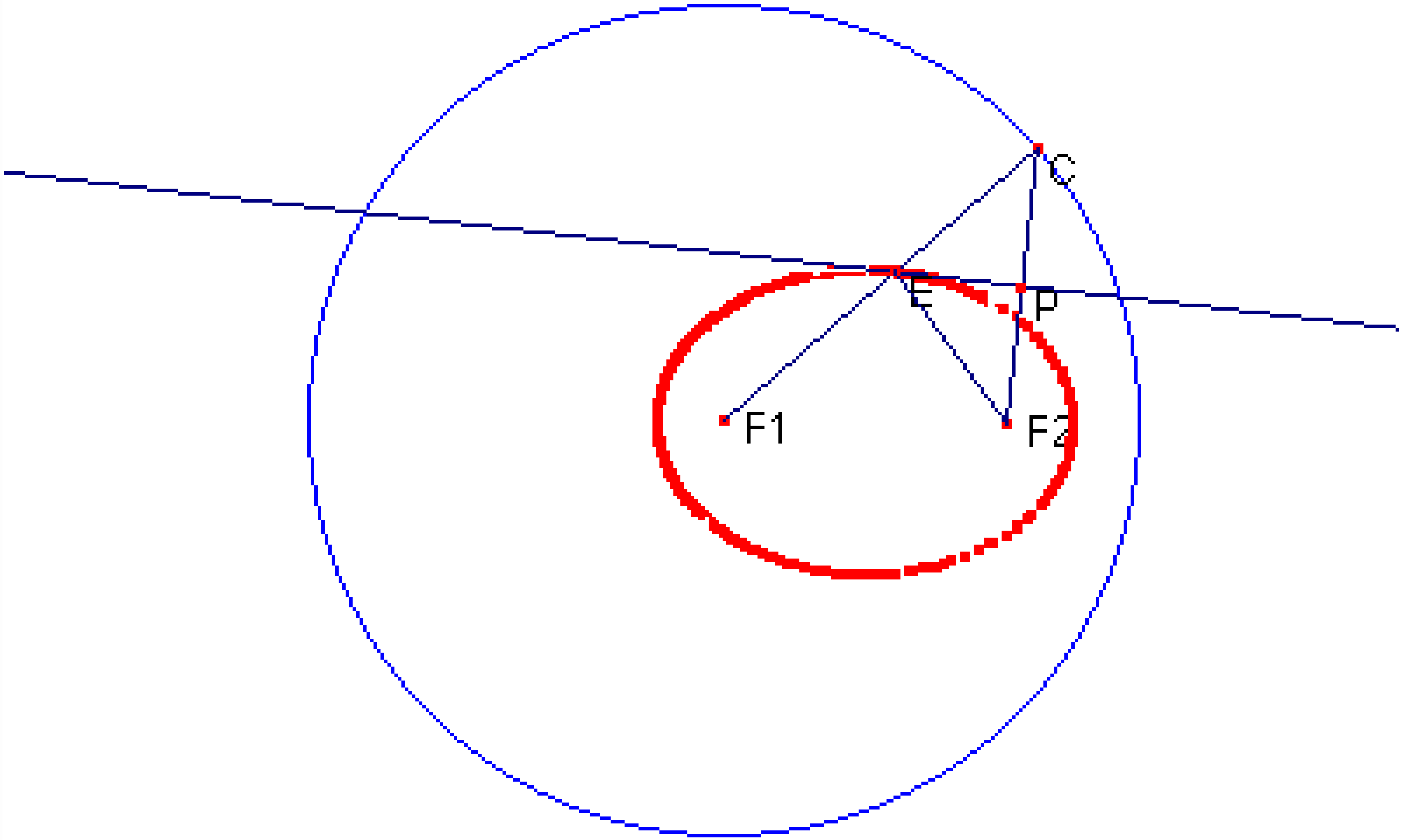
2) Hipatia. Actividades

- ***Actividad:* La elipse como envolvente**
- *Dibuja una circunferencia y en su interior marca un punto distinto del centro*
- *Dobla el papel de forma que hagas coincidir el punto con uno de la circunferencia*
- *Repite el proceso al menos diez veces. Observa como los dobleces envuelven a una elipse.*

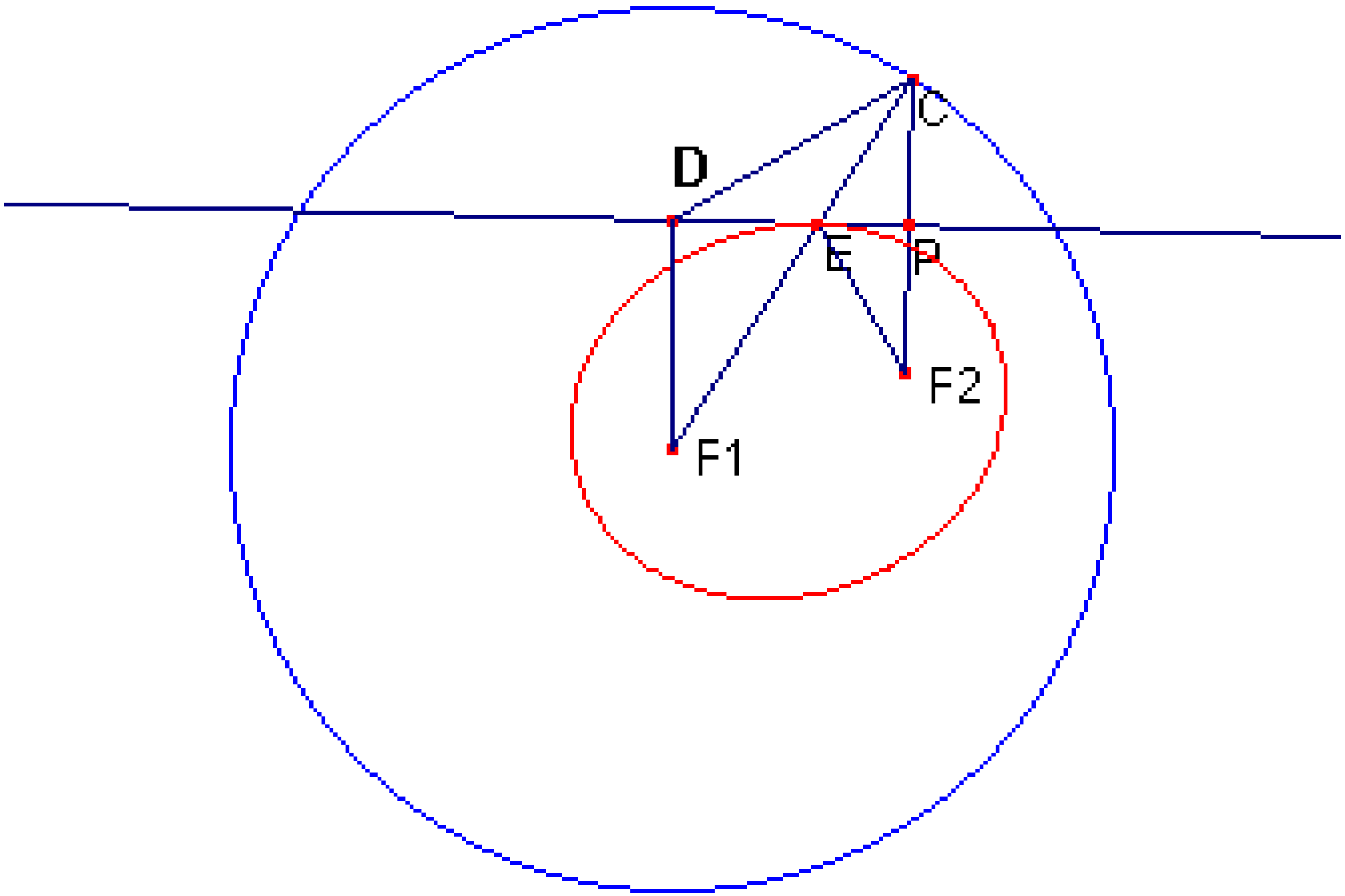

C
E
P
F1
F2

Práctica con Cabri: Construcción de una elipse.

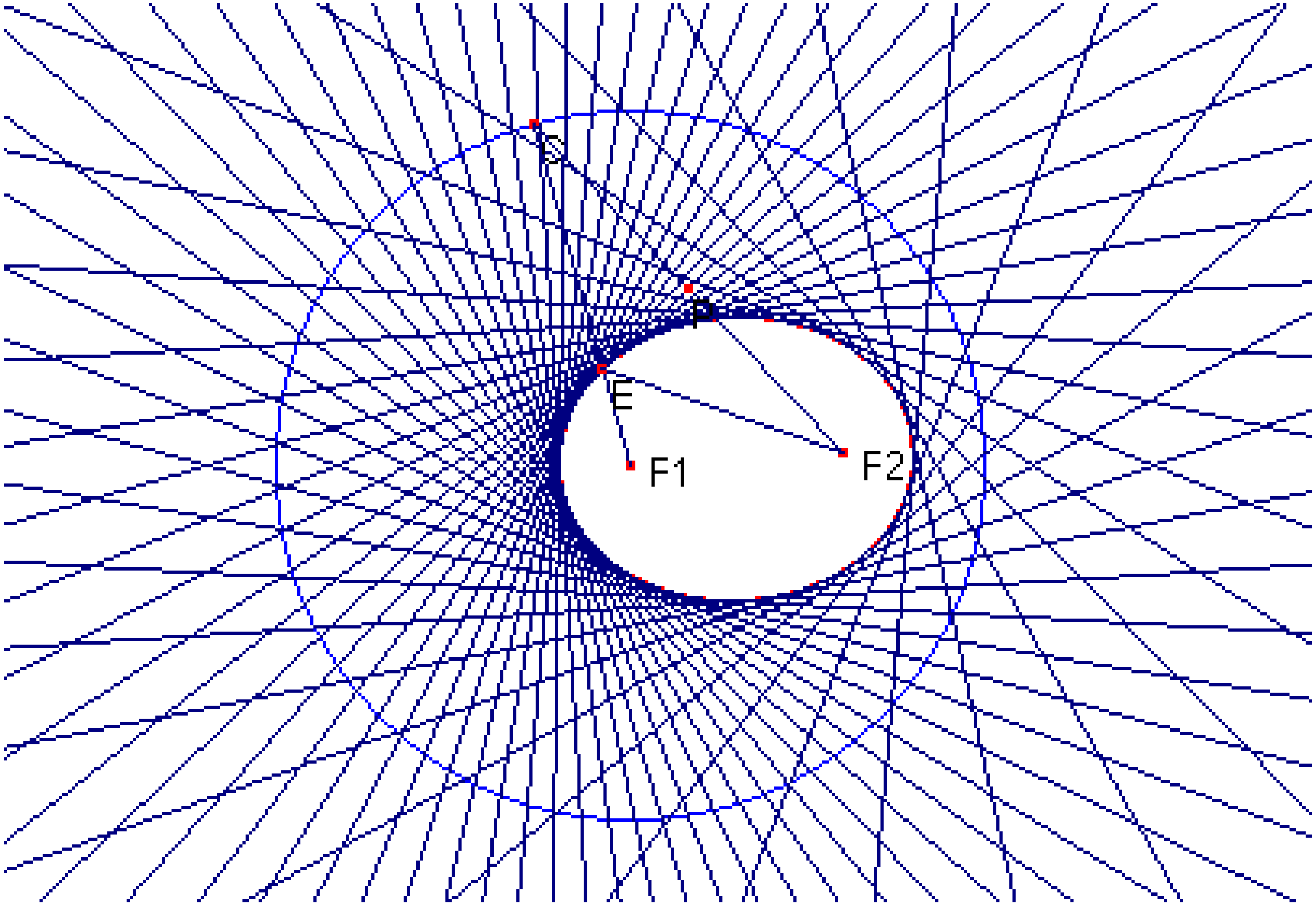
- • Dibujamos dos puntos que llamamos F_1 y F_2, que van a ser los focos de la elipse que vamos a construir. Con centro en F_1 trazamos una **circunferencia** con centro en F_1 y radio mayor que la distancia entre F_1 y F_2.
- • Activamos **punto sobre objeto** para definir un punto C de la circunferencia y trazamos los segmentos que unen este punto con F_1 y $F_{2.}$
- • Con la herramienta **mediatriz** dibujamos la mediatriz del segmento CF_2 y definimos como E el **punto de intersección** de esta recta con el segmento CF_1.
- • Activamos **traza** para el punto E y **animación** para el punto C, así cuando el punto C recorre la circunferencia, el punto E describe la elipse de la figura, también se puede dibujar la elipse sin activar animación, desplazando el punto C con el puntero por la circunferencia.


C
E
P
F1
F2

- • Si con el **puntero** llevamos el punto F_2 muy cerca de F_1 ¿como varía la forma de la elipse? ¿y si están más alejados?
- • Si modificamos la circunferencia, agarrándola con el puntero y haciéndola más grande o más pequeña. ¿Cómo influye en la elipse que se forma?.
- • Si determinamos los segmentos F_1E y F_2E y medimos sus longitudes, observamos que su suma coincide con el radio de la circunferencia F_1C Además esta igualdad permanece cuando modificamos el radio de la circunferencia. ¿Seremos capaces de demostrar sin utilizar Cabri la relación que existe entre el radio de la circunferencia y los parámetros de la elipse?.
- • Elige un punto D cualquiera de la mediatriz del segmento F_2C y demuestra sin utilizar Cabri que no es un punto de la elipse y que por lo tanto esta recta es tangente a la elipse.


C
D
E
P
F2
F1

- • Activa *traza* para la mediatriz y *animación* para el punto C y comprueba que la elipse es la envolvente



Actividad: El enigma de la oreja de Dionisio

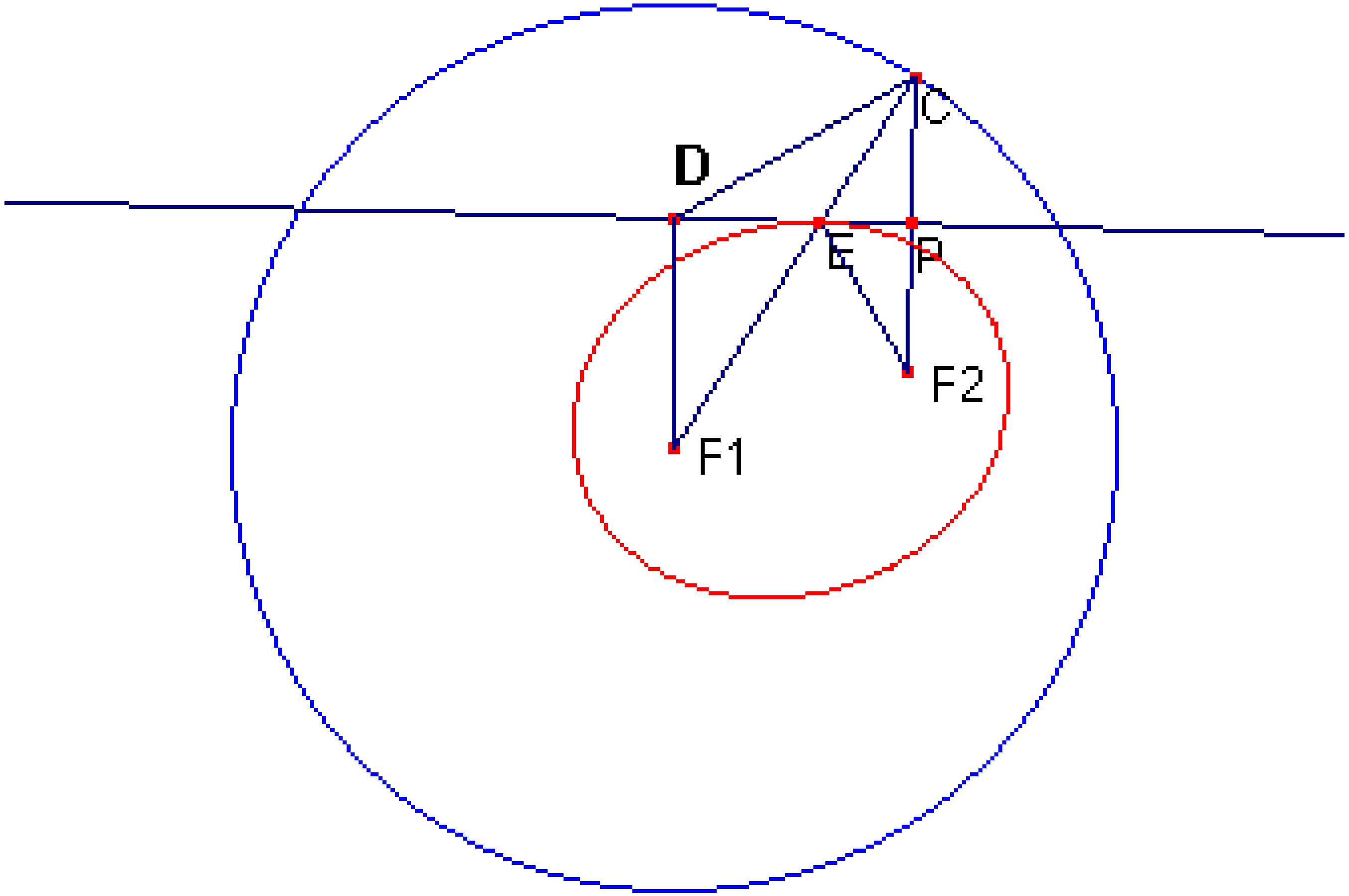
- También, en la actualidad, cualquier cuchicheo en uno de los lados del antiguo hall del Capitolio de Washinthon se puede escuchar perfectamente en el lado opuesto. ¡Se cuenta que más de una vez se han conocido de este modo conversaciones confidenciales entre los diputados! *¿Conocéis más ejemplos similares en otros lugares?*
- Hay lugares en el mundo que son conocidos por su especial acústica; son lugares en los que se produce una *focalización* de los sonidos, como la utilizada públicamente en los calabozos de Siracusa y que fue llamada "oreja de Dionisio". A ese punto llegaban todas las conversaciones, e incluso los cuchicheos de los presos a los oídos del tirano a través de un tubo escondido. *¿Qué explicación matemática tiene el enigma de la oreja de Dionisio?*

Actividad: El enigma de la oreja de Dionisio

- La Catedral de Agrigent, en Sicilia, puso en apuros a más de una persona. Su cúpula tiene la forma de un elipsoide de revolución, y cualquier susurro que se pronuncie en uno de sus focos se puede escuchar exactamente con la misma intensidad en el otro foco. ¡Y al poco de ser construida se descubrió que en uno de esos focos se había colocado un confesionario! Lo descubrió un hombre que se lo pasaba en grande escuchando las confesiones, y que incluso invitaba a sus amigos a escucharlas, hasta que un día fue a confesarse su propia esposa, y no le gustó nada lo que oyeron él y sus amigos. *¿Tiene el mismo fundamento matemático que los casos anteriores?*
- El enigma de la Catedral, del hall del Capitolio de Washinthon, y de la oreja de Dionisio se fundamenta matemáticamente en que en una elipse los rayos que pasan por un foco “rebotan” en la elipse y pasan por el otro foco. Si un susurro se produce en el foco F_1, lleve la dirección que lleve, al rebotar en la elipse va a parar al otro foco F_2 con intensidad suficiente como para que se pueda entender perfectamente lo que se ha dicho, mientras que a cualquier otro punto llega sólo el sonido que se dirige directamente hacia él y no se percibe lo suficiente.

Actividad: El enigma de la oreja de Dionisio

- Vamos a estudiar sin demasiadas cuentas la explicación matemática de esta curiosa propiedad descubierta por Apolonio y estudiada por Hipatia.
- Traza una circunferencia de centro en F_1 y radio r=*2a,* la longitud del eje mayor de la elipse. Toma un punto cualquiera E de la elipse y únelo con F_1 y con F_2. Por estar E en la elipse verifica que $F_1E + EF_2 = 2a$, por lo que si prolongamos F_1E hasta el punto C en la circunferencia, también tenemos que $2a = F_1E + EC$, por lo que $EC = EF_2$. Traza la mediatriz *t* del segmento CF_2.


C
D
E
P
F2
F1

Actividad: El enigma de la oreja de Dionisio

- *¿Cómo podríamos demostrar que t, la mediatriz de CF_2, es la recta tangente a la elipse en el punto E? ¿Quién se atreve con una rigurosa demostración matemática?*
- La recta *t*, al pasar por E, ya corta en un punto a la elipse. Si probamos que sólo corta a la elipse en ese único punto entonces quedará probado que *t* es la recta tangente a la elipse por E. *¿Intentemos probarlo?*
- Si tuviera otro punto de intersección D, verificaría también que $F_1D + DC$ es igual a *2a.* Sin embargo se tiene $CD + DF_1 > CF_1 = 2a$ (observemos la figura).

Actividad: El enigma de la oreja de Dionisio

- Una bola en una mesa de billar al pegar en una de las bandas rebota formando ángulos iguales de entrada y de salida con la banda. Y una onda sonora al chocar con la elipse se comporta de la misma manera, y rebota como si la elipse fuese su recta tangente. *Estudiemos si los ángulos de entrada y de salida son iguales.*
- Una onda sonora emitida desde F_1 hacia E rebotaría en *t* formando ángulos iguales de entrada y salida con *t*. *Observemos la figura y comprobemos que:*
- *El ángulo F_1ED es igual al ángulo CEP ¿Por qué?*
- *Y el ángulo CEP es igual al ángulo PEF_2 ¿por qué?*
- Luego la onda sonora emitida desde F_1 rebota en E y pasa por F_2. ¡Ya hemos resuelto el enigma de la oreja de Dionisio!

Actividad: Construcción de elipses

- La explicación del enigma anterior nos puede permitir construir elipses simplemente doblando un papel, o utilizando *Cabri* para hacer esos “doblados”
- *Imaginemos que tenemos en un papel únicamente dibujada la circunferencia y un punto, el foco F_2 de nuestra figura anterior, y que doblamos haciendo coincidir a F_2 con un punto cualquiera de la circunferencia, C. El doblez es la recta t, mediatriz del segmento F_2C y tangente a la elipse. Repetimos el proceso muchas veces haciendo muchos dobleces distintos. La elipse se va formando como envolvente de esas rectas tangentes.*

3) Gabrielle Émilie de Breteuil, marquesa de Châtelet

Francia (1706-1749)

- Escribió *Las instituciones de la física* (“Les Institucions de Phisiques ») 1740
- Publicó varios ensayos de filosofía y ciencia: *Ensayo de óptica, Disertaciones sobre la naturaleza y propagación del fuego* y el ***"Discurso sobre la felicidad"*** ("Essai sur l'optique", 1736, "Dissertation sur la nature et la propagation du feu", 1737). Tradujo los *Principia* de Newton
- Divulgó los conceptos del cálculo diferencial e integral.

3) Émilie de Châtelet

- ¿Cómo era la educación de las mujeres en aquella época?
- ¿Por qué tuvo Émilie la suerte de recibir una espléndida formación?
- ¿Quiénes fueron sus profesores?
  – Maupertuis
  – Claireaut

3) Émilie de Châtelet

- Dice (Savater; “El jardín de las dudas”, 1993, 69):
- *"Se llamaba Gabriela Emilia Le Tonnelier de Breteuil y fue marquesa de Châtelet desde su matrimonio a los diecinueve años. Procedía de una familia muy antigua y noble". "El barón de Breteuil, su padre, se ocupó de que recibiera una educación muy completa, lo que convenía perfectamente a las disposiciones intelectuales de la dama. Dominaba el latín como la señora Dacier: se sabía de memoria los trozos más hermosos de Horacio, de Virgilio y de Lucrecio; las obras filosóficas de Cicerón le eran familiares. De las lenguas modernas había aprendido italiano y algo de alemán".*

- *“Confesaré que es tiránica. Para hacerle la corte es necesario hablarle de Metafísica, cuando uno querría hablar de amor.”*

(Voltaire, agosto 1733)

- *“En imaginación y en razón está por delante de las gentes que presumen de una y otra cosa”, “lee álgebra como quien lee una novela”, “después de escribiros voy a ir a su encuentro y a aprovechar más de su conversación que aprendería en los libros”*

Voltaire

- *“La obra es de una dama, y lo que aumenta su prodigio es que esta dama, habiendo sido educada en las disipaciones que conlleva un nacimiento de rango, no ha tenido por maestro más que su genio y su aplicación en instruirse”.*

(Maupertuis).

- *“Espero que inspire el amor por las matemáticas y por el estudio a mi hijo”* (E. Châtelet. Correspondencia con Bernoulli, 28 abril 1739)

3) Émilie de Châtelet. Actividades

- ***El trabajo de Emilia Breteil. “Límites, derivación e integración”***
- La introducción de los nuevos conceptos de límites, derivación e integración requiere la construcción de nuevas Matemáticas. Newton y Leibniz, trabajando independientemente en distintos lugares dieron la forma definitiva al cálculo, tal y como lo conocemos hoy.
- Ya hemos visto como en los salones de Emilia de Châtelet se explican, discuten y analizan estos nuevos conceptos hasta ser comprendidos. Quizás sin su entusiasmo hubieran tardado más en ser conocidos.

3) Émilie de Châtelet. Actividades

Actividad: Pasatiempo para ilustrar el concepto de límite

- El concepto de límite es fundamental en el cálculo diferencial e integral.
- *Observa este conjunto de círculos y polígonos. Cada círculo y cada polígono contiene una letra del alfabeto. Debes completar el mensaje con estas letras, haciendo coincidir el número con la lista adjunta:*
- 1. Círculo inscrito en el triángulo
- 2. Triángulo
- 3. Círculo que circunscribe al triángulo
- 4. Cuadrado
- 5. Círculo inscrito al pentágono
- 6. Pentágono
- 7. Círculo inscrito al hexágono
- 8. Hexágono
- 9. Círculo que circunscribe al hexágono
- 10. Polígono de siete lados
- 11. Círculo que inscribe al octógono
- 12. Octógono
- 13. Círculo que circunscribe al octógono
- *Solución: Las matemáticas son una manifestación de la época*

Actividad: El concepto de derivada

- *Se toman medidas sobre una fotografía y se deduce que el movimiento de una determinada partícula responde a la ecuación:* $s = t^2 - 4t + 9t$
- *Calculamos, con ayuda de la calculadora, el espacio recorrido entre los instantes 2 y t, siendo t: 4, 3, 2'5, 2'1, ...*
- *Calculamos el espacio recorrido entre los instantes t y 2, siendo t: 1, 1'5, 1'9 ...*
- *Calculamos las velocidades medias obtenidas en los intervalos (2, t) anteriores y en los (t, 2).*
- *Dibujamos la gráfica de la función dada y la recta tangente a esa función en el punto de abscisa 2. Comparamos la pendiente de la recta tangente obtenida gráficamente con las velocidades medias antes calculadas.*

Actividad: Cálculo de la derivada de una función en un punto, de forma aproximada, utilizando una hoja de cálculo

- En la época de Émilie los conceptos del cálculo diferencial no estaban todavía muy perfeccionados y aún no estaba claro el concepto de límite. Entonces una derivada podía verse como el cociente de dos incrementos, el de la función y el de la variable, cuando este último era muy pequeño. Por tanto podemos calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y aproximarla haciendo que éste sea cada vez más y más pequeño.
- Una forma de hacerlo es con la ayuda de un ordenador y una hoja de cálculo, pero podríamos hacerlo con una calculadora, con otra hoja de cálculo distinta, con otra función o en otro punto.

Práctica con la hoja de cálculo

- En la hoja de cálculo de Works abrimos un nuevo archivo y nos colocamos en la celda **A1** para poner el título: *DERIVADA.*
- En la celda **A5** escribimos la palabra *Función:,* y en **B5** la función de la que queremos calcular de forma aproximada su derivada en un punto. En este ejemplo la función va a ser logaritmo neperiano de x que escribimos *LN(x).* En **A6** escribimos *Punto de abscisa:* y en **B6** la abscisa del punto en el que queramos calcular la derivada, que en nuestro caso va a ser *1*. En **A7** escribimos el texto *LN(1)*= y en **B7** la fórmula =*LN(1)* por lo que aparecerá escrito un *0*. En **A8** tecleamos *h*= y en **B8** el valor que vamos a darle, que en nuestro caso va a ser *0,8*. Hacerlo así nos permite tener las cosas claramente dispuestas y que la misma hoja nos sirva para modificar el incremento h, la abscisa del punto, o la función.

Práctica con la hoja de cálculo

- En las celdas **A9**, **B9**, **C9**, **D9** y **E9** escribimos respectivamente como texto: *h, a+h, f(a+h), f(a+h)-f(a), (f(a+h)-f(a)/h).*
- En la celda **A11** queremos poner el valor inicial de h, pero como ya está escrito en la celda B8 entonces escribimos =*B8***.** En esa columna A queremos escribir valores del incremento *h* cada vez más pequeños, y una forma de obtenerlos es multiplicar sucesivamente por un número menor que uno, que puede seguir siendo 0,8, por esto la fórmula que debemos escribir en **A12** es *=A11*$B$8.* La celda B8 la expresamos $B$8 para que permanezca invariable cuando utilicemos el comando **"Llenar hacia abajo"**.
- Seleccionamos el rango **A12:A40**, activamos el comando **"Llenar hacia abajo"** del menú de **"Edición"**, y de esta forma tendremos escritos 30 valores de *h* cada vez más pequeños.

Práctica con la hoja de cálculo

- En la celda **B11** queremos poner el valor de *a+h* para lo que es suficiente que tecleemos *=$B$6+A11.* ¿Por qué? ¿Cómo escribimos el resto de la columna? En efecto, para llenar el resto de la columna basta con que seleccionemos el rango B11:B40 y activemos “Llenar hacia abajo”.
- Recordemos, en **C11** ¿qué hay que poner? Como queremos aplicar la función logaritmo neperiano al valor de la casilla B11, es suficiente que escribamos: *=LN(B11).* Completamos la columna seleccionando el rango C11:C40 y activando “Llenar hacia abajo”
- Ahora debemos escribir en **D11** la diferencia entre el valor anterior y *f(a)* que es siempre fijo y está en la celda B7 ¿Cómo lo haríamos? En efecto tendremos que escribir *=C11-$B$7.*

Práctica con la hoja de cálculo

- En **E11** debemos dividir el valor de la casilla D11 entre el incremento, que está en la celda A11. Escribimos *=D11/A11.* ¿Por qué? Terminamos seleccionando el rango D11:E40 y activando "Llenar hacia abajo" para que toda las casillas queden rellenadas.

- Podemos ver como ha quedado la hoja de cálculo. Todavía podemos hacer algunas mejoras en la presentación. Situado en la celda **A11** podemos activar **"Inmovilizar títulos"** del menú de **"Herramientas"** con el que podemos desplazarnos por la hoja manteniendo fijas las diez primeras filas.

DERIVADA

Función:	LN(x)			
Punto de abscisa:	1			
LN(1)=	0			
h=	0,8			
h	a+h	f(a+h)	f(a+h) - f(a)	(f(a+h) - f(a))/h
0,8	1,8	0,58778666	0,58778666	0,734733331
0,64	1,64	0,49469624	0,49469624	0,772962878
0,512	1,512	0,41343328	0,41343328	0,807486871
0,4096	1,4096	0,34330598	0,34330598	0,838149356
0,32768	1,32768	0,28343306	0,28343306	0,86496905
0,262144	1,262144	0,23281186	0,23281186	0,888106774
0,2097152	1,2097152	0,19038496	0,19038496	0,907826233
0,16777216	1,16777216	0,1550978	0,1550978	0,924454909
0,13421773	1,13421773	0,12594319	0,12594319	0,938349864
0,10737418	1,10737418	0,10199161	0,10199161	0,949870901
0,08589935	1,08589935	0,08240853	0,08240853	0,9593616
0,06871948	1,06871948	0,06646118	0,06646118	0,967137473
0,05497558	1,05497558	0,05351762	0,05351762	0,973479856
0,04398047	1,04398047	0,04304078	0,04304078	0,978633982
0,03518437	1,03518437	0,03457955	0,03457955	0,982809869
0,0281475	1,0281475	0,02775864	0,02775864	0,986184893
0,022518	1,022518	0,02226821	0,02226821	0,988907217
0,0180144	1,0180144	0,01785406	0,01785406	0,991099533
0,01441152	1,01441152	0,01430866	0,01430866	0,992862731
0,01152922	1,01152922	0,01146326	0,01146326	0,99427932
0,00922337	1,00922337	0,0091811	0,0091811	0,995416476
0,0073787	1,0073787	0,00735161	0,00735161	0,9963287
0,00590296	1,00590296	0,0058856	0,0058856	0,997060085
0,00472237	1,00472237	0,00471125	0,00471125	0,997646224
0,00377789	1,00377789	0,00377077	0,00377077	0,998115797
0,00302231	1,00302231	0,00301776	0,00301776	0,998491881
0,00241785	1,00241785	0,00241493	0,00241493	0,998793019
0,00193428	1,00193428	0,00193241	0,00193241	0,999034105
0,00154743	1,00154743	0,00154623	0,00154623	0,999227085
0,00123794	1,00123794	0,00123717	0,00123717	0,99938154

Práctica con la hoja de cálculo

- La “Hoja de Cálculo” nos permite fácilmente introducir algunos cambios casi como en un juego:

1. 1. ¿Cómo nos acercaríamos a 1 desde la derecha? ¿Qué cambio deberíamos hacer? Copiemos todo en una hoja nueva. ¿Qué ocurre si escribimos en la celda **B8** lo mismo con un signo menos, es decir, *-0,8*? Si nos fijamos los incrementos son alternativamente positivos y negativos, luego en cada paso nos acercaríamos al punto por un lado distinto.
2. 2. Quizás todavía no estemos convencidos y queramos aproximarnos más rápidamente. ¿Cómo lo haríamos? Podemos cambiar *h* por un valor más pequeño. Si escribimos, por ejemplo, en la celda **B8** el valor 0,1 ¿qué obtenemos? ¡Es demasiado pequeño! Muy pronto el ordenador estaría dividiendo por cero.

Práctica con la hoja de cálculo

1. 3. ¿Cómo calcularíamos la derivada en otro punto, por ejemplo, en el de abscisa 2? Basta con escribir en la celda **A6** un 2. Si hemos escrito en **B8** el valor *–0,8* y en **A6** un *2*, y miramos las celdas **E39** y **E40** tendremos que la derivada está entre 0,5001 y 0,4998, luego podemos conjeturar que vale 0,5.

2. 4. ¿Y la derivada de otra función? Calculemos ahora la derivada de la función exponencial en el punto de abscisa 0. ¿Nos constaría mucho esfuerzo?

3. 5. Utilicemos la hoja de cálculo para obtener nuevas derivadas.

Actividad: Jugar al dominó

- Muchos juegos tienen un origen muy antiguo. Puede ser que el dominó tenga más de cuatro mil años pues se ha encontrado en restos arquelógicos caldeos, aunque igual que los juegos de dados, hay quien opina que procede de China.
- Está formado por 28 fichas. En cada una de ellas hay dos números marcados por puntos, que oscilan entre el cero hasta el seis, es decir, con 7 valores diferentes.
- Pero *¿cuántas fichas tendría si sólo hubiera dos valores diferentes, el cero y el uno?*
- *Habría las dos fichas dobles y una ficha con cero y con un punto.*

Actividad: Jugar al dominó

- *¿Cuántas fichas tendría si hubiera tres valores diferentes? ¿y con cuatro? ¿y con cinco? ¿y con seis? ¿y con ocho? ¿Seríamos capaces de encontrar una fórmula que nos relacione en número de fichas F con el número de valores n?*
- Podemos obtener, después de elaborar tablas y de discutir distintas conjeturas, que $F_n = n(n-1)/2 + n$, o que $F_{n+1} = F_n + n+1$.

Actividad: Jugar al dominó

- Sin embargo el juego del dominó tiene una pega, es competitivo. ¡Claro que podemos jugar a él! Pero, ¿y si inventáramos otras formas de jugar en las que no hubiera ni ganadores ni perdedores?
- Hagamos una tormenta de ideas sobre como transformarlo en cooperativo. (Una tormenta de ideas consiste en que cada uno y cada una digan todo lo que se les pase por la cabeza para resolver un problema, en este caso convertir el juego del dominó en un juego cooperativo, todas las soluciones valen, sean éstas posibles o imposibles, apropiadas o no apropiadas). Todas las ideas que vayan saliendo se anotan a la vista de todo el mundo.

Actividad: Jugar al dominó

- En una segunda fase, cuando todas las ideas ya están escritas, se van comentando los aspectos positivos y negativos de cada una, mejorándolas entre todos y todas. A continuación se ponen en práctica y evaluamos el cambio que experimenta el juego del dominó. Este sistema, naturalmente, podemos usarlo para modificar en el mismo sentido otros juegos, y también se usa para resolver todo tipo de problemas.
- Vamos a proponer algunos de esos nuevos juegos con las fichas del dominó.

Juego 1º: Formando cuadrados

- *Busquemos convenientemente cuatro fichas del dominó clásico de forma que podamos colocarlas formando un cuadrado con idéntica suma en cada lado.*
- *Busquemos un cuadrado con una suma de 3 en cada lado. ¿Cuantos habrá?*
- Ahora se plantea un interesante problema, el de la igualdad en matemáticas. En este caso podemos considerar iguales a dos cuadrados que tengan las mismas fichas.

Juego 1º: Formando cuadrados

- *¿Y con una suma de 4, cuántos habrá?*
- *Más difícil todavía. Observemos que para cada cuadrado usamos 4 fichas. ¿Será posible formar siete de estos cuadrados utilizando todas las fichas del dominó a la vez?*
- El problema tiene muchas soluciones posibles, colaborando cada grupo puede encontrar alguna.

Juego 2º: Progresiones aritméticas

- *¿Podemos colocar series de seis fichas, pero, que estén en progresión aritmética?*
- *Por ejemplo, si la razón es 2; y la progresión aritmética es: 1, 3, 5, 7, 9, 11.*
- *Formemos distintas progresiones aritméticas con las fichas del dominó.*

Juego 3º: ¡En línea!

Siguiendo las reglas del juego colocamos todas las fichas del dominó formando una línea ininterrumpida ¿Por qué se pueden colocar?

Puede encontrarse un razonamiento parecido al de la teoría de grafos, pues el número de veces que aparece cada número en el juego completo es par.

¿Si la ficha primera comienza con un seis, con qué valor termina la fila?

Juego 3º: ¡En línea!

Una persona quita una ficha sin que nadie la vea. ¿Es ahora posible colocar todas las fichas del dominó?

Coloquémoslas. ¿Podemos adivinar cual es la ficha que se ha quitado?

Ahora dos de los números aparecerán un número impar de veces por lo que necesariamente quedarán colocados en los extremos. Por tanto, si sólo se quita una ficha sigue siendo posible alinearlas todas, y los valores de los extremos nos darán la ficha eliminada. Si quitamos dos fichas ya no será posible.

Juego 3º: ¡En línea!

- *¿Y podrían colocarse todas las fichas de formando una línea cerrada?*
- Ya hemos visto que sí, de muchas formas distintas.
- *Pero, será posible colocarlas de forma que esa línea cerrada sea un cuadrado ¡y cuyos lados tengan la misma suma de tantos! Vayamos por partes, si fuese posible ¿cuánto deben sumar los tantos de cada lado?*
- Ahora el problema ya no es tan fácil. Para saber cuanto debe valer la suma debemos tener en cuenta que la suma de todas las fichas del dominó es 168, pero que al colocarlas formando un cuadrado los tantos de las esquinas se suman dos veces.

Actividad: Dominó trigonométrico

- Ya hemos visto que podemos modificar el número de fichas, pero también se puede modificar el diseño de las mismas. Existen ya dominós utilizados para aprender fracciones, ecuaciones... *Vamos a diseñar un dominó que sirva para aprender las relaciones trigonométricas.* El material necesario es una cartulina de donde recortar las fichas (o fichas de madera o de otro material), y pegatinas.

Actividad: Dominó trigonométrico

- *En primer lugar elijamos siete posibles valores, y para cada valor buscaremos siete formas de expresarlos. Pero ya hemos visto que también podemos elegir menos valores y fabricar menos fichas.*
- Por ejemplo, podrían ser:

$$0,\ 1,\ ½,\ \sqrt{3}/2,\ -1,\ -1/2,\ \sqrt{2}/2.$$

- Por ejemplo, ½ podemos expresarlo así:

$$½ = \cos 60º = \operatorname{sen} 30º = \cos 300º = \operatorname{sen} 150º = \cos \pi/3 = \operatorname{sen} \pi/6.$$

- *Hacemos lo mismo con los otros valores:*

Y, ahora, entre todos y todas, diseñemos las fichas. Podemos también añadir figuras geométricas con valores de los ángulos...

4) Sophie Germain

- París (1776-1831)

- Presentó un trabajo firmándolo como Antoine-Auguste Le Blanc. El trabajo impresionó a J. Lagrange
- **Teoría de Números**. Escribió cartas a Gauss mostrando sus investigaciones firmadas con el seudónimo ***"Le Blanc"***.
- Obtiene un resultado a propósito de la **Conjetura de Fermat**. **N*úmeros primos de Sophie***. **Teorema de Germain**
- *Mémoire sur les Vibrations des Surfaces Élastiques*
- *Recherches sur la theorie des surfaces elastiques*
- Teoría general de la elasticidad: desarrolla la noción de radio de curvatura
- *Considérations générales sur les Sciences y les Lettres*


SOPHIE GERMAIN
1776 — 1831

4) Sophie Germain

- A los 13 años, durante la Revolución Francesa, se refugiaba en la lectura comenzando con las obras de la biblioteca de su padre.
- Leyó y estudió todo lo relacionado con las Matemáticas.

4) Sophie Germain

- Estudió la Historia de las Matemáticas de Jean-Baptiste Montucla.
- En particular le impresionó la leyenda del fin de Arquímedes, muerto por los soldados romanos mientras estaba absorto en un problema de geometría, no dándose cuenta que la batalla había llegado a Siracusa. Ella quedó conmovida por este fuerte efecto de la geometría, capaz de hacer olvidar la guerra y decidió explorar ese dominio.

4) Sophie Germain

- El estudio de las matemáticas era una pasión tan fuerte que ninguna presión familiar podía frenarla.
- Estudió de forma autodidacta el cálculo diferencial consultando libros de la biblioteca paterna.
- Carecer de una educación matemática formal, tener por tanto una formación autodidacta, anárquica y con lagunas le perjudicará toda su vida.

4) Sophie Germain

- Aprendió sola latín para poder leer a Newton y a Euler.
- Se apasionó con el *Tratado de Aritmética* de Bezout, que hizo sus delicias.

4) Sophie Germain

- Creyendo que ella podría enfermar, su familia se opuso a que estudiara. Temiendo siempre por la salud de su hija, su familia, para que no pudiera estudiar a escondidas de noche, decidió dejarla sin luz, sin calefacción y sin sus ropas. Sophie parecía dócil, pero sólo en las apariencias, de noche, mientras la familia dormía, se envolvía en mantas y estudiaba a la luz de una vela que previamente había ocultado. Un día la encontraron dormida sobre su escritorio, con la tinta congelada, delante de una hoja llena de cálculos. Su tenacidad venció la resistencia de su familia que aunque no comprendía el amor por las Matemáticas terminaron por dejarla libre para estudiar y utilizar su genio como ella quisiera.

4) Sophie Germain

- Tenía 19 años en 1795, cuando se fundó la Escuela Politécnica de París, donde las mujeres no eran admitidas, (la Escuela Politécnica no admitirá mujeres hasta 1970).
- Consiguió hacerse con apuntes de algunos cursos, entre ellos, el de *Análisis* de Lagrange.
- Los estudiantes podían presentar sus eventuales investigaciones y observaciones a los profesores. Al final del período lectivo, presentó un trabajo firmándolo como Antoine-Auguste Le Blanc.

4) Sophie Germain

- El trabajo impresionó a Joseph Lagrange por su originalidad y quiso conocer al autor.
- Al conocer su verdadera identidad, fue personalmente a felicitarla y le predijo éxito como analista, animándola de esta forma a seguir estudiando.
- Su nivel de conocimientos era absolutamente inhabitual para una mujer de su época ya que ella había estudiado realmente las obras científicas, no los ensayos escritos para mujeres.

4) Sophie Germain. Actividades

- ***El trabajo de Sophie Germain: "Teoría de números", "Superficies elásticas", "Radio de curvatura"***
- Sophie Germain hizo importantes contribuciones en dos ramas muy diferenciadas de las matemáticas, en teoría de números y en problemas propios de las matemáticas aplicadas, que aún hoy están totalmente en boga y con continuas aportaciones, como es el estudio de las superficies elásticas.

4) Sophie Germain. **Actividad**

Los números en el reloj

- Algunos de los problemas de teoría de números, que aún tiene aspectos sin resolver, pueden ser comprendidos por personas con poco bagaje matemático. Son problemas que fácilmente pueden proponerse en el aula como una investigación. Veamos la generalización de dos teoremas estudiados por Gauss y por Sophie Germain y pidamos al alumnado que investigue sobre el siguiente problema:
- *¿Para qué números primos p la ecuación:* $x^n \equiv 2 \pmod{p}$ *tiene solución?*

4) Sophie Germain. **Actividad**

Los números en el reloj

- La solución depende del número primo p.
- Recordemos que ≡ significa *congruente*. Por ejemplo 5≡2 (mod 3) pues al dividir 5 entre 3 el resto obtenido es 2.
- *Investiga los resultados de esta ecuación:* $x^n \equiv 2 \pmod{p}$*, para* $n=3$.
- *Construye una tabla con siete columnas. En la primera escribe valores de x: 2, 3, 4, 5, ... En la segunda calcula* x^3*. En la tercera calcula a que valor es congruente* x^3 *(mod 3), en la cuarta (mod 5), y sucesivamente (mod 7), (mod 11), mod(13).*

4) Sophie Germain. **Actividad**

Los números en el reloj

- *Observa en qué ocasiones aparece un 2 en las columnas 3ª, 4ª, 5ª, 6ª y 7ª.*
- (Por ejemplo: $2^3 = 8 \equiv 2 \pmod 3$; luego para el número primo 3 existe solución de la ecuación $x^3 \equiv 2 \pmod 3$).
- *Investiga ahora este teorema para n=4. Construye una tabla con siete columnas. En la primera escribe valores de x: 2, 3, 4, 5, ... En la segunda calcula x^4. En la tercera calcula a que valor es congruente x^4 (mod 3), en la cuarta (mod 5), y sucesivamente (mod 7), (mod 11), mod(13). Observa en qué ocasiones aparece un 2 en las columnas 3ª, 4ª, 5ª, 6ª y 7ª.*
- *¿Podrías conjeturar algún resultado?*

4) Sophie Germain. **Actividad Superficies**

- Hemos visto el esfuerzo que tuvo que hacer Sophie para estudiar las superficies elásticas. Para estudiarlas es necesario conocer ecuaciones en derivadas parciales que sobrepasan los conocimientos de secundaria. Sin embargo sí podemos trabajar con ellas de forma experimental.
- En los museos de la ciencia actuales, como el *Palacio de los Descubrimientos de París*, o en el de *La Villette*, existen zonas dedicadas a exposiciones sobre matemáticas, o en la *exposición itinerante sobre materiales matemáticos*. En estas zonas pueden verse experimentos con superficies elásticas, donde aparecen sorprendentes superficies al sumergir unos alambres en una superficie jabonosa. (Alsina y otros; 1988, 84).

4) Sophie Germain. **Actividad**

Superficies

- *Estudia las superficies mínimas correspondientes a determinadas curvas fabricadas en alambre u obténlas sumergiendo ese alambre en pintura acrílica.*
- Al solidificarse la pintura podemos conseguir que la superficie permanezca.
- *Analiza puntos notables como máximos y mínimos...*
- *Analiza curvatura, concavidad, convexidad ..*
- Podemos recordar que Sophie Germain utilizó el concepto de curvatura y de radio de curvatura al estudiar las superficies elásticas.

4) Sophie Germain. **Actividad**

Superficies bordadas

- Con lanas y agujas pueden construirse superficies regladas. (Alsina y otros; 1988, 84).
- Para estudiar en secundaria las superficies deberemos intentar construirlas con jabón, pintura, lanas, etc., y mostrar un buen número de ellas mediante transparencias.

5) María Gaetana Agnesi

Milán. Italia (1718-1799)

- El 16 de mayo de 1718, nació en Milán, María Gaetana Agnesi.
- Su padre fue profesor en la universidad de Bolonia
- Fue la mayor de 21 hermanos.
- En Italia sí se aceptaba que las mujeres recibieran educación, al contrario que en otros países europeos.

5) María Gaetana Agnesi

- Su padre, Don Pietro Agnesi Mariami, rico y cultivado, profesor en la universidad de Bolonia, se propuso dar a sus hijos e hijas la mejor educación, incluyendo una educación científica
- Fue una niña precoz y dotada.
- Todavía niña, conocía siete lenguas: italiano, latín, francés, griego, hebreo, alemán y español.

5) María Gaetana Agnesi

- Muy pronto los intelectuales locales, los sabios y eruditos empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos.
- A la edad de nueve años habló durante una hora en latín, ante una asamblea culta, sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre como las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.
- María podía disertar y discutir sobre muchos temas y en diferentes lenguas.

5) María Gaetana Agnesi

- A los 17 años criticó el tratado sobre las cónicas de G. F. l'Hôpital.
- 1738, publicó una colección completa de 190 trabajos sobre ciencias naturales y filosofía titulada *Proposiciones Filosóficas* donde se recogen exposiciones sobre lógica, mecánica, hidráulica, elasticidad, química, botánica, zoología, mineralogía, astronomía...
- En 1748 aparecieron sus *Instituciones Analíticas* (*Instituzioni Analitiche*)
- "La bruja de Agnesi"

5) María Gaetana Agnesi

- Tenía una concentración extraordinaria. Veamos una anécdota: Parece ser que María era sonámbula. En ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio y al despertar a la mañana siguiente veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

5) María Gaetana Agnesi. ***Actividades***

- ***El trabajo de María Gaetana Agnesi. "La Cúbica de Agnesi"***
- El nombre de María Gaetana Agnesi está ligado a una curva, la *"Cúbica de Agnesi"* Recientemente se ha establecido que esta curva es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos.
- Podemos mencionar su nombre en el aula relacionándolo con "curvas planas", y naturalmente con todo lo relativo a cálculo diferencial e integral que tanto contribuyó a explicar.

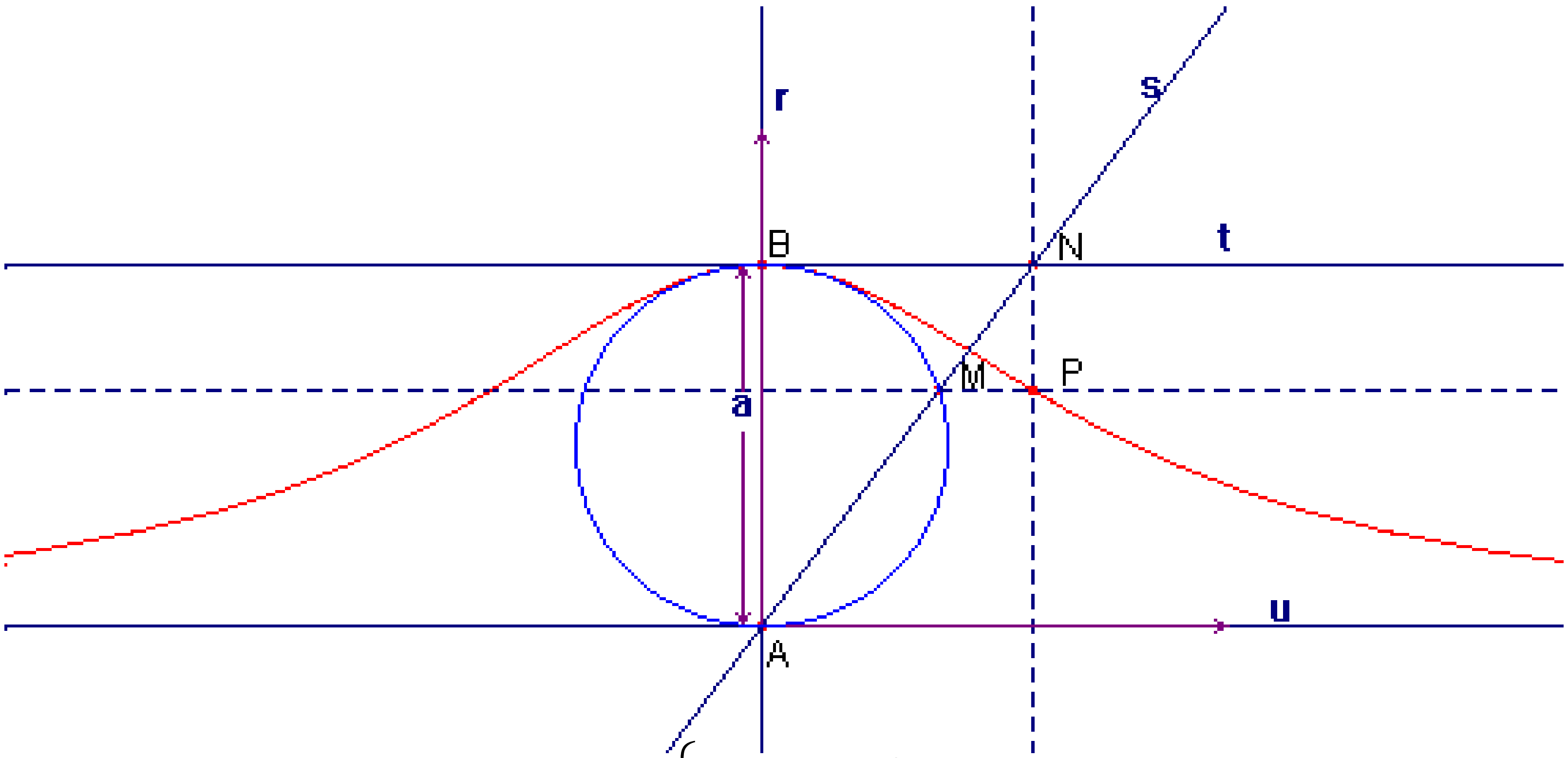
La curva de Agnesi

- Para definir la curva se considera la circunferencia de centro (0, a/2) y radio a/2. Sea AB = a un diámetro de dicha circunferencia, r la recta que contiene al diámetro AB, u la recta perpendicular a r que pasa por A, t la recta perpendicular a r que pasa por B, M un punto que recorre la circunferencia y s la recta que M. Sea N el punto de intersección de las rectas s y t. Entonces:
- *La curva de Agnesi es el lugar geométrico de los puntos P que están a igual distancia de la recta u que el punto M, y a la misma distancia de la recta r que el punto N, cuando M recorre la circunferencia.*

La curva de Agnesi

- Por tanto, si P tiene como coordenadas $P(x, y)$, su abscisa x coincide con la del punto $N(x, a)$ y su ordenada con la del punto M. Teniendo esto en cuenta es sencillo deducir que la ecuación cartesiana de la curva es:
- Es una función par, creciente para $x<0$ y decreciente para $x>0$, por lo que tiene un máximo en el punto $(0, a)$. Tiene a $y=0$ como asíntota horizontal. Es una curva de longitud infinita, pero cuya área bajo la curva es finita y vale $a^2\pi$.

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$



$$\begin{cases} x = a \cdot tg\alpha \\ y = a \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$$

La curva de Agnesi

- *Ecuaciones paramétricas:* Si α es el ángulo *MAB*, entonces $x = a \cdot \text{tg}\alpha$ e $y = AM \cdot \cos\alpha$, luego $y^2 = AM^2 \cdot \cos^2\alpha$. Aplicando el teorema del cateto al triángulo rectángulo *AMB* se tiene que $AM^2 = ay$, por tanto $y^2 = ay \cdot \cos^2\alpha$, y si y es distinto de cero: $y = a \cdot \cos^2\alpha$. (Para $y = 0$, como $\cos\alpha = 0$, también se verifica la ecuación). Luego las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = a \cdot tg\alpha \\ y = a \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$

y llamando $t = \text{tg}\alpha$ se obtiene:

$$x = at;$$

$$y = a/(1+t^2).$$

Actividad: Generar la curva de Agnesi

- *Dibuja una circunferencia tangente al eje de abscisas en el origen O como la de la figura.*
- *Dibuja una recta r paralela al eje x, tangente a la circunferencia en el punto A del eje y, diametralmente opuesto al origen O.*
- *Elige un punto C de la circunferencia.*
- *Traza la recta OC. Corta a r en B.*

Actividad: Generar la curva de Agnesi

- *Llama F al punto de intersección de las siguientes recta:*
- *1) la paralela por C al eje x*
- *2) la paralela por B al eje y*
- *Observa que el punto F tiene la misma abcisa que el punto B y la misma ordenada que el punto C*
- *Al hacer que C recorra todos los puntos de la circunferencia, el punto F genera la “cúbica de Agnesi”.*
- *Sea a = distancia(O,A) = 6*

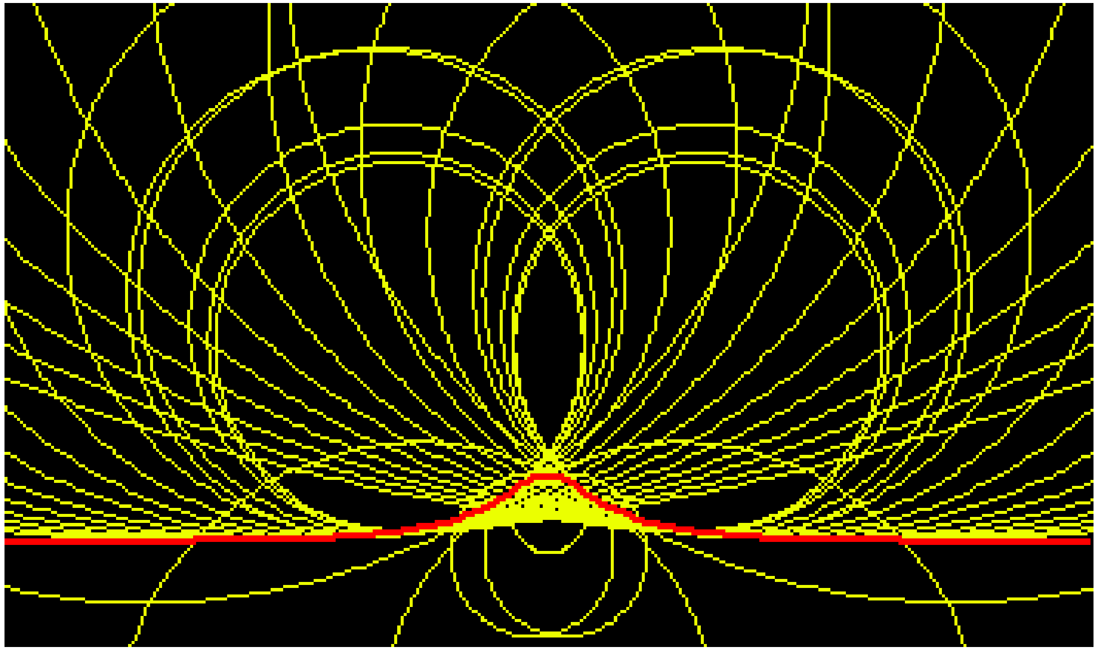
- *Completa la siguiente tabla de valores:*

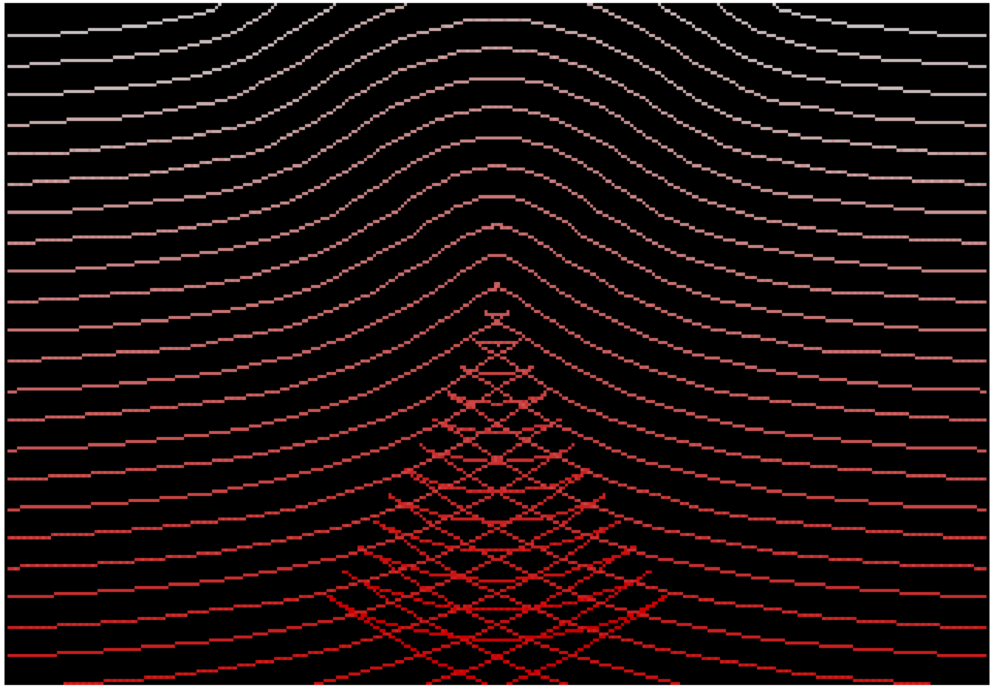
Coordenadas de F

C	x: abscisa de B	y: ordenada de C
C_1	9	2
C'_1	-9	2
C_2		
C_3		
C_4		
C_5		
C_6 C_7		

Actividad: Generar la curva de Agnesi

- *Dibuja la gráfica*
- *¿Qué propiedades tiene la curva?*
- Es una función par. Tiene como asíntota horizontal y = 0.
- *Su ecuación es* $y.x^2 = a^2(a-y)$. *Intenta deducirla. Observa que los triangulos OAB y ODC son semejantes*
- Ayuda: $a/x = y/\sqrt{y(a-y)}$





6) Ada Lovelace

(1815-1852) Gran Bretaña

- Mujeres informáticas
- Babbage enseñó a Ada y a su madre su *Máquina de Diferencias Finitas*, y les comentaba sus ideas para generalizarla en una *Máquina Analítica*
- *Traduce las memorias de L. F. Menabrea sobre las ideas de Babbage*
- *Lenguaje Ada*

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

- ***El trabajo de Ada Byron. “El método de las diferencias finitas”.***
- Ada Byron trabajó en la *Máquina de Diferencias*. Comprendió que la técnica de dicha máquina se basaba en el **método de las diferencias finitas**. Muchos problemas podemos resolver aplicando este método. Veamos dos problemas y un juego.

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

Puntos y líneas en un círculo

- *Tenemos n puntos en un círculo los unimos con el máximo de líneas rectas posibles ¿Cuántas son?*
- Si confeccionamos una tabla de diferencias finitas observamos que las diferencias segundas son constantes. Podemos deducir que la solución es $f(n) = n(n-1)/2$.

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

Regiones de un plano

- *Encuentra en máximo número de regiones que obtenemos al dividir un plano mediante n líneas rectas (de forma que en un punto no se corten más de dos).*
- Si confeccionamos de nuevo una tabla de diferencias finitas observamos que las diferencias segundas son constantes e iguales a uno.
- Podemos deducir que la solución es:

$$f(n)=(n(n+1)/2)+1$$

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

Análisis de un juego "El salto de la rana"

- Hemos seleccionado este juego porque ha sido tratado por muchos autores y autoras.. Se trata de un juego solitario juego. El que sea un solitario es una desventaja pues siempre son preferibles juegos no competitivos que se jueguen en grupo. (Brihuega, Molero y Salvador; 1995, 141), (Morata; 1994,)

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

“El salto de la rana”

- *Se necesitan un cierto número de fichas de dos colores, blancas y negras por ejemplo. Se colocan las fichas blancas a la izquierda de un espacio libre y a la derecha las fichas negras.*

  ...BBB NNN...

- *El objetivo del juego es, con el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas blancas con las negras.*
- *Las reglas son las siguientes:*
- *1.- Las fichas blancas sólo pueden moverse hacia la derecha y las negras sólo hacia la izquierda.*
- *2.- Una ficha puede moverse a una casilla adyacente si está vacía.*
- *3.- Una ficha también puede saltar, sobre otra de distinto color, a una casilla vacía, en el sentido permitido.*
- *Cada movimiento consiste en mover una sola ficha*

6) Ada Lovelace. *Actividades*

El salto de la rana

- Antes de seguir leyendo, juega un poco, para comprender las reglas del juego y su dificultad.
- Al proponer el juego a un grupo de alumnos y alumnas comienzan jugando. Esta fase se corresponde con la fase introductoria o "de abordaje" de la resolución de problemas que en este caso consiste en comprender las reglas del juego. El profesor o profesora deja un tiempo de juego libre, sin intervenir más que para aclarar si es preciso las normas.

- En la fase exploratoria se seleccionan posibles estrategias. Por ejemplo, podemos seleccionar particularizar: el/la profesor/a propone que primero se juegue con sólo dos fichas una de cada color y rápidamente todos/as ven que con tres movimientos se consigue el objetivo. Después propone jugar con dos, tres, cuatro, cinco fichas y confeccionar una tabla.
- Comienzan las complicaciones. Deben buscarse estrategias ganadoras. Estamos en la fase de ejecutar el plan. A la vista de las tablas ¿estamos seguros que son los mínimos movimientos? Los alumnos y alumnas van jugando y discutiendo en el grupo sus estrategias de juego y sus tablas. Llegan a un acuerdo respecto de la tabla: "El número de movimientos son: 3, 8, 15, 24, 35, ..."

- En la siguiente fase deben buscar una fórmula que generalice el resultado e intentar probarla. Ahora se puede emplear el método de las diferencias finitas para buscar la fórmula. Conjeturan que la fórmula buscada es $a_n=n^2+2n$.
- Veamos otras estrategias que pueden emplear. Para recordar cuáles son los movimientos que van haciendo deben buscar una buena notación; un ejemplo de buena notación es la propuesta en la revista Suma. (Merchán; 1994, 50): Llamar 0 al hueco inicial, y numerar con números positivos las posiciones de la derecha y con negativos los de la izquierda. Podemos indicar el primer movimiento de la ficha blanca como (-1,0) si va de la casilla -1 a la casilla 0, y el primer movimiento de la ficha negra como (1,-1) si salta de la casilla 1 a la casilla -1.

- Se pueden representar gráficamente estos pares ordenados y buscar pautas y regularidades, hasta encontrar una recursión. En cualquier proceso de resolución de problemas siempre es conveniente que los alumnos y las alumnas se acostumbren a analizar las estrategias heurísticas que han empleado.
- Hasta ahora el juego lo hemos podido utilizar para aplicar el concepto de sucesión, su término ene-ésimo o incluso para utilizar el método de las diferencias finitas para calcular la fórmula. Veamos ahora como un juego tan sencillo puede utilizarse como elemento motivador de otros muchos contenidos. Al representar los pares ordenados estaremos aplicando conceptos como par ordenado, abscisa, ordenada, ejes de coordenadas. Si ahora el/la profesor/a pide que se unan mediante una poligonal los pares ordenados que representan cada movimiento, por orden, desde el primero hasta completar el juego, se obtendrán distintas figuras según el número de fichas. Al observar estas figuras y compararlas entre sí, se pueden trabajar conceptos geométricos. Por ejemplo, las figuras obtenidas son simétricas respecto a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Cada figura contiene a las figuras obtenidas con un número menor de fichas. Los puntos correspondientes a fichas de un mismo color están a un mismo lado de la recta y=x, en un mismo semiplano. Si comienzan jugando las otras fichas, las figuras ahora obtenidas son simétricas a las anteriores, de eje de simetría la recta y=x.

- También se puede calcular el área encerrada por estas figuras. Todas las figuras son cerradas excepto para el caso de una sola ficha de cada color. Se revisa el cálculo de áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios, paralelogramos... Al preguntarnos cuánto vale el área total según el número de fichas, tenemos un nuevo ejemplo de sucesión, que ahora es una progresión aritmética de término general 8n-7.
- Por último, Francisco Hernán (Hernan; 1985) comenta que es posible plantear este mismo juego de forma mucho más abierta, permitiendo que alumnos y alumnas elaboren las reglas del juego. De este modo la riqueza de posibilidades aumenta.
- En resumen, este juego puede servirnos para aplicar técnicas de resolución de problemas analizando fases, métodos, estrategias heurísticas y la búsqueda de un modelo matemático. Puede utilizarse como elemento motivador para introducir o para aplicar conceptos en sucesiones o en geometría. Y también puede servirnos para recordar que Ada Byron utilizó el método de las diferencias finitas para comprender la teoría sobre la máquina analítica.

6) Ada Lovelace. *Actividades*

Otro juego, este comentado por Ada Byron

- En la carta que el día 16 de Febrero de 1840 Ada escribió a Babbage aparece descrito el siguiente juego (Perl; 1978, 109):
- *"Acabo de descubrir el siguiente juego, o puzzle, llamado ¡Solitario!. Consta de un tablero octogonal, con 37 muescas en la posición que he dibujado, y 37 fichas colocadas en las muescas. Debe quitarse una ficha para poder comenzar, y entonces se salta y se come una ficha. Por ejemplo, si la ficha 19, la del centro, es la que quitamos en el primer momento, entonces la ficha 6 puede saltar sobre la ficha 12 y colocarse en la casilla vacía 19, y la ficha 12 se retira del tablero. Las fichas solo se pueden mover saltando sobre otras, y siempre en ángulo recto, nunca en diagonal. El juego consiste en dejar únicamente una ficha en el tablero. Se puede jugar durante mucho tiempo, no tener éxito y dejar 3, 4, 5 o incluso más fichas que al no tener ninguna ficha vecina ya no pueden ni saltar, ni comer, ni retirarse del tablero.*

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

Otro juego, comentado por Ada Byron

- *He estado observando e investigando sobre el juego y ya soy capaz de terminarlo correctamente, pero no conozco si el problema admite alguna fórmula matemática que permita resolverlo. Estoy convencida de que es así. Imagino que debe ser un principio definido, una composición de propiedades numéricas y geométricas de las que dependa la solución, que pueda ser expresada en lenguaje simbólico. Pienso que depende mucho de la primera ficha eliminada.”*

6) Ada Lovelace. ***Actividades***

Otro juego, comentado por Ada Byron

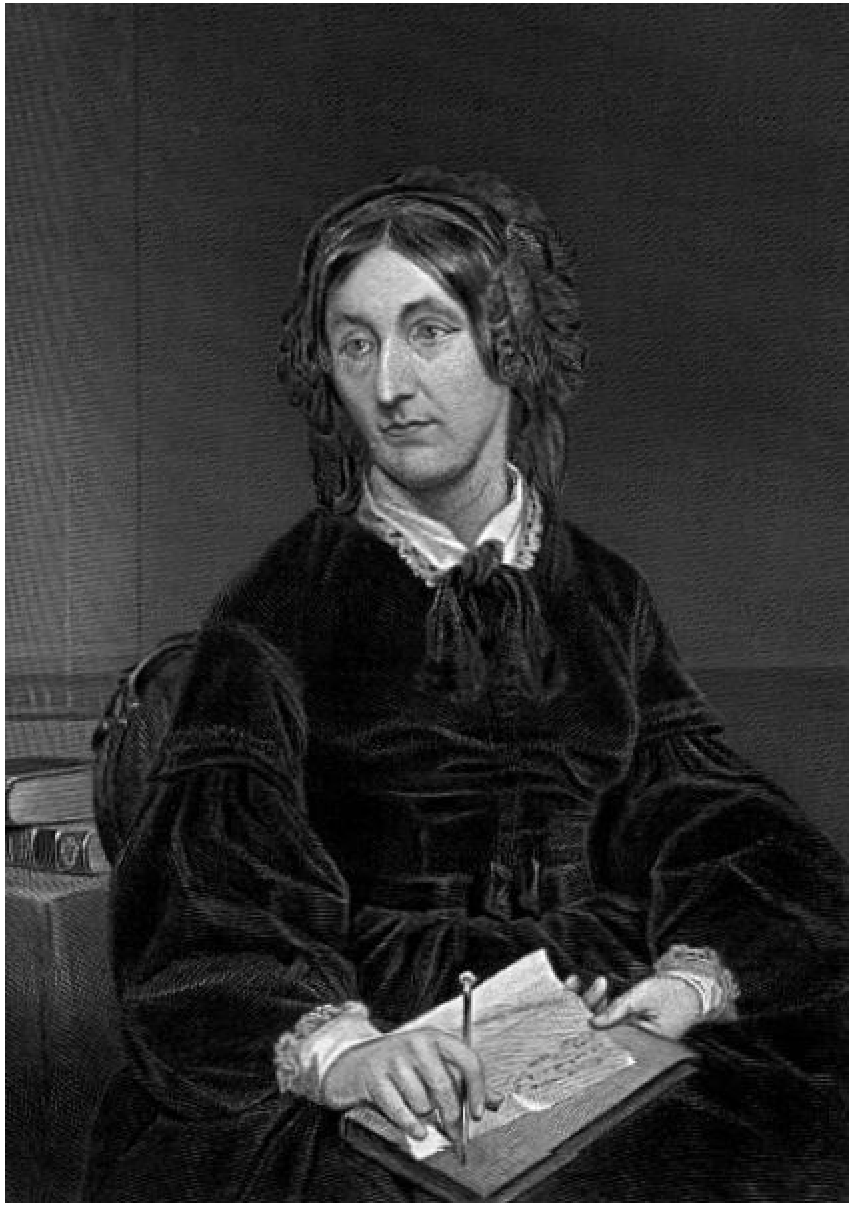
- Este juego "*Solitario*" puede encontrarse hoy con formatos parecidos a los indicados por Ada Byron. Quizás falten usualmente las fichas 4, 8, 30 y 34. También se encuentra en formato triangular. Podemos construirlo dibujando el diagrama en un papel y utilizando como fichas clips, botones, fichas de parchís, monedas, etc. Es, en efecto, un juego extraordinariamente interesante que podemos investigar. Miguel de Guzmán lo describe y resuelve en "Cuentos con cuentas" (Guzmán; 1984, 47) utilizando los grupos de Klein. Así que, Ada tenía razón: ¡Existe ese método matemático que ella buscaba!

7) Mary Somerville

- (1780-1872) Escocia
- María Fairfax Somerville nació en Escocia el 26 de diciembre de 1780, siendo la quinta y única hija de una familia de siete hermanos.

Educación

- Pasó su infancia explorando las costas de Escocia y en contacto con la naturaleza, observando las estrellas, las flores, los pájaros y otros animales.
- Ella cuenta: "*Me entretenía en el jardín, frecuentado por los pájaros. Conocía muchos de ellos, sus vuelos, sus costumbres*..."



7) Mary Somerville

- Pero a los diez años apenas sabía leer, pues a su madre sólo la preocupaba que pudiera leer la Biblia, y no sabía escribir.
- Al percatarse de que era una "*joven salvaje*", su padre, a la vuelta de un largo viaje, la envió al internado de una tal señorita Primrose, una escuela en la que como método pedagógico la hicieron aprender, de memoria, las páginas del diccionario de Johnson. ¡No solamente deletrear las palabras o su significado sino recordarlas incluso en orden y sin errores!

7) Mary Somerville

- No le gustaba la escuela y a menudo lloraba.
- Después de un año volvió a su casa donde la reprocharon lo poco que había aprendido.
- A pesar de esta experiencia traumática, Mary había desarrollado el gusto por la lectura y tenía pequeñas nociones de aritmética.

7) Mary Somerville

- Cuando tenía trece años pasó un verano en Jedburgh, donde uno de sus tíos, el Dr. Somerville, que más tarde sería su suegro, al darse cuenta de las ganas que tenía de aprender, la inspiró con historias de mujeres sabias de la antigüedad, la ayudó a aprender latín y a leer a Virgilio.
- Ella escribió: *"El me aseguró que en la antigüedad habían existido muchas mujeres elegantes instruidas, y que él podría leerme a Virgilio si yo estudiaba una hora o dos cada mañana, lo que le agradecí. Nunca fui más feliz en mi vida que durante los meses que estuve en Jedburgh"*.

7) Mary Somerville

- El tutor de su hermano daba las clases en la misma habitación donde Mary cosía. Se asombró al comprobar que Mary respondía a las preguntas que él le hacía al hermano. Mary aprovechó la fuerte impresión para convencerlo de que comprara para ella libros científicos.
- Consiguió ejemplares de los *Elementos* de Euclides y del *Álgebra* de Bonnycastle.
- La ayudó a leer y a resolver los problemas del primer libro de Euclides pero su conocimiento matemático era limitado, pronto ella sobrepasó los conocimientos del tutor, y tuvo que continuar sola su formación.

7) Mary Somerville

- “La Reina de las Ciencias del siglo XIX”
- Casó con S. Greig, enviudó, con dos hijos pequeños.
- Independiente económicamente. Compró libros de matemáticas
- Medalla de plata
- Vuelve a casarse con su primo, William Somerville

7) Mary Somerville

- Trabajos*: On the magnetizing power of the more refrangible solar rays*, "Experimentos sobre la transmisión de radiaciones químicas del espectro solar a través de diferentes medios"
- *Experiments on the transmission of chemical rays of the solar spectrum across differents media*, "Sobre la acción de los rayos del espectro en zumos"
- *On the action of the rays of the spectrum on vegetable juices.*
- *The Connexion of the Physical Sciences*
- *Physical Geography*
- *On Molecular and Microscopic Science*
- *On the Theory of Differences*
- Traduce la mecánica celeste de ***Laplace:*** *Mechanism of the Heavens*

7) Mary Somerville

"He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la "Mecánica Celeste", ambas son escocesas: la señora Greig y usted" (Laplace)

"Tengo 92 años, ... , mi memoria para los acontecimientos ordinarios y especialmente para los nombres de las personas es débil, pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas". (Somerville).

7) Mary Somerville. Actividades

- ***El trabajo de Mary Somerville. "La cicloide, la cardiode y otras epicicloides e hipocicloides"***
- **Recordemos que Mary Somerville al traducir e intentar hacer comprensible la *Mecánica Celeste* de Laplace hubo de explicar y trabajar las cicloides, cardioides, epicicloides e hipocicloides, curvas que se utilizaban para explicar el movimiento de los planetas y otros astros en el cielo.**

7) M. Somerville. Actividades **Cicloide**

- La cicloide es la curva engendrada por un punto situado sobre una circunferencia que gira sobre una recta sin deslizarse. La historia de la cicloide data de 1634. Muchos matemáticos se han ocupado de estudiarla: Pascal, Galileo, Descartes, y una mujer Mary Somerville que la describe así: “*Se ha propuesto investigar la naturaleza de una curva en la que una partícula puede moverse, así como oscilar en tiempos iguales, sea cual sea la amplitud de los arcos*”. Es decir que una partícula que se mueva por la acción de la gravedad sobre una cicloide con los puntos cúspide hacia arriba, oscilará exactamente con un movimiento armónico simple. Se dice, por esta propiedad que es "*tautócrona*".

7) M. Somerville. Actividades **Cicloide**

- Es fácil deducir su ecuación paramétrica.
- En muchos libros podemos encontrar actividades para estudiar la cicloide como evoluta y la cicloide construida por puntos. (Grupo Cero; 1980, 104)
- Si pensamos en la trayectoria de una válvula de una bicicleta tendremos una cicloide acortada y si pensamos en un punto de una rueda de un tren que sobresale del raíl tendremos una cicloide alargada.
- Jaques Bernouilli probó que es "*braquistócrona*", es decir, una partícula tarda el mínimo tiempo posible entre dos puntos de la cicloide en la posición anterior, incluso menos que en línea recta. En muchos museos de la ciencia puede experimentarse con esta propiedad.

7) M. Somerville. Actividades

La cardioide

- La cardioide es una curva de la familia de las concoides, es la concoide del círculo.
- **Definición:** La concoide de una curva con relación a un punto fijo es el lugar geométrico de los puntos obtenidos al tomar sobre toda secante que pase por aquel punto y a ambos lados del punto de intersección con la curva, una longitud constante.
- La forma usual de estudiar una cardioide, como trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar por otra inmóvil de igual radio. (Brihuega, Molero y Salvador; 1995, 154)

7) M. Somerville. Actividades. La cardioide

Actividad: La cardioide como epicicloide

- *Toma dos monedas, o dos fichas, o dos ruedas dentadas, (o dos círculos de cartulina), iguales.*
- *Señala en cada una de ellas un punto del borde.*
- *Colócalas de forma que los puntos señalados coincidan.*
- *Deja fija una de ellas y haz rodar la otra alrededor de la fija hasta que los puntos señalados vuelvan a encontrarse.*
- *Ve dibujando la trayectoria que sigue el punto marcado en la moneda móvil.*
- *Esa trayectoria es una cardioide.*

7) M. Somerville. Actividades. La cardioide

- Si modificamos la actividad y las dos monedas ya no son iguales obtenemos otras curvas de la misma familia de las concoides del círculo o caracoles de Pascal.
- Podemos preguntarnos qué ocurre si el radio de la circunferencia inmóvil es *r* y el de la circunferencia móvil es *r*/2, *r*/3, 2*r*/3. ¿Cuántas vueltas dará hasta cerrar la curva? Es interesante seguir investigando posibilidades. (Vasíliev y Gutenmájer; 1980)

7) M. Somerville. Actividades. La cardioide

Actividad: La cardioide como envolvente

- *Dibuja una circunferencia y marca un punto fijo A en ella.*
- *Utiliza un compás y con centro en cualquier punto Q de la circunferencia y radio AQ, dibuja otra circunferencia.*
- *Repítelo para muchas posiciones de Q.*
- *Una curva en forma de corazón toca a todas las circunferencias (es tangente a todas ellas).*
- *La **envolvente** de la familia de circunferencias es la cardioide.*
- ¿Cómo modificaremos la actividad para obtener otras curvas de la familia?

7) M. Somerville. Actividades. La cardioide

Actividad: La cardioide construida por puntos

- *Traza una circunferencia. Llama "a" a su diámetro.*
- *Fija un punto O de la circunferencia.*
- *Toma otro punto M de la circunferencia y únelo a O.*
- *Sobre esa secante utiliza una regla y una varilla para llevar un segmento de longitud "a", a cada lado del punto M.*
- *Repite el proceso con otros puntos de la circunferencia.*
- Esta actividad nos proporciona a la cardioide como lugar geométrico. De ella es fácil deducir la ecuación polar de la cardioide. ¿Cómo obtendremos las de otras curvas de la familia?

7) M. Somerville. Actividades. La astroide

Actividad: La astroide como hipocicloide

Recorta en una cartulina un círculo de diámetro 4a.

Quédate con la cartulina.

Recorta un círculo de diámetro "a".

Coloca el círculo en contacto con la cartulina agujereada.

Marca el punto de contacto en ambas circunferencias.

Haz rodar el círculo pequeño, sin resbalar, por el interior del círculo mayor, hasta que vuelvan a coincidir.

Dibuja la línea que describe el punto del círculo pequeño.

7) M. Somerville. Actividades. La astroide

- Así se obtiene la astroide como hipocicloide de la circunferencia.
- La aplicación a rodamientos y engranajes es evidente.
- A continuación podemos sugerir observar que ocurre cuando la relación entre los radios es "*a*" y "3*a*" (obtenemos una deltoide o curva de Steiner); y posteriormente si es "*a*" y "2*a*".
- Si logramos demostrar que, en este último caso, el punto se mueve en línea recta, exactamente por un diámetro de la circunferencia, habremos probado el sorprendente "Teorema de Copérnico".
- En general se pueden definir las k-cicloides, que son epicicloides si k es mayor que cero e hipocicloides si es menor.

7) M. Somerville. Actividades. La astroide

Actividad: La astroide como envolvente

- *Dibuja unos ejes rectangulares.*
- *Toma una varilla de longitud fija QR. Apóyala en los ejes y dibújala en muchas posiciones.*
- *Dibuja la envolvente de todos esos segmentos (o curva tangente a todos ellos).*

7) M. Somerville. Actividades. La astroide

Actividad: La astroide como envolvente de una familia de elipses

- *Dibuja unos ejes rectangulares.*
- *Elige una cantidad constante "c".*
- *Dibuja muchas elipses de semiejes "a" y "b" de modo que $a+b=c$.*
- *La astroide es la envolvente de las elipses de la familia.*

8) SOFÍA-SONIA KORVIN-KRUKOVSKAYA KOVALEVSKAYA

- (1850-1891) Rusia

- *"La vida de Sofía Kovalevskaya es una vida emocionante gracias al medio político de la época; una vida trágica debido a sus propias necesidades psicológicas y emocionales; y una vida brillante gracias a su genio matemático y literario. Es una de las vidas más fascinantes de la historia de la ciencia. Pero la vida de Sofía no debería opacar el hecho de que fue, ante todo, una gran matemática".*

8) SOFÍA KOVALEVSKAYA

- Cuando tenía seis años se trasladó su familia a Palibino, en Bielorrusia. Era un antiguo castillo feudal.
- Una curiosa anécdota de vida sucedió en la casa de la familia en Palibino donde, al mudarse la familia, todas las habitaciones fueron empapeladas como parte de la renovación y debido a un error, faltó papel pintado para cubrir todas las paredes de la casa.

8) SOFÍA KOVALEVSKAYA

- Por suerte en la habitación de Sofía, se sustituyó el papel pintado con unas hojas con las notas que el padre de Sofía tenía de un matemático ruso, en las que estaba impreso el curso litografiado del cálculo diferencial e integral de Ostrogradski.
- Dichas hojas, cubiertas por extrañas fórmulas, llamaban poderosamente la atención de Sofía que fascinada, intentaba durante mucho tiempo buscarles sentido.
- Aunque no lograra comprender su significado, sí dejaron en ella una profunda huella.

8) SOFÍA KOVALEVSKAYA

- Su educación estuvo confiada a varias institutrices. La que dejó más huella en su vida fue una inglesa, Marguerite Fránzovna, con la que estuvo entre los siete y los doce años que concentró todos sus esfuerzos en convertirla en una perfecta señorita.
- Sonia amaba la lectura, pero los pocos libros que la institutriz le permitía leer, los tenía que haber leído ella previamente, por eso a veces trasgredía sus ordenes y se introducía a escondidas en la enorme biblioteca que había en la casa.

8) SOFÍA KOVALEVSKAYA

- Habla de prolongadas discusiones con su tío paterno, Pedro, quien sin formación académica en el tema, sí transmitió a Sofía un profundo respeto por las Matemáticas, tratando asuntos como la cuadratura del círculo, la noción de asíntota y otras consideraciones sobre el infinito.
- Ella imaginaba las matemáticas como *“una ciencia superior, misteriosa, que ofrece a sus iniciados un mundo nuevo y maravilloso, inaccesible al común de los mortales”*.

8) Sofía Kovalevskaya

- Para poder estudiar hizo un matrimonio blanco
- Decidió estudiar con Weierstrass para lo que se trasladó a Berlín
- Le concedieron *"In absentia"* el Doctorado de Filosofía en Matemáticas de la Universidad de Göttingen.
- *"Desgraciadamente mi fuerte no eran las tablas de multiplicar".*

8) Sofía Kovalevskaya

- Escribió: *“Sur la Théorie des Équations Différentielles Partielles”* obra en la que aparece el teorema Cauchy-Kovalevky sobre la existencia y unicidad de esas ecuaciones.
- *“Sur la Réduction d’une Classe Finie d’Intégrales Abéliennes de Troisième Ordre”*
- “Recherche Supplémentaire et Observations sur la Recherche de Laplace sur la Forme des Anneaux de Saturne et Sur la Propiété d’un Système d’Équations”
- Universidad de Estocolmo
- Ganó el “*Prix Bordin*” (Premio Bordín) que se ofrecía al mejor trabajo sobre la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo, con su trabajo: *“Sur le Problème de la Rotation d’un Corp Solide autour d’un Point Fixe”*

8) Sofía Kovalevskaya. Actividades.

El trabajo de Sofía Kovalevskaya: "Sucesiones y el infinito".

- Durante el siglo XIX se trabaja sobre sucesiones y series infinitas. Sofía contribuyó en estas investigaciones.
- Podemos recordarla al proponer en clase obtener el término enésimo de una sucesión:
  - de cuadrados,
  - de números triangulares,
  - cortar sucesivamente las esquinas de una hoja de papel...
- De joven "redescubrió" el concepto de seno de un ángulo

8) Sofía Kovalevskaya. Actividades.

Sucesiones, series y el concepto de infinito

- *Tomemos una hoja de papel de área uno. La cortamos por la mitad. Mantenemos en la mano, la mitad de la hoja, la otra mitad la ponemos sobre la mesa.*
- *Volvemos a cortar el trozo que tenemos en la mano por la mitad. ¿Cuánto papel tenemos ahora en la mano? ¿Y encima de la mesa?*
- *Seguimos el proceso indefinidamente*

Sucesiones, series y el concepto de infinito

- En la mano tenemos la sucesión:

  1, 1/2, 1/4, 1/8, ...

- Encima de la mesa tenemos la serie:

  1/2, 1/2+1/4, 1/2+1/4+1/8, ...

- La cantidad de papel que tenemos en la mano la podemos hacer tan pequeña como queramos por lo que decimos que el límite de la primera sucesión es cero.
- La cantidad de papel que colocamos sobre la mesa podemos acercarlo a uno tanto como queramos, y aunque el proceso sea infinito queda claro que nunca la cantidad de papel puede superar a uno, por lo que decimos que el límite de la serie es uno.
- Son convergentes.

Práctica con Cabri: La curva de Koch

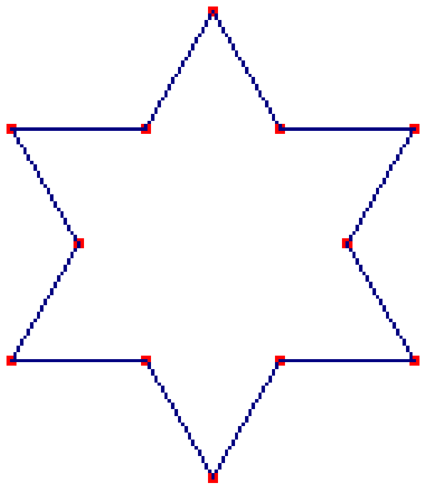
- Vamos a realizar una macro que divida un segmento en tres partes iguales.
- Definimos la macro tomando como objeto inicial el segmento que queremos dividir (o sus dos extremos) y los objetos finales los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales y que han sido definidos como puntos de intersección entre el segmento y las rectas auxiliares que hemos trazado.
- Definimos la macro como divide3 y la guardamos como divide3.mac, archivamos también la figura hasta comprobar que la macro funciona.

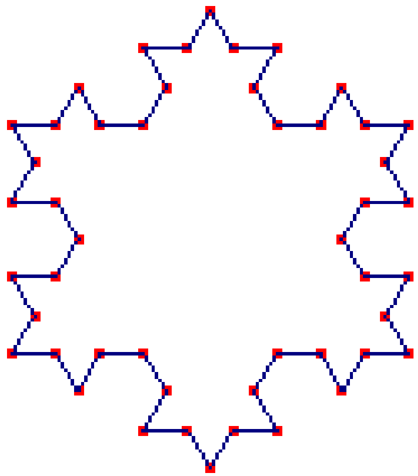
Práctica con Cabri: La curva de Koch

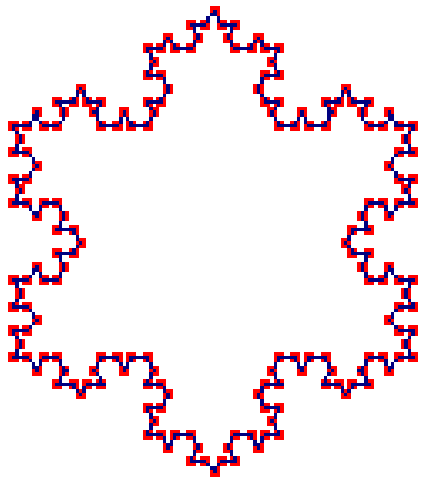
- Construimos una macro que dibuje un triángulo equilátero: Determinamos dos puntos que van a ser los objetos iniciales de la macro y definimos el tercer punto del triángulo como el punto de intersección de las circunferencias trazadas con centro un punto y radio el otro. Activamos polígono para construir el triángulo que pasa por estos tres puntos y lo definimos como objeto final. Nombramos la macro como triequi y la guardamos como triequi.mac. Archivamos también la figura mientras nos aseguramos de que funciona la macro.
- En un archivo nuevo definimos dos puntos y trazamos el segmento que los une, activamos la macro divide3 para dividirlo en tres partes iguales. Utilizamos la macro triequi para dibujar un triángulo equilátero en la parte central del segmento.

Práctica con Cabri: La curva de Koch

- Definimos como objeto inicial el segmento y lo ocultamos para que no salga al activar la macro. Dibujamos los dos segmentos extremos del original y los de la parte superior del triángulo que va a ser el objeto final, definimos la macro como koch y la guardamos como koch.mac.
- Archivamos la figura como koch1.fig y en un fichero nuevo nos aseguramos de que la macro funciona correctamente y activándola repetidamente sobre un segmento y guardamos la figura como Koch2.fig.
- Con la macro triequi dibujamos un triángulo equilátero, determinamos sus tres segmentos y en cada uno de ellos activamos de forma iterativa la macro koch obtendremos la curva de Koch o curva del copo de nieve, guárdala como koch3.fig.







8) Sofía Kovalevskaya. Actividades.

Sucesiones, series y el concepto de infinito

Actividad: Curva en Copo de Nieve

- *En un triángulo equilátero dividimos cada lado en tres partes iguales*. (Brihuega; 1995, 192).
- *Con lado la tercera parte construimos tres triángulos equiláteros y los añadimos en los centros de los lados.*
- *Tenemos ahora una figura estrellada.*
- *En cada lado volvemos a repetir el proceso sucesivamente.*
- *Analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite. ¿Cuál es el área? ¿Y la longitud?*

8) Sofía Kovalevskaya. Actividades.

Sucesiones, series y el concepto de infinito

- *Completa el cuadro adjunto:*

Etapa	1	2	3	4	5	*n*
Longitud de un lado	L	L/3				
Número de lados	3	4*3				
Longitud de la figura	3L	12L/3				
Área de la figura	A	A+A/3				
Número de vértices	3	3+6				

- A esta figura se la denomina curva del "Copo de Nieve" o curva de Koch.
- Es fractal.
- Podemos considerar, para hacer el estudio, sólo uno de sus lados, el contorno o la superficie encerrada.

8) Sofía Kovalevskaya. Actividades.

Sucesiones, series y el concepto de infinito

- Si analizamos el comportamiento de la figura con el paso al límite:
- ¿Cuál es su área?
- ¿Y su longitud?

Práctica con Hoja de cálculo: Cálculo aproximado del valor de sen(x)/x.

- • Nos situamos en la celda A1 para poner el título, en A2 dibujamos una separación del título y reservamos A3 y A4 para explicar el contenido de la hoja.
- • En la celda A6 escribimos “valor inicial de x =“ y en B6 su valor que en nuestro caso será 1, ya que lo que pretendemos es dar al ángulo x valores muy próximos a 0, en A7 escribimos “factor reductor” y en B7 un valor menor que 1 por el que vamos a ir multiplicando los valores del ángulo para que sean más pequeños.
- • En la celda A9 escribimos “valores de x” , en B9 “sen(x)” y en C9 “sen(x)/x” y reservamos la celda A10 para separarlos de las fórmulas que vamos a introducir a continuación.

Práctica con Hoja de cálculo: Cálculo aproximado del valor de sen(x)/x.

- • En A11 introducimos el valor inicial y como está en la celda B6 ponemos **=B6** en A12 queremos escribir este mismos valor reducido por el factor que hemos introducido en B7 y como el factor queremos que permanezca constante al utilizar el comando Llenar hacia abajo introducimos la fórmula **=A11*$B$6**, para llenar el resto de la columna es suficiente seleccionar, por ejemplo, el rango (A12:A30) y activar **Llenar hacia abajo**.
- • Colocados en la celda B11 introducimos la fórmula **=sen(A11)** y en C11 **=B11/A11** y después de seleccionar el rango (B11:C30) activamos **Llenar hacia abajo.**
- • Observa que cuanto más próximos a 0 son los valores de x más cercanos están los de x y sen(x).
- • Podemos cambiar el factor 0,6 por 0,7; 0,5 etc. con objeto de obtener distintas aproximaciones.

Cálculo aproximado del valor de sen(x)/x

==

Esta hoja de cálculo estima el valor del cociente entre el seno de un ángulo y el propio ángulo

valor inicial de x= **1**

factor reductor= **0,6**

valores de x	**sen(x)**	**sen(x)/x**
1	0,841470985	0,841470985
0,6	0,564642473	0,941070789
0,36	0,352274233	0,978539537
0,216	0,214324298	0,99224212
0,1296	0,129237508	0,99720299
0,07776	0,07768166	0,998992535
0,046656	0,046639075	0,999637242
0,0279936	0,027989944	0,999869398
0,01679616	0,01679537	0,999952982
0,010077696	0,010077525	0,999983073
0,006046618	0,006046581	0,999993906
0,003627971	0,003627963	0,999997806
0,002176782	0,002176781	0,99999921
0,001306069	0,001306069	0,999999716
0,000783642	0,000783642	0,999999898
0,000470185	0,000470185	0,999999963
0,000282111	0,000282111	0,999999987
0,000169267	0,000169267	0,999999995
0,00010156	0,00010156	0,999999998
6,0936E-05	6,0936E-05	0,999999999

9) Emmy Noether

(1882-1935) Alemania

- Su padre, Max Noether era profesor de la universidad de Erlangen
- Recibió una educación convencional: cultura clásica, piano, y que cocinara, limpiara, y participara en bailes, que era la actividad que más la gustaba. Estudió francés e inglés.
- La admisión de mujeres estudiantes "destrozaría todo orden académico", se le autorizó a asistir a clase en 1900 con un permiso especial, que sin embargo no le daba derecho a examinarse. ¡Era la única alumna entre 984 estudiantes!

9) Emmy Noether

- Teoría de los invariantes obtuvo el grado de doctor “cum laude” en 1907.
- Durante los años siguientes trabajó en el Instituto matemático de Erlangen sin percibir salario alguno.
- Göttingen: “*Teorema de Noether*”
- Hilbert en Göttingen, *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños".*
- Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal la obligó a abandonar Alemania.

9) Emmy Noether. Actividades

El trabajo de Emmy Noether. “Álgebra moderna”

- Emmy Noether trabaja en estructuras algebraicas. Construye la teoría de ideales.
- Sus trabajos sobre “invariantes” nos conducen a recordarla al trabajar con transformaciones geométricas y en particular al estudiar las isometrías, los grupos de autosimetría y su aplicación al análisis de frisos y mosaicos.
- Recordemos que existen siete grupos distintos para generar frisos y 17 grupos de mosaicos regulares, y que ejemplos de todos ellos, frisos y mosaicos se encuentran en la Alhambra. (Épsilon; 1987).
- También podemos mencionarla en el aula cuando hablemos de cualquier construcción axiomática.

9) Emmy Noether. Actividades

Frisos

- *Lo primero debe ser reconocer qué es un friso, para lo que el profesor o profesora puede llevar al aula fotografías, libros, transparencias, etc. donde aparezcan frisos. Por ejemplo en las fotografías de rejas podemos tener muy buenos ejemplos de frisos.*
- *Hacer una salida del aula a un museo arqueológico o antropológico y buscar motivos con forma de friso en la cerámica, en las telas, etc. o buscar dichos motivos en el entorno próximo: rejas, elementos arquitectónicos...*
- *Recoger otros elementos en los que intervengan los frisos, como cenefas que aparezcan en cocinas y cuartos de baño, cintas, bordados, esteras y alfombras.*

9) Emmy Noether. Actividades. Frisos

- Una vez que ya reconocemos qué tipo de frisos nos interesan, aquellos con un motivo mínimo que se reproduce mediante traslación a lo largo de un eje, nos proponemos diseñar un friso para un lugar determinado, una pared concreta.
- *Pasos a dar en el diseño de un friso:*
- *a) Seleccionar un motivo mínimo.*
- *b) Elegir una forma de repetirlo.*
- *c) Medir y conseguir que se adecue al tamaño de la pared.*

9) Emmy Noether. Actividades. Frisos

- *Analicemos las distintas formas que hay de diseñar el friso, según aparezcan simetrías de eje paralelo al eje de traslación, de eje perpendicular al de traslación, simetrías centrales, simetrías con deslizamiento. Para ello podemos:*
- *a) Clasificar el material recogido.*
- *b) Diseñar nuevos frisos que, partiendo de un motivo dado, sean de la misma clase que algún friso seleccionado.*
- *c) Analizar si podemos diseñar frisos de nuevas clases que no tengamos representadas*
- *d) Analizar las transformaciones geométricas que nos permiten diseñar frisos*

9) Emmy Noether. Actividades. Frisos

- *Por último, y sólo en caso de alumnado muy motivado, podríamos intentar justificar los siete tipos posibles de frisos.*

9) Emmy Noether. Actividades.

Mosaicos

- El camino a seguir en esta actividad es parecido al anterior.
- El primer paso es reconocer qué vamos a entender por un mosaico.
- Trabajaremos solamente con mosaicos periódicos, es decir, aquellos que partiendo de un motivo o tesela mediante dos traslaciones embaldosan el plano formando una figura en teoría infinita.
- Previamente puede haberse trabajado con mosaicos regulares (construidos con un único polígono regular) y semirregulares (construidos también con polígonos regulares, pero más de uno).
- Se puede utilizar mosaicos de Escher, siempre tan sorprendentes, mosaicos de la Alhambra....

9) Emmy Noether. Actividades. Mosaicos

- *Observar mosaicos en el aula, con transparencias y fotocopias, en una salida a un museo o en el entorno próximo al centro escolar.*
- *Analizar mediante que motivo mínimo está construido un mosaico. Además de dos traslaciones ¿Utiliza otras transformaciones geométricas?*
- Hay que analizar si utiliza giros y simetrías además de las dos traslaciones. Conviene estudiar el grupo de autosimetría de una figura.
- *Buscar los motivos mínimos de cada mosaico.* (Esta actividad puede desencadenar una discusión pues depende del criterio que se siga: si considerar el color o no tenerlo en cuenta).

9) Emmy Noether. Actividades. Mosaicos

- *Distinguir entre mosaico y friso*
- *Utilizar un libro de espejos (construido pegando dos espejos con papel adherente de embalar). Colocarlo sobre un mosaico, con distintas posiciones y observar el resultado.*
- *Clasificar mosaicos según las isometrías que intervienen en su formación.*
- *Observar fotografías con mosaicos de la Alhambra, de Escher u otros, e intentar diseñar mosaicos que tengan la misma ley de formación.*
- *Utilizar tramas de cuadrados y de triángulos para diseñar mosaicos. Construir un mosaico diseñando previamente un motivo mínimo.*

9) Emmy Noether. Actividades. Mosaicos

- Solo con alumnado muy motivado se puede terminar esta actividad clasificando mosaicos mediante el algoritmo de Rose y Stafford (Épsilon; 1987, 102) y analizando que sólo hay 17 grupos distintos de mosaicos.

10) Grace Chisholm Young

(1868 - 1944) Inglaterra

- Su educación fue informal. Le gustaba el cálculo mental y la música.
- En 1893 obtuvo su diploma en Cambridge. Fue a Göttingen a doctorarse.
- Tuvo seis hijos.
- Escribe en 1905 *Primer libro de Geometría.*
- *"Cuando William estaba en casa monopolizaba completamente la vida de Grace. Él sabía que sus demandas eran excesivas, pero..."*
- Los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su marido.

10) Grace Chisholm Young

Esquema

1. Biografía de Grace Chisholm Young
2. Similitudes con otras mujeres matemáticas
3. Párrafos de su libro: "*Primer libro de geometría*"
4. Actividades de aula

1. Biografía de Grace Chisholm Young

(1868 - 1944) Inglaterra

- Nació en 1868 en Inglaterra durante el reinado de la reina Victoria.
- Familia de clase alta
- Su madre, Anna Louisa Bell, era una buena pianista que daba recitales de violín y piano.
- Grace fue la pequeña de cuatro hermanos varones.

1.1. Estudios de G. Ch. Young

- Su educación fue informal. Le gustaba el cálculo mental y la música.
- Con 17 años pasó los exámenes de Cambridge.
- Se ocupó de trabajos sociales.
- En 1889 ingresó y en 1893 obtuvo su diploma en Cambridge (Gritón Collage).
- Asistió a las clases de Arthur Cayley por indicación de su tutor, William Young.

1.2. Doctorado de G. Ch. Young

- Fue a Göttingen a doctorarse (al igual que Sofía Kovalevskaya y Emmy Noether)
- Había elegido el lugar adecuado en el momento oportuno
  - Felix Klein
  - Conformidad del Ministerio de Cultura de Berlín
- El título de su memoria de doctorado es *"Grupos algebraicos y trigonometría esférica"*
- En 1895 obtuvo su doctorado

1.3. Matrimonio de G. Ch. Young

- Se casó con William Young en 1896
- El primer año vivieron en Cambridge pero luego se mudaron a Alemania.
- Tuvo seis hijos.
- Se ocupó de la educación de los hijos
- *“Cuando William estaba en casa monopolizaba completamente la vida de Grace. Él sabía que sus demandas eran excesivas, pero...”*

1.4. La obra de G. Ch. Young

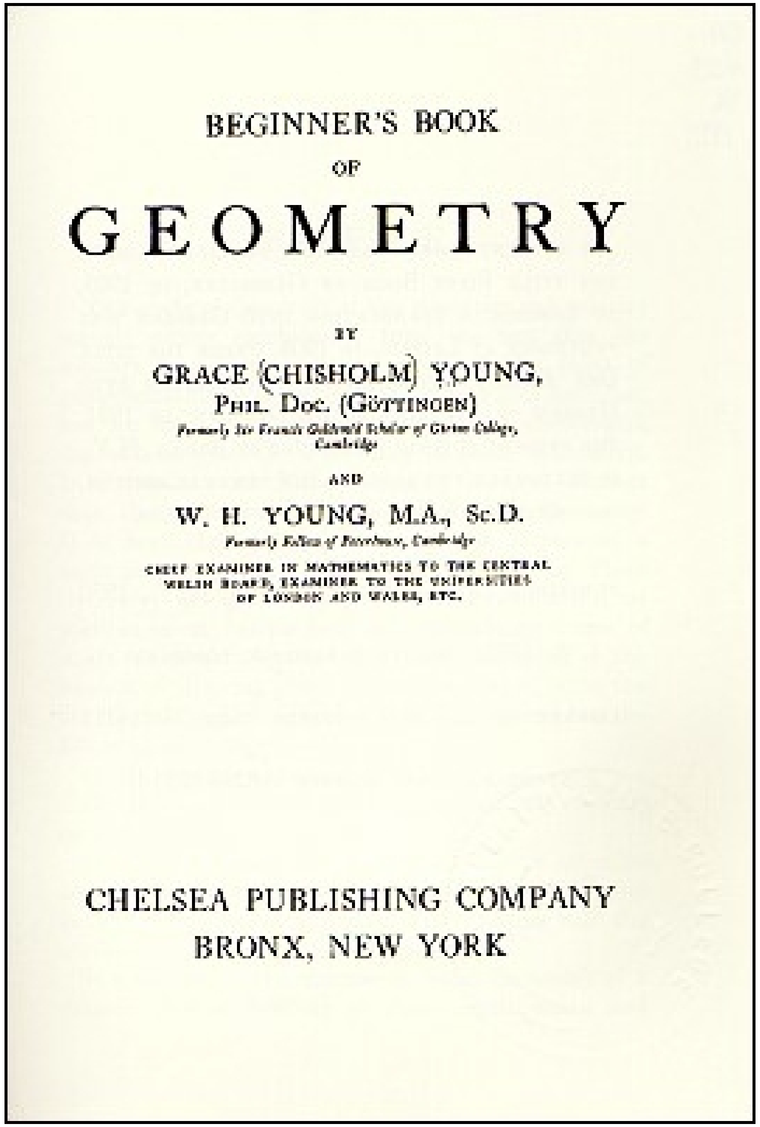
- Colabora con William Young en un libro de Astronomía.
- Escribe en 1905 *Primer libro de Geometría.*
- Los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su marido.
- Cuando William estuvo en la India en la universidad de Calcuta, ella elaboró una serie de textos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral

2. Logros y dificultades de otras mujeres matemáticas. Elementos comunes

- Educación
- Reconocimiento de su trabajo científico
- Identificación del autor. Utilización del nombre
- Vivir de su trabajo profesional
- Acceso a las instituciones científicas

3. Primer libro de Geometría (*First Book of Geometry*)

- Se publicó en 1905 en Londres
- En 1908 "*Der Kleine Geometer*"
- En 1921 en hebreo
- En 1970 se ha reeditado "*Beginner's Book of Geometry*"


BEGINNER'S BOOK

OF

GEOMETRY

BY

GRACE (CHISHOLM) YOUNG,
PHIL. DOC. (GÖTTINGEN)
Formerly Sir Francis Goldsmid Scholar of Girton College, Cambridge

AND

W. H. YOUNG, M.A., Sc.D.
Formerly Fellow of Peterhouse, Cambridge
CHIEF EXAMINER IN MATHEMATICS TO THE CENTRAL WELSH BOARD, EXAMINER TO THE UNIVERSITIES OF LONDON AND WALES, ETC.

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
BRONX, NEW YORK

3. Primer libro de Geometría

- ***"En cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional, o también llamada Geometría del Sólido",*** (Young; 1970, Introduction).

3. Primer libro de Geometría

- Los escolares no han adquirido previamente el hábito de la observación geométrica, no se les ha animado a la práctica natural del pensamiento en dimensión tres, que recibe mucha menos atención que la geometría del plano.

3. Primer libro de Geometría

Una de las razones por las que la geometría plana ha mantenido esta situación privilegiada durante cientos de años y se estudia en los cursos preliminares es probablemente debido al valor didáctico del dibujo de los diagramas planos en papel o en la pizarra o en otros medios equivalentes.

3. Primer libro de Geometría

Estos métodos tienen las siguientes ventajas:

- 1. No requieren un equipamiento especial.
- 2. Es fácil de enseñar y comprender, y sólo requiere cuidado y práctica.
- 3. Los diagramas pueden reproducirse tan a menudo como sea necesario, incluso por el estudiante, adquiriendo la necesaria destreza.

3. Primer libro de Geometría

- *"El obstáculo en el camino del propio desarrollo de las ideas geométricas ha sido la carencia de un* ***método*** *que ocupe el lugar del dibujo de la geometría plana.*
- ***El dibujo de los cuerpos sólidos es demasiado difícil****.*
- *Los modelos, la mayor parte de cartón, tienen el mismo defecto... son relativamente caros y requieren constante supervisión".*

3. Primer libro de Geometría

- Grace opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales:
- Diagramas de figuras tridimensionales
- “*Los métodos adoptados en el presente libro requieren pocos utensilios, sólo* ***papel****, ocasionalmente unos pocos alfileres, un lápiz y un par de* ***tijeras***”.

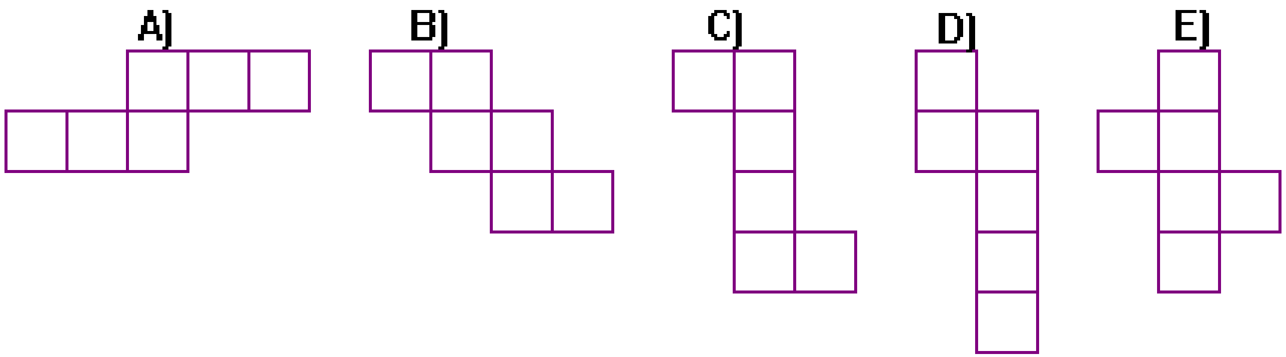
4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

- Construir poliedros utilizando **materiales** muy variados:
  - **Poliedros regulares**
  - **Deltaedros**
  - **Bipirámides**
  - **Antiprismas**

4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

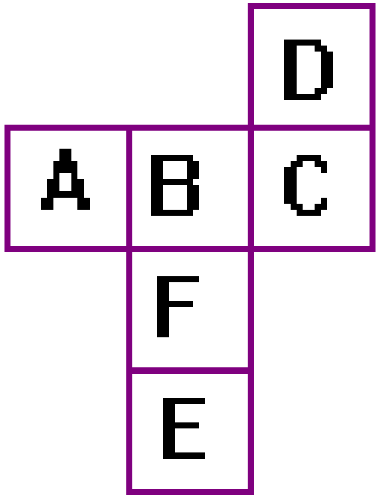
Del desarrollo al cuerpo

¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

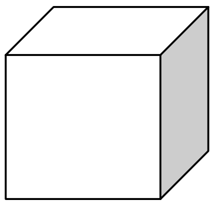
Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?

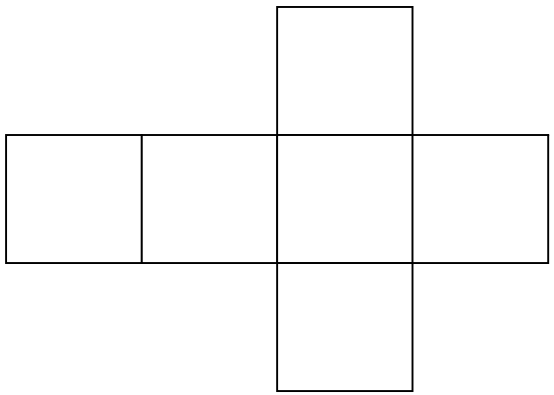


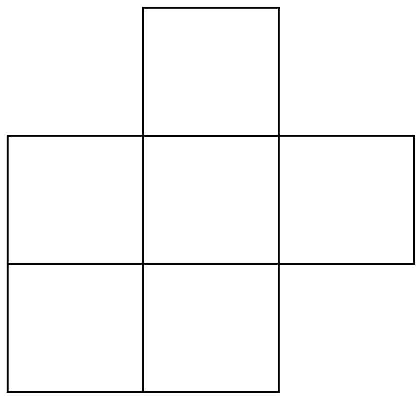
4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Obtener todos los hexaminos con los que sea posible construir un cubo.

Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo

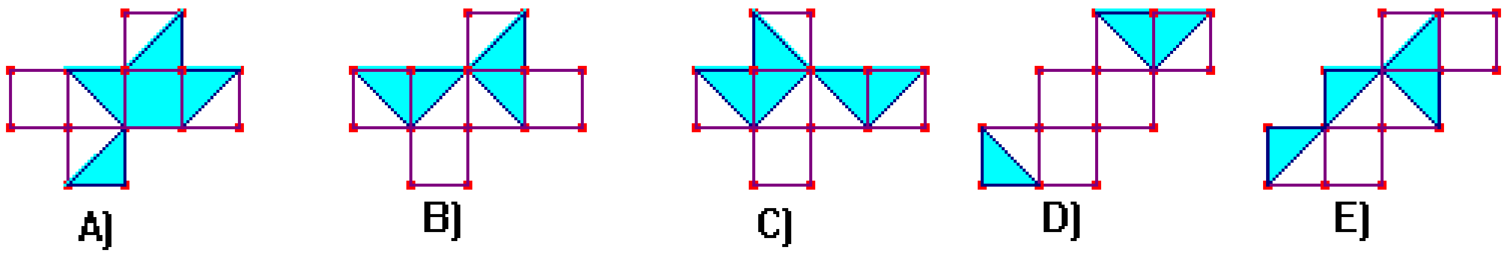






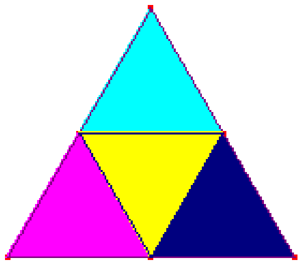
4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

- A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?

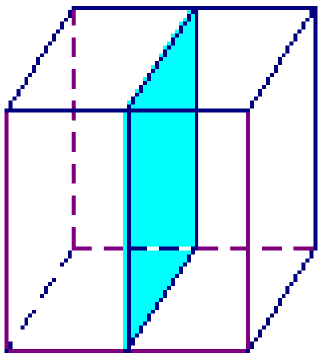


4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

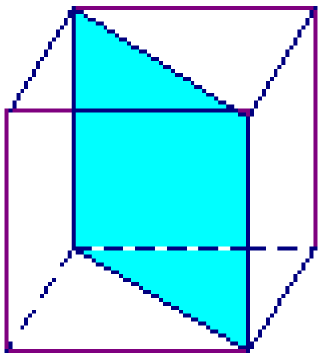
Del cuerpo al desarrollo

Piensa ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones. Se puede hacer cortando mediante un hilo candente cubos de estiropor, para luego confeccionar su desarrollo plano y construirlos en cartulina:

a)

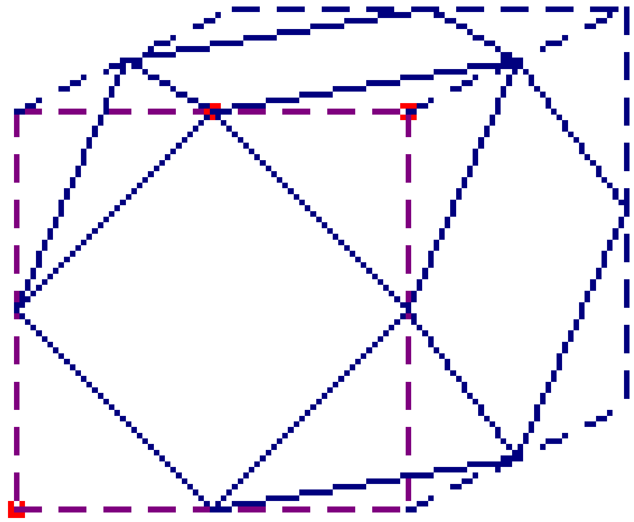


b)



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Haz el desarrollo del cuerpo siguiente:



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

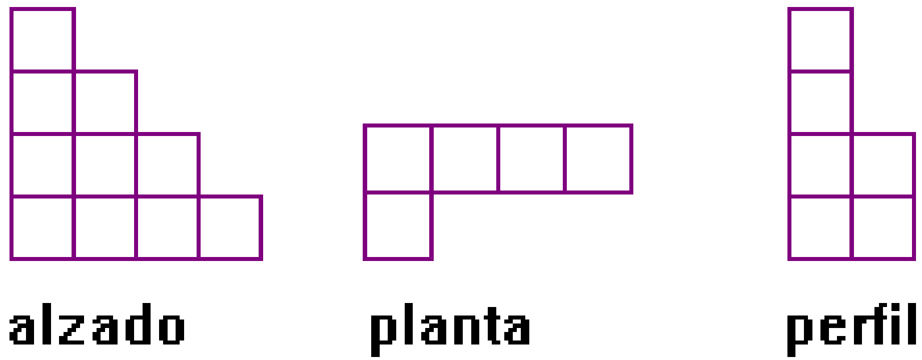
Del plano al espacio y del espacio al plano

- En todas estas actividades, siguiendo a Grace, pasamos del **desarrollo plano** de un cuerpo, a construirlo en el espacio.
- O bien, de conocer al cuerpo en el **espacio** y diseñar su desarrollo plano.
- Es decir, se pasa del plano al espacio y del espacio al plano.

4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Planta, perfil y alzado

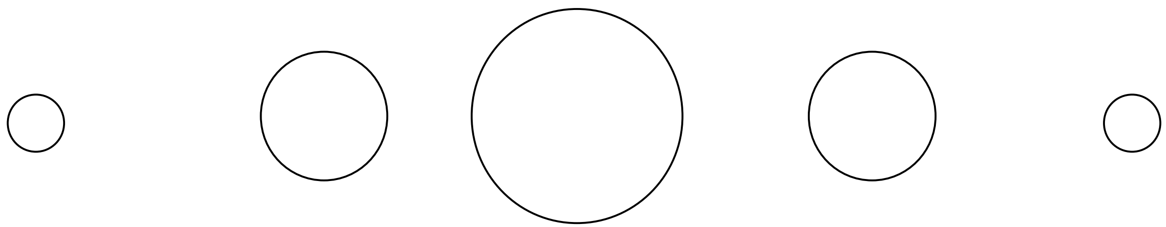
Aquí tenemos las tres vistas, alzado (de frente), planta (desde arriba) y perfil (lateral) de un mismo “castillo” de cubos. ¿Con cuántos cubos se ha construido el castillo?



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Tomografías

¿De qué objeto es la tomografía siguiente?



4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Movimientos en el espacio

- Traslaciones
- Giros
- Simetrías
- Simetría central
- Simetría con deslizamiento
- Simetría rotativa
- Movimiento helicoidal

4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

¿Cuál es el grupo de autosimetría de estas pirámides?

4. Actividades para el aula de G. Ch. Young

Un juego de dos jugadores:

- Se forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices.
- Cada jugador retira, alternativamente, o una moneda o dos monedas adyacentes.
- Gana quien retire la última moneda.
- (*Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central*).

Bibliografía

- ALIC, Margaret: **El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX**. Siglo veintiuno editores. Madrid. 1991.
- BRIHUEGA, J.; MOLERO, M. y SALVADOR, A.: **Didáctica de las Matemáticas**. ICE de la Universidad Complutense. Madrid. 1995.
- FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A.; ZUASTI, N.: **Género y Matemáticas**. Editorial Síntesis. Madrid. 1998.
- FIGUEIRAS, Lourdes; MOLERO, María; SALVADOR, Adela; ZUASTI, Nieves: **El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas***.* Proyecto Sur de Ediciones, S. L. Granada. 1998.
- MATAIX, Susana: **Matemática es nombre de mujer**. Editorial Rubes. 1999.
- MOLERO, M.; SALVADOR, A.: **Sonia Kovalevskaya.** Ed. Orto.
- MOLERO, M.; SALVADOR, A.: Sophie Germain**.** Editorial Orto.
- SALVADOR, Adela; MOLERO, María: **Émilie de Breteuil, Marquesa de Châtelet**. Editorial Orto.
- SOLSONA, Nuria: **Mujeres Científicas de todos los tiempos**. Talasa Ediciones. Madrid. 1997.