PROBLEMAS, PROBLEMAS Y MÁS PROBLEMAS

DATOS

INICIO

COMIENZA

PROFUNDIZA

JUEGA

INVESTIGA

NÚMEROS

ÁLGEBRA

GEOMETRÍA

PROBABILIDAD

COMBINATORIA

LÓGICA

TÉCNICAS MATEMÁTICAS

ACERTIJOS

María Molero y Adela Salvador

DATOS

- **Título:** Problemas, problemas y más problemas
- **Autoras:** María Molero y Adela Salvador
- **Nivel educativo:** Secundaria, Bachillerato y Universidad
- **Descripción:** En **Comienza** se plantean problemas de introducción, en **Profundiza** otros más difíciles, y en **Investiga** modelos de pequeñas investigaciones, se describen **acertijos** y **juegos**, así como problemas clasificados por temas: **Álgebra**, **Números**, **Geometría**, **Probabilidad**, **Combinatoria**, **Lógica** y que se resuelven con **técnicas propias de las matemáticas**. En vez de dar la solución de los problemas y privar del placer de descubrirla se sugieren pautas para resolverlos.

ÍNDICE

COMIENZA CON …

Problema 1

"Los vigilantes"

Las calles de una ciudad forman una malla de horizontales y verticales en cuadrados de 100 m de lado. En cada cuadrado hay una manzana de casas. Se pretende montar un servicio de vigilancia. Cada guardia colocado en una esquina puede vigilar como máximo una distancia de 100 m en cada una de las cuatro direcciones. Busca el menor número de vigilantes necesarios para vigilar una ciudad con forma de cuadrado y *n* calles en cada lado.

- Experimenta con casos particulares, con cuidado para elegir la forma óptima de colocar los vigilantes.
- Para generalizar diferencia *n* par de *n* impar.

COMIENZA CON …

Problema 2

"La tira de papel"

Con una tira de papel, pliégala por la mitad y luego por la mitad otra vez, doblando siempre en el mismo sentido. Si la desdoblas, observas que hay tres marcas una "hacia arriba" y dos "hacia abajo".

Si la doblas *n* veces y luego la desdoblas completamente. ¿Cuántas marcas tendrás en total? ¿Cuántas de ellas son "hacia arriba" y cuántas "hacia abajo"?

¿Cómo es la marca, hacia arriba o hacia abajo, que ocupa el lugar 23 cuando se realizan 7 dobleces?

- Experimenta con casos particulares, hasta encontrar la regla que determina el orden en el que aparecen las distintas marcas.

COMIENZA CON …

Problema 3

"El hotel de los líos"

Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

- Experimenta con al menos 25 puertas para establecer una hipótesis.
- Demuestra que la hipótesis es cierta utilizando la paridad del número de divisores.

COMIENZA CON …

Problema 4

"Cien cuadrados".

¿Cuál es el menor número de líneas rectas que tenemos que dibujar para tener exactamente 100 cuadrados?

- Experimenta de forma sistemática para determinar el número de cuadrados que hay en una malla cuadrada en casos particulares.
- Determina la solución con la estrategia de ensayo y error.

COMIENZA CON …

Problema 5

"Recorrido a cinco bandas"

En un billar de 160 cm de ancho está colocada una bola en la parte inferior derecha a 60 cm de cada borde. Esa bola es lanzada sin efecto hacia la parte superior con un ángulo de 45º, después de haber tocado 5 bandas la bola vuelve a su punto de partida ¿Cuál es el largo del billar?

- Representa los rebotes de la bola en una cuadrícula.
- Suponiendo el problema resuelto, busca simetrías.
- Asocia cada recorrido entre bandas con el lado del cuadrado del que es diagonal.

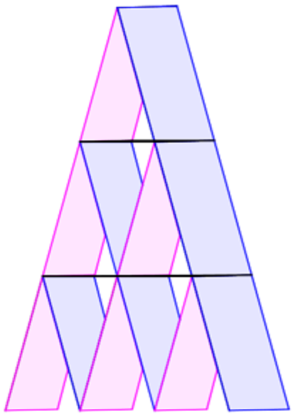
COMIENZA CON …

Problema 6

"El castillo de cartas"

Este castillo de cartas tiene tres pisos, para realizarlo se han necesitado 15 cartas. ¿Cuántas cartas se necesitan para hacer un castillo similar con 10 pisos?

Encuentra el número de cartas necesarias para construir un castillo con *n* pisos.



- Experimenta de forma sistemática para encontrar la ley de recurrencia, una sugerencia es desglosar el número de cartas del primer piso del resto, otra determinar el número de cartas necesarias para pasar de un castillo a otro con un piso más..

PROFUNDIZA CON …

Problema 1

"El espía"

Un espía sabe que su clave de identificación es un número de 9 cifras, todas distintas, sin el cero. Si leemos de izquierda a derecha, la primera cifra de la clave es divisible por 1; el número formado por las dos primeras cifras, por 2; el formado por las tres primeras cifras, por 3, y así sucesivamente. ¿Cuál es su clave?

- Utiliza las reglas de divisibilidad para determinar los lugares fijos o posibles que pueden ocupar los distintos números.
- Si no conoces la regla de divisibilidad del 7 puedes probar las 14 últimas posibles soluciones.

PROFUNDIZA CON …

Problema 2

“Partiendo conjuntos”

Para qué números naturales *n* se puede dividir el conjunto $Sn = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en dos conjuntos disjuntos cuyos elementos sumen lo mismo?

- Experimenta con casos particulares.
- La paridad de la suma $1 + 2 + \ldots + n$, establece una condición necesaria para dos tipos de números.
- Demuestra que esta condición es también suficiente para los dos tipos de números.

PROFUNDIZA CON …

Problema 3

¡Vaya corte!

En un papel cuadriculado trazamos un rectángulo que tenga un número entero de cuadraditos en cada lado. Una diagonal del rectángulo puede cortar o no a los cuadrados por los que atraviesa y se considera que no corta si sólo contiene a un vértice. Se trata de encontrar una regla para poder calcular el número de cuadrados a los que corta la diagonal del rectángulo.

- Experimenta con casos particulares.
- Haz el problema más fácil considerando que los números de cuadrados en cada lado del rectángulo son primos entre sí.
- Determina la solución en el caso general.

PROFUNDIZA CON ...

Problema 4

"Una mesa de billar"

Se tiene una mesa rectangular en la que las dimensiones son números enteros a y b, por lo que se puede suponer dividida en cuadrados. Se lanza una bola desde uno de los vértices siguiendo las diagonales de los cuadrados y que rebota siguiendo una reflexión perfectamente elástica. ¿A qué esquina llegará? ¿Cuantos rebotes habrá hecho?

- Experimenta con casos particulares.
- Representa los rebotes de la bola como la diagonal de un cuadrado.
- Haz el problema más fácil, busca analogías con “Valla corte”.
- Determina la solución en el caso general.

PROFUNDIZA CON …

Problema 5

"Una bola pesa menos "

Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cual es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola? ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13?

Generaliza el problema a cualquier número de bolas.

- Divide las bolas en tres montones que serán iguales si el número de bolas es una potencia de 3.
- Determina la solución general en función de dos potencias consecutivas de 3 entre las que está el número de bolas.
- Expresa la solución utilizando logaritmos en base 3.

PROFUNDIZA CON …

Problema 6

"Cocoteros."

Cinco personas y un mono naufragan en una isla desierta. Pasan todo día recogiendo cocos. Por la noche una de ellas se despierta y decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones iguales y como sobra un coco se lo da al mono después oculta su parte. Más tarde, una segunda se despierta y hace lo mismo, divide los cocos en cinco montones, también sobra un coco que se lo da al mono y oculta su parte. Las otras tres hacen lo mismo que las dos primeras. Por la mañana agrupan los cocos en cinco montones iguales y esta vez no sobra ningún coco. ¿Cuántos cocos habían recogido inicialmente?

- Haz el problema más fácil considerando tres personas en vez de cinco.
- Determina una solución en el caso general utilizando congruencias.

PROFUNDIZA CON …

Problema 7

"Triángulo dentro de un triángulo"

En un triángulo cualquiera *ABC*, determina los 6 puntos que dividen cada lado en tres partes iguales y dibuja los tres segmentos que unen cada vértice con el punto del lado opuesto, determinado anteriormente, más próximo al vértice contiguo. ¿Cuál es el área del triángulo *A'B'C'* cuyos vértices son los puntos de intersección de estos tres segmentos?

- Demuestra previamente que los tres segmentos dibujados quedan divididos en tres partes proporcionales a 3, 3, 1 .
- Utiliza este resultado para demostrar que el área del triángulo *ABC* es siete veces la del triángulo *A'B'C'*.
- Generaliza el problema si cada lado del triángulo ABC se divide en *n* partes.

PROFUNDIZA CON …

Problema 8

"Cuadrar un triángulo equilátero"

¿Cómo se puede dividir con regla y compás un triángulo equilátero en cuatro partes que formen también un cuadrado?

- Las cuatro partes son diferentes, tres cuadriláteros y un triángulo.
- Uno de los cuadriláteros se puede dividir en dos triángulos uno de los cuales es equilátero de razón de semejanza con el inicial 1/2.
- Dudeney encontró esta manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro partes que forman un cuadrado.

ÁLGEBRA CON ...

Problema 1

"Las perlas del rajá."

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: la hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante, la tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

- El problema es un ejercicio si se domina el método algebraico ya que se resuelve planteando una ecuación pero es más fácil llegar a la solución empezando por el final.

ÁLGEBRA CON …

Problema 2

"Curiosas ecuaciones"

Si *a*, *b*, *c* son tres números impares, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no puede tener soluciones racionales?

- Utiliza el método de reducción al absurdo suponiendo que existe una solución racional.
- Comprueba que esta solución es imposible analizando la paridad del numerador y denominador de la supuesta solución que es imposible, también por paridad, que verifique la ecuación.

NÚMEROS CON …

Problema 1

"¿Cuántos ceros?"

¿En cuántos ceros termina el producto de los 1.000 primeros números naturales?

- Para tener un cero se necesita un 2 y un 5, como el dos aparece muchas veces en el producto, es suficiente contar los cincos, es decir los múltiplos de cinco y los múltiplos de sus potencias menores que 1000.

NÚMEROS CON …

Problema 2

“Suma de cuadrados”

- Si n es un número natural tal que $2n + 1$ es un cuadrado perfecto entonces $n + 1$ es la suma de dos cuadrados perfectos.
- Si n es un número natural tal que $3n + 1$ es un cuadrado perfecto entonces $n + 1$ es la suma de tres cuadrados perfectos.
- Si n es un número natural tal que $4n + 1$ es un cuadrado perfecto entonces $n + 1$ es la suma de cuatro cuadrados perfectos.
- ¿Serán ciertas estas afirmaciones?

- Utilizando una notación adecuada para expresar los múltiplos de un número y dominando el método algebraico el problema es un ejercicio.

NÚMEROS CON …

Problema 3

"Uno de números"

¿Cómo podemos colocar los números 1, -1 y 0 en un cuadrado 10×10 de forma que las 20 sumas de las 10 filas y de las 10 columnas sean distintas?

- Una solución resulta al conseguir que las 20 sumas diferentes sean los elementos del conjunto {-9, -8, … 9, 10}.
- Si las sumas 1, 3, 5, 7 y 9 de impares positivos son sumas de columnas sus opuestos son sumas de filas.
- La solución no es única.

NÚMEROS CON …

Problema 4

"Las bolas defectuosas"

A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquenla" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada?

Un mes más tarde llega otro mensaje: "Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

- Elije un número diferente de bolas de cada caja.
- Utiliza el sistema de numeración binario.

NÚMEROS CON ...

Problema 5

"Exponentes irracionales"

¿Existen números irracionales *a* y *b* tales que a^b es racional?

- Piensa en el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ¿Es racional o irracional?, el análisis de ambas hipótesis resuelve el problema.
- El número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional aplicando el Teorema de Gelfond-Schneider (7º problema de Hilbert): Si *a* y *b* son algebraicos $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y *b* no es racional, entonces a^b es trascendente (por tanto irracional)
- Utiliza este teorema para determinar si el número e^{π} es algebraico o trascendente? (recuerda que el número complejo *i* es algebraico)

Problema 1

“Perímetro mínimo”

De todos los triángulos que tienen la misma base y la misma área, determina el que tiene perímetro mínimo.

- Dibuja la base del triángulo y una recta paralela a este segmento cuya distancia sea la altura del triángulo que está determinada con el área y la base.
- Entre los distintos triángulos posibles la solución es fácil de construir y demostrar que tiene perímetro mínimo utilizando la simetría.

GEOMETRÍA CON …

Problema 2

“El camino más corto”

Entre dos ciudades que están separadas por un río se quiere construir una carretera con un puente para cruzar el río que sea perpendicular a su cauce. Suponiendo que los trayectos entre cada una de las ciudades y el puente se pueden realizar en línea recta. ¿Dónde habrá que colocar el puente para que la longitud de la carretera sea mínima?

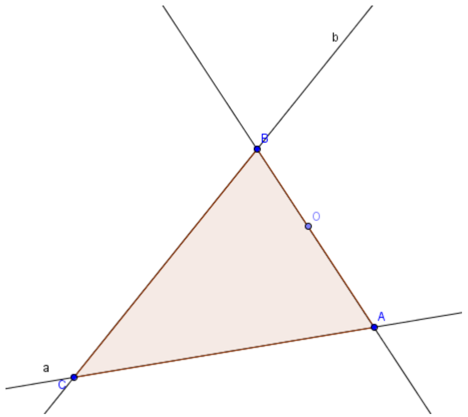
- Representa gráficamente la situación y utiliza la simetría para encontrar la solución.

GEOMETRÍA CON …

Problema 3

"Área mínima"

Dadas dos rectas *a* y *b* que se cortan en un punto *C* y forman un ángulo en el que hay un punto interior *O*. Determina la recta que pasa por O, corta a la recta *a* un punto *A* y a la recta *b* un punto *B* tal que el área del triángulo *ABC* sea mínima.



- El punto *B* es la intersección de la recta *b* y la recta *a′* simétrica de la recta *a* respecto al punto *O*.
- El punto *A* es la intersección entre la recta *a* y la que pasa por *O* y *B*.
- Demuestra que el área del triángulo *ABC* es mínima.

María Molero y Adela Salvador

GEOMETRÍA CON …

Problema 4

"Ángulos rectos"

¿Cual es el máximo número de ángulos rectos que puede haber en un polígono convexo de *n* lados?

- Experimenta con polígonos con 5 lados o más.
- Determina la suma de los ángulos exteriores de un polígono formados por un lado y la prolongación del anterior.

GEOMETRÍA CON …

Problema 5

"El radio de la tierra"

El radio de la tierra es aproximadamente de 6.240 Km. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuanto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15m? ¿Mas de 15m y menos de 15Km? ¿Mas de 15Km?

- Hazlo mas fácil. Usa un cuadrado.
- Toma luego un polígono de más lados

GEOMETRÍA CON ...

Problema 6

"¿Dónde está el error?"

¿Cómo es posible que un cuadrado de 8 cm de lado tenga la misma área que un rectángulo de lados 13 cm y 5 cm?

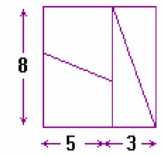


Figura 1

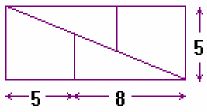


Figura 2

- Utiliza el Teorema de Tales (o la Trigonometría) para comparar los triángulos que parecen iguales de la figura 1 y de la figura 2.
- Compara también los trapecios.
- Dibuja las figuras detectando los errores.

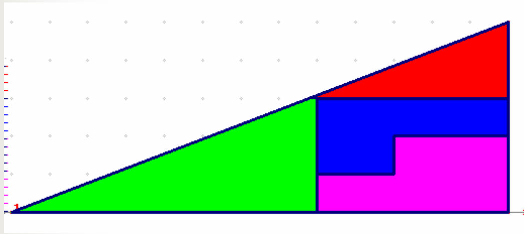
GEOMETRÍA CON …

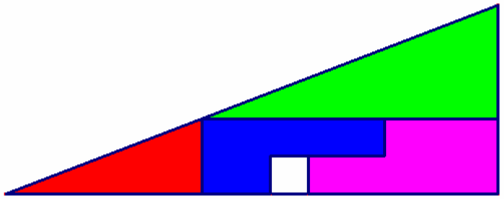
Problema 7

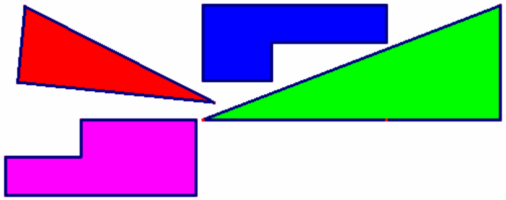
"El triángulo mágico"

¿Por qué en la segunda figura sobra un cuadrado blanco?

Piezas







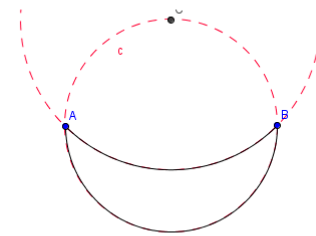
- Utiliza el Teorema de Tales (o la Trigonometría) para comparar los triángulos que parecen iguales de las dos figuras.
- Calcula las áreas de las cuatro piezas y las de las dos figuras.
- Dibuja las figuras dónde se detecte el error.

GEOMETRÍA CON …

Problema 8

“Lúnulas”

- Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia. Intentando cuadrar el círculo Hipócrates de Quios (Siglo V a C) logró cuadrar tres tipos de lúnulas. Intenta cuadrar ésta.



La cuadratura del círculo fue uno de los problemas de la antigüedad que desde la Grecia clásica estuvo sin resolver durante más de veinte siglos. Cuadrar un círculo supone dibujar con regla y compás un cuadrado cuya área coincida con la del círculo. El problema estuvo abierto hasta que Lindeman (1852-1939) demostró que π es un número trascendente y por lo tanto la construcción no se puede realizar, es decir, el problema no tiene solución.

- Dibuja el triángulo ABC y calcula áreas.

GEOMETRÍA CON …

Problema 9

“Cuadrar un triángulo”

- Busca un método para cuadrar cualquier triángulo.

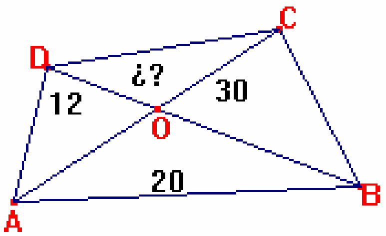
- Para cuadrar cualquier triángulo traza la circunferencia que pasa por un punto del triángulo *ABC*, por ejemplo *C*, y su diámetro es la suma de la longitud de la altura que parte de *C* y la mitad de la longitud de la base *AB*.
- Utiliza el teorema de la altura en el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia determinado por el punto C y el punto de intersección de la circunferencia con el lado *AB*.

GEOMETRÍA CON ...

Problema 10

“El cuadrilátero”

Un cuadrilátero se ha dividido en cuatro triángulos siguiendo las diagonales, Se conoce el área de tres que es el número indicado en la figura expresado en cm^2. ¿Cuál es el área del cuarto triángulo?



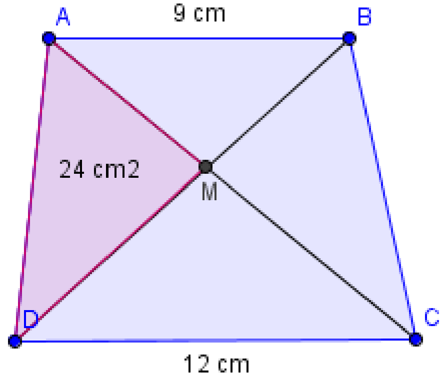
- Utiliza que si dos triángulos tienen la misma altura sus áreas son proporcionales a sus bases.

GEOMETRÍA CON …

Problema 11

"El trapecio"

En un trapecio *ABCD*, los lados paralelos *AB* y *DC* miden 9 cm y 12 cm respectivamente. Si *M* es el punto de corte de las diagonales *AC* y *DB* y el área del triángulo *AMD* es 24 cm^2 ¿Cuál es el área del trapecio?

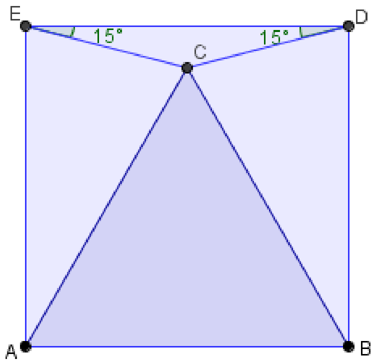


- Utiliza la relación entre los lados y las áreas de triángulos semejantes
- Aplica la relación de proporcionalidad entre las áreas y las bases de los triángulos que tienen la misma altura.

GEOMETRÍA CON …
Problema 12

"Triángulo en cuadrado"

En el cuadrado *ABDE* se considera un punto *C* tal como indica la figura ¿Es *ABC* un triángulo equilátero?



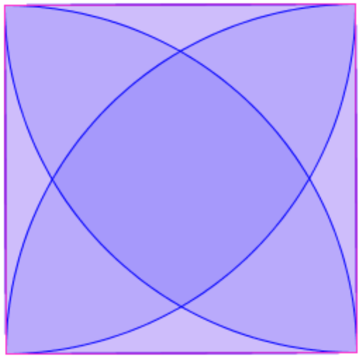
- Supuesto el problema resuelto, es decir, el triángulo *ABC* es equilátero, se trata de demostrar que los ángulos, datos de la figura, miden 15°.
- Por simetría basta con demostrar que uno de ellos mide 15° que es evidente a partir de que *BDC* es isósceles.

GEOMETRÍA CON …

Problema 13

"La flor"

Calcula el área de la flor de cuatro pétalos de la figura inscrita en un cuadrado de lado *a*.



- Por simetría basta con calcular el área de una de las cuatro partes del cuadrado iguales que no pertenecen a la flor.
- Para calcular esta área y por analogía con el problema "triángulo en cuadrado" hay que restar al área del cuadrado la del triángulo equilátero y el área de los dos sectores iguales de radio a y ángulo 30º.

GEOMETRÍA CON …

Problema 14

“El perímetro del triángulo”

Construir un triángulo, dados un ángulo, la altura correspondiente al ángulo dado y el perímetro del triángulo.

- Supuesto el problema resuelto, calculamos el ángulo correspondiente al ángulo dado de un triángulo con la misma altura y base el perímetro, que está formado por el triángulo solución de base, *a*, orlado por dos triángulos isósceles de lados iguales *b* y *c* respectivamente.
- La construcción de este triángulo de base el perímetro determina la solución.

PROBABILIDAD CON …

Problema 1

"Las tres ruletas"

Tenemos tres ruletas divididas en tres sectores. Los números que aparecen en los sectores de la ruleta A son 6, 3, 3 y 3, los de la ruleta B son 5, 5, 2 y 2 y los de la ruleta C 4, 4, 4 y 1. El primer jugador escoge una ruleta, el otro una de las dos que quedan. Gana el jugador que obtenga mayor puntuación. Si eres el primer jugador ¿Qué ruleta tienes que elegir? Si eres el segundo jugador ¿Qué ruleta tienes que elegir, teniendo en cuenta la ruleta que ha elegido el primero? ¿Es un juego equitativo?

- Realiza un diagrama de árbol para calcular probabilidades.
- Analiza el ganador en cada una de las tres posibilidades de jugar con dos de las tres ruletas.

PROBABILIDAD CON ...

Problema 2

"El encuentro"

Dos personas que no se conocen conciertan por Internet una cita en un lugar determinado entre las 11 horas y las 12 horas con la siguiente condición, la primera que llega espera a la otra 15 minutos y después se marcha. Si cada una llega al azar entre las 11 horas y las 12 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

- Representa la situación en un cuadrado en el que cada una de las coordenadas de un punto indica el tiempo entre las 11 y las 12 horas en el que puede llegar cada persona.
- Calcula el área de la región en la que se encuentran.

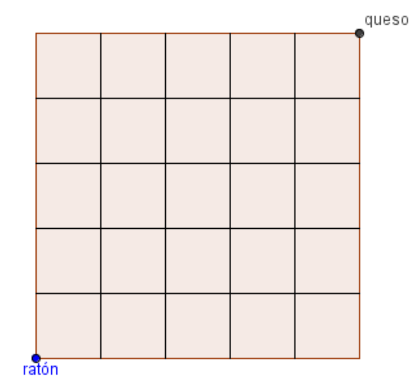
COMBINATORIA CON ...

Problema 1

“Caminos en una cuadrícula”

Un ratón entra en un laberinto que es una cuadrícula 5 x 5 en busca de un trozo de queso que se encuentra en la diagonal opuesta del cuadrado, si el ratón sólo puede avanzar se pretende calcular el número de caminos posibles en los que obtiene el queso.

Calcula el número de caminos posibles en una cuadrícula con *m* filas y *n* columnas.



- Se trata de ir contando los caminos de forma sistemática en cada vértice de la cuadrícula
- Al identificar los números que aparecen como los números combinatorios, es fácil generalizar a una cuadrícula n x m.

COMBINATORIA CON …

Problema 2

“Los saludos”

Ana y su marido invitan a cuatro matrimonios a una cena en su casa, al final de la cena, Ana pregunta a sus comensales (incluyendo a su marido) a cuántas personas ha saludado cada uno, estrechándoles la mano, y se sorprende cuando obtiene 9 respuestas diferentes, es evidente que nadie ha estrechado la mano de su pareja, y Ana se pregunta ¿A cuántas personas habrá estrechado la mano su marido?

- Observa que las nueve respuestas posibles son 0, 1, …, y 8
- Determina la respuesta de la pareja de quien ha respondido 8.
- Elimina esta pareja y entre las demás determina la respuesta de la pareja de quien ha dado como respuesta 7. Sigue descartando parejas hasta obtener la solución.

COMBINATORIA CON …

Problema 3

“Regiones”

Si *n* rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos que son todos distintos. Se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones?

- Experimenta con casos particulares.
- Establece una conjetura.
- Demuestra la hipótesis con el principio de inducción.
- Generaliza el problema.

LÓGICA CON …

Problema 1

"Dos cada uno"

Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos profesiones. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pintor y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:

1: El chofer se burló del músico porque tenía caspa

2: El músico y el jardinero pescan con Juan

3: El pintor compró al tabernero vino

4: El chofer cortejaba a la hermana del pintor

5: Jaime debía 5 dólares al jardinero

6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

- Realiza una tabla para eliminar posibilidades en función de la información.

LÓGICA CON …

Problema 2

"Trece bolas y tres pesadas"

Tenemos trece bolas aparentemente iguales, pero una de ellas tiene un peso ligeramente distinto. Usando una balanza de platillos, y con solo tres pesadas, encontrar la bola que pesa diferente.

- Se dividen las bolas en tres montones de cuatro bolas cada uno y se deja una bola.
- En la primera pesada se comparan dos montones.
- Un estudio exhaustivo de los posibles casos permite determinar en 3 pesadas la bola que pesa diferente.

Problema 1

"Alguno más cerca"

Tenemos un triángulo equilátero de lado 1. Si se eligen cinco puntos en su interior, prueba que hay como mínimo dos cuya distancia es menor que 1/2.

- Divide el triángulo equilátero en 4 triángulos equiláteros iguales de lado 1/2 y aplica el principio del palomar.
- Un acertijo que se resuelve con este mismo principio es: ¿Existen al menos 4 madrileños con el mismo número de cabellos en la cabeza?

Problema 2

“Los dos colores”

Dada una partición del plano con *n* rectas demuestra que puede ser coloreado con dos colores distintos de modo que dos regiones que tienen una frontera común tengan colores diferentes.

- Demostración por inducción sobre *n*, el número de rectas.

TÉCNICAS MATEMÁTICAS CON …

Problema 3

- **"Suma de cuadrados"**
  Demuestra que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- **"Suma de cubos"**
  Demuestra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

- Conociendo el principio de inducción las dos cuestiones propuestas son ejercicios de aplicación.

Problema 4

- **“Infinitos primos”**

  Demuestra que el conjunto de los números primos es infinito.

- **“Irracionales”**

  Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional

- Conociendo el método de reducción al absurdo las dos cuestiones propuestas son ejercicios de aplicación.

ACERTIJOS CON ...

- **1. "El lobo la cabra y el repollo":**

  Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?.

- Típico ejemplo en el que hay que dar un rodeo para obtener la solución, después de llegar a la otra orilla deben volver a la inicial.

- Una estrategia similar se utiliza para cruzar el río tres personas y tres lobos y no se pueden dejar solos más lobos que personas.

ACERTIJOS CON …

- **2. "Dos botones en el ascensor"**

  El único ascensor de un edificio de 100 pisos solo tiene dos botones que funcionan, uno que sube 7 pisos y otro que baja 9. Si estamos en el bajo, ¿cómo podemos llegar al piso 71?

- Una vez que se llega al piso 70 se trata de encontrar un múltiplo de 7, menor que 30, superior en una unidad a un múltiplo de nueve. También se llega a la solución experimentando con la técnica de ensayo y error.

- La estrategia que permite resolver este acertijo es la misma que resuelve el acertijo anterior.
- Otra versión similar es: ¿Cómo repartir equitativamente 8 litros en dos con tres jarras de 8, 5 y 3 litros?

ACERTIJOS CON ...

- **3. Los tres hijos**
  Una matemática se encuentra un día con un amigo que le pregunta -¿Cuántos hijos tienes? -Tres, dice ella -¿Qué edades tienen? Pregunta el amigo -El producto de sus edades es 36 y la suma es el número de la casa de enfrente, dice ella. El amigo después de ver el número le dice -Para saber las edades de tus hijos me falta un dato -Tienes razón, dice ella, la mayor toca el piano. ¿Cuáles son las edades de los hijos de la matemática?

- La solución se obtiene de realizar un estudio exhaustivo de los números cuyo producto es 36.
- Hay enunciados similares con menos bloqueos que este acertijo:
  - Un almacén tiene su base cuadrada y su volumen es de 36 metros cúbicos. ¿Cuáles son sus dimensiones?
  - Un bloque de cemento de forma de ortoedro tiene un volumen de 36 decímetros cúbicos ¿Cuáles son sus dimensiones?

ACERTIJOS CON ...

- **4. El prisionero y los dos guardianes.**

  Un prisionero esta encerrado en una celda con dos puertas: una conduce a la salvación, la otra a la muerte, y cada una de ellas esta vigilada por un guardián. El prisionero sabe que uno de los guardianes siempre dice la verdad, y el otro siempre miente. Para elegir la puerta por la que pasará, sólo puede hacer una pregunta a uno solo de los guardianes. ¿Como puede salvarse?

- Una posible solución es plantear la pregunta sobre la opinión del compañero para que ambos guardianes señalen la misma puerta.

- La lógica es una fuente inagotable de paradojas. Es muy fácil crear acertijos con frases autoalusivas (paradoja del mentiroso), recuerdas el barbero que afeitaba a todos los que no se afeitaban a sí mismos ¿Se afeitaba o no?

ACERTIJOS CON …

- **5. ¿De que color es el oso?**
  Un oso camina 10 kilómetros hacia el sur, 10 hacia el este (o el oeste), y 10 hacia el norte, volviendo al punto del que partió. ¿De que color es el oso?

- **6. Los seis palillos.**
  ¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

- 5: La solución resulta de observar que estamos en un polo.
- 4: Hay un suposición oculta que es construirlo en el plano, al pasar al espacio la solución es evidente.

ACERTIJOS CON ...

- **7. La mosca.**

  Dos trenes separados entre sí por una distancia de 120 Km, se dirigen uno hacia otro a una velocidad de 30 Km por hora. Una mosca vuela sin parar entre los dos trenes a una velocidad de 75 Km por hora, dando la vuelta cada vez que llega a uno de ellos. Cuando los trenes colisionan ¿Qué distancia ha recorrido la mosca?

- **8. Las 8 damas.**

  Situar 8 damas en un tablero de ajedrez de forma que no haya dos de ellas que se amenacen.

- 7: En este acertijo puede aparecer un efecto túnel si intentamos calcular la distancia que recorre la mosca mediante una suma de recorridos. El bloqueo se supera si lo calculamos a partir del tiempo que ha estado volando la mosca.
- 8: La solución no es única.

ACERTIJOS CON ...

- **9. Nueve puntos.**
  Hay que unir nueve puntos, distribuidos en los vértices de una cuadrícula 2x2, por medio de cuatro segmentos rectilíneos consecutivos, sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces parte del mismo camino.

- **10. Agua, luz y gas.**
  En un vecindario hay tres casas y tres fuentes de agua, de luz y de gas. ¿Es posible conectar cada casa con cada fuente de suministro mediante líneas que no se crucen entre sí?

- 9: La suposición oculta de este acertijo consiste en dar por hecho que no nos podemos salir del cuadrado determinado por los puntos, cuando observamos que en ningún momento se nos impone esta condición, la solución es evidente.
- 10: Este acertijo puede bloquearnos (efecto túnel) hasta considerar que no tiene solución. Es un resultado conocido de teoría de grafos. Se puede demostrar con el teorema de Euler.

ACERTIJOS CON ...

- **11. La moneda perdida.**
  Tres amigos comparten un comida que les cuesta 30 €. Cuando van a pagar piden un descuento, y el dueño les rebaja 5 €, tomando cada uno un euro y dejando 2 € de propina. Mas tarde hacen cuentas: cada uno ha pagado 9 €, así que han gastado 27 €, que con los 2 € de la propina hacen 29 €. ¿Dónde está el euro que falta?

- **12. Las camisas.**
  Todas las camisas son blancas, menos dos; todas son azules, menos dos; todas son rosadas, menos dos. ¿Cuantas camisas hay de cada color?

- 11: El bloqueo de este acertijo está en el enunciado confundiendo con la rebaja, lo que paga cada uno con lo que cuesta la comida.
- 12: En este acertijo el enunciado parece indicar que hay muchas camisas cuando sólo hay 3, una de cada color.

ACERTIJOS CON …

- **13. Velocidad media.**
  Una persona camina al ritmo de 2 km/h al subir la cuesta, y de 6 km/h al bajarla ¿Cual será la velocidad media para el recorrido total?

- **14. Los porcentajes.**
  Un vendedor aumenta los precios un 14 % para luego cuando llega el cliente hacerle una rebaja del 14 % ¿Cómo han cambiado los precios?

- 13: Para simplificar se puede suponer que el recorrido son 12 km, sube en 3 horas y baja en 1 hora.
- 14: Los clientes estarán muy contentos ya que los precios han bajado un 1,96 %.
- Estos acertijos son ejercicios para un buen alumno de Secundaria.

ACERTIJOS CON ...

- **15. Cuadrado mágico.**
  En un tablero 3x3 colocar los números del 1 al 9 de forma que cada fila, columna y diagonal sume 15? ¿Cuántas soluciones hay?

- **16. Las jarras**
  Tenemos dos jarras iguales, una con agua y la otra con la misma cantidad de leche. Cogemos un vaso de la jarra con agua y lo echamos en la de leche, a continuación cogemos un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echamos en la de agua. ¿Habrá más leche en la jarra de agua o agua en la jarra de leche?

- 15: Se coloca el número 5 en el lugar central y se obtiene fácilmente una solución. Busca por simetría las 8 soluciones.
- 16: La solución es evidente considerando la cantidad de leche y de agua que hay antes y después del trasvase.

ACERTIJOS CON …

- **17.Las cuerdas.**

  Estoy en el desierto haciendo una paella y no tengo reloj, necesito cronometrar un cuarto de hora después de echar el arroz y sólo dispongo de dos cuerdas y cerillas, sé que cada cuerda tarda una hora en quemarse, pero no me vale cortarlas porque el proceso de arder no es uniforme ¿Qué puedo hacer?

  18. Camellos y dromedarios.

  Mis 7 camellos beben 7 bombonas de agua cada 7 días y mis 5 dromedarios beben 5 bombonas de agua cada 5 días ¿Quién bebe más un camello o un dromedario?

- 17: Empieza quemando una por los dos extremos y la otra por uno.
- 18: ¿Cuánto bebe un camello y un dromedario al día?

JUEGOS CON …

Juego 1

“Llegar al cielo”

Dos jugadores/as A y B. A pretende hacer crecer su árbol hasta el "cielo"; mientras B trata de impedirlo.

Tira A una moneda. Si el resultado es cara se alarga una rama; si es cruz, se alarga dos ramas.

Tira B una moneda a continuación, una vez por cada rama existente. Si sale cara la rama sigue viva, si sale cruz, detiene el crecimiento de la rama.

De nuevo juega A y así sucesivamente. Si el jugador B llega a detener el crecimiento de todas las ramas antes de que el árbol alcance el cielo, ha ganado. Si no, el ganador es el jugador A.

JUEGOS CON …

Juego 2

"El salto de la rana"

Se necesitan fichas de dos colores, blancas y negras, por ejemplo. Se colocan las fichas blancas a la izquierda de un espacio libre y a la derecha las fichas negras: ....BBB NNN...

El objetivo del juego es, con el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas blancas con las negras.

Las reglas son las siguientes:

1.- Las fichas blancas sólo pueden moverse hacia la derecha y las negras sólo hacia la izquierda.

2.- Una ficha puede moverse a una casilla adyacente si está vacía.

3.- Una ficha también puede saltar, sobre otra de distinto color, a una casilla vacía, en el sentido permitido.

Cada movimiento consiste en mover una sola ficha

.

JUEGOS CON …

Juego 3

"El juego del siete"

Es un juego para dos jugadores. El primero dice un 1 o un 2. El segundo le suma un 1 o un 2 al número que dijo su compañero y dice el resultado. Así sucesivamente, por turnos. El que diga siete gana. ¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo tiene que jugar para ganar siempre?

- Experimenta, juega.
- Supón el problema resuelto
- Establece una conjetura
- Busca analogías con El juego del Nim
- Generaliza: El juego del 31

JUEGOS CON …

Juego 4

“Las torres de Hanoi”

Se tienen tres varillas verticales y *n* discos, todos distintos, que están apilados de mayor a menor radio en una de las varillas. El juego consiste en pasar todos los discos de esa varilla a una de las otras con las siguientes reglas:

- Sólo se puede mover un disco cada vez.
- Un disco no puede colocarse sobre uno más pequeño que él.
- Sólo se puede desplazar el disco que se encuentre arriba.

¿Cuántos movimientos hay que realizar, como mínimo, para desplazar n discos?

En un juego con 8 discos elabora una estrategia para desplazarlos con el mínimo número de movimientos.

Este juego fue creado por el matemático francés Éduard Lucas que inventó una supuesta leyenda como enunciado.

JUEGOS CON …

Juego 5

“Llegar a cien”

Cada jugador/a elige por turnos un número entre 1 y 10 y lo suma a los números elegidos anteriormente. Gana el primer jugador/a que consigue sumar exactamente cien. ¿Puedes hallar alguna estrategia ganadora?

INVESTIGA CON …

1."Tramas de puntos"

En una trama de puntos tres por tres

¿Cuántos triángulos pueden formarse con los vértices en la trama?

- ¿Y si la trama de puntos es cuatro por cuatro?
- ¿Cuántos cuadriláteros?
- ¿Y pentágonos? Generaliza, busca nuevos retos

En una trama de puntos cuatro por cuatro ¿Cual es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama?

- Generaliza a otras tramas

INVESTIGA CON …

2. “Pentaminos”

Dibuja todos los pentaminos posibles. ¿Cuantos hay?

- Utiliza todos los pentaminos para formar un rectángulo de 12x5
- Divide la cuadrícula de 3x5 en tres pentaminos con los que se pueda construir tres cajas sin tapa
- Dibuja todos los hexaminos y determina aquellos con los que se pueda construir un cubo.

INVESTIGA CON …

3. " Tomografías"

Dibuja las distintas series de tomografías que se obtienen en un cuerpo geométrico.

- Comienza con un cilindro ¿Cuántas diferentes obtienes?
- Dibuja las tomografías de un cubo.
- Investiga con otros cuerpos geométricos.

4. "Divide en cuatro"

Estudia las diferentes maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

- Investiga con otros polígonos.
- Construye figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividirla en cuatro partes iguales.

INVESTIGA CON …

5. “Frisos”

¿Cuántos tipos diferentes de frisos hay?

- Investiga distintas formas de rellenar el plano con polígonos
- ¿Qué es un friso? ¿Cómo diseñarlo? ¿Cómo se generan los frisos?
- Determina los requisitos del motivo mínimo.
- Clasifica los frisos.

6. “Mosaicos semirregulares”

Busca mosaicos semirregulares. ¿Cuántos hay y cuáles son?

- ¿Qué características tienen los mosaicos regulares?
- ¿Qué condición deben cumplir los ángulos de un polígono regular para poder formar con ellos un mosaico regular?
- ¿Cómo se definen los mosaicos semirregulares?
- ¿Qué condición deben cumplir los ángulos de los polígonos regulares para poder formar con ellos un mosaico semirregular?

INVESTIGA CON ...

7. “Diamantes y deltaedros”

En una trama de triángulos dibuja todos los diamantes-dos posibles, todos los diamantes-tres posibles y todos los diamantes-cuatro posibles. ¿Con cuáles puedo construir un cuerpo en el espacio? A estos cuerpos de caras triangulares vamos a llamarlos **Deltaedros**.

Investiga y construye los deltaedros posibles. ¿Cuántos hay? (Se puede restringir la búsqueda a los convexos)

- ¿Cuáles son también poliedros regulares? ¿Qué orden tienen sus vértices? ¿Hay deltaedros con menos de cuatro caras? ¿Hay deltaedros convexos con un número impar de caras? ¿Hay deltaedros con más de veinte caras?
- Haz una tabla con los resultados obtenidos: Nº caras, Nº aristas, Nº vértices de orden tres, de orden cuatro, de orden cinco, descripción de los posibles deltaedros: bipirámides, esquinas, bandas...